ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Mécanique des milieux continus

Tome I
Concepts généraux

Jean Salençon

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Ce logo a pour objet d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, tout particulièrement dans le domaine universitaire, le développement massif du « photocopillage ».
Cette pratique qui s'est généralisée, notamment dans les établissements d'enseignement, provoque une baisse brutale des achats de livres, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que la production et la vente sans autorisation, ainsi que le recel, sont passibles de poursuites.
Les demandes d'autorisation de photocopier doivent être adressées à l'éditeur ou au Centre français d'exploitation du droit de copie :
20, rue des Grands-Augustins , 75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70.

Du même auteur

Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols © Eyrolles - 1974 - 178 pages

Application of the theory of plasticity in soil mechanics
© John Wiley and Sons Ltd - 1977 - 158 pages - ISBN 0-47174984-2

Viscoélasticité - © Presses de l'École nationale des ponts et chaussées983 - 92 pages - ISBN 2-85978-051-3

Calcul à la rupture et analyse limite - © Presses de l'École nationale des ponts et chaussées
1983 - 366 pages - ISBN 2-85978-059-9

Élastoplasticité - (B. Halphen et J. Salençon)
© Presses de l'École nationale des ponts et chaussées - 1987 - 448 pages - ISBN 2-85978-094-7

Mécanique des milieux continus - © Ellipses - 1988
Tome 1 - Concepts généraux - 270 pages - ISBN 2-7298-8854-3
Tome 2 - Élasticité - Milieux curvilignes - 316 pages - ISBN 2-7298-8863-2

Mécanique du continu - © Ellipses - 1995
Tome 1 - Concepts généraux - 352 pages - ISBN 2-7298-4551-8
Tome 2 - Thermoélasticité - 286 pages - ISBN 2-7298-4565-8
Tome 3 - Milieux curvilignes - 192 pages - ISBN 2-7298-5527-0

Mécanique des milieux continus © Éditions de l'École polytechnique
Tome 1 - Concepts généraux - 2005 - 360 pages - ISBN 978-2-7302-1245-8
Tome 2 - Thermoélasticité - 2007 - 314 pages - ISBN 978-2-7302-1419-3
Tome 3 - Milieux curvilignes - 2016 - 162 pages - ISBN 978-2-7302-1644-9

Handbook of Continuum Mechanics © Springer 2001 - 804 pages - ISBN 3-540-41443-6

de l'Élasto-plasticité au Calcul à la rupture © Éditions de l'École polytechnique
2002 - 262 pages - ISBN 978-2-7302-0915-1

Viscoélasticité pour le calcul des structures © Éditions de l'École polytechnique et Presses de l'École nationale des ponts et chaussées 2009 - 158 pages - ISBN 978-2-7302-1557-2

Yield Design © ISTE – Wiley (London, UK; Hoboken, NJ), 2013 - 240 pages - ISBN 978-1-84821-540-5

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

© Éditions de l'École polytechnique - Mai 2016
91128 Palaiseau Cedex

Mécanique des milieux continus

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Tome I. Concepts généraux

Avant-propos

Chapitre I. *Le milieu continu : une modélisation*

Chapitre II. *Étude des déformations du milieu continu*

Chapitre III. *Cinématique du milieu continu*

Chapitre IV. *Les puissances virtuelles et la modélisation des efforts*

Chapitre V. *Modélisation des efforts pour le milieu continu*

Chapitre VI. *Étude des contraintes*

Annexe I. *Éléments de calcul tensoriel*

Annexe II. *Opérateurs différentiels : formules essentielles*

Bibliographie

Index alphabétique

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Tome II. Thermoélasticité

Chapitre VII. *Le comportement thermoélastique*

Chapitre VIII. *Évolutions et équilibres thermoélastiques*

Chapitre IX. *Quelques thèmes classiques en élasticité tridimensionnelle*

Chapitre X. *Approches variationnelles en thermoélasticité linéarisée*

Annexe III. *Éléments d'élasticité plane*

Bibliographie

Index alphabétique

Tome III. Milieux curvilignes

Chapitre XI. *Statique des milieux curvilignes*

Chapitre XII. *Structures curvilignes thermoélastiques*

Glossaire

Bibliographie

Index alphabétique

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Avant-propos

L'échelle à laquelle se place le « mécanicien » est, en général, qualifiée de macroscopique. Guidé par des applications qui descendent peu en dessous de l'échelle humaine, il a en effet recours à des modélisations qui, pour être pertinentes, sont construites à une échelle suffisamment proche de celle des applications concernées et donc supérieure souvent de plusieurs ordres de grandeur, à celle que l'on serait tenté d'attribuer au physicien. C'est aussi en référence à ces applications que le mécanicien, conscient des limites des modèles qu'il conçoit, si élégants soient-ils dans leur formulation mathématique, procède à leur validation expérimentale. Ceci n'est pas exclusif d'un intérêt constant manifesté par le mécanicien pour la connaissance intime des phénomènes qu'il modélise : recherche à laquelle se livre le physicien et qui permet par exemple d'expliquer divers aspects des comportements des matériaux.

On propose ici une présentation des concepts généraux de la mécanique des milieux continus, de la théorie de la thermoélasticité et des milieux curvilignes.

Le mode d'exposé est caractérisé par le choix de la ***Méthode des puissances virtuelles*** *pour la construction des modèles mécaniques et la modélisation des efforts. On peut reconnaître parmi les avantages de cette méthode le fait qu'elle met bien en évidence le rôle premier joué par la modélisation géométrique, qu'elle permet des présentations mécaniquement cohérentes, qu'elle a un caractère systématique, et que, en obligeant à une pensée rigoureuse et à l'explicitation des hypothèses, elle fait, malgré une apparence axiomatique, ressortir la part de l'induction et la nécessité de la validation. De plus, bien acquise, elle constitue pour le lecteur un outil fécond, utilisable pour ses recherches personnelles ultérieures. L'esprit de dualisation ainsi implanté est mis en œuvre dans le chapitre consacré aux méthodes variationnelles de résolution en thermoélasticité. L'étude des milieux curvilignes illustre le caractère systématique de la méthode des puissances virtuelles sur un cas où l'introduction d'une microstructure dont on suit l'orientation se révèle nécessaire pour aboutir à une modélisation pertinente.*

Cette approche par les puissances virtuelles, qui structure la démarche suivie, ne vise en aucune façon au dogmatisme. C'est ainsi par exemple qu'en ce qui concerne la modélisation des efforts les présentations « classiques » ne sont pas occultées par la méthode des puissances virtuelles, pas plus qu'ailleurs on n'a sacrifié l'exposé des méthodes de résolution directes des problèmes de thermoélasticité au profit des approches variationnelles malgré l'évidente prééminence actuelle de celles-ci. Enfin, la

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

présentation unifiée atteinte à travers la méthode des puissances virtuelles pour la modélisation des efforts intérieurs ne doit pas faire oublier, du point de vue physique, la variété des phénomènes d'interaction sous-jacents.

On a cherché, par la présentation matérielle du document, à faciliter autant que possible la tâche du lecteur. Une liste des mots-clés, un bref résumé synthétique et le tableau des principales notations nouvelles précèdent chaque chapitre ; celui-ci se termine par un récapitulatif des formules essentielles et par des exercices proposés, dont le niveau de difficulté est variable, et pour lesquels des éléments de réponse plus ou moins détaillés sont fournis. La typographie, par une hiérarchie des corps de caractères, vise à distinguer deux niveaux de lecture : une première lecture laissera de côté les parties en petits caractères, destinées à l'approfondissement. Enfin, le plus souvent, on s'est attaché à présenter un cas particulier ou des résultats expérimentaux avant l'exposé d'une théorie ou d'une modélisation générale.

Remerciements

aux collègues enseignants et anciens collègues du département de mécanique à l'École polytechnique, en particulier à Michel Amestoy, Jean-Michel Delbecq et Pierre Suquet pour leurs avis, suggestions ou conseils ;
au personnel du Centre Poly-Media de l'École polytechnique pour son dévouement et sa compétence ;
aux organismes cités qui ont contribué à l'illustration.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Sommaire

I Le milieu continu : une modélisation **9**
1 Échelle, modélisation, validation . . . 15
2 Les concepts et leur formulation . . . 16
3 Description lagrangienne . . . 20
4 Description eulérienne . . . 26
5 Commentaires . . . 31
Récapitulatif des formules essentielles . . . 35
Exercices . . . 36

II Étude des déformations du milieu continu **39**
1 Transport, transformation, déformation . . . 45
2 Transport convectif en transformation homogène . . . 46
3 Déformation en transformation homogène . . . 51
4 Déformation d'un milieu continu : cas général . . . 58
5 Transformation infinitésimale . . . 63
6 Compatibilité géométrique d'un champ de déformation linéarisée . . . 65
7 Remarques finales . . . 71
Récapitulatif des formules essentielles . . . 76
Exercices . . . 79

III Cinématique du milieu continu **87**
1 Présentation . . . 93
2 Cinématique lagrangienne du milieu continu . . . 93
3 Cinématique eulérienne du milieu continu . . . 96
4 Dérivées particulaires . . . 107
5 Conservation de la masse . . . 121
Récapitulatif des formules essentielles . . . 126
Exercices . . . 130

IV Les puissances virtuelles et la modélisation des efforts **135**
1 Problématique de la modélisation des efforts . . . 143
2 Dualisation et puissances virtuelles pour un système de points matériels 148
3 Méthode des puissances virtuelles pour un système de points matériels 154
4 La méthode des puissances virtuelles . . . 160
5 Mouvements rigidifiants ; distributeurs, torseurs . . . 164
6 Résultats généraux . . . 170
7 Théorèmes de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique . . . 172

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

8 Et maintenant 182
Récapitulatif des formules essentielles 183
Exercices 185

V Modélisation des efforts pour le milieu continu 187
1 Position du problème 193
2 Modélisation des efforts intérieurs par un champ scalaire : la pression 194
3 Modélisation des efforts intérieurs par un champ tensoriel : les contraintes 206
4 Les contraintes en description lagrangienne 230
5 Bilan et perspectives 235
Récapitulatif des formules essentielles 241
Exercices 243

VI Étude des contraintes 251
1 La mise en œuvre du concept 257
2 Notions pratiques 257
3 Représentation de Mohr 267
4 Critères de limite d'élasticité pour les matériaux isotropes 274
5 Dérivation temporelle du tenseur des contraintes 279
Récapitulatif des formules essentielles 282
Exercices 283

Annexes

I Éléments de calcul tensoriel 295
1 Tenseurs sur un espace vectoriel 303
2 Produit tensoriel de tenseurs 305
3 Décomposition d'un tenseur 307
4 Contraction 312
5 Tenseurs sur un espace vectoriel euclidien 317
6 Champs de tenseurs 331
Récapitulatif des formules essentielles 340
Schéma sur les tenseurs euclidiens en bases orthonormées 343
1 Préambule 343
2 Tenseurs euclidiens d'ordre un 344
3 Tenseurs euclidiens d'ordre deux 344
4 Produit contracté de deux tenseurs 348
5 Dérivation d'un champ de tenseurs 351

II Opérateurs différentiels : formules essentielles 355
1 Coordonnées cartésiennes orthonormées 357
2 Coordonnées cartésiennes quelconques 359
3 Coordonnées cylindriques 360
4 Coordonnées sphériques 362

Bibliographie 365

Index alphabétique 375

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Chapitre I

Le milieu continu : une modélisation

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MOTS CLÉS

Échelle. Modélisation. Validation.
Référentiel. Repère. Configuration.
Lagrange. Euler. Vitesse.
Continuité. Domaine matériel.
Trajectoire. Ligne de courant. Ligne d'émission.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En bref...

Le concept de milieu continu est une *modélisation physique macroscopique* issue de l'expérience courante, dont la pertinence est avérée selon les problèmes abordés et en fonction de l'échelle des phénomènes mis en jeu (section 1).

Dans la formulation mathématique classique de ce concept, un système mécanique est représenté par un volume constitué, au niveau différentiel, de *particules*. L'état géométrique de ces particules, de façon semblable à celui d'un point matériel, est caractérisé par la seule connaissance de leur position. La perception intuitive de la continuité se réfère à l'évolution du système : au cours de celle-ci, des particules initialement voisines demeurent voisines (section 2).

Pour préciser cette modélisation la *description lagrangienne* identifie les particules par leur position dans une *configuration* du système prise comme *référence*, et décrit le mouvement en définissant la position de chaque particule, ainsi indexée, au cours de l'évolution, c'est-à-dire en se donnant *sa trajectoire* et son *horaire* de parcours. La continuité du milieu s'exprime par la *continuité spatiale et temporelle* de la correspondance entre la position initiale de la particule et sa position actuelle. Des conditions de continue différentiabilité sont de plus imposées. Toutes les grandeurs physiques sont définies de cette façon. La *validation* expérimentale du modèle montre qu'il y a lieu d'affaiblir les hypothèses de régularité en ne les imposant que « par morceaux » (section 3).

En adoptant le point de vue incrémental, la *description eulérienne* définit le mouvement du système par la donnée, à chaque instant, du champ des vitesses des particules. Elle se place sur la *configuration actuelle* et les variables spatiales qui y apparaissent ont une signification purement géométrique. La notion de continuité dans la description eulérienne correspond aux continuité et continue différentiabilité spatiales et temporelles, par morceaux, du champ des vitesses. Toutes les grandeurs physiques sont définies de cette façon à chaque instant sur la configuration actuelle en fonction des coordonnées des particules. Les descriptions lagrangienne et eulérienne sont équivalentes. (section 4).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Principales notations

Notation	Signification	1ère formule
$\underline{X}$	vecteur-position dans κ_0	(2.1)
$\underline{x}$	vecteur-position dans κ_t	(2.1)
$\underline{\phi}(\underline{X}, t)$	bijection de Ω_0 sur Ω_t	(3.1)
$\mathcal{B}$	valeur d'une grandeur	(3.2)
$B(\underline{X}, t)$	grandeur attachée à une particule en description lagrangienne	(3.2)
$\underline{\psi}(\underline{x}, t)$	bijection réciproque de Ω_t sur Ω_0	(3.4)
$J(\underline{X}, t)$	jacobien de la transformation	(3.5)
$\mathrm{d}\Omega_0$	élément de volume dans κ_0	(3.8)
$\mathrm{d}\Omega_t$	élément de volume dans κ_t	(3.8)
$\underline{U}(\underline{X}, t)$	vitesse en description lagrangienne	(3.10)
$\underline{a}(\underline{X}, t)$	accélération en description lagrangienne	(3.11)
$\underline{U}_t(\underline{x}, t)$	vitesse en description eulérienne	(4.1)
$b(\underline{x}, t)$	grandeur en un point géométrique en description eulérienne	(4.2)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Échelle, modélisation, validation 15
2 Les concepts et leur formulation 16
2.1 L'idée directrice 16
2.2 Référentiel, repère 17
2.3 Configurations du système 18
2.4 Objectivité 19
3 Description lagrangienne 20
3.1 Définition 20
3.2 Hypothèses de continuité 21
3.3 Pertinence du modèle : affaiblissement des hypothèses de continuité 23
3.4 Interprétation physique de la description lagrangienne : trajectoires 24
3.5 Lignes d'émission 24
3.6 Vitesse d'une particule 25
3.7 Configuration de référence abstraite 25
4 Description eulérienne 26
4.1 Définition 26
4.2 Détermination des trajectoires 27
4.3 Lignes de courant 28
4.4 Mouvements stationnaires (ou permanents) 29
4.5 Mouvements semi-permanents 30
4.6 Notations pour la vitesse 30
5 Commentaires 31
Récapitulatif des formules essentielles 35
Exercices 36

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Le milieu continu : une modélisation

1 Échelle, modélisation, validation

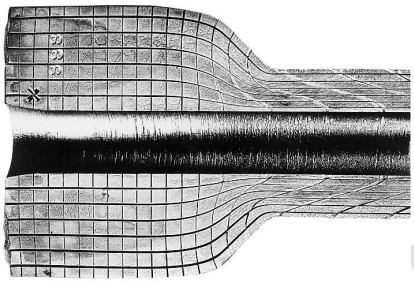


Figure 1 – Extrusion d'un tube. (Document communiqué par M. Sauve, CEA)

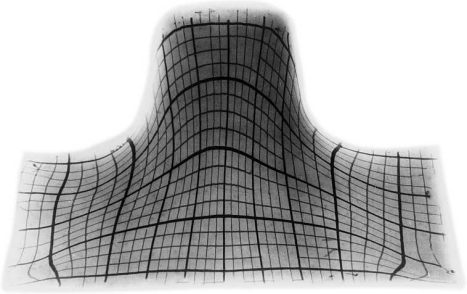


Figure 2 – Matriçage d'un lopin en alliage d'aluminium. (Le Douaron, Thèse 1977, CEMEF)

C'est de l'observation de la déformation d'un solide, par exemple au cours d'une opération de formage à froid ou à chaud (figures 1 et 2), de l'écoulement d'un liquide, de la détente ou de la compression d'un gaz, que la notion de milieu continu déformable tire son origine. Elle signifie que l'observateur retire de ces expériences l'idée que certains problèmes peuvent être traités à une échelle ***macroscopique*** en assimilant cette matière à un milieu « continu », sans contredire les modélisations de la physique microscopique.

La notion ***d'échelle*** pertinente pour un problème est ainsi introduite : liée évidemment aux phénomènes mis en jeu, elle dépend de façon essentielle de la nature des questions que l'on se pose à leur propos. Un exemple tiré de la pratique journalière de certains ingénieurs permet d'en fournir une illustration.

Les ingénieurs du génie civil construisant des ouvrages tels que fondations, bâtiments, soutènements, barrages,..., dont la dimension caractéristique va du mètre à la centaine de mètres, sont confrontés à des problèmes de stabilité de massifs de sols sableux, matériaux grenus dont la dimension caractéristique des grains est de l'ordre du millimètre ou du dixième de millimètre. Pour ce type de problème et ce type d'application « Stabilité ou instabilité de l'ouvrage ? » ils se réfèrent fréquemment au modèle classique de la mécanique des milieux continus bien que, à l'évidence, la terminologie

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

de « continue » soit peu appropriée à la nature de ces matériaux. La pertinence de cette attitude ne saurait être affirmée a priori ; elle est attestée par l'expérience.

Il s'agit là d'une démarche habituelle : ***la modélisation physique puis mathématique d'un problème est induite par l'expérience*** ; elle doit ensuite être ***validée*** par la confrontation des résultats auxquels elle conduit du point de vue des applications concernées avec des résultats expérimentaux significatifs. Le rôle de l'expérience (expériences faites ou expérience acquise) dans l'induction de la modélisation est primordial même s'il passe souvent inaperçu : c'est ainsi, pour reprendre l'exemple du sable, matériau grenu, que son tamisage n'appellerait naturellement pas une modélisation de milieu continu.

On peut aussi être conduit, dans un même problème, à faire usage de modélisations qui se situent à des niveaux différents (on peut ainsi parler de modèles à échelles multiples). Le calcul des structures en fournit un exemple : on y fait classiquement appel à la théorie des milieux curvilignes (cf. chapitres XI et XII) pour la détermination des efforts intérieurs sous forme de torseurs, puis à la modélisation du milieu continu tridimensionnel. À cette démarche sont apparentées diverses approches actuellement très courantes en mécanique des milieux continus : passage « micro-macro », voire « micro-meso-macro », homogénéisation, ...

On se propose dans le présent chapitre de cerner, puis de formuler mathématiquement, le concept de ***continuité*** évoqué ci-dessus. On présentera ainsi la modélisation du milieu continu classique tridimensionnel [(1)], dont les applications concernent tant la mécanique des solides déformables que la mécanique des fluides (cette distinction, traditionnelle, devient d'ailleurs, dans certains cas, bien difficile à faire : déformation ou écoulement de polymères par exemple).

2 Les concepts et leur formulation

2.1 L'idée directrice

Dans la démarche expérimentale usuelle, que ce soit pour suivre l'écoulement d'un fluide ou les déformations d'un solide, l'observateur est conduit à procéder au marquage d'éléments matériels constitutifs du système étudié à un instant donné et à repérer ensuite leur évolution géométrique (figures 1, 2, 6 à 8, 11 à 14). Il est évident que le marquage d'un tel élément, aussi fin soit-il, concerne un « petit domaine matériel », qui sera réputé infinitésimal à l'échelle macroscopique du mécanicien, mais qui se situe au-dessus de l'échelle microscopique du physicien.

Le concept intuitif de continuité se réfère à l'évolution des positions géométriques de ces éléments marqués au cours du temps : des éléments matériels voisins à un instant donné demeurent voisins au cours du temps et leurs évolutions sont comparables. À l'évidence, la validité de ce concept sera prioritairement dépendante de la possibilité réelle d'identifier les petits domaines matériels pertinents.

[(1)] La transposition pour définir le concept de milieu continu bidimensionnel dans un espace euclidien bidimensionnel est immédiate. Voir aussi, ultérieurement, la notion de « problèmes plans » dans l'annexe III consacrée à l'élasticité plane.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La modélisation mathématique du concept physique de continuité sera donc d'abord géométrique.

Du point de vue géométrique la modélisation du milieu continu classique part de l'idée que le système mécanique considéré $\mathcal{S}$ est représenté par un volume Ω dont les « $\mathrm{d}\Omega$ » représentent les constituants élémentaires appelés « particules ». L'état géométrique de ces particules est caractérisé uniquement par leur position : le mouvement est entièrement défini par un champ de vitesse. Ceci explique la terminologie de « points matériels » employée aussi pour désigner les particules qui signifie qu'elles sont représentées géométriquement par un point ; on doit bien entendre qu'il s'agit en quelque sorte de points matériels « dilués », c'est-à-dire que les grandeurs physiques extensives qui sont introduites relativement au système pour en définir certaines caractéristiques apparaissent comme des intégrales de densités volumiques (et non comme des sommes discrètes).

Le concept de continuité étant lié à l'observation de ***l'évolution du système***, on souhaite assurer au cours de celle-ci pour des particules voisines :

- la conservation de la proximité géométrique,
- l'évolution comparable des propriétés physiques.

2.2 Référentiel, repère

La formulation mathématique des idées précédentes nécessite que l'on procède à la description et au repérage du système étudié tout au long de son évolution au cours du temps.

On introduit d'abord la notion de ***référentiel***, liée à celle d'***observateur*** : le référentiel est pour ainsi dire « l'espace euclidien entraîné par l'observateur ». Pour en donner une définition plus mathématique :

① on suppose choisie, une fois pour toutes, la ***chronologie***, c'est-à-dire l'échelle du temps (mécanique classique) valable pour tous les observateurs ;

② on appelle alors référentiel l'ensemble des points de l'espace euclidien animés du mouvement de corps rigide (isométrie directe fonction du temps) de l'observateur. Le référentiel, noté $\mathcal{R}$, est dit lié à l'observateur.

Une telle définition ne permet, en fait, que de définir un référentiel par rapport à un autre. On sait, et on y reviendra au chapitre IV (§ 1.1), que la mécanique classique postule l'existence d'un référentiel absolu, ou galiléen, doté de certaines propriétés.

Pour repérer les positions spatiales des particules du système dans un référentiel $\mathcal{R}$, on peut utiliser un ***repère*** R (souvent orthonormé, sans que cela soit une nécessité), d'origine O. Ce repère, animé du mouvement de corps rigide du référentiel $\mathcal{R}$, peut être considéré comme matérialisant $\mathcal{R}$. Dans un référentiel $\mathcal{R}$, changer le repère R pour le repère R' consiste à effectuer à chaque instant la même transformation de coordonnées sur les composantes des êtres ***intrinsèques*** (vecteurs ou tenseurs) que l'on introduira pour représenter les grandeurs physiques ***dans ce référentiel*** (figure 3).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

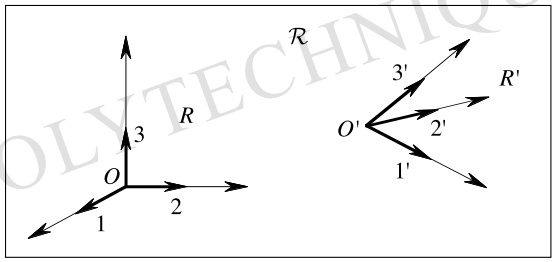


Figure 3 – Changement de repère dans le référentiel $\mathcal{R}$

Le changement de référentiel, c'est-à-dire le changement d'observateur, peut être matérialisé en choisissant dans le référentiel $\mathcal{R}$ un repère R et dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ un repère R^* qui soient en coïncidence ***à un instant donné*** : ces repères sont distincts et la correspondance entre eux évolue au cours du temps en suivant le mouvement d'entraînement (de corps rigide) d'un référentiel par rapport à l'autre (figure 4).

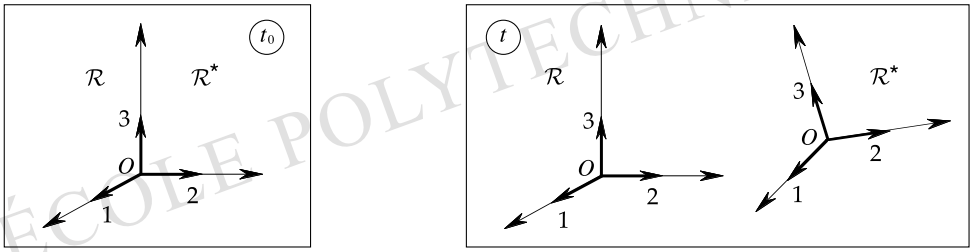


Figure 4 – Changement de référentiel ($\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$)

2.3 Configurations du système

L'état du système $\mathcal{S}$ à l'instant t dans un référentiel $\mathcal{R}$ est appelé ***configuration*** de ce système. On désigne de façon générique par κ_t la configuration ***actuelle*** (instant courant t). La configuration géométrique de $\mathcal{S}$ est décrite par l'ensemble des positions, repérées dans le référentiel $\mathcal{R}$, de ses particules. Ce repérage de la configuration géométrique dans $\mathcal{R}$ se fait au moyen du vecteur-position $\underline{OM}$, noté aussi $\underline{x}$, qui précise la position de chaque particule de $\mathcal{S}$ à l'instant t à partir de l'origine O d'un repère R dans $\mathcal{R}$. On peut définir $\underline{x}$ par ses coordonnées (x, y, z) ou $x^i (i = 1, 2, 3)$ dans R. Le volume occupé par $\mathcal{S}$ dans cette configuration est Ω_t de frontière $\partial\Omega_t$.

On introduit aussi la notion de ***configuration de référence*** : c'est la configuration particulière κ_{t_0}, du système à un instant t_0 ***fixé***. Sauf mention explicite du contraire, on posera $t_0 = 0$ (et la configuration de référence pourra aussi être appelée configuration initiale). Conformément aux idées intuitives sur la continuité exposées au paragraphe 2.1 et qui seront exprimées mathématiquement au paragraphe 3.2, $\mathcal{S}$ occupe aussi dans κ_0 un volume Ω_0 de frontière $\partial\Omega_0$ (figure 5). Les coordonnées des

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

vecteurs-positions $\underline{OM}_0$ de κ_0 dans le repère R de $\mathcal{R}$ seront systématiquement notées (X, Y, Z) ou encore $X^i (i = 1, 2, 3)$. Le vecteur $\underline{OM}_0$ sera aussi noté $\underline{X}$.

Ainsi :

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \underline{OM} & = \underline{x} \text{ de coordonnées } (x, y, z) \text{ ou } x^i \text{ dans } \kappa_t \\ \underline{OM}_0 & = \underline{X} \text{ de coordonnées } (X, Y, Z) \text{ ou } X^i \text{ dans } \kappa_0 \, . \end{cases}$$

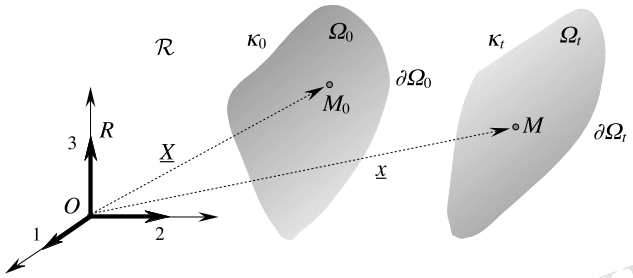


Figure 5 – Configurations du système

2.4 Objectivité

Le caractère intrinsèque vis-à-vis du changement de référentiel est appelé, en mécanique, ***l'objectivité*** d'une grandeur, d'une équation, ou d'une loi. Pour une grandeur ***scalaire***, l'objectivité signifie que deux observateurs obtiennent la même valeur de cette grandeur dans leurs référentiels respectifs à l'instant t.

Pour une grandeur ***vectorielle***, il est commode de se référer à la figure 4. La vérification de l'objectivité consiste à s'assurer que les expressions, dans les repères R et R^* respectivement, des valeurs de la grandeur mesurées par chaque observateur dans son référentiel sont liées par la formule de changement de repère qui exprime la correspondance entre les repères R et R^* à l'instant t, c'est-à-dire le mouvement rigidifiant du référentiel $\mathcal{R}^*$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. À titre d'exemple, le vecteur joignant les positions géométriques à l'instant t de deux particules est objectif. En revanche, la vitesse à l'instant t d'une particule n'est pas une grandeur objective : deux observateurs mesurent, dans leurs référentiels respectifs $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ des vecteurs vitesses qui ne sont pas liés par la formule de changement de repère (figure 6).

Plus généralement on doit considérer des grandeurs ***tensorielles*** d'ordre et de variance quelconques (annexe I) qui, de plus, sont éventuellement rattachées à des observations effectuées à divers instants, par exemple à l'instant initial de référence t_0 et à l'instant actuel t. L'objectivité d'une telle grandeur signifie que les expressions obtenues par deux observateurs, qui sont relatives aux repères R_{t_0} et R_t pour l'un, $R^*_{t_0}$ et R^*_t pour l'autre, sont liées par les formules de changement de repères correspondantes : R_{t_0} en $R^*_{t_0}$, R_t en R^*_t. On rencontrera des exemples de telles grandeurs dans les chapitres suivants (cf. chapitre II, § 4.6).

L'objectivité de l'***équation*** exprimant une loi physique s'analyse de façon analogue : l'écriture d'une telle équation ne permet pas à deux observateurs de discerner leurs référentiels respectifs à partir des mesures qu'ils y effectuent. Cela signifie aussi que les équations exprimant la loi physique pour deux observateurs sont liées par les formules de changement

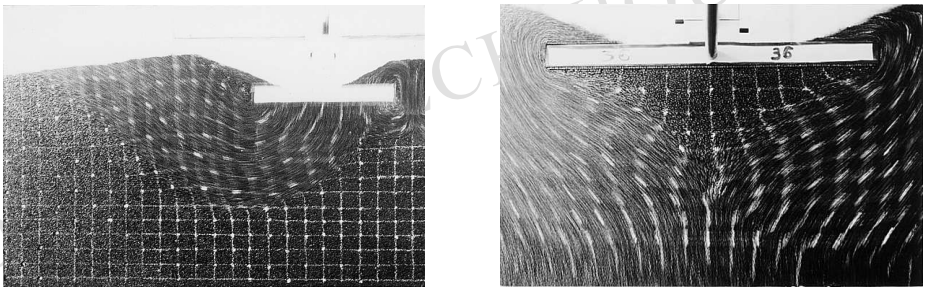


Figure 6 – Changement de référentiel : exemples de poinçonnements d'un massif pulvérulent bidimensionnel ; la pose courte permet de visualiser les champs de vitesse dans : a) le référentiel lié au massif, b) le référentiel lié à la fondation. (D'après Bonnet et Morio, 1972, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées)

de repères correspondantes. Toute loi physique ne possède évidemment pas cette propriété. La loi fondamentale de la dynamique (cf. chapitre IV, section 1) est l'exemple d'une loi non-objective puisqu'elle n'est valable qu'en référentiel galiléen. En revanche on verra (cf. chapitre VII) que l'on impose aux lois de comportement des matériaux de satisfaire le ***principe d'objectivité*** ; celui-ci se réduit dans certains cas au principe ***d'isotropie de l'espace*** qui affirme que l'espace ne possède pas de direction privilégiée (cf. chapitre VI, § 4.2 et chapitre VII, § 4.1). Il convient de remarquer que le fait pour une équation de ne faire intervenir que des grandeurs objectives n'est pas une condition suffisante d'objectivité.

3 Description lagrangienne

3.1 Définition

On se propose maintenant de donner une formulation mathématique précise des idées intuitives et des concepts présentés dans les sections précédentes.

Dans cet esprit, en se référant au marquage des petits domaines matériels évoqué au paragraphe 2.1, la description lagrangienne [(2)] consiste à :

- identifier les particules constitutives du système par leur position géométrique dans une configuration de celui-ci prise comme référence et notée κ_0, c'est-à-dire par la variable vectorielle $\underline{X}$,
- exprimer la valeur de toute grandeur physique dans la configuration actuelle en fonction de la particule à laquelle elle est attachée et de l'instant actuel, c'est-à-dire en fonction des variables $\underline{X}$ et t.

Ainsi le vecteur-position $\underline{OM} = \underline{x}$ de la particule située initialement en M_0 dans κ_0 est donné par

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \tag{3.1}$$

[(2)] L. Lagrange (1736-1813).

et la valeur d'une grandeur physique attachée à cette particule, soit $\mathcal{B}$ est :

$$\mathcal{B} = B(\underline{X}, t) \ . \tag{3.2}$$

Dans la formule (3.1) $\underline{\phi}$ est une fonction vectorielle définie sur $\Omega_0, \forall t$, et qui vérifie évidemment :

$$\underline{\phi}(\underline{X}, 0) = \underline{X} \ , \tag{3.3}$$

tandis que, suivant la nature de la grandeur physique concernée, B est une fonction scalaire, vectorielle, ou tensorielle d'ordre quelconque, qui vérifie la formule homologue de (3.3).

La fonction $\underline{\phi}$ décrit ainsi la correspondance géométrique entre les configurations (spatiales) κ_0 et κ_t. En fonction de t c'est toute l'évolution géométrique du système $\mathcal{S}$, c'est-à-dire son mouvement (cf. § 3.4), qui est ainsi donnée.

3.2 Hypothèses de continuité

On va naturellement examiner maintenant les conditions mathématiques sur $\underline{\phi}$ qui permettent de rendre compte convenablement du concept intuitif de continuité dégagé au paragraphe 2.1.

On propose les hypothèses suivantes :

• $\underline{\phi}$ est une bijection de Ω_0 sur Ω_t dont on désigne par $\underline{\psi}$ la bijection réciproque [3] :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \forall t \ , \ \forall M_0 \in \Omega_0 & & \forall t \ , \ \forall M \in \Omega_t \\ & \Longleftrightarrow & \\ \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) & & \underline{X} = \underline{\psi}(\underline{x}, t) \end{array}} \tag{3.4}$$

• $\underline{\phi}$ et $\underline{\psi}$ sont ***continues*** par rapport à l'ensemble des ***variables d'espace et de temps***.

• $\underline{\phi}$ et $\underline{\psi}$ sont en règle générale supposées de ***classe*** C^1 ***voire*** C^2.

En ce qui concerne la grandeur physique typique $\mathcal{B}$, la fonction B est supposée continue et, en règle générale, de classe C^1 ou C^2 par rapport à l'ensemble des variables $\underline{X}$ et t.

Ces hypothèses ont les conséquences classiques suivantes qui permettent d'examiner la validité de cette modélisation par comparaison avec l'expérience.

1°) Deux particules qui occupent dans κ_0 des positions « infiniment voisines », restent infiniment voisines dans toute configuration.

[3] $\underline{\psi}$ sera occasionnellement notée aussi $\underline{\phi}^{-1}$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

2°) Des particules qui occupent dans κ_0 un domaine connexe, occupent dans κ_t un domaine connexe de même ordre (volume, surface, courbe). Ceci permet la définition mathématique du concept de ***domaine matériel*** : domaine ***transporté par le mouvement*** c'est-à-dire qu'il s'agit à chaque instant du domaine géométrique occupé par le même ensemble de particules.

3°) Les particules qui se trouvent dans κ_0, à l'intérieur d'une surface fermée, restent à tout instant t à l'intérieur de la surface transportée. Ainsi la frontière d'un volume matériel est une surface matérielle.

4°) En particulier, la frontière de $\mathcal{S}$ est une surface matérielle ce qui signifie qu'elle est toujours constituée des mêmes particules.

5°) En conséquence des hypothèses de continue différentiabilité : soit $J(\underline{X},t)$ le déterminant jacobien de $\underline{\phi}$ à l'instant t en (X^1,X^2,X^3), c'est-à-dire le déterminant de la matrice jacobienne des dérivées premières des x^i par rapport aux X^i :

$$J(\underline{X},t)=\frac{\mathrm{D}(x^1,x^2,x^3)}{\mathrm{D}(X^1,X^2,X^3)}\ . \tag{3.5}$$

$\underline{\phi}$ étant continue et continûment dérivable de même que $\underline{\psi}$, on en déduit que $J(\underline{X},t)$ est ***continu*** par rapport à $\underline{X}$ et t. De plus il ne peut être ***ni nul ni infini***, puisque les matrices jacobiennes de $\underline{\phi}$ et de $\underline{\psi}$ doivent être inversibles. Il conserve donc un signe constant sur Ω_0 et au cours du mouvement.

Il résulte alors de (3.3) où l'on a :

$$J(\underline{X},0)=1 \qquad \forall M_0\in\Omega_0\ , \tag{3.6}$$

que $J(\underline{X},t)$ est positif et fini $\forall M_0\in\Omega_0$, $\forall t$:

$$\boxed{0<J(\underline{X},t)<+\infty} \tag{3.7}$$

Anticipant sur des résultats qui seront développés au chapitre II (§ 2.3 et 4.2) on peut d'ores et déjà donner l'interprétation physique de $J(\underline{X},t)$. Soit $\mathrm{d}\Omega_0$ le volume d'un domaine matériel élémentaire au point M_0 dans la configuration κ_0 et $\mathrm{d}\Omega_t$ le volume du domaine transporté en M dans la configuration κ_t ; $J(\underline{X},t)$ s'interprète comme la ***dilatation volumique*** dans le mouvement entre les configurations κ_0 et κ_t, en suivant la particule de M_0 à M :

$$\mathrm{d}\Omega_t=J(\underline{X},t)\,\mathrm{d}\Omega_0\ ^{(4)}\ . \tag{3.8}$$

On peut donc traduire sous forme imagée le résultat (3.7) : le volume de la particule conserve son signe, et ne peut devenir ni nul, ni infini.

(4) Ce résultat se rattache à des théorèmes classiques d'analyse. L'image de la mesure $J(\underline{X},t)\,\mathrm{d}X^1\mathrm{d}X^2\mathrm{d}X^3$ par l'application $\underline{\phi}$ est la mesure $\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$. Si le repère R est orthonormé la mesure $\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ (ou $\mathrm{d}X^1\mathrm{d}X^2\mathrm{d}X^3$) est la mesure de volume. On en déduit que, pour un domaine infinitésimal qui converge vers le point M_0, dans la configuration κ_0 et pour son image par $\underline{\phi}$ en M, les volumes $\mathrm{d}\Omega_0$ et $\mathrm{d}\Omega_t$ sont liés par la formule (3.8). Le résultat est conservé si R n'est pas orthonormé car la mesure $\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ est alors proportionnelle à la mesure de volume.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

3.3 Pertinence du modèle : affaiblissement des hypothèses de continuité

Les conséquences énoncées ci-dessus apparaissent conformes à l'intuition de la continuité qui est à l'origine même de la modélisation. On est toutefois amené à nuancer quelque peu les hypothèses mathématiques de façon à être en mesure de traiter plus commodément certains phénomènes observés.

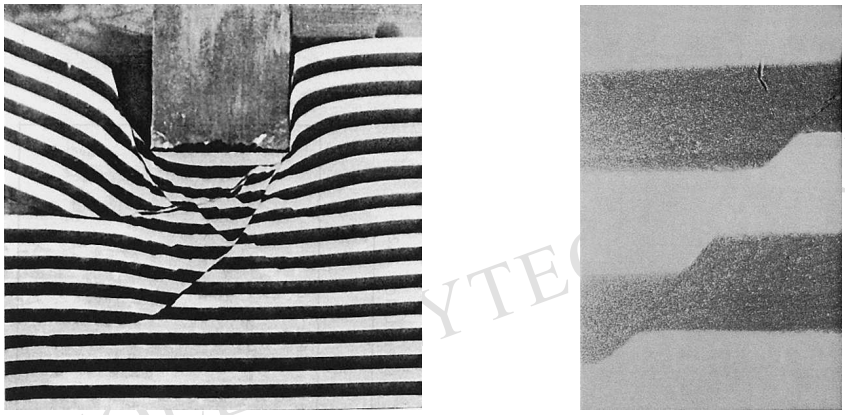


Figure 7 – Poinçonnement asymétrique d'un bloc de plasticine (application à la tectonique de l'est de l'Asie). (D'après Peltzer, Thèse, 1983, Institut de Physique du Globe)

Il s'agit, par exemple, des fissures rencontrées en mécanique de la rupture, des surfaces de rupture, des surfaces de glissement, de la localisation de la déformation en mécanique des solides (figure 7), des surfaces de jet en mécanique des fluides (figure 8). Pour celles-ci la conservation de la proximité de deux points initialement voisins au cours de l'évolution est trop contraignante : il convient de permettre des discontinuités de $\underline{\phi}$ au franchissement de certaines surfaces.

Dans le cas des ondes de choc (cf. chapitre III, § 4.4 et § 5.1) $\underline{\phi}$ demeure continue mais ses dérivées spatiales et temporelle doivent admettre des discontinuités au franchissement de la surface d'onde.

Pour ces raisons on convient d'affaiblir les hypothèses de continuité en n'imposant plus que ***la continuité et la continue différentiabilité de $\underline{\phi}$ par morceaux*** : des discontinuités de la fonction $\underline{\phi}$ et/ou de ses dérivées sont permises au franchissement d'une infinité dénombrable de surfaces dans $\mathbb{R}^3$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Figure 8 – Écoulement autour d'une plaque plane. (Document communiqué par l'ONERA)

3.4 Interprétation physique de la description lagrangienne : trajectoires

La description lagrangienne est la formulation mathématique d'une réalité expérimentale simple. En effet (cf. § 3.1) la formule (3.1) décrit le mouvement de chaque particule du système : si l'on considère la particule identifiée par $\underline{X}$, (3.1) fournit la description de sa trajectoire, paramétrée en fonction du temps, dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad \text{où} \quad \underline{X} \quad \text{est fixé .}$$

Pour cette raison on dit aussi que la description lagrangienne est une description « par trajectoires ».

Concrètement, la visualisation de la trajectoire d'une particule à partir d'un instant t_0, s'obtient en marquant une particule à l'instant donné t_0, puis en faisant une prise de vue ***en pose*** du mouvement du système à partir de l'instant t_0. Ce type d'expériences est réalisé couramment en mécanique des solides et en mécanique des fluides.

3.5 Lignes d'émission

La prise d'une vue ***en instantané*** conduit à introduire un autre type de courbes géométriques, ***les lignes d'émission***, définies comme suit (figure 9).

En un point ***géométrique*** P dans $\mathcal{R}$, de coordonnées x_P^i, et à partir de l'instant t_0, on marque chaque particule passant par P ; on observe, à l'instant $T > t_0$, les positions de ces particules dans $\mathcal{R}$: la ***courbe géométrique*** correspondante est la ***ligne d'émission du point*** P observée à l'instant T.

L'équation, paramétrée en t', de cette courbe s'obtient à partir de (3.1) et (3.4) en suivant la particule $\underline{X}$ qui, passant à l'instant t' en P , a été marquée et se trouve

en $\underline{x}$ à l'instant T sur la ligne d'émission :

$$\underline{x} = \underline{\phi}\left(\underline{\psi}(\underline{x}_P, t'), T\right) \qquad t_0 \leq t' \leq T \ . \tag{3.9}$$

Ces expériences sont couramment réalisées en mécanique des fluides (figures 11 à 13).

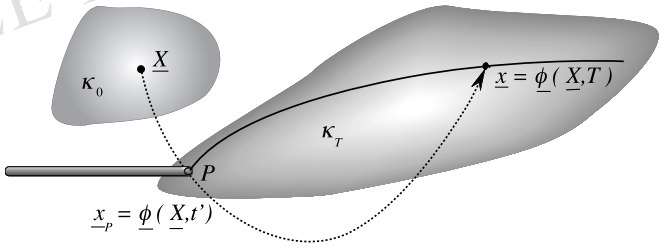


Figure 9 – Ligne d'émission (en pointillé, la trajectoire de la particule $\underline{X}$)

3.6 Vitesse d'une particule

La vitesse, dans le référentiel $\mathcal{R}$, de la particule identifiée par sa position $\underline{X}$ dans κ_0 s'obtient immédiatement à partir de (3.1). C'est le vecteur :

$$\underline{U}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}, t)}{\partial t} \ . \tag{3.10}$$

Le vecteur vitesse $\underline{U}(\underline{X}, t)$ dans $\mathcal{R}$ est évidemment tangent à la trajectoire de la particule dans $\mathcal{R}$ au point $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$.

De même l'accélération de la particule s'écrit :

$$\underline{a}(\underline{X}, t) = \frac{\partial^2 \underline{\phi}(\underline{X}, t)}{\partial t^2} \ . \tag{3.11}$$

3.7 Configuration de référence abstraite

La description lagrangienne du mouvement donnée ci-dessus, identifie chaque particule par sa position dans $\mathcal{R}$, dans la configuration κ_0.

On peut bâtir le même type de description en introduisant, pour indexer chaque particule, un jeu de trois paramètres $a^i (i = 1, 2, 3)$ qui sont appelés coordonnées de la particule dans la ***configuration abstraite*** de référence κ_a. Le mouvement est alors défini de façon analogue à (3.1) par la donnée de la fonction vectorielle $\underline{\phi}$:

$$\underline{x} = \underline{\phi}(a^1, a^2, a^3, t) \qquad (a^1, a^2, a^3) \in \mathcal{D}_a \tag{3.12}$$

où $\mathcal{D}_a$ désigne le domaine occupé par le système dans κ_a ; on a, pour la configuration κ_0 :

$$\underline{X} = \underline{\phi}(a^1, a^2, a^3, 0) \ . \tag{3.13}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

$\underline{\phi}$ doit encore être bijective, continue et continûment différentiable par morceaux de même que sa bijection réciproque $\underline{\psi}$.

Le jacobien

$$J(a^1, a^2, a^3, t) = \frac{\mathrm{D}(x^1, x^2, x^3)}{\mathrm{D}(a^1, a^2, a^3)}$$

est continu par rapport aux variables a^1, a^2, a^3 et t, et ne peut être ni nul ni infini (inversibilité de la matrice jacobienne). Il conserve donc un ***signe constant sur*** $\mathcal{D}_a$ ***et au cours du mouvement***, mais il n'est plus nécessairement positif. La dilatation volumique entre deux configurations κ_0 et κ_t pour la particule indexée par (a^1, a^2, a^3), s'obtient évidemment par :

$$\mathrm{d}\Omega_t = \frac{J(a^1, a^2, a^3, t)}{J(a^1, a^2, a^3, 0)} \mathrm{d}\Omega_0 \ . \tag{3.14}$$

Pour citer un exemple simple d'une telle représentation lagrangienne à partir d'une configuration abstraite : si l'on indexe chaque particule par les coordonnées cylindriques R, Θ et Z de sa position M_0 dans κ_0, les paramètres R, Θ et Z constituent un jeu de coordonnées lagrangiennes abstraites, le domaine $\mathcal{D}_a$ étant défini dans l'espace (R, Θ, Z). En particulier, si la position dans la configuration actuelle est, elle aussi, repérée par les coordonnées cylindriques (r, θ, z) on a, pour la dilatation volumique, la formule :

$$\mathrm{d}\Omega_t = \frac{r}{R} \frac{\mathrm{D}\,(r, \theta, z)}{\mathrm{D}\,(R, \Theta, Z)} \mathrm{d}\Omega_0 \ . \tag{3.15}$$

4 Description eulérienne

4.1 Définition

En se référant à l'interprétation physique de la description lagrangienne à partir de la prise de vues en poses longues, on peut introduire la description eulérienne [(6)] par l'idée intuitive suivante exposée sur l'aspect géométrique : le cliché obtenu en pose peut être reconstitué par la superposition d'une succession de prises de vues instantanées.

Dans une formulation plus mathématique, la description eulérienne de l'évolution consiste à prendre à chaque instant la configuration actuelle comme configuration de référence pour décrire l'évolution infinitésimale entre t et $(t + \mathrm{d}t)$.

Ainsi pour l'aspect géométrique la description eulérienne définit le mouvement du système par la donnée, à chaque instant t, de la vitesse $\underline{U}_t$ de la particule située au point géométrique M dans κ_t :

$$\forall t, \forall M \in \Omega_t \ , \quad \underline{U} = \underline{U}_t(\underline{x}, t) \ . \tag{4.1}$$

[(6)] L. Euler (1707-1783).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On retrouve bien encore la donnée d'une fonction vectorielle de 4 variables scalaires mais, à la différence de (3.1), les variables spatiales x^1, x^2, x^3 sont relatives à la ***configuration actuelle*** et non plus à une configuration de référence : elles n'identifient donc plus les particules au cours du temps.

Toute grandeur physique est, de même, définie sur κ_t sous la forme :

$$\forall t, \forall M \in \Omega_t \ , \quad \mathcal{B} = b(\underline{x}, t) \ . \tag{4.2}$$

En règle générale on convient, pour permettre un décodage des formules « à vue », de désigner par des lettres minuscules (comme $\underline{x}$) les fonctions relatives à la description eulérienne, et par des lettres majuscules (comme $\underline{X}$) les fonctions relatives à la description lagrangienne. La vitesse est ici l'exception qui confirme la règle ; on y reviendra dans la suite (§ 4.6).

4.2 Détermination des trajectoires

Il est clair que la description eulérienne de l'évolution d'un système $\mathcal{S}$ s'obtient de façon immédiate dès que l'on en connaît la description lagrangienne. En effet en égalant les deux expressions de la vitesse de la particule $\underline{X}$ dans $\mathcal{R}$ à l'instant t, puis les deux expressions de la grandeur B pour la particule $\underline{X}$ à l'instant t il vient :

$$\begin{cases} \underline{U}_t(\underline{x}, t) = \underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{U}\big(\underline{\psi}(\underline{x}, t), t\big) \\ \\ b(\underline{x}, t) = B(\underline{X}, t) = B\big(\underline{\psi}(\underline{x}, t), t\big) \ . \end{cases} \tag{4.3}$$

On remarque que $\underline{U}_t$ est alors continue et continûment différentiable par morceaux (si $\underline{\phi}$ est C^2 par morceaux).

Inversement il convient de vérifier que la description eulérienne, introduite de façon intuitive au paragraphe précédent, est bien équivalente à la description lagrangienne. Pour cela il suffit de vérifier que (4.1) permet effectivement de reconstituer la fonction $\underline{\phi}$ de la formule (3.1), c'est-à-dire qu'il faut résoudre le problème : déterminer la fonction vectorielle $\underline{\phi}$ solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \underline{U}_t\big(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t\big) \\ \\ \underline{\phi}(\underline{X}, 0) = \underline{X} \ , \text{ condition initiale} \ . \end{cases} \tag{4.4}$$

Il s'agit en fait (cf. § 3.4) de déterminer la trajectoire de ***toute*** particule avec son horaire de parcours. Ce problème peut aussi s'écrire sous la forme différentielle :

$$\begin{cases} \mathrm{d}\underline{x} = \underline{U}_t(\underline{x}, t)\, \mathrm{d}t \\ \\ \underline{x}_{|t=0} = \underline{X} \ , \text{ condition initiale} \end{cases} \tag{4.5}$$

qui représente un système de 3 équations différentielles pour les 3 fonctions scalaires inconnues x^1, x^2, x^3, de la variable t.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Sous réserve de conditions de régularité sur la fonction $\underline{U}_t$, on peut en déterminer la solution unique pour chaque condition initiale, qui se met ainsi sous la forme cherchée :

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \ ,$$

ce qui achève la détermination des trajectoires.

L'ensemble des trajectoires dans $\mathcal{R}$ de toutes les particules constitue une famille de courbes à 3 paramètres (coordonnées X^i de M_0).

L'expression lagrangienne (3.2) de la valeur d'une grandeur physique $\mathcal{B}$ attachée à la particule située en $\underline{x}$ à l'instant t s'obtient alors de façon évidente à partir de (4.2), formule inverse de (4.3) :

$$\mathcal{B} = B(\underline{X}, t) = b\big(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t\big) \ .$$

4.3 Lignes de courant

Il est utile, pour certaines applications, d'introduire une troisième famille de ***courbes géométriques*** issues de la définition du mouvement d'un milieu continu.

À un ***instant donné*** T, on appelle ***lignes de courant*** du mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}$, les lignes enveloppes du champ des vecteurs vitesses $\underline{U}_t(\underline{x}, T)$.

Ces lignes sont donc définies dans R par le système différentiel :

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{U_t^1(\underline{x}, T)} = \frac{\mathrm{d}x^2}{U_t^2(\underline{x}, T)} = \frac{\mathrm{d}x^3}{U_t^3(\underline{x}, T)} \ ; \tag{4.6}$$

c'est un système différentiel de 2 équations en x^1, x^2, x^3. Les lignes de courant dans $\mathcal{R}$ à l'instant T constituent ***une famille de courbes géométriques à 2 paramètres***.

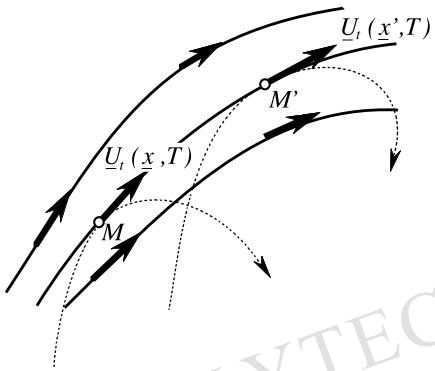


Figure 10 – Lignes de courant à l'instant T (en pointillé : trajectoires de deux particules)

Aucune confusion n'est à faire entre ces lignes et les trajectoires définies au paragraphe 3.4 et retrouvées au paragraphe 4.2 car la différence de signification est

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

évidente du point de vue physique, et les systèmes différentiels (4.5) et (4.6) sont fondamentalement différents : variable temps dans le premier, temps fixé dans le second (figure 10).

Du point de vue expérimental, la construction des lignes de courant à l'instant T nécessite l'obtention du champ des vitesses dans le référentiel $\mathcal{R}$ à cet instant. Pour poursuivre dans le registre des références photographiques utilisées aux paragraphes 3.4 et 4.1, celui-ci résulte d'une prise de vue en pose courte à l'instant T (figure 14), ce qui manifeste clairement la différence entre lignes de courant et trajectoires.

4.4 Mouvements stationnaires (ou permanents)

Le mouvement est dit ***stationnaire*** (ou permanent) dans un référentiel $\mathcal{R}$ si, dans sa description eulérienne, $\underline{U}_t(\underline{x}, t)$ est ***indépendante*** de t et n'est fonction que des coordonnées du point géométrique M. Il en résulte les propriétés suivantes.

• Dans la recherche des trajectoires et de leurs horaires de parcours par le système différentiel (4.5) le problème se découple en un problème purement géométrique et un problème d'horaire de parcours.

En effet, puisque :

$$\underline{U}_t(\underline{x}, t) \equiv \underline{U}(x) \tag{4.7}$$

on tire de (4.5) le système :

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{U^1(\underline{x})} = \frac{\mathrm{d}x^2}{U^2(\underline{x})} = \frac{\mathrm{d}x^3}{U^3(\underline{x})} \; ; \tag{4.8}$$

celui-ci est identique à celui qui, à chaque instant T, permet de déterminer les lignes de courant (4.6), lui aussi indépendant de T.

Ainsi ***les trajectoires forment alors une famille de courbes géométriques à 2 paramètres, identique à la famille des lignes de courant qui deviennent, dans ce cas, indépendantes du temps***.

• On peut alors déterminer l'horaire de parcours de ces courbes par les particules.

En effet on obtient à partir de (4.5) et (4.7) :

$$\underline{\mathrm{d}x} = \underline{U}(\underline{x})\,\mathrm{d}t \tag{4.9}$$

qui montre, le problème géométrique étant résolu, que le ***mouvement est invariant par translation dans le temps***.

Cela signifie que la position M à l'instant t de la particule qui se trouvait en M' à l'instant t' ne dépend que de M' et de la différence $(t - t')$:

$$\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{x}', t - t') \; . \tag{4.10}$$

Cette formule donne, en fonction du paramètre $\tau = t - t'$, l'équation de la trajectoire passant par M'.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On en déduit que les fonctions $\underline{\phi}$ et $\underline{\psi}$ de (3.4) possèdent, dans le cas d'un mouvement stationnaire, la propriété fonctionnelle :

$$\underline{\phi}(\underline{\psi}(\underline{x}', t'), t) = \underline{\varphi}(\underline{x}', t - t') \ . \tag{4.11}$$

• Compte tenu de (4.11) on voit que l'équation (3.9) donnant, paramétrée en t', la ligne d'émission observée à l'instant T, du point P, s'écrit :

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{\psi}(\underline{x}_P, t'), T) \equiv \underline{\varphi}(\underline{x}_P, T - t') \qquad t_0 \leq t' \leq T \ . \tag{4.12}$$

Ceci montre, par comparaison avec (4.10), que la ***ligne d'émission de*** P ***est identique à la partie aval de la trajectoire passant par*** P, ce qui résulte directement du fait que toutes les particules passant par P suivent la même trajectoire.

Il en résulte pratiquement, une méthode commode de visualisation des trajectoires dans le cas des mouvements stationnaires.

4.5 Mouvements semi-permanents

On introduit parfois aussi la notion de mouvement semi-permanent dans un référentiel, définie par la propriété caractéristique :

$$\underline{U}_t(\underline{x}, t) = \lambda(t)\underline{U}(\underline{x}) \ . \tag{4.13}$$

On vérifiera que dans ce type de mouvement :
- les lignes de courant sont indépendantes du temps ;
- les trajectoires forment encore une famille de courbes géométriques à 2 paramètres, identique à celle des lignes de courant ;
- la ligne d'émission d'un point P est identique à la partie aval de la trajectoire passant par ce point : en effet, en introduisant une fonction $\theta(t)$ primitive de $\lambda(t)$, on montre que les fonctions $\underline{\phi}$ et $\underline{\psi}$ vérifient encore une relation analogue à (4.11).

4.6 Notations pour la vitesse

L'usage courant est que l'on adopte pour la fonction décrivant la vitesse sur la configuration κ_t en représentation eulérienne la notation $\underline{U}$, identique à la notation lagrangienne sur la configuration κ_0 ; autrement dit on écrit, à la place de la formule (4.1) :

$$\forall t \ , \ \forall M \in \Omega_t \ , \ \underline{U} = \underline{U}(\underline{x}, t) \ . \tag{4.14}$$

Cette convention sera adoptée dans toute la suite.

Elle n'est que très rarement susceptible d'engendrer des confusions car les conventions d'écriture sur les variables spatiales ($\underline{X}$ et $\underline{x}$) et sur les opérateurs différentiels (cf. chapitre II, § 5.3) suffisent le plus souvent à lever l'ambiguïté. En cas de nécessité on peut toujours avoir recours à la notation précise (4.1).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

5 Commentaires

Cette présentation de la modélisation « milieu continu » dans sa forme classique appelle, pour conclure, quelques commentaires. Ceux-ci sont suggérés par les techniques expérimentales d'observation telles qu'elles apparaissent sur les figures 11 à 14 par exemple ou dans les nombreux films disponibles sur le sujet. On y voit que le marquage ***d'une*** « particule » n'est évidemment qu'abstraction : l'opération concerne toujours un domaine, volume de matière, souhaité aussi petit que possible, voisin du « point » considéré.

Quelles sont alors la signification physique et la pertinence de la notion de particule introduite comme base de la modélisation ? Une réponse à cette question pourra être formulée comme suit.

Conçue pour la ***prédiction***, la modélisation doit revêtir une forme mathématique, pour laquelle on recherche la simplicité maximale compatible avec une représentation convenable des phénomènes observés. La modélisation « milieu continu » présentée ci-dessus attache au point matériel, repéré par sa position géométrique dans κ_t par exemple, des grandeurs qui caractérisent l'évolution physique de la matière autour de ce point. C'est dire que ce point matériel ou particule recèle physiquement une « microstructure », dont on cherche à décrire au mieux l'évolution.

Dans la modélisation classique on considère que le champ de vitesse $\underline{U}$ suffit à décrire convenablement la cinématique de la microstructure attachée à la particule.

Dans certains cas on devra sortir de ce cadre. Ainsi par exemple on pourra introduire, outre le champ $\underline{U}$ de vitesse de la particule, un champ de vecteur-rotation, indépendant de $\underline{U}$, qui cherchera à traduire la rotation propre de la microstructure : un tel type de milieu continu tridimensionnel, non classique, sera examiné au chapitre V (section 5), tandis que le chapitre XI (section 3), traitant des milieux curvilignes, en fournira un exemple unidimensionnel dont les applications pratiques sont quotidiennes.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

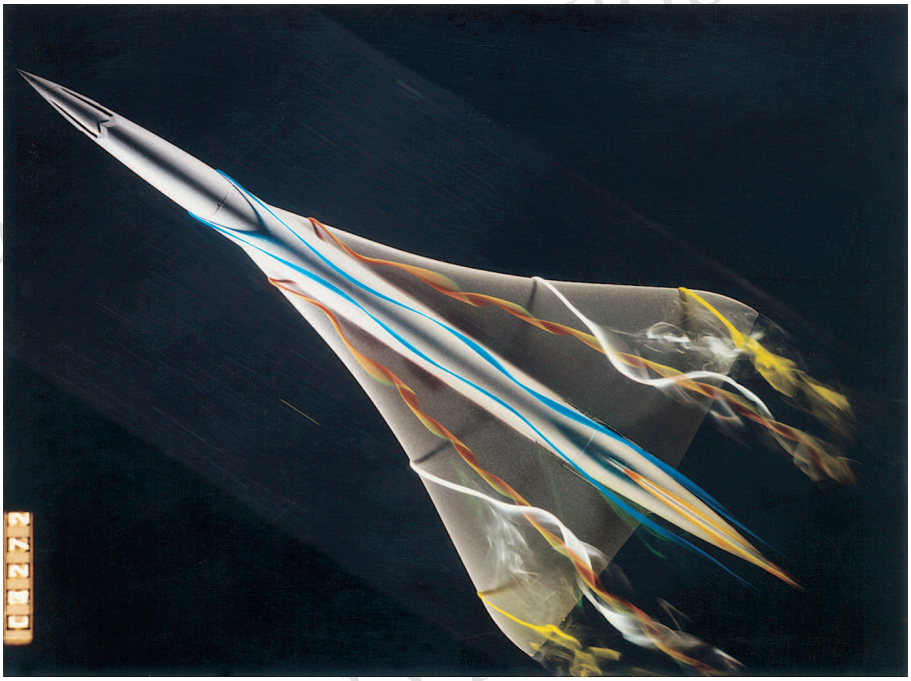
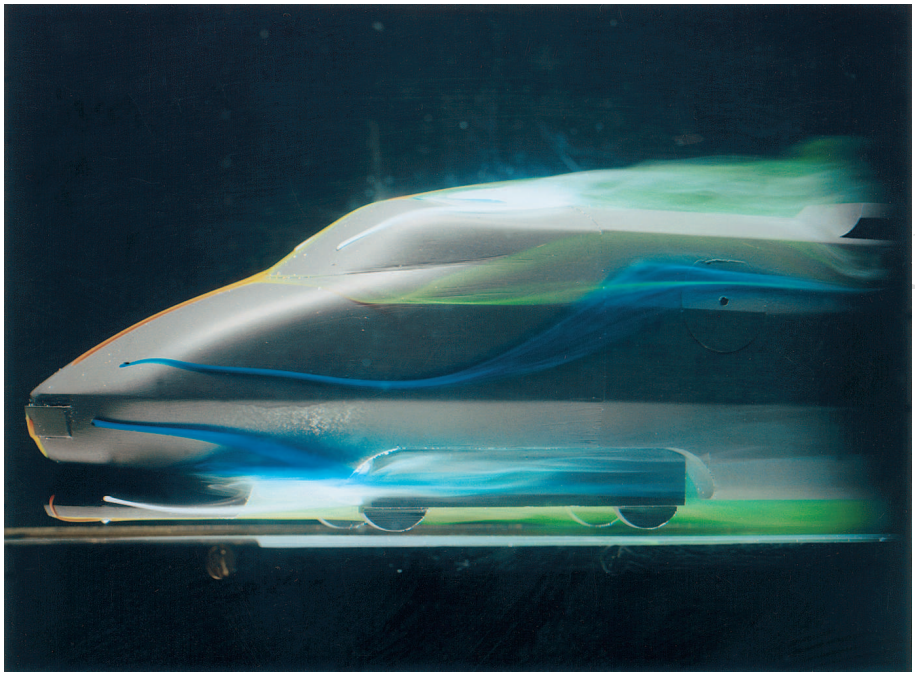


Figure 11 – Visualisations des écoulements aérodynamiques par analogie hydraulique en tunnel hydrodynamique avec émission de traceurs colorés. Ci-dessus : écoulement autour d'une maquette du Concorde en configuration d'atterrissage (extrados). Ci-dessous : écoulement autour d'une maquette de motrice à grande vitesse. (Documents communiqués par l'ONERA)



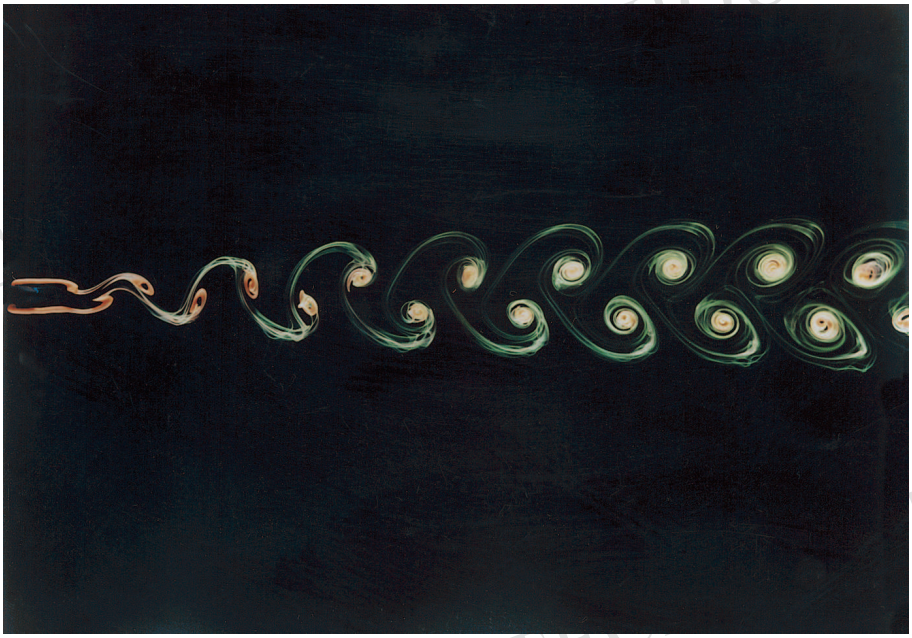


Figure 12 – Visualisation des écoulements en tunnel hydrodynamique par émission de traceurs colorés : tourbillons alternés du sillage d'une plaque mince sans incidence. (Document communiqué par l'ONERA)

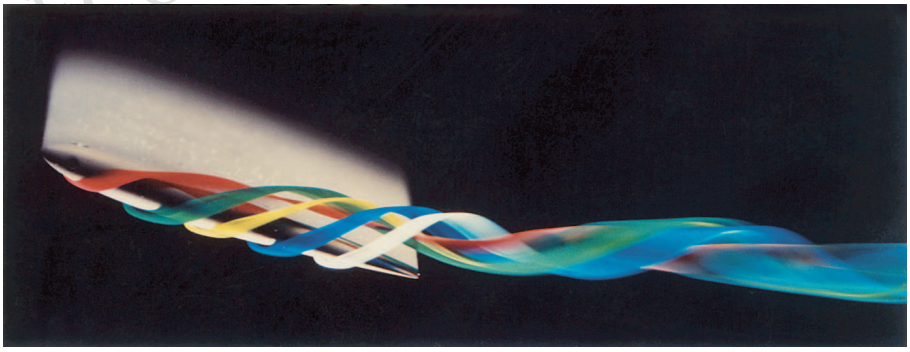


Figure 13 – Visualisation en tunnel hydrodynamique par émission de traceurs colorés : tourbillon marginal à l'extrémité d'une aile rectangulaire. (Document communiqué par l'ONERA)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Figure 14 – Visualisation en tunnel hydrodynamique ; méthode du plan de lumière pour la visualisation à l'aide de bulles d'air : écoulement à basse vitesse sur une maquette du Concorde en configuration d'atterrissage (coupe transversale arrière). (Document communiqué par l'ONERA)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Récapitulatif des formules essentielles

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- ***Lagrange***

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \qquad \text{(trajectoires)}$$

$$\underline{X} = \underline{\psi}(\underline{x}, t) = \underline{\phi}^{-1}(\underline{x}, t)$$

$$J(\underline{X}, t) = \frac{\mathrm{D}(x^1, x^2, x^3)}{\mathrm{D}(X^1, X^2, X^3)}$$

$$0 < J(\underline{X}, t) < \infty$$

$$\mathrm{d}\Omega_t = J(\underline{X}, t)\, \mathrm{d}\Omega_0$$

$$\underline{U}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}, t)}{\partial t}$$

- ***Euler***

$$\underline{U} = \underline{U}_t(\underline{x}, t)$$

trajectoires :

$$\frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} = \underline{U}_t(\underline{x}, t)$$

$$\underline{x}|_{t=0} = \underline{X}$$

lignes de courant à l'instant t ;

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{U_t^1(\underline{x}, t)} = \frac{\mathrm{d}x^2}{U_t^2(\underline{x}, t)} = \frac{\mathrm{d}x^3}{U_t^3(\underline{x}, t)}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Exercices

I.1 - Dans un repère cartésien orthonormé R d'un référentiel $\mathcal{R}$ on étudie le mouvement défini pour $t > 0$ par :

$$x_1 = X_1(1 + \alpha t) \ , \ x_2 = X_2 \ , \ x_3 = X_3 \ , \ \alpha > 0 \ .$$

Déterminer la vitesse et les trajectoires. Donner la représentation eulérienne du mouvement, déterminer les lignes de courant à l'instant $T > 0$.

Éléments de réponse :
On vérifie que $J(\underline{X}, t) = 1 + \alpha t$ est bien positif.
$U_1 = \alpha X_1 \ , \ U_2 = 0 \ , \ U_3 = 0.$
Trajectoires : droites parallèles à $\underline{e}_1$.
$U_1 = \alpha x_1/(1 + \alpha t) \ , \ U_2 = 0 \ , \ U_3 = 0 \ .$
Mouvement semi-permanent : lignes de courant identiques aux trajectoires.

Commentaire.
Il s'agit du mouvement d'extension simple.

I.2 - R étant un repère cartésien orthonormé dans le référentiel $\mathcal{R}$, on considère le mouvement défini pour $t > 0$ par :

$$x_1 = X_1 + \alpha t X_2 \ , \ x_2 = X_2 + \alpha t X_1 \ , \ x_3 = X_3 \ , \ \alpha > 0 \ .$$

Sur quel intervalle de temps ce mouvement est-il défini ? Déterminer les trajectoires. Donner la représentation eulérienne de ce mouvement.

Éléments de réponse :
$J(\underline{X}, t) = 1 - \alpha^2 t^2$: le mouvement n'est défini que pour $t < 1/\alpha$.
Trajectoires : droites parallèles au plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ si X_1 ou X_2 est différent de 0.
$U_1 = \alpha(x_2 - \alpha t x_1)/(1 - \alpha^2 t^2) \ , \ U_2 = \alpha(x_1 - \alpha t x_2)/(1 - \alpha^2 t^2) \ , \ U_3 = 0 \ .$

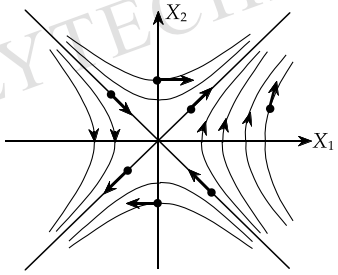
I.3 - Soit R un repère cartésien orthonormé dans un référentiel $\mathcal{R}$. On considère le mouvement défini par :

$$U_1 = \alpha x_2 \ , \ U_2 = \alpha x_1 \ , \ U_3 = 0 \ , \ \alpha > 0 \ .$$

Déterminer les lignes de courant à l'instant T. Donner la représentation lagrangienne du mouvement.

Éléments de réponse :
• Mouvement plan stationnaire. Les lignes de courant sont identiques aux trajectoires et sont indépendantes du temps ; hyperboles :

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = X_1^2 - X_2^2 \\ x_3 = X_3 \ . \end{cases}$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE

• Représentation lagrangienne.

Par intégration du système $\mathrm{d}x_1 = \alpha x_2\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x_2 = \alpha x_1\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x_3 = 0$, avec les conditions initiales $x_i = X_i$ pour $t = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 \mathrm{ch}\ \alpha t + X_2\ \mathrm{sh}\ \alpha t \\ x_2 &= X_1\ \mathrm{sh}\ \alpha t + X_2\ \mathrm{ch}\ \alpha t \\ x_3 &= X_3 \end{aligned}$$

(paramétrage en t des hyperboles ci-dessus).

I.4 - Houle « trochoïdale ». R étant un repère cartésien orthonormé dans le référentiel $\mathcal{R}$, on étudie le mouvement défini, à partir d'une configuration de référence abstraite, par la représentation lagrangienne :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_1 + R(a_2)\cos\big(\omega t + \lambda(a_1)\big) \\ x_2 = a_2 - R(a_2)\sin\big(\omega t + \lambda(a_1)\big) \\ x_3 = a_3 \\ a_2 < 0\ . \end{array} \right.$$

Déterminer les fonctions $R(a_2)$ et $\lambda(a_1)$ pour que ces équations représentent un mouvement sans variation de volume. Déterminer les trajectoires des particules dans le référentiel $\mathcal{R}$ et interpréter les « coordonnées lagrangiennes abstraites » a_i. Préciser les conditions pour que le mouvement soit effectivement défini $\forall(a_1, a_2 < 0, a_3)$. Montrer que ce mouvement est stationnaire dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'une vitesse de translation uniforme parallèle à $\underline{e}_1$ que l'on déterminera. Montrer que les lignes de courant dans $\mathcal{R}^*$ sont définies par les équations lagrangiennes : $a_2 =$ Constante $= \alpha_2$, $a_3 =$ Constante $= \alpha_3$.

Éléments de réponse :

• $J(a_1, a_2, a_3, t) = 1 - \big(\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a_1}R(a_2) + \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}a_2}\big)\sin\big(\omega t + \lambda(a_1)\big) + \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a_1}\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}a_2}R$ doit être indépendant de t.
D'où, k, α et R_0 étant des constantes arbitraires :
$\lambda = -ka_1 + \alpha$, $R = R_0\exp(k\,a_2)$.
(On fait $\alpha = 0$ par changement d'origine des temps).

• La trajectoire de la particule de coordonnées abstraites a_1, a_2, a_3, est le cercle :
$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = R_0^2\exp(2k\,a_2)$, $x_3 = a_3$ qui est décrit avec l'angle horaire $(\omega t - k\,a_1)$.
a_1, a_2, a_3 sont les coordonnées du centre du cercle trajectoire.

• $J(a_1, a_2, a_3, t) = 1 - k^2R_0^2\exp(2ka_2)$ doit conserver un signe constant et demeurer fini sur $\mathcal{D}_a$, défini ici par $a_2 < 0$; d'où : $k > 0$ et $R_0 < 1/k$ (on convient de choisir $R_0 > 0$).

• On considère $\mathcal{R}^*$ animé, par rapport à $\mathcal{R}$, de la vitesse $\underline{e}_1\omega/k$; on prend dans $\mathcal{R}^*$ le repère R^* coïncidant avec R pour $t = 0$. La vitesse $\underline{U}^*$ dans $\mathcal{R}^*$ s'écrit dans R^* :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1^* = -\omega R_0\big(\exp(ka_2)\big)\sin(\omega t - ka_1) - \omega/k \\ U_2^* = -\omega R_0\big(\exp(ka_2)\big)\cos(\omega t - ka_1) \\ U_3^* = 0 \end{array} \right.$$

tandis que $\underline{x}^* = \underline{\phi}^*(a_1, a_2, a_3, t)$ s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^* = a_1 - \dfrac{\omega t}{k} + R_0\big(\exp(ka_2)\big)\cos(\omega t - ka_1) \\ x_2^* = a_2 - R_0\big(\exp(ka_2)\big)\sin(\omega t - ka_1) \\ x_3^* = x_3 = X_3 = a_3\ . \end{array} \right.$$

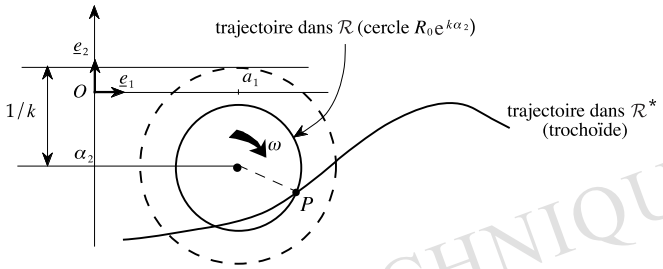
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Ces dernières équations montrent que (ka_2) et $(\omega t - ka_1)$ ne sont fonctions que de x_1^* et x_2^*. On en déduit que la représentation eulérienne du mouvement par rapport à $\mathcal{R}^*$ sera de la forme $\underline{U}^* = \underline{U}^*(\underline{x}^*)$, ***indépendante*** de t.

• À l'instant $T, (a_2 = \alpha_2, a_3 = \alpha_3)$ définissent dans R^* la courbe paramétrée en a_1, d'équations

$$\begin{cases} x_1^* = a_1 - \dfrac{\omega t}{k} + R_0\big(\exp(ka_2)\big)\cos(\omega T - ka_1) \\ x_2^* = a_2 - R_0\big(\exp(ka_2)\big)\sin(\omega T - ka_1) \\ x_3^* = a_3 \end{cases}$$

et on vérifie que $\underline{U}^*(\underline{x}^*)$ est tangente à cette courbe au point $\underline{x}^*$.



Commentaire.

Ces lignes de courant dans $\mathcal{R}^*$, identiques aux trajectoires, sont des trochoïdes. Une telle courbe est engendrée par un point géométrique P situé à la distance $R_0 \exp(k\alpha_2)$ du centre d'un cercle de rayon $1/k$ qui roule sans glisser sous l'horizontale d'ordonnée à l'origine $\alpha_2 + 1/k$ (composition du mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ et du mouvement d'entraînement de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}^*$ avec la vitesse $\underline{U}_e^* = -\underline{e}_1 \omega/k$).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Chapitre II

Étude des déformations du milieu continu

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MOTS CLÉS

Transport convectif.
Transformation. Gradient de la transformation.
Transformation homogène tangente.
Transformation rigidifiante. Isométrie.
Dilatations. Déformations. Déplacement.
Compatibilité géométrique.
Transformation infinitésimale.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En bref...

Dans une représentation lagrangienne, la comparaison entre la configuration actuelle et la configuration initiale, sans aucune référence à l'histoire intermédiaire du système considéré, introduit au plan géométrique deux concepts essentiels : le transport et la déformation.

***Le transport convectif*, dont l'exemple le plus simple est relatif à la particule ou point matériel, exprime la correspondance entre les positions actuelle et initiale des éléments matériels. La *déformation* dégage, localement, en quoi la transformation subie par le système d'une configuration à l'autre diffère d'une *isométrie directe* : elle mesure le changement de forme local** (section 1).

L'étude du cas particulier où le système subit une *transformation homogène*, c'est-à-dire identique en tout point, permet de se dégager d'abord du caractère local. La transformation est une application linéaire. Les formules de transport d'un point, d'un vecteur, d'une surface ou d'un volume matériels, font intervenir le tenseur euclidien associé à cette application linéaire (section 2).

La déformation, qui se réfère à la métrique, introduit pour cela le tenseur des *dilatations* et le tenseur des *déformations* qui permettent d'exprimer les variations de longueurs et les variations angulaires. On met en évidence que la transformation du système se compose de deux contributions : la *déformation pure* qui est une affinité selon les trois directions principales orthogonales de la déformation, et une *rotation* (section 3).

Le cas général où la transformation du système est quelconque fait appel à la notion de *transformation homogène tangente* ; celle-ci est définie par le tenseur gradient de la fonction vectorielle qui exprime le transport convectif de la particule : *c'est le gradient de la transformation*. L'idée directrice est que, localement, la transformation subie par l'élément infinitésimal est, en chaque point, quasi homogène : on définit, pour les éléments infinitésimaux de longueur, de surface ou de volume, les mêmes concepts qu'en transformation homogène pour les éléments finis, avec les formules homologues (section 4).

Lorsque la transformation est infinitésimale les formules se simplifient par *linéarisation* (section 5).

Concrètes et mesurables, les déformations sont, pour le mécanicien, la voie d'accès à l'analyse des structures et à l'identification des caractéristiques des matériaux (section 7).

Les déformations sont engendrées par des sollicitations extérieures mécaniques, thermiques, hygrométriques, par des évolutions chimiques et des réorganisations structurelles, etc. Le problème de leur *compatibilité géométrique* se pose alors : savoir si ces déformations sont compatibles avec la continuité du milieu et avec les conditions éventuellement imposées sur les déplacements au contour du système étudié. Lorsque les déformations imposées ne sont pas compatibles, elles induisent des efforts intérieurs qui, s'ils sont excessifs, peuvent entraîner des désordres, voire des ruptures (section 6).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Principales notations

Notation	Signification	1ère formule
$\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$	gradient de la transformation	(4.7)
$\underline{\mathrm{d}M_0}, \mathrm{d}s_0$	vecteur élémentaire dans κ_0 , $\mathrm{d}s_0 = \lvert\, \underline{\mathrm{d}M_0}\,\rvert$	(4.8)
$\underline{\mathrm{d}M}, \mathrm{d}s$	vecteur élémentaire dans κ_t , $\mathrm{d}s = \lvert\, \underline{\mathrm{d}M}\,\rvert$	(4.8)
$\underline{\mathrm{d}A} = \underline{N}\,\mathrm{d}A$	vecteur-aire élémentaire dans κ_0	(4.13)
$\underline{\mathrm{d}a} = \underline{n}\,\mathrm{d}a$	vecteur-aire élémentaire dans κ_t	(4.13)
$\underline{\underline{C}}(\underline{X},t)$	tenseur des dilatations	(4.14)
$\underline{\underline{e}}(\underline{X},t)$	tenseur des déformations de Green-Lagrange	(4.15)
$\underline{\xi}(\underline{X},t)$	déplacement	(4.16)
$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$	tenseur des déformations linéarisé	(5.2)
∇	gradient dans κ_0	(5.11)
grad	gradient dans κ_t	(5.11)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Transport, transformation, déformation 45
2 Transport convectif en transformation homogène 46
2.1 Transformation homogène 46
2.2 Vecteur matériel, transport convectif 47
2.3 Transport d'un volume, dilatation volumique 48
2.4 Transport d'une surface orientée 50
3 Déformation en transformation homogène 51
3.1 Tenseur des dilatations 51
3.2 Utilisation du tenseur des dilatations 53
3.3 Tenseur des déformations de Green-Lagrange 55
3.4 Décomposition polaire 57
4 Déformation d'un milieu continu : cas général 58
4.1 Transformation homogène tangente 58
4.2 Formules de transport 59
4.3 Déformations 60
4.4 Déplacement 61
4.5 Décomposition polaire et transformation rigidifiante . . . 62
4.6 Objectivité 63
5 Transformation infinitésimale 63
5.1 Définition 63
5.2 Tenseur des déformations linéarisé 63
5.3 Gradient d'un champ de tenseurs sur la configuration actuelle 64
6 Compatibilité géométrique d'un champ de déformation linéarisée 65
6.1 Position du problème 65
6.2 Conditions de compatibilité 66
6.3 Commentaires 69
6.4 Application 70
7 Remarques finales 71
7.1 Transformation et déformation 71
7.2 Utilisation d'un paramétrage lagrangien relatif à une configuration abstraite 72
7.3 Étude pratique des déformations 72
Récapitulatif des formules essentielles 76
Exercices 79

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Étude des déformations du milieu continu

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Transport, transformation, déformation

La figure 1 montre, pour le processus de matriçage déjà présenté sur la figure 2 du chapitre I, deux étapes de l'évolution du bloc soumis à cette mise en forme :

- dans l'état initial (configuration κ_0) le bloc est rectangulaire, marqué d'un quadrillage carré,
- dans l'état actuel (configuration κ_t) l'enfoncement de la matrice a provoqué le refoulement du matériau à la base et en partie supérieure nécessaire au formage ; le quadrillage est déformé.

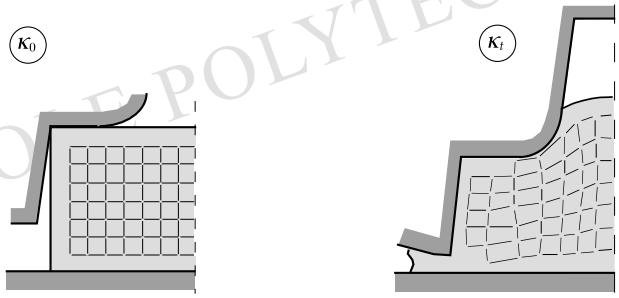


Figure 1 – Matriçage d'un bloc de plasticine. (Le Douaron, Thèse 1977, CEMEF)

C'est typiquement à la comparaison géométrique entre deux tels clichés, indépendamment des positions intermédiaires, qu'est consacré ce chapitre : trois concepts peuvent d'ores et déjà être dégagés.

Le ***transport convectif*** ou transport par le mouvement, déjà introduit au chapitre I (section 3), qui exprime que la position d'une même particule dans le référentiel $\mathcal{R}$ est différente dans les configurations κ_0 et κ_t. La fonction vectorielle $\underline{\phi}$, à $\underline{X}$ et t fixés, explicite le transport convectif de la particule $\underline{X}$ entre κ_0 et κ_t :

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)\,; \tag{1.1}$$

c'est la notion de point ***matériel***. On s'attachera à formuler le transport convectif pour d'autres éléments matériels simples.

La ***transformation*** subie par le système étudié (c'est-à-dire le bloc), ou par une partie de celui-ci, entre κ_0 et κ_t, est définie du point de vue géométrique par la fonction

$\underline{\phi}$ à t fixé, $\underline{X}$ parcourant le volume Ω_0 occupé par le système $\mathcal{S}$ dans κ_0.

La ***déformation*** entre κ_0 et κ_t retient, dans la transformation, le changement de forme c'est-à-dire en quoi la transformation géométrique subie par le système entre κ_0 et κ_t diffère d'une ***isométrie directe.***

Il est essentiel de retenir que c'est bien de la comparaison géométrique entre deux clichés, l'un choisi comme référence κ_0, l'autre choisi comme transformé κ_t, qu'il s'agit sans aucunement faire appel à la connaissance du processus intermédiaire. L'argument t dans (1.1) ou dans κ_t est un paramètre et non une variable.

On a choisi, pour les formules apparaissant dans cet ouvrage, de mettre en valeur l'expression ***intrinsèque*** faisant intervenir les « êtres » vectoriels, tensoriels, ... euclidiens (on rappelle que les ***notations*** correspondantes sont définies dans l'annexe I, section 5).

2 Transport convectif en transformation homogène

2.1 Transformation homogène

Il apparaît, sur l'exemple de la figure 1, que la déformation du marquage quadrillé entre les configurations κ_0 et κ_t n'est pas identique en tout point : étirement vertical au voisinage de l'axe, aplatissement près des bords. Il en résulte, intuitivement, que l'étude proposée ci-dessus du transport, de la transformation et de la déformation aura, en général, de façon naturelle un caractère local.

On se propose, dans une première approche, de s'intéresser au cas simple de la ***transformation homogène***, dans laquelle tous les éléments du marquage sont déformés de façon identique (figure 2).

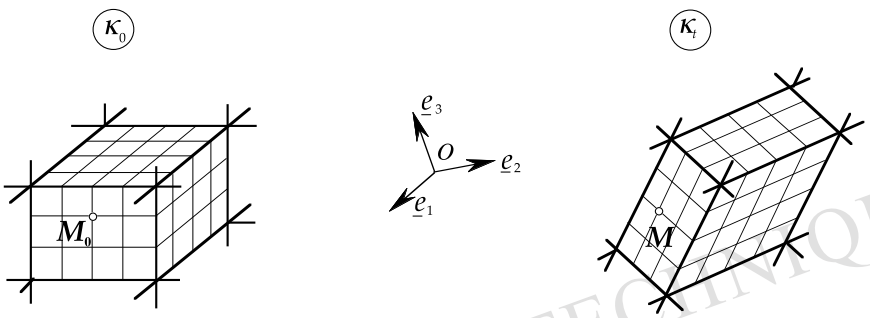


Figure 2 – Transformation homogène entre κ_0 et κ_t

Afin de formuler mathématiquement cette notion, on choisit un repère R quelconque $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ du référentiel $\mathcal{R}$ dans lequel sont observées les configurations κ_0 et κ_t. Les notations $\underline{M}_0, \underline{M}, X^i, \underline{X}, x^i, \underline{x}$, ayant les mêmes significations qu'au chapitre I (§ 2.3) la transformation homogène entre κ_0 et κ_t est définie par le fait que $\underline{\phi}$ dans

(1.1) s'explicite comme une correspondance affine entre les coordonnées X^j et x^i :

$$x^i = F^i{}_j(t)X^j + c^i(t) \qquad i = 1,2,3 \text{ (1)} . \tag{2.1}$$

Considérant alors l'application linéaire de l'espace euclidien (référentiel $\mathcal{R}$) sur lui-même définie par les $F^i{}_j(t)$ dans le repère R, le tenseur euclidien du second ordre qui lui est associé s'écrit :

$$\underline{\underline{F}}(t) = F^i{}_j(t)\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \tag{2.2}$$

et la formule (2.1) prend la forme intrinsèque

$$\underline{x} = \underline{\underline{F}}(t) \,.\, \underline{X} + \underline{c}(t) \tag{2.3}$$

où $\underline{c}(t)$ désigne le vecteur $c^i(t)\, \underline{e}_i$.

La fonction $\underline{\phi}$ ainsi définie par (2.3) vérifie évidemment les conditions de continuité et différentiabilité par rapport à $\underline{X}$ souhaitées au chapitre I (§ 3.2). Elle doit de plus satisfaire la condition :

$$0 < J(\underline{X}, t) = \frac{\mathrm{D}(x^1, x^2, x^3)}{\mathrm{D}(X^1, X^2, X^3)} < \infty .$$

Ici il apparaît que :

$$J(\underline{X}, t) = \det \underline{\underline{F}}(t) \tag{2.4}$$

d'ou la condition

$$0 < \det \underline{\underline{F}}(t) < \infty \tag{2.5}$$

qui assure, en fait, la ***bijectivité*** de l'application $\underline{\phi}$.

2.2 Vecteur matériel, transport convectif

On considère (figure 3) l'ensemble des particules occupant dans la configuration de référence un segment M_0M_0'. En raison du caractère affine de la relation (2.3), ces particules occupent à l'instant t, un segment MM'. On peut donc parler, au sens introduit au paragraphe 3.2 du chapitre I, de ***vecteur matériel*** : le vecteur $\underline{M_0M_0'}$, dans son transport par le mouvement entre les configurations κ_0 et κ_t, demeure un vecteur.

En désignant par $\underline{V}$ un vecteur $\underline{M_0M_0'}$ de κ_0, par $\underline{v}$ le vecteur correspondant $\underline{MM'}$ de κ_t, le transport par le mouvement reliant $\underline{v}$ à $\underline{V}$ s'écrit à partir de (2.3) :

$$\underline{v} = \underline{\underline{F}}(t) \,.\, \underline{V} \tag{2.6}$$

qui exprime le ***transport convectif d'un vecteur*** dans une transformation homogène.

(1) Convention de sommation sur les indices répétés.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

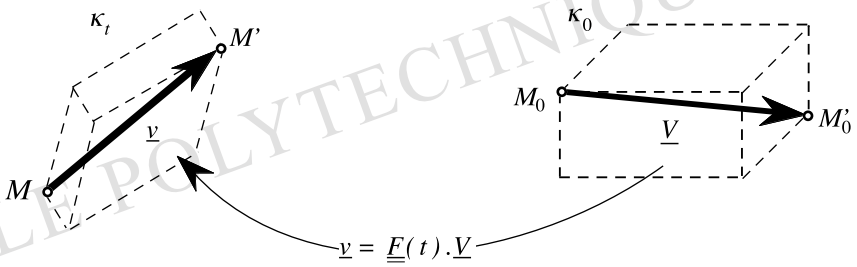


Figure 3 – Transformation homogène : transport convectif d'un vecteur

Il peut se révéler commode de choisir dans $\mathcal{R}$, pour décomposer $\underline{V}$ dans κ_0 et $\underline{v}$ dans κ_t, des bases différentes : $\underline{e}_J$ $(J = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})$ pour $\underline{V}$ et $\underline{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ pour $\underline{v}$. La formule intrinsèque (2.6) est évidemment inchangée ; elle s'explicite sous la forme :

$$\text{(2.7)} \qquad \begin{cases} \underline{V} = V^J \underline{e}_J \ , \ \underline{v} = v^i \underline{e}_i \\ \underline{\underline{F}}(t) = F^i{}_J(t)\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^J \ . \end{cases}$$

Certains auteurs recommandent l'usage systématique de cette écriture, même lorsque les bases pour $\underline{V}$ dans κ_0 et pour $\underline{v}$ dans κ_t sont identiques, afin de mieux distinguer les configurations concernées.

2.3 Transport d'un volume, dilatation volumique

Le caractère affine de la relation (2.3) implique que toute variété linéaire dans κ_0, est, dans son transport par le mouvement, transformée en une variété linéaire du même ordre dans κ_t.

Considérons (figure 4) un parallélépipède de κ_0 défini par un sommet M_0, et trois vecteurs indépendants $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$. Son homologue dans la configuration κ_t, par le transport convectif est le parallélépipède de sommet M, défini par les vecteurs $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ déduits de $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ par le transport convectif (2.6).

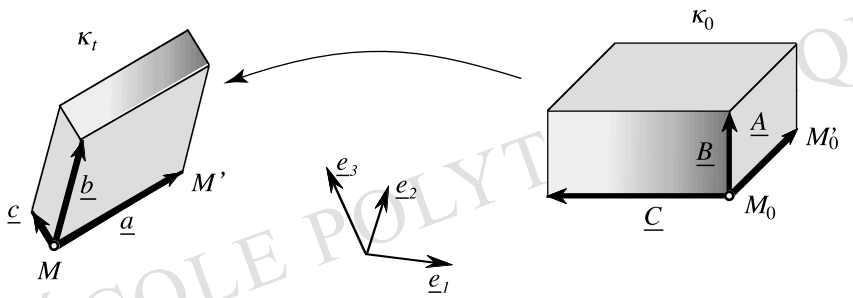


Figure 4 – Transformation homogène : transport convectif d'un volume

On se propose d'établir la relation entre les volumes Ω_0 et Ω_t de ces deux parallélépipèdes.

On introduit pour cela les tenseurs du second ordre [2]

$$\underline{\underline{F}}_A = \underline{A} \otimes \underline{e}^1 + \underline{B} \otimes \underline{e}^2 + \underline{C} \otimes \underline{e}^3$$
$$\underline{\underline{F}}_a = \underline{a} \otimes \underline{e}^1 + \underline{b} \otimes \underline{e}^2 + \underline{c} \otimes \underline{e}^3$$

qui, compte tenu de (2.6), sont liés par la relation :

$$\underline{\underline{F}}_a = \underline{\underline{F}}(t) \,.\, \underline{\underline{F}}_A \ . \tag{2.8}$$

On en déduit que :

$$\det \underline{\underline{F}}_a = \det \underline{\underline{F}}(t) \times \det \underline{\underline{F}}_A \ . \tag{2.9}$$

Il est alors commode de choisir pour $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ une base orthonormée. Dans ce cas on reconnaît en $\det \underline{\underline{F}}_a$ et $\det \underline{\underline{F}}_A$ les produits mixtes $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ et $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$, égaux aux volumes algébriques Ω_t et Ω_0 des parallélépipèdes dans κ_t et κ_0 [3]

$$\begin{cases} \det \underline{\underline{F}}_a = \Omega_t \\ \det \underline{\underline{F}}_A = \Omega_0 \ . \end{cases} \tag{2.10}$$

On obtient ainsi, en regroupant (2.9) et (2.10) la relation entre les deux volumes homologues par le transport convectif dans une transformation homogène :

$$\Omega_t = \Omega_0 \det \underline{\underline{F}}(t) \ . \tag{2.11}$$

Le résultat ainsi établi s'étend évidemment au cas d'un volume Ω_0 de ***forme quelconque dans*** κ_0 puisque la transformation est homogène.

$J(t) = \det \underline{\underline{F}}(t)$ est la ***dilatation volumique*** dans la transformation homogène entre les configurations initiale et actuelle. [4] [5]

On retrouve bien l'interprétation donnée au chapitre I (§ 3.2) de la condition (2.5) imposée à $J(\underline{X}, t) = \det \underline{\underline{F}}(t)$: conservation de l'orientation du volume entre κ_0 et κ_t et dilatation volumique ni nulle, ni infinie.

---

[2] L'interprétation géométrique de ces tenseurs est évidente : leurs applications linéaires associées transforment le trièdre de base $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ respectivement en les trièdres $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ et $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.

[3] Si la base n'est pas orthonormée ces deux déterminants sont proportionnels à Ω_0 et Ω_t.

[4] Bien noter que la dilatation volumique désigne le rapport « volume actuel/volume initial » et non le rapport « variation de volume/volume initial ».

[5] Si $\underline{\underline{F}}(t)$ est décomposé selon (2.7), le calcul de $\det \underline{\underline{F}}(t)$ nécessite évidemment d'exprimer l'une des bases $\{\underline{e}_i\}$ ou $\{\underline{e}_J\}$ en fonction de l'autre : $\underline{e}_i = \alpha_i^K \underline{e}_K$. On a alors : $\det \underline{\underline{F}}(t) = \det[\alpha_i^K F^i{}_J(t)]$. On peut remarquer que si les deux bases sont orthonormées et de même orientation on a toujours $\det \underline{\underline{F}}(t) = \det[F^i{}_J(t)]$. Ce résultat est valable de façon générale si $\{\underline{e}_i\}$ et $\{\underline{e}_J\}$ se correspondent par une rotation. L'utilisation de la formule (3.5) du paragraphe 3.1 pourra aussi se révéler commode dans certains cas.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

2.4 Transport d'une surface orientée

On examine maintenant le transport convectif d'un élément matériel bidimensionnel : particules occupant une ***surface plane*** d'aire A dans κ_0. Cette surface, par le transport convectif, devient une surface plane d'aire a dans κ_t. Il y a, dans ce transport, variation de l'aire et variation de l'orientation de la surface dans le référentiel $\mathcal{R}$: c'est ce que l'on souhaite expliciter.

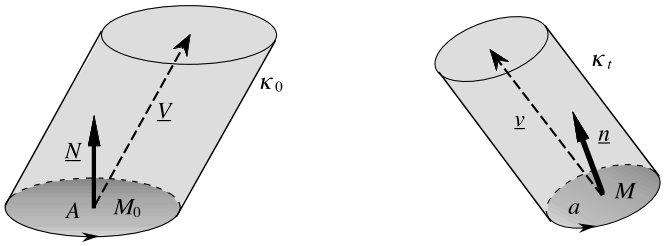


Figure 5 – Transformation homogène : transport d'un vecteur-aire

Soit $\underline{N}$ le vecteur unitaire normal à la surface A dans κ_0. On pose :

$$\underline{A} = A\,\underline{N} \tag{2.12}$$

qui est appelé le « vecteur-aire » de cette surface dans la configuration κ_0.

$\underline{V}$ étant un vecteur quelconque dans κ_0, on considère le volume cylindrique engendré par la surface A comme base et le vecteur $\underline{V}$ (figure 5). Sa mesure est donnée par la formule :

$$\Omega_0(A\,,\,\underline{N}\,,\,\underline{V}) = \underline{A}\,.\,\underline{V}\,. \tag{2.13}$$

Le volume homologue de celui-ci par le transport convectif dans la configuration κ_t est défini par la surface transportée a et le vecteur transporté $\underline{v}$. En choisissant l'orientation de $\underline{n}$, vecteur unitaire normal à a, de telle sorte que les produits scalaires $\underline{N}\,.\,\underline{V}$ et $\underline{n}\,.\,\underline{v}$ aient le même signe [6] on a :

$$\Omega_t(a, \underline{n}, \underline{v}) = \underline{a}\,.\,\underline{v} \tag{2.14}$$

où l'on a posé

$$\underline{a} = a\,\underline{n}\,. \tag{2.15}$$

Par ailleurs la formule (2.11) donne la relation entre les volumes Ω_0 et Ω_t, homologues dans le transport convectif :

$$\Omega_t(a, \underline{n}, \underline{v}) = \det \underline{\underline{F}}(t)\,\Omega_0(A, \underline{N}, \underline{V})\,. \tag{2.16}$$

[6] Ce choix est indépendant de $\underline{V}$. Il signifie que l'on conserve l'orientation transversale de la surface : une courbe fermée, tracée sur A, orientée autour de $\underline{N}$, est transportée sur a en une courbe fermée ayant la même orientation autour de $\underline{n}$ (figure 5).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En regroupant alors les formules (2.6), (2.13), (2.14) et (2.16), il vient :

$$\forall \underline{V}\ ,\ \underline{a}\,.\,\underline{\underline{F}}(t)\,.\,\underline{V} = (\det \underline{\underline{F}}(t))\,\underline{A}\,.\,\underline{V} \tag{2.17}$$

d'où :

$$\underline{a} = (\det \underline{\underline{F}}(t))\ {}^{t}\underline{\underline{F}}^{-1}(t)\,.\,\underline{A} \tag{2.18}$$

qui exprime le transport d'une surface orientée dans une transformation homogène.

3 Déformation en transformation homogène

3.1 Tenseur des dilatations

On se propose d'étudier les déformations subies par la géométrie du système dans la transformation homogène entre la configuration κ_0 et la configuration κ_t. Intuitivement la notion de ***déformation*** s'oppose à celle d'isométrie, et plus précisément d'***isométrie directe*** (produit dans $\mathbb{R}^3$ de translations et de rotations) : il n'y a pas de déformation du système dans la transformation de κ_0 et κ_t si les distances entre les positions géométriques des points matériels dans ces deux configurations sont invariantes et si l'orientation est conservée.

Cette idée sera exploitée dans la suite, notamment au paragraphe 3.4 où l'on verra par la « décomposition polaire », qu'un domaine entourant M_0 dans κ_0 subit, dans son transport convectif dans κ_t, outre la translation amenant M_0 en M, deux transformations de natures différentes : une déformation pure et une rotation.

Afin de mettre en évidence l'aspect « déformation » du système entre κ_0 et κ_t, qui se réfère à la métrique, on va s'intéresser à l'évolution du produit scalaire de deux vecteurs matériels quelconques considérés dans les configurations κ_0 et κ_t.

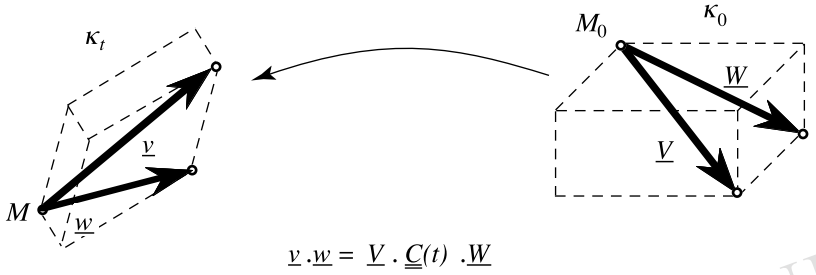


Figure 6 – Transformation homogène : tenseur des dilatations

Soient $\underline{V}$ et $\underline{W}$ deux vecteurs dans κ_0 en M_0 (figure 6) ; $\underline{v}$ et $\underline{w}$ les vecteurs transportés convectivement en M dans κ_t (vecteurs matériels) :

$$\underline{v} = \underline{\underline{F}}(t)\,.\,\underline{V}\ ,\ \ \underline{w} = \underline{\underline{F}}(t)\,.\,\underline{W}\ .$$

Le produit scalaire des vecteurs $\underline{v}$ et $\underline{w}$ s'écrit :

$$\underline{v}\,.\,\underline{w} = (\underline{\underline{F}}(t)\,.\,\underline{V})\,.\,(\underline{\underline{F}}(t)\,.\,\underline{W})\ ,$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

soit (cf. annexe I, § 5.7) :

$$\underline{v}\,.\,\underline{w} = (\underline{V}\,.\,{}^t\underline{\underline{F}}(t))\,.\,(\underline{\underline{F}}(t)\,.\,\underline{W}) = \underline{V}\,.\,({}^t\underline{\underline{F}}(t)\,.\,\underline{\underline{F}}(t))\,.\,\underline{W}\,. \tag{3.1}$$

Cette formule met en évidence le tenseur du deuxième ordre

$$\underline{\underline{C}}(t) = {}^t\underline{\underline{F}}(t)\,.\,\underline{\underline{F}}(t) \tag{3.2}$$

qui est appelé ***tenseur des dilatations*** entre les configurations κ_0 et κ_t, ou encore « tenseur de Cauchy » [7]. Il permet d'exprimer le produit scalaire des vecteurs transportés en fonction des vecteurs initiaux :

$$\underline{v}\,.\,\underline{w} = \underline{V}\,.\,\underline{\underline{C}}(t)\,.\,\underline{W}\,. \tag{3.3}$$

Le tenseur $\underline{\underline{C}}(t)$ apparaît ainsi sur κ_0, pour le produit scalaire des vecteurs transportés dans κ_t, comme l'homologue du tenseur métrique $\underline{\underline{\mathbb{1}}}$ qui permet, lui, d'exprimer le produit scalaire des vecteurs initiaux (cf. annexe I, (5.50)) :

$$\underline{V}\,.\,\underline{W} = \underline{V}\,.\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}\,.\,\underline{W}\,. \tag{3.4}$$

$\underline{\underline{C}}(t)$ est symétrique, comme on le vérifie sur (3.2) : la forme bilinéaire (3.3) est symétrique. La forme quadratique qui lui est associée est définie positive puisque $\underline{\phi}$ donnée par (2.3) est bijective :

$$\forall \underline{V}\ ,\ \underline{V}\,.\,\underline{\underline{C}}(t)\,.\,\underline{V} = |\underline{v}|^2 \geq 0\ ;\ \underline{V}\,.\,\underline{\underline{C}}(t)\,.\,\underline{V} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{V} = 0\ .$$

On a de plus, à partir de (3.2) et compte tenu de (2.5) qui assure la bijectivité de (2.3) :

$$0 < \det \underline{\underline{C}}(t) = \left(\det \underline{\underline{F}}(t)\right)^2 < \infty\ . \tag{3.5}$$

Si la base $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ est orthonormée (cf. annexe I, § 5.9) on a :

$$\underline{\underline{C}}(t) = C_{ij}(t)\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

avec

$$C_{ij}(t) = F_{ki}(t)F_{kj}(t)\ .$$

En base quelconque, la représentation « la plus naturelle » de $\underline{\underline{C}}(t)$ à partir de la formule de définition (3.3) est la représentation deux fois covariante :

$$\underline{\underline{C}}(t) = C_{ij}(t)\,\underline{e}^i \otimes \underline{e}^j\ ;$$

en explicitant la formule (3.2) avec la représentation naturelle de $\underline{\underline{F}}(t)$ donnée par (2.2) il vient :

$$C_{ij}\,\underline{e}^i \otimes \underline{e}^j = (F^k{}_i\,\underline{e}^i \otimes \underline{e}_k)\,.\,(F^\ell{}_j\,\underline{e}_\ell \otimes \underline{e}^j)$$

d'où

$$\begin{aligned} C_{ij} &= (\underline{e}_k\,.\,\underline{e}_\ell)F^k{}_i F^\ell{}_j \\ C_{ij} &= g_{k\ell}F^k{}_i F^\ell{}_j\ . \end{aligned}$$

Si, comme évoqué au paragraphe 2.2, on utilise des bases différentes dans κ_0 et κ_t la formule (3.2) s'explicite en :

$$\underline{\underline{C}}(t) = (F^k{}_I\,\underline{e}^I \otimes \underline{e}_k)\,.\,(F^\ell{}_J\,\underline{e}_\ell \otimes \underline{e}^J)$$

$$\text{soit encore} \quad \underline{\underline{C}}(t) = C_{IJ}(t)\,\underline{e}^I \otimes \underline{e}^J \qquad \text{avec} \quad C_{IJ} = (\underline{e}_k\,.\,\underline{e}_\ell)\,F^k{}_I F^\ell{}_J\ .$$

[7] A. Cauchy (1789-1857).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

3.2 Utilisation du tenseur des dilatations

Le tenseur des dilatations recèle toutes les informations concernant la différence de métrique entre κ_0 et κ_t.

Dilatation dans une direction

Il s'agit de comparer la longueur d'un vecteur $\underline{V}$ dans la configuration initiale κ_0 et la longueur de son transporté dans la configuration κ_t, comme cela est courant dans la pratique expérimentale (cf. figure 12).

En faisant dans (3.3), $\underline{V} = \underline{W}$, on obtient :

$$|\underline{v}|^2 = \underline{V} \cdot \underline{\underline{C}}(t) \cdot \underline{V} \, .$$

On appelle ***dilatation dans la direction*** $\underline{V}$ le rapport :

$$\lambda(\underline{V}) = \frac{|\underline{v}|}{|\underline{V}|} = \frac{(\underline{V} \cdot \underline{\underline{C}}(t) \cdot \underline{V})^{1/2}}{|\underline{V}|} \, . \tag{3.6}$$

$\lambda(\underline{V})$ représente le rapport de la longueur du vecteur transporté $\underline{v}$ à celle du vecteur $\underline{V}$ dans la configuration initiale κ_0, (la signification donnée ici au mot « dilatation » est bien cohérente avec celle du paragraphe 2.3). $\lambda(\underline{V})$ est strictement positif et fini.

L'***allongement unitaire*** dans la direction $\underline{V}$ est défini par :

$$\delta(\underline{V}) = (|\underline{v}| - |\underline{V}|) \, / \, |\underline{V}| = \lambda(\underline{V}) - 1 \, . \tag{3.7}$$

À noter que si $\underline{V}$ est dirigé selon le vecteur unitaire $\underline{e}_1$, d'une base quelconque on a :

$$\lambda(\underline{V}) = \sqrt{C_{11}} \, .$$

Glissement dans un couple de directions orthogonales

La variation de la métrique induit évidemment des variations angulaires. On s'intéresse en particulier à la variation de l'angle de deux vecteurs matériels initialement ***orthogonaux*** (cf. figure 14 pour une transformation quelconque).

$\underline{V}$ et $\underline{W}$ étant deux vecteurs dans κ_0, orthogonaux entre eux en M_0 (figure 7), on définit le glissement θ de ce couple de directions orthogonales dans la transformation entre κ_0 et κ_t comme l'***opposé*** de la variation de l'angle qu'elles forment :

$$\theta = |(\underline{V}, \underline{W})| - |(\underline{v}, \underline{w})| \, , \; |(\underline{v}, \underline{w})| = \pi/2 - \theta \, . \tag{3.8}$$

On a alors par (3.3) :

$$\sin\theta = \frac{\underline{V} \cdot \underline{\underline{C}}(t) \cdot \underline{W}}{(\underline{V} \cdot \underline{\underline{C}}(t) \cdot \underline{V})^{1/2} (\underline{W} \cdot \underline{\underline{C}}(t) \cdot \underline{W})^{1/2}} \, . \tag{3.9}$$

Cette formule peut avantageusement être écrite en composantes en choisissant une base dont les vecteurs unitaires $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ sont dirigés selon $\underline{V}$ et $\underline{W}$ orthogonaux. Il vient :

$$\sin\theta = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11} C_{22}}} \, . \tag{3.10}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Figure 7 – Transformation homogène : glissement θ dans κ_t, pour un couple de directions orthogonales dans κ_0

Directions principales, dilatations principales

Les directions principales de $\underline{\underline{C}}(t)$, tenseur euclidien symétrique réel, sont définies comme indiqué dans l'annexe I (§ 5.10). Ce sont les directions propres de l'application linéaire associée à $\underline{\underline{C}}(t)$. Il s'agit donc de trois directions orthogonales entre elles dans la configuration κ_0 .

En choisissant alors une ***base orthonormée*** $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ dirigée selon les ***directions principales*** et en désignant par $C_i (i = 1, 2, 3)$ les valeurs principales de $\underline{\underline{C}}(t)$, on obtient l'expression simple (toutes les représentations de $\underline{\underline{C}}(t)$ coïncident) :

$$\underline{\underline{C}}(t) = C_1\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + C_2\, \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + C_3\, \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \ ; \tag{3.11}$$

dans cette base la matrice $\tilde{\underline{\underline{C}}}(t)$ de $\underline{\underline{C}}(t)$ est ***diagonale*** [8].

Les valeurs principales de $\underline{\underline{C}}(t)$ sont toutes trois strictement positives car la forme quadratique $\underline{V} \,.\, \underline{\underline{C}}(t) \,.\, \underline{V} = |\underline{v}|^2$ est définie positive. On convient de poser :

$$C_i = \lambda_i^2 \ , \ \lambda_i > 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{3.12}$$

où l'on voit par (3.6) que :

$$\lambda_i = \lambda(\underline{e}_i) \ ,$$

c'est-à-dire que λ_i représente la dilatation dans la direction principale $\underline{e}_i$. Pour cette raison les λ_i sont appelées ***dilatations principales***.

En appliquant la formule (3.10) aux directions principales prises deux à deux on met en évidence leur propriété géométrique essentielle. En effet, en conséquence de la diagonalisation de $\tilde{\underline{\underline{C}}}(t)$ manifestée par (3.11), on trouve que pour tout couple de directions principales de $\underline{\underline{C}}(t)$ on a : $\sin\theta = 0$. Autrement dit, il n'y a pas de glissement dans le transport convectif entre κ_0 et κ_t pour les directions principales

[8] La méthode générale de détermination des directions principales consiste à rechercher les directions propres de $\underline{\underline{C}}(t)$ sur une représentation mixte, par exemple contravariante-covariante. En pratique, il sera souvent plus avantageux de choisir une base orthonormée quelconque, (dans laquelle toutes les représentations coïncident), et de chercher à diagonaliser $\tilde{\underline{\underline{C}}}(t)$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

de $\underline{\underline{C}}(t)$. De plus, compte tenu de la positivité de $\det \underline{\underline{F}}(t)$, le trièdre trirectangle des directions transportées dans κ_t a ***même orientation*** que le trièdre initial des directions principales dans κ_0.

Réciproquement, tout ***trièdre*** de directions orthogonales dans κ_0 qui demeure orthogonal (et de même orientation) dans le transport convectif entre κ_0 et κ_t est un trièdre de directions principales pour $\underline{\underline{C}}(t)$. En effet, en choisissant une base orthonormée dans κ_0 selon les directions considérées, on trouve par (3.10) que la matrice $\tilde{\underline{\underline{C}}}(t)$ dans cette base est diagonale.

La propriété est donc caractéristique des directions principales. Elle fournit un moyen commode pour leur détermination expérimentale (figure 14) ou géométrique.

> ***Les directions principales de $\underline{\underline{C}}(t)$ dans la configuration κ_0 sont transportées convectivement dans κ_t selon des directions orthogonales.***

On a évidemment :

$$\det \underline{\underline{C}}(t) = \lambda_1^2\,\lambda_2^2\,\lambda_3^3\,,$$

d'où, en application de (2.5) et (3.5), le résultat

$$\det \underline{\underline{F}}(t) = \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$$

qui est immédiat géométriquement si l'on considère le transport convectif du cube $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ et la formule (2.11).

3.3 Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Définition

Les formules (3.6) et (3.4) mettent en évidence la parenté existant entre les tenseurs $\underline{\underline{C}}(t)$ et $\underline{\underline{\mathbb{1}}}$ pour l'expression des produits scalaires des vecteurs transportés et initiaux. Aussi, de même que l'on a introduit en (3.7), à partir de la dilatation dans une direction, l'allongement unitaire dans cette direction, on compare maintenant le produit scalaire $\underline{v}\,.\,\underline{w}$ de (3.1) à sa valeur dans la configuration de référence, en formant la différence :

$$\underline{v}\,.\,\underline{w} - \underline{V}\,.\,\underline{W} = \underline{V}\,.\,\big({}^t\underline{\underline{F}}(t)\,.\,\underline{\underline{F}}(t) - \underline{\underline{\mathbb{1}}}\big)\,.\,\underline{W}\,.$$

On définit alors un nouveau tenseur ***symétrique***, noté $\underline{\underline{e}}(t)$, par :

$$\underline{\underline{e}}(t) = \frac{1}{2}\big({}^t\underline{\underline{F}}(t)\,.\,\underline{\underline{F}}(t) - \underline{\underline{\mathbb{1}}}\big)\,. \tag{3.13}$$

Ce tenseur est appelé : ***tenseur des déformations de Green-Lagrange***[(9)] et l'on retiendra la formule (figure 8) :

$$\underline{v}\,.\,\underline{w} - \underline{V}\,.\,\underline{W} = 2\,\underline{V}\,.\,\underline{\underline{e}}(t)\,.\,\underline{W}\,. \tag{3.14}$$

[(9)] G. Green (1793-1841).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

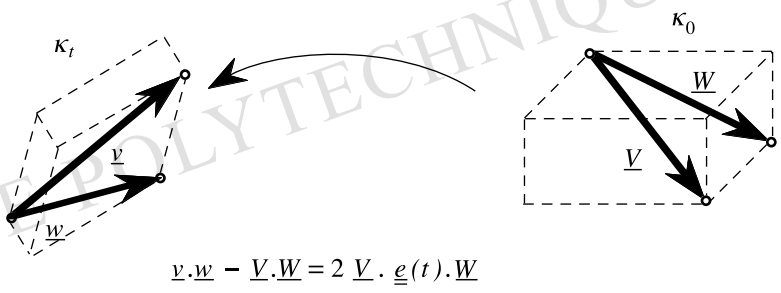


Figure 8 – Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Propriétés

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange a évidemment mêmes directions principales que $\underline{\underline{C}}(t)$. Les valeurs principales e_i sont appelées « déformations principales » et sont reliées de façon évidente à celles de $\underline{\underline{C}}(t)$:

$$e_i = \frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1)\ .$$

Les formules (3.6) à (3.10) donnant la dilatation, l'allongement unitaire et le glissement s'expriment en fonction de $\underline{\underline{e}}(t)$ en se référant à la définition (3.13). On obtient notamment, à partir de (3.10) :

$$\sin\theta = \frac{2\,e_{12}}{\sqrt{(1+2\,e_{11})(1+2\,e_{22})}}\ .$$

On prendra garde au fait que l'allongement unitaire défini par (3.7) n'est pas relié linéairement à $\underline{\underline{e}}(t)$!

Il est commode, pour certaines applications, de connaître l'expression de $\det \underline{\underline{F}}(t)$ en fonction des invariants (annexe I, § 5.7), notés ici I'_i, de $\underline{\underline{e}}$:

$$I'_1 = \mathrm{tr}\ \underline{\underline{e}}\ ,\ I'_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ (\underline{\underline{e}}\,.\,\underline{\underline{e}}) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \underline{\underline{e}}^2\ ,\ I'_3 = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\underline{\underline{e}}\,.\,\underline{\underline{e}}\,.\,\underline{\underline{e}}) = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\ \underline{\underline{e}}^3\ ;$$

on a :

$$\det \underline{\underline{C}}(t) = (\det \underline{\underline{F}}(t))^2 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = 1 + 2I'_1 + 2(I'_1)^2 - 4I'_2 + \frac{4}{3}(I'_1)^3 - 8\,I'_1I'_2 + 8I'_3\ ;$$

de même :

$$\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 = 3 + 4I'_1 + 2(I'_1)^2 - 4I'_2$$

et :

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 3 + 2I'_1\ .$$

Tenseur de Green-Lagrange et transformation rigidifiante

Dans une transformation rigidifiante entre κ_0 et κ_t, isométrie directe, on a :

$$\forall \underline{V}\ ,\ \forall \underline{W}\ ,\ \underline{v}\,.\,\underline{w} = \underline{V}\,.\,\underline{W}$$

d'où, pour le tenseur des dilatations

$$\underline{\underline{C}}(t) = {}^t\underline{\underline{F}}(t)\,.\,\underline{\underline{F}}(t) = \underline{\underline{\mathbb{1}}}$$

(l'application linéaire associée à $\underline{\underline{F}}(t)$ est une rotation).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange est alors nul :

$$\underline{\underline{e}}(t) = 0 \,. \tag{3.15}$$

C'est la raison même de l'introduction de ce tenseur car il facilite notamment l'écriture linéarisée des formules pour les petites déformations ($\| \underline{\underline{e}} \| \ll 1$) : cf. par exemple au chapitre VII (section 5) la linéarisation de la loi de comportement thermoélastique.

On peut, par ailleurs, examiner le problème inverse de la proposition précédente pour savoir si la propriété :

$$\forall M_0 \in \Omega_0 \ , \ \underline{\underline{e}}(t) = 0 \tag{3.16}$$

implique que le système subit entre κ_0 et κ_t une transformation rigidifiante, est vraie. La démonstration n'en est pas immédiate car il n'est pas acquis, a priori, que (3.16) implique l'homogénéité de la transformation. On se reportera à ce propos aux paragraphes 4.5, 6.3 et 7.1.

3.4 Décomposition polaire

On considère (figure 9) les ***directions*** principales de $\underline{\underline{C}}(t)$ dans κ_0 et les directions homologues de celles-ci par le transport convectif dans κ_t. Comme on l'a dit (§ 3.2) les orientations des trièdres trirectangles ainsi obtenus dans les deux configurations sont identiques en conséquence de la positivité de $\det \underline{\underline{F}}(t)$.
Soit alors la ***rotation*** de l'espace euclidien amenant en coïncidence les directions du trièdre dans la configuration κ_0 sur celles du trièdre dans la configuration κ_t. On désigne par $\underline{\underline{R}}(t)$ le tenseur associé. On pose :

$$\underline{\underline{F}}(t) = \underline{\underline{R}}(t) \,.\, \underline{\underline{S}}(t) \tag{3.17}$$

qui définit le tenseur $\underline{\underline{S}}(t)$:

$$\underline{\underline{S}}(t) = \underline{\underline{R}}^{-1}(t) \,.\, \underline{\underline{F}}(t) \,. \tag{3.18}$$

Pour étudier l'application linéaire associée à $\underline{\underline{S}}(t)$, on considère un vecteur $\underline{V}$ de κ_0 dirigé suivant une direction principale de $\underline{\underline{C}}(t)$ et on forme :

$$\underline{\underline{S}}(t) \,.\, \underline{V} = \underline{\underline{R}}^{-1}(t) \,.\, \underline{\underline{F}}(t) \,.\, \underline{V} \,;$$

on voit que :

- le vecteur $\underline{\underline{F}}(t) \,.\, \underline{V}$ dans κ_t est dirigé selon la direction déduite dans κ_t de la direction principale initiale dans κ_0 par le transport convectif
- en lui appliquant la rotation $\underline{\underline{R}}^{-1}(t)$, inverse de celle du trièdre des directions principales dans le transport convectif, on obtient le vecteur $\underline{\underline{R}}^{-1}(t)\,\underline{\underline{F}}(t) \,.\, \underline{V}$ qui est dirigé comme le vecteur initial $\underline{V}$ et dont la longueur est $|\, \underline{\underline{F}}(t) \,.\, \underline{V} \,| = \lambda(\underline{V}) | \, \underline{V} \,|$.

Autrement dit :

$$\underline{\underline{S}}(t) \,.\, \underline{V} = \lambda(\underline{V}) \, \underline{V} \ , \ \lambda(\underline{V}) > 0 \,. \tag{3.19}$$

Les directions principales de $\underline{\underline{C}}(t)$ sont directions propres pour l'application linéaire associée à $\underline{\underline{S}}(t)$ et les valeurs propres correspondantes sont positives.

On a ainsi mis en évidence la décomposition polaire de $\underline{\underline{F}}(t)$ exprimée par la formule (3.17) : la transformation du système est constituée d'une rotation composée avec une application linéaire admettant les directions principales de $\underline{\underline{C}}(t)$ pour directions propres avec des valeurs propres positives. Cette dernière s'appelle la ***déformation pure*** du système.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

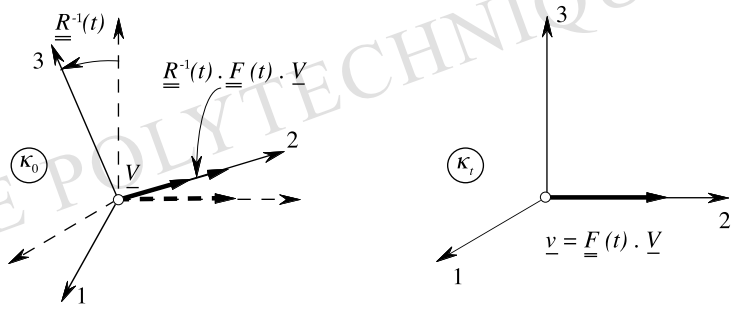


Figure 9 – Directions principales de $\underline{\underline{C}}(t)$ dans κ_0 et directions homologues par le transport convectif dans κ_t

Dans la base orthonormée des directions principales de $\underline{\underline{C}}(t)$, $\underline{\underline{S}}(t)$ s'écrit d'après (3.19) :

$$\underline{\underline{S}}(t) = \lambda_1\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \lambda_2\, \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \lambda_3\, \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \ .$$

Le tenseur $\underline{\underline{S}}(t)$ est ***symétrique*** et l'on a :

$$\underline{\underline{C}}(t) = {}^t\underline{\underline{F}}(t) \,.\, \underline{\underline{F}}(t) = \underline{\underline{S}}(t) \,.\, \underline{\underline{S}}(t) = (\underline{\underline{S}}(t))^2 \ . \tag{3.20}$$

La décomposition polaire peut aussi se faire dans l'ordre inverse sous la forme :

$$\underline{\underline{F}}(t) = \underline{\underline{S}}'(t) \,.\, \underline{\underline{R}}(t)$$

et l'on trouve que $\underline{\underline{S}}'(t)$ est lié à $\underline{\underline{S}}(t)$ par :

$$\underline{\underline{S}}'(t) = \underline{\underline{R}}(t) \,.\, \underline{\underline{S}}(t) \,.\, \underline{\underline{R}}^{-1}(t) \ .$$

Cette décomposition est plus particulièrement rattachée à la configuration κ_t et à d'autres tenseurs de déformation (tenseur d'Almansi,...).

4 Déformation d'un milieu continu : cas général

4.1 Transformation homogène tangente

On se propose maintenant de reprendre l'étude du transport et des déformations dans le cas général où le milieu continu subit une transformation ***quelconque*** entre κ_0 et κ_t. La fonction vectorielle $\underline{\phi}$ dans la formule :

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \tag{4.1}$$

est donc supposée quelconque sous les conditions de continuité et continue différentiabilité imposées au chapitre I (§ 3.2) ; en particulier on a :

$$0 < J(\underline{X}, t) = \frac{\mathrm{D}\ (x^1, x^2, x^3)}{\mathrm{D}\ (X^1, X^2, X^3)} < \infty \ . \tag{4.2}$$

Le principe fondamental sur lequel s'appuie toute cette étude consiste à remplacer ***localement***, en chaque point M_0 dans κ_0, la transformation par une transformation homogène, fonction de M_0, qui lui soit ***tangente***. En appliquant à cette dernière les

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

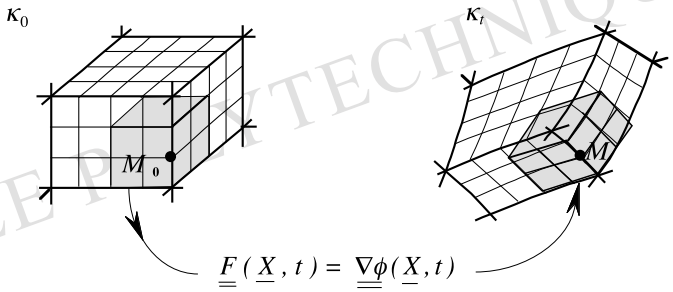


Figure 10 – Transformation homogène tangente en M_0

résultats des sections 2 et 3 ci-dessus on obtient les formules définissant le transport et les déformations entre κ_0 et κ_t pour la transformation quelconque au point M_0. C'est ce que représente symboliquement la figure 10.

Les hypothèses de continue différentiabilité sur $\underline{\phi}$ dans (4.1) permettent d'écrire, à partir du point M_0 et pour un point courant M_0' dans κ_0, les formules ($i = 1, 2, 3$) :

$$x'^i = \left(\frac{\partial \phi^i(\underline{X},t)}{\partial X^j} X'^j\right) + \left(x^i - \frac{\partial \phi^i(\underline{X},t)}{\partial X^j} X^j\right) + |\,\underline{M_0 M_0'}\,| o(M_0, M_0') \tag{4.3}$$

avec

$$\lim_{M_0' \to M_0} o\,(M_0, M_0') = 0\ . \tag{4.4}$$

Les deux parenthèses dans ces formules définissent une correspondance affine entre les coordonnées X'^j et x'^i d'une particule dans κ_0 et κ_t. Cette correspondance est ***tangente*** à la correspondance (4.1) au voisinage de M_0 (en raison de (4.4)). Reprenant alors les notations de (2.1) et (2.4) pour cette ***transformation homogène tangente*** en M_0 à la transformation quelconque donnée par (4.1) on a :

$$F^i{}_j(\underline{X},t) = \frac{\partial \phi^i(\underline{X},t)}{\partial X^j} \tag{4.5}$$

et

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = \frac{\partial \phi^i(\underline{X},t)}{\partial X^j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j\ . \tag{4.6}$$

$\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$ apparaît comme le ***gradient*** du champ de vecteur $\underline{\phi}(\underline{X},t)$ à l'instant t dans κ_0 (annexe I, § 6.2) :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{\nabla\phi}}(\underline{X},t)\ . \tag{4.7}$$

Il est appelé ***gradient de la transformation*** en M_0.

4.2 Formules de transport

Ce sont, au changement de notations près (dépendance en $\underline{X}$), les formules des paragraphes 2.2, 2.3 et 2.4.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

S'agissant de la transformation homogène ***tangente*** en M_0, on a coutume, afin de rappeler que ces formules ne sont valables que localement au voisinage de M_0, de les écrire sous ***forme différentielle*** en introduisant des « vecteurs élémentaires », « volumes élémentaires », etc. [10]

Transport d'un vecteur

$$\underline{\mathrm{d}M} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\mathrm{d}M_0} \,. \tag{4.8}$$

Cette formule n'est autre que la différentiation de (4.1) :

$$\underline{\mathrm{d}\,x} = \underline{\underline{\nabla\phi}}\,(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\mathrm{d}X} \,. \tag{4.9}$$

Du point de vue pratique, elle se révèle bien souvent la plus commode pour le calcul du gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}\,(\underline{X}, t)$, en particulier lorsque l'on utilise, comme indiqué au paragraphe 2.2, des bases différentes $\underline{e}_J$ $(J = I,\, II,\, III)$ et $\underline{e}_i$ $(i = 1,\, 2,\, 3)$ en M_0 et en M.

On écrit

$$\mathrm{d}x^i\, \underline{e}_i = \underline{\underline{\nabla\phi}}\,(\underline{X}, t) \,.\, (\mathrm{d}X^J\, \underline{e}_J) \tag{4.10}$$

et l'on procède à l'identification des termes pour obtenir

$$\underline{\underline{F}}\,(\underline{X}, t) = F^i{}_J\,(\underline{X}, t)\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^J \,. \tag{4.11}$$

Transport d'un volume

$$\mathrm{d}\Omega_t = \mathrm{d}\Omega_0 \det\big(\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)\big)$$

soit, compte tenu de (4.5) :

$$\mathrm{d}\Omega_t = J(\underline{X}, t)\, \mathrm{d}\Omega_0 \tag{4.12}$$

En particulier, s'il y a invariance du volume en M_0 dans la transformation entre κ_0 et κ_t, on a :

$$\det\big(\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)\big) = 1 \,.$$

Transport d'une surface orientée

$$\underline{\mathrm{d}a} = J(\underline{X}, t)\, {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\mathrm{d}A} \,. \tag{4.13}$$

4.3 Déformations

Tenseur des dilatations

$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{\mathrm{d}M} \,.\, \underline{\mathrm{d}M'} = \underline{\mathrm{d}M_0} \,.\, \underline{\underline{C}}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\mathrm{d}M'_0} \\ \\ \underline{\underline{C}}(\underline{X}, t) = {}^t\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \end{array}} \tag{4.14}$$

[10] Du point de vue mathématique, la transformation homogène tangente concerne les éléments des ***espaces vectoriels tangents*** en M_0 et M aux configurations géométriques du système dans κ_0 et dans κ_t.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Tenseur des déformations de Green-Lagrange

$$\underline{\underline{e}}(\underline{X},t) = \frac{1}{2}\left({}^t\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) - \underline{\underline{\mathbb{1}}}\right) . \tag{4.15}$$

En coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$e_{ij}(\underline{X},t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_k(\underline{X},t)}{\partial X_i}\,\frac{\partial \phi_k(\underline{X},t)}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right) .$$

Il est d'usage de désigner par $\mathrm{d}s_0$ la longueur du vecteur élémentaire $\underline{\mathrm{d}M_0}$ dans la configuration κ_0 et par $\mathrm{d}s$ celle de son transporté $\underline{\mathrm{d}M}$:

$$\mathrm{d}s_0 = |\,\underline{\mathrm{d}M_0}\,| \ , \ \mathrm{d}s = |\,\underline{\mathrm{d}M}\,| \ .$$

On a alors, en application immédiate des formules ci-dessus :

$$\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}s_0^2 = 2\,\underline{\mathrm{d}M_0}\,.\,\underline{\underline{e}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}M_0} \ ,$$

formule dite du $\mathrm{d}s^2$, qui s'écrit en composantes, en repère cartésien orthornormé :

$$\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}s_0^2 = 2\,e_{ij}(\underline{X},t)\,\mathrm{d}X_i \mathrm{d}X_j \ .$$

4.4 Déplacement

Il est commode d'introduire dans un référentiel $\mathcal{R}$, le ***déplacement*** $\underline{\xi}(\underline{X},t)$ de la particule située en M_0 dans κ_0, entre les configurations κ_0 et κ_t. Ce vecteur s'obtient par :

$$\underline{\xi}(\underline{X},t) = \underline{M_0M} = \underline{x} - \underline{X} \ . \tag{4.16}$$

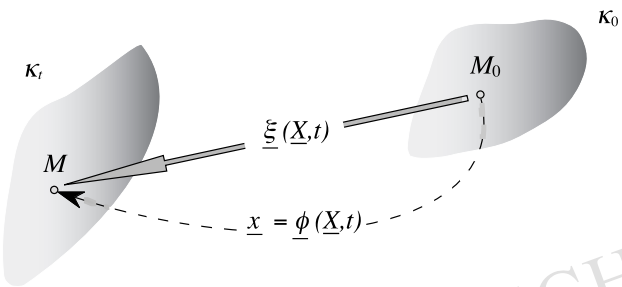


Figure 11 – Déplacement de la particule entre κ_0 et κ_t

On a ainsi, à chaque instant t, dans $\mathcal{R}$ et dépendant évidemment du choix de $\mathcal{R}$ (car on compare des positions à des instants différents, 0 et t), un ***champ de vecteurs défini sur*** κ_0. On a alors, de façon immédiate, en conséquence de (4.16) :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{\nabla\phi}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t) \tag{4.17}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

où $\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t)$ est le gradient du champ de déplacement à l'instant t en $\underline{X}$.

On en déduit les expressions de $\underline{\underline{C}}(\underline{X},t)$ et $\underline{\underline{e}}(\underline{X},t)$; ainsi :

$$\underline{\underline{e}}(\underline{X},t) = \frac{1}{2}\big(\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t) + {}^t\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t) + {}^t\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t)\big) \tag{4.18}$$

et en composantes, en coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$F_{ij}(\underline{X},t) = \delta_{ij} + \frac{\partial\xi_i(\underline{X},t)}{\partial X_j}$$
$$e_{ij} = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial\xi_i}{\partial X_j} + \frac{\partial\xi_j}{\partial X_i} + \frac{\partial\xi_k}{\partial X_i}\frac{\partial\xi_k}{\partial X_j}\big)\,.$$

Cette formule met en évidence la ***non-linéarité*** de la relation entre le champ de déplacement et le champ de déformation de Green-Lagrange.

4.5 Décomposition polaire et transformation rigidifiante

Décomposition polaire

Comme dans le cas de la transformation homogène explicité au paragraphe 3.4, on peut effectuer sur $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$ la décomposition polaire :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{R}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{S}}(\underline{X},t)\,. \tag{4.19}$$

Le tenseur $\underline{\underline{S}}(\underline{X},t)$, symétrique, admet pour directions principales les directions principales de $\underline{\underline{C}}(\underline{X},t)$ dans κ_0 avec, pour valeurs principales, les dilatations principales $\lambda_i(\underline{X},t)$. Le tenseur $\underline{\underline{R}}(\underline{X},t)$ est le tenseur euclidien associé à la rotation amenant les directions principales de $\underline{\underline{C}}(\underline{X},t)$ dans κ_0 sur leurs transportées dans κ_t.

Transformation rigidifiante

La réciproque de la propriété énoncée au paragraphe 3.3 sur la ***transformation rigidifiante*** suppose que, à l'instant t :

$$\underline{\underline{e}}(\underline{X},t) = 0 \quad \forall M_0 \in \Omega_0\,.$$

On en déduit par (4.15) et (4.19) puisque $\underline{\underline{S}}(\underline{X},t)$ a ses valeurs propres positives et puisque $\det\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) > 0$:

$$\underline{\underline{S}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{\mathbb{1}}} \text{ et } \underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{R}}(\underline{X},t) \quad \text{avec} \quad \det\underline{\underline{R}}(\underline{X},t) = +1 \quad \forall M_0 \in \Omega_0\,. \tag{4.20}$$

Pour démontrer que la transformation du système entre κ_0 et κ_t est bien rigidifiante il reste maintenant à démontrer que $\underline{\underline{R}}(\underline{X},t)$ est indépendant de $\underline{X}$. Le résultat est intuitivement évident si l'on imagine le système dans κ_0 décomposé en volumes infinitésimaux, parallélépipédiques pour fixer les idées : chacun d'eux est indéformé dans κ_t, puisque $\underline{\underline{S}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{\mathbb{1}}}$ et ne subit que la rotation associée à $\underline{\underline{R}}(\underline{X},t)$ entre κ_0 et κ_t ; mais tous constituent dans κ_t un système continu, comme dans κ_0, c'est-à-dire qu'ils demeurent jointifs. La réponse immédiate est que $\underline{\underline{R}}(\underline{X},t)$ doit être le même pour chaque élément, c'est-à-dire indépendant de $\underline{X}$, auquel cas le système ne subit lui aussi que cette même rotation.

Cette approche intuitive dégage l'idée de la démonstration mathématique : elle se réfère à la continuité du milieu. Conformément à la définition de $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$ donnée par (4.7) on exprime

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

que $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{R}}(\underline{X},t)$ doit être le gradient d'une fonction vectorielle $\underline{\phi}(\underline{X},t)$. Pour cela on peut rappeler l'expression générale de la matrice $\underline{\underline{\tilde{R}}}(\underline{X},t)$ en repère orthonormé (au moyen des angles d'Euler) :

$$\underline{\underline{\tilde{R}}}(\underline{X},t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

En écrivant l'égalité des dérivées secondes croisées de $\underline{\phi}(\underline{X},t)$ on démontre que les angles φ , ψ et θ sont indépendants de $\underline{X}$.

4.6 Objectivité

Reprenant la définition donnée au chapitre I (§ 2.2 et 2.4) on voit que $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{\nabla\phi}}(\underline{X},t)$ est objectif. On peut le démontrer en procédant explicitement à la vérification indiquée au chapitre I (§ 2.4) pour les grandeurs tensorielles, ou en remarquant que celle-ci résulte immédiatement de la formule $\underline{\mathrm{d}M} = \underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}M_0}$ où $\underline{\mathrm{d}M}$ et $\underline{\mathrm{d}M_0}$ sont eux-mêmes objectifs. Le tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}(\underline{X},t)$ et le tenseur des déformations $\underline{\underline{e}}(\underline{X},t)$ sont également objectifs, comme le montre l'objectivité du scalaire $\underline{\mathrm{d}M}\,.\,\underline{\mathrm{d}M'} = \underline{\mathrm{d}M_0}\,.\,\underline{\underline{C}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}M'_0}$.

5 Transformation infinitésimale

5.1 Définition

La transformation du milieu entre les configurations κ_0 et κ_t dans le référentiel $\mathcal{R}$ est dite ***infinitésimale*** si elle est telle que :

$$\| \underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t) \| \ll 1 \qquad \forall M_0 \in \Omega_0 \,. \tag{5.1}$$

$\| \underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t) \|$ sera alors pris comme infiniment petit principal.

5.2 Tenseur des déformations linéarisé

Dans cette hypothèse (5.1), le tenseur des déformations de Green-Lagrange donné par (4.18) se réduit, au premier ordre [11], au tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$:

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t) = \frac{1}{2}\big(\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t) + {}^t\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t)\big)} \tag{5.2}$$

Celui-ci apparaît comme la ***partie symétrique du gradient du déplacement***. Ses composantes s'écrivent, dans le cas de coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$\varepsilon_{ij}(\underline{X},t) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\xi_i(\underline{X},t)}{\partial X_j} + \frac{\partial\xi_j(\underline{X},t)}{\partial X_i}\Big) \,.$$

[11] À noter que si $\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t)$ est antisymétrique on a, en transformation quelconque :

$\underline{\underline{e}}\,(\underline{X},t) = \frac{1}{2}\,{}^t\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t)$ et $J(\underline{X},t) = 1 + \ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{e}}\,(\underline{X},t)\,.$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Les valeurs principales de $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$, qui sont notées $\varepsilon_i\,(i=1,2,3)$, sont reliées, ***à l'ordre d'approximation adopté***, à celles de $\underline{\underline{C}}(\underline{X},t)$ ou, plus exactement, de $\underline{\underline{S}}(\underline{X},t)$ par :

$$\varepsilon_i \simeq \lambda_i - 1\ . \tag{5.3}$$

De même on obtient pour l'allongement unitaire d'un vecteur $\underline{\mathrm{d}M_0}$ l'expression linéarisée :

$$\delta(\underline{\mathrm{d}M_0}) = \frac{\mathrm{d}s - \mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}s_0} \simeq \frac{\underline{\mathrm{d}M_0}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)\cdot\underline{\mathrm{d}M_0}}{|\,\underline{\mathrm{d}M_0}\,|^2} \tag{5.4}$$

soit, si $\underline{\mathrm{d}M_0}$, est dirigé suivant le vecteur unitaire $\underline{e}_1$ d'une base quelconque :

$$(\mathrm{d}s - \mathrm{d}s_0)/\mathrm{d}s_0 \simeq \varepsilon_{11}(\underline{X},t)\ . \tag{5.5}$$

Le glissement pour deux vecteurs matériels dirigés suivant les vecteurs unitaires $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ d'une base orthonormée s'écrit sous la forme linéarisée de (3.10) :

$$\theta \simeq 2\,\varepsilon_{12}(\underline{X},t)\ . \tag{5.6}$$

Au même ordre d'approximation on a alors pour :

$$J(\underline{X},t) = \det\big(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t)\big)$$

l'expression linéarisée

$$J(\underline{X},t) \simeq 1 + \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t) = 1 + \mathrm{div}\,\underline{\xi}(\underline{X},t) = 1 + \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)\ . \tag{5.7}$$

On en déduit :

$$(\mathrm{d}\Omega_t - \mathrm{d}\Omega_0)/\mathrm{d}\Omega_0 \simeq\ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t) = \mathrm{div}\,\underline{\xi}(\underline{X},t)\ . \tag{5.8}$$

On peut aussi, dans cette même hypothèse de la transformation infinitésimale, examiner la décomposition polaire. On trouve, à partir de (3.20), les relations :

$$\underline{\underline{S}}(\underline{X},t) \simeq \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t) \quad \text{d'où} \quad \underline{\underline{R}}(\underline{X},t) \simeq \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \frac{1}{2}\big(\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t) - {}^t\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t)\big)\ .$$

5.3 Gradient d'un champ de tenseurs sur la configuration actuelle

On considère un champ quelconque (scalaire, vectoriel, ou tensoriel de manière générale), défini sur κ_0, à l'instant t, soit $\underline{\underline{T}}(\underline{X},t)$. On peut définir sur κ_t, à l'instant t un champ de même nature, noté $\underline{\underline{T}}_t(\underline{x},t)$, qui prend la même valeur que le champ $\underline{\underline{T}}$ ***à l'instant*** t au point géométrique homologue par la bijection $\underline{\phi}$ du transport convectif entre κ_0 et κ_t, c'est-à-dire [12] :

$$\underline{\underline{T}}_t(\underline{x},t) = \underline{\underline{T}}\big(\underline{\psi}(\underline{x},t),t\big) \tag{5.9a}$$

[12] On rappelle (cf. chapitre I, § 3.1) que $\underline{\psi}$ désigne la bijection réciproque de $\underline{\phi}$, aussi notée $\underline{\phi}^{-1}$. L'ordre du tenseur considéré peut être quelconque : on a choisi $\underline{\underline{T}}$ pour fixer les idées.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

que l'on écrira aussi :

$$\underline{\underline{T}}_t(\underline{x},t) = \underline{\underline{T}}(\underline{X},t) \tag{5.9b}$$

avec :

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t) = \underline{X} + \underline{\xi}(\underline{X},t)\ . \tag{5.10}$$

On conviendra de noter $\operatorname{grad}\underline{\underline{T}}(\underline{x},t)$ le gradient du champ $\underline{\underline{T}}$ dans la configuration actuelle κ_t [13].

On a alors, entre les gradients des deux champs pris en des points homologues dans les configurations κ_0 et κ_t, la relation :

$$\nabla\underline{\underline{T}}(\underline{X},t) = \operatorname{grad}\underline{\underline{T}}(\underline{x},t)\,.\,\nabla\underline{\underline{\phi}}(\underline{X},t) \tag{5.11}$$

soit, par (4.17) :

$$\nabla\underline{\underline{T}}(\underline{X},t) = \operatorname{grad}\underline{\underline{T}}(\underline{x},t) + \operatorname{grad}\underline{\underline{T}}(\underline{x},t)\,.\,\nabla\underline{\underline{\xi}}(\underline{X},t)\ .$$

Il en résulte que, ***dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale, on peut confondre, au premier ordre en*** $\|\nabla\underline{\underline{\xi}}(\underline{X},t)\|$***, les deux opérateurs gradients en des points homologues de*** κ_0 et κ_t. En particulier pour le déplacement lui-même, on confondra :

$$\nabla\underline{\underline{\xi}}(\underline{X},t) \quad \text{et} \quad \operatorname{grad}\underline{\underline{\xi}}(\underline{x},t)\ ,$$

notamment dans l'écriture (5.2) de $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t) \simeq \frac{1}{2}\big(\operatorname{grad}\underline{\underline{\xi}}(\underline{x},t) + {}^t\operatorname{grad}\underline{\underline{\xi}}(\underline{x},t)\big) \quad \text{où} \quad \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t)\ . \tag{5.12}$$

6 Compatibilité géométrique d'un champ de déformation linéarisée

6.1 Position du problème

La formule (4.18) indique comment à partir du champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{X},t)$ entre les configurations κ_0 et κ_t dans un référentiel $\mathcal{R}$, on construit le champ de déformation de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}(\underline{X},t)$.

On peut aussi se poser le problème inverse : étant donné un champ de tenseurs du second ordre symétriques défini sur κ_0, à quelles conditions ce champ est-il un champ de déformation de milieu continu, c'est-à-dire existe-t-il un champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{X},t)$ dont il dérive au sens de la formule (4.18) ?

[13] Le changement de la notation pour le gradient permet ainsi, sans ambiguïté, de supprimer l'indice t pour le champ défini en (5.9a) ; cf. chapitre I (§ 4.6).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Ce problème général, dit de la « ***compatibilité géométrique d'un champ de déformation*** », correspond du point de vue physique au fait que la ***continuité du milieu***, au sens indiqué dans le chapitre I, doit être conservée par ce champ. On y reviendra au paragraphe 6.4.

On a déjà été confronté à un problème de cette nature au paragraphe 4.5 pour le champ $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$ à propos de la transformation rigidifiante : en effet c'est en écrivant la compatibilité géométrique du champ de tenseurs $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$, c'est-à-dire en exprimant qu'il est le champ de gradient d'une fonction vectorielle $\underline{\phi}(\underline{X},t)$, ou de façon équivalente qu'il dérive d'un champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{X},t)$ de milieu continu par (4.17), que l'on démontre que $\underline{\underline{R}}(\underline{X},t)$ dans (4.20) est indépendant de $\underline{X}$.

Il est clair, du point de vue mathématique, que des ***conditions de compatibilité*** doivent nécessairement exister pour qu'un champ de déformation à ***six*** composantes indépendantes dérive effectivement par (4.18) d'un champ de déplacement à ***trois*** composantes (milieu continu tridimensionnel). Ces conditions peuvent être établies dans le cas général des déformations finies. Dans la suite on ne rencontrera ce problème que pour des déformations linéarisées du type (5.2) : ce sera notamment le cas au chapitre VIII (section 6) dans la résolution des problèmes d'élasticité linéarisés. On sera aussi confronté au même problème mathématique à propos de la compatibilité d'un champ de taux de déformation eulérien au chapitre III (§ 3.7).

On établira ici les conditions de compatibilité pour un champ linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$ donné par ses composantes ε_{ij} , l'espace étant rapporté à un ***repère cartésien orthonormé***.

6.2 Conditions de compatibilité

Principe du raisonnement

L'espace est rapporté à un repère cartésien orthonormé. Le principe du raisonnement s'inspire des constatations suivantes.

$\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t)$ étant le gradient d'un champ de vecteurs, chacun des vecteurs-lignes de sa matrice $\underline{\underline{\tilde{\nabla}\xi}}(\underline{X},t)$ apparaît comme le gradient d'une fonction scalaire (la composante de $\underline{\xi}$ correspondante). De même, chaque vecteur-colonne de ${}^t\underline{\underline{\tilde{\nabla}\xi}}(\underline{X},t)$ apparaît aussi comme le gradient d'une fonction scalaire (composante de $\underline{\xi}$). La condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de vecteurs soit un champ de gradient (de fonction scalaire) sur un domaine simplement connexe étant classique, « rotationnel nul », en s'appuyant sur celle-là on établira les conditions nécessaires et suffisantes de compatibilité d'un champ de déformation.

Établissement des conditions de compatibilité

On établit souvent ces conditions en introduisant les notations suivantes.
Soit $\underline{\underline{T}}(\underline{X},t)$ un champ de tenseurs euclidiens du second ordre ; on définit en chaque point $\underline{X}$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

les matrices $\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{g}}(\underline{\underline{\tilde{T}}})$ et $\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{d}}(\underline{\underline{\tilde{T}}})$ [14] par les formules donnant leurs coefficients :

$$(6.1)\qquad \begin{cases} \underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{g}}(\underline{\underline{\tilde{T}}}) & R^{\mathrm{g}}_{ij} = \delta_{i\ell m}\dfrac{\partial T_{mj}}{\partial X_\ell} \\ \underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{d}}(\underline{\underline{\tilde{T}}}) & R^{\mathrm{d}}_{ij} = \delta_{j\ell m}\dfrac{\partial T_{im}}{\partial X_\ell} \end{cases}$$

dans lesquelles [15] :

$$\underset{i,j,k\in(1,2,3)}{\delta_{ijk}} = \begin{cases} 0 & \text{si } i\,j\,k \text{ comprend deux indices identiques} \\ 1 & \text{si } i\,j\,k \text{ permutation paire} \\ -1 & \text{si } i\,j\,k \text{ permutation impaire} \end{cases}$$

autrement dit, $\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{d}}(\underline{\underline{\tilde{T}}})$ a pour vecteurs-lignes les rotationnels des vecteurs-lignes de $\underline{\underline{\tilde{T}}}$, et $\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{g}}(\underline{\underline{\tilde{T}}})$ a pour vecteurs-colonnes les rotationnels des vecteurs-colonnes de $\underline{\underline{\tilde{T}}}$.

Avec ces notations il est clair que la condition nécessaire et suffisante pour que chaque vecteur-ligne de $\underline{\underline{\tilde{T}}}$ soit le gradient d'une fonction scalaire s'écrit :

$$(6.2)\qquad \underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{d}}(\underline{\underline{\tilde{T}}}) = 0$$

ou aussi de façon équivalente :

$$(6.3)\qquad \underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{g}}({}^{t}\underline{\underline{\tilde{T}}}) = 0\ .$$

On en déduit, à partir de (5.2), la ***condition nécessaire de compatibilité*** pour le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$:

$$(6.4)\qquad \underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{g}}\big(\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{d}}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}})\big) = 0 = \underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{d}}\big(\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{g}}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}})\big)\ [16]\ .$$

Cette condition matricielle s'explicite sous la forme de 6 équations concernant les dérivées secondes des coefficients de $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}$ car la symétrie de $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}$ implique celle de $\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{g}}\big(\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{d}}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}})\big)$:

$$\delta_{mki}\,\delta_{phj}\,\varepsilon_{ij,hk} = 0$$

ou encore :

$$(6.5)\qquad \boxed{\begin{array}{c} 2\,\varepsilon_{23,23} = \varepsilon_{33,22} + \varepsilon_{22,33} \\ + \text{ permutation circulaire} \\ \varepsilon_{13,23} - \varepsilon_{12,33} - \varepsilon_{33,21} + \varepsilon_{32,31} = 0 \\ + \text{ permutation circulaire} \end{array}}$$

où les indices situés après la virgule indiquent les dérivations spatiales.

[14] Pour alléger les formules on ne fait plus apparaître la dépendance en $\underline{X},t$.

[15] Dans la littérature (notamment anglo-saxonne) on rencontre souvent les symboles ε ou e. Le choix de δ s'explique ici par les notations adoptées pour les composantes de la déformation.

[16] On a en effet, par (6.2), $\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{d}}(\underline{\underline{\tilde{\nabla}}}\underline{\xi}) = 0$ qui s'écrit, en introduisant $\underline{w}$ défini par (6.6) : $\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{d}}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}) + \underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{d}}(\underline{\underline{\tilde{w}}}) = 0$. Or $\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{d}}(\underline{\underline{\tilde{w}}}) = -\frac{1}{2}\,{}^{t}\underline{\underline{\tilde{\nabla}}}(\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{\xi})$, d'où $\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{g}}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}) = \frac{1}{2}\underline{\underline{\tilde{\nabla}}}(\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{\xi})$ et, par (6.2) : $\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{d}}\big(\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{g}}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}})\big) = 0$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Méthode pratique d'intégration du champ $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$

Les conditions de compatibilité (6.5) peuvent être établies explicitement par une méthode directe dont la réciproque fournit le procédé pratique d'intégration d'un champ $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$ compatible.

Pour cela on introduit le tenseur euclidien $\underline{\underline{w}}(\underline{X},t)$, partie antisymétrique de $\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t)$:

$$\underline{\underline{w}}(\underline{X},t)=\frac{1}{2}\big(\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t)-{}^t\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t)\big) \tag{6.6}$$

dont les composantes dans le repère cartésien orthonormé sont :

$$w_{ij}(\underline{X},t)=\frac{1}{2}\big(\frac{\partial\xi_i(\underline{X},t)}{\partial X_j}-\frac{\partial\xi_j(\underline{X},t)}{\partial X_i}\big)\ .$$

On remarque, à partir de (5.2) et (6.6), que les dérivées des composantes de $\underline{\underline{w}}$ sont reliées à celles de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ par :

$$w_{ij,k}=\varepsilon_{ki,j}-\varepsilon_{jk,i}\ . \tag{6.7}$$

On en déduit les conditions nécessaires de compatibilité du champ $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$ en écrivant que :

$$\forall i,j,k,\ell=1,2,3\quad w_{ij,k\ell}=w_{ij,\ell k} \tag{6.8}$$

On obtient ainsi des équations de la forme :

$$\varepsilon_{ij,k\ell}+\varepsilon_{k\ell,ij}-\varepsilon_{ik,j\ell}-\varepsilon_{j\ell,ik}=0$$

où i,j,k, et ℓ sont quelconques égaux à $1,2,3$, c'est-à-dire les six équations (6.5).

Réciproquement, le champ de tenseurs $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$ symétriques étant connu et supposé satisfaire (6.5), ces conditions assurent l'intégrabilité des formes différentielles :

$$\mathrm{d}w_{ij}=w_{ij,k}\,\mathrm{d}X_k \tag{6.9}$$

où les $w_{ij,k}$, antisymétriques sur les indices i et j, sont définis par (6.7). Elles permettent donc de construire un champ de tenseurs antisymétriques $\underline{\underline{w}}(\underline{X},t)$ si le domaine de définition est simplement connexe.

On vérifie ensuite que, en conséquence évidente de (6.7), les conditions d'intégrabilité des formes différentielles :

$$\mathrm{d}\xi_i=(\varepsilon_{ij}+w_{ij})\mathrm{d}X_j \tag{6.10}$$

sont identiquement vérifiées, ce qui permet de construire un champ vectoriel $\underline{\xi}(\underline{X},t)$ si le domaine de définition est ***simplement connexe***.

Compte tenu de l'antisymétrie de $\underline{\underline{w}}(\underline{X},t)$, $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$ apparaît bien comme la partie symétrique du gradient du champ ainsi construit.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

6.3 Commentaires

- Les conditions (6.5) sont donc nécessaires et suffisantes pour qu'un champ de tenseurs euclidiens, du second ordre, symétriques, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ soit la partie symétrique du gradient d'un champ vectoriel $\underline{\xi}$, dans l'hypothèse d'un domaine de définition simplement connexe. Ces conditions ont été établies par Saint Venant [17] ; la première démonstration rigoureuse de leur caractère suffisant serait due à Beltrami.
- Si le domaine est multiplement connexe, des conditions supplémentaires doivent être adjointes à celles-là, dites ***conditions de fermeture***, qui assurent l'uniformité de la fonction vectorielle $\underline{\phi}$ c'est-à-dire son caractère bijectif.
- Il peut sembler étonnant d'aboutir à 6 conditions de compatibilité alors que le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ correspond à 6 composantes indépendantes et le champ $\underline{\xi}$ dont il dérive, à 3. En fait on peut montrer que les six équations (6.5) ne sont pas indépendantes entre elles : ces équations seront toutes vérifiées dans un domaine Ω_0 pour peu que l'on s'assure que trois d'entre elles sont vérifiées dans ce domaine et les trois autres au contour.
- ***On remarque que les conditions*** (6.5) ***portent sur les dérivées secondes des composantes*** ε_{ij} ***en coordonnées cartésiennes orthonormées. Il s'ensuit en particulier que tout champ*** $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ***dont les composantes*** ε_{ij} ***sont des fonctions affines des*** X_k ***est intégrable***.
- On retiendra que dans la pratique l'intégration d'un champ de déformation géométriquement compatible pour obtenir le champ de déplacement correspondant s'effectue en s'appuyant sur (6.7), (6.9) et (6.10). Le champ $\underline{\xi}(\underline{X}, t)$ est déterminé, dans le respect de l'hypothèse de la transformation infinitésimale, ***à un champ de déplacement rigidifiant additif près***. Ce champ est en effet introduit par les constantes qui apparaissent dans les deux intégrations successives : un tenseur antisymétrique constant dans l'intégration de (6.9), définissant une ***rotation infinitésimale***, un vecteur constant dans l'intégration de (6.10) définissant une ***translation***.

- Ce résultat ne doit pas surprendre. En effet, dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale qui permet la linéarisation des formules, l'***addition*** d'un champ de déplacement rigidifiant (dont la rotation est infinitésimale) n'induit aucune déformation du système. Il est donc logique que la donnée d'un champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ géométriquement compatible ne permette de déterminer le champ $\underline{\xi}$ que sous la réserve d'un champ de déplacement rigidifiant infinitésimal arbitraire.

  On peut aussi y apporter un complément. Comme on l'a vu par exemple au paragraphe 4.5, une transformation rigidifiante composée avec une transformation quelconque n'induit aucune modification du champ de déformation $\underline{\underline{e}}$. Il en résulte qu'en composant une transformation rigidifiante quelconque avec un champ de déplacement $\underline{\xi}$ déterminé, en transformation infinitésimale, à partir du champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$, on obtient une transformation finie dans laquelle le champ de déformation $\underline{\underline{e}}$ est égal au champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ linéarisé du champ original $\underline{\xi}$. C'est par exemple le cas lorsque l'on s'intéresse, dans un référentiel $\mathcal{R}^*$, au champ de déplacement associé à une transformation infinitésimale dans le référentiel $\mathcal{R}$.

[17] A. Barré de Saint Venant (1797–1886) ; E. Beltrami (1835-1900).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- Le champ de déplacement $\underline{\xi}$ doit aussi satisfaire des conditions en déplacements imposées au contour du domaine de définition de $\underline{\underline{\varepsilon}}$. On rencontre alors typiquement l'une ou l'autre des deux circonstances suivantes. Ou bien la forme obtenue pour $\underline{\xi}$, et notamment le champ rigidifiant indéterminé introduit par les constantes d'intégration, permet d'assurer la compatibilité du champ $\underline{\xi}$ avec les données du contour : ceci peut éventuellement déterminer complètement le champ de déplacement rigidifiant infinitésimal demeuré arbitraire. Ou bien les conditions imposées au déplacement au contour du domaine ne peuvent être satisfaites par aucun champ $\underline{\xi}$ résultant de l'intégration de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et il y a donc incompatibilité avec ces données.
- L'application de la méthode d'intégration du paragraphe 6.2 dans le cas où le champ donné est

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X}, t) = 0 \qquad \forall M_0 \in \Omega_0 \tag{6.11}$$

permet de vérifier immédiatement que, ***en transformation infinitésimale***, la condition (6.11) caractérise les transformations rigidifiantes entre κ_0 et κ_t pour le domaine Ω_0.

6.4 Application

On peut donner, en anticipant de façon élémentaire et intuitive sur certains concepts introduits dans la suite (chapitres V et VIII), un exemple d'application des conditions de compatibilité géométrique énoncées plus haut : celui des déformations thermiques.

Le champ de température, ou plus exactement de variation de température $\tau(\underline{X})$ dans un solide, induit dans celui-ci, le plus souvent par une correspondance linéaire, un champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}_\tau(\underline{X})$.

Si ce champ $\underline{\underline{\varepsilon}}_\tau(\underline{X})$ est géométriquement compatible, il existe un champ de déplacement $\underline{\xi}_\tau(\underline{X})$ déterminé à un déplacement rigidifiant près, qui respecte la continuité du milieu et dont dérivent les déformations thermiques. Si aucune condition n'est imposée au contour du solide du point de vue des déplacements ou si, plus généralement, les conditions en déplacements imposées au contour du solide sont satisfaites par un champ $\underline{\xi}_\tau(\underline{X})$, on peut conclure que la transformation du solide due aux écarts de température peut se produire sans faire naître, dans celui-ci, des efforts intérieurs (contraintes).

Dans les cas contraires, c'est-à-dire si le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}_\tau(\underline{X})$ n'est pas géométriquement compatible ou si, étant compatible, aucun champ $\underline{\xi}_\tau(\underline{X})$ correspondant ne permet de satisfaire les conditions en déplacements imposées au contour du solide, des efforts intérieurs apparaissent nécessairement dans le solide pour que la continuité du milieu soit conservée. Ils engendrent eux aussi un champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X})$ et sont tels que le champ de déformation total $\underline{\underline{\varepsilon}}_\tau(\underline{X}) + \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X})$ soit géométriquement compatible et qu'un champ $\underline{\xi}_\tau(\underline{X})$ qui résulte de son intégration permette de satisfaire les conditions en déplacements imposées au contour.

Si ces efforts intérieurs, nécessaires au maintien de la continuité géométrique du

milieu, sont trop importants vis-à-vis des capacités de résistance du matériau, ils ne peuvent s'instaurer : une autre solution géométriquement compatible par morceaux se met alors en place avec ruptures localisées dans le solide (phénomène bien connu avec des matériaux fragiles).

7 Remarques finales

7.1 Transformation et déformation

Homogénéité

Les formules de la décomposition polaire (3.17, 3.20, 4.19) mettent bien en évidence que seule une partie de la transformation induit la déformation du milieu. En conséquence, s'il est évident que l'homogénéité de la transformation, c'est-à-dire l'indépendance de $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$ par rapport à $\underline{X}$, implique celle de la déformation $\underline{\underline{e}}(\underline{X},t)$, on peut s'interroger sur le problème inverse : l'homogénéité de la déformation $\underline{\underline{e}}$ implique-t-elle celle de la transformation ? C'est en particulier la question qui a été posée au paragraphe 3.3 à propos de la caractérisation des transformations rigidifiantes par la formule (3.16).

La réponse découle encore de la compatibilité géométrique (cf. § 6.1) comme indiqué au paragraphe 4.5 : en exprimant [18] que $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$ doit être le gradient d'une fonction vectorielle $\underline{\phi}(\underline{X},t)$, on vérifie que le champ $\underline{\underline{e}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{e}}(t)$ est effectivement compatible et que la transformation correspondante est ***homogène*** [19]. (Cette vérification est immédiate lorsque l'on est dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale, en appliquant la méthode d'intégration donnée au paragraphe 6.2).

Caractère infinitésimal

Il est clair que l'hypothèse de la transformation infinitésimale implique que la déformation l'est aussi. La réciproque de cette proposition est évidemment fausse comme suffit à le montrer le contre-exemple des transformations rigidifiantes.

On peut néanmoins remarquer que l'hypothèse de la déformation infinitésimale, caractérisée par $\| \underline{\underline{e}} \| \ll 1$, suffit à assurer la validité des formules homologues de (5.5) à (5.7) avec les composantes de $\underline{\underline{e}}$ sous la forme :

$$\text{(7.1)} \qquad \begin{cases} (\mathrm{d}s - \mathrm{d}s_0)/\mathrm{d}s_0 \simeq e_{11}(\underline{X},t) \\ \theta \simeq 2\, e_{12}(\underline{X},t) \\ (\mathrm{d}\Omega_t - \mathrm{d}\Omega_0)/\mathrm{d}\Omega_0 \simeq \mathrm{tr}\ \underline{\underline{e}}(\underline{X},t)\ . \end{cases}$$

[18] Avec les notations (6.1) la condition sur le champ $\underline{\underline{F}}$ s'écrit : $\mathrm{rot}^{\mathrm{d}}(\tilde{\underline{\underline{F}}}) = 0$.

[19] Le résultat est intuitivement évident si l'on imagine, comme au paragraphe 4.5, le système dans κ_0, découpé en volumes infinitésimaux cubiques selon les directions principales de $\underline{\underline{C}}(t)$; les volumes transformés, parallélépipèdes rectangles identiques, doivent être jointifs pour respecter la continuité du milieu : ils subissent donc tous la même rotation.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

7.2 Utilisation d'un paramétrage lagrangien relatif à une configuration abstraite

Tout le présent chapitre, traitant des déformations, se rattache à une configuration initiale de référence du système, par rapport à laquelle on mesure les déformations. Aussi utilise-t-on pour repérer les particules, les coordonnées $\underline{X}$ de leurs positions dans cette configuration κ_0. On peut aussi être amené, pour ce repérage, à utiliser des paramètres lagrangiens relatifs à une configuration de référence abstraite κ_a (chapitre I, § 3.7), la description du mouvement étant mise sous la forme :

$$\underline{x} = \underline{\phi}(a^1, a^2, a^3, t) \ . \tag{7.2}$$

L'étude des déformations quant à elle n'a évidemment de sens que par rapport à une configuration réellement occupée par le système, soit κ_0. En désignant par $\underline{X}$ les coordonnées de la position d'une particule dans cette configuration $(t = 0)$

$$\underline{X} = \underline{\phi}(a^1, a^2, a^3, 0) \ . \tag{7.3}$$

on sera ramené à l'étude précédemment faite (sections 2 à 6) en substituant à la fonction $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ qui y apparaît la fonction $\underline{\Phi}(\underline{X}, t)$ définie par :

$$\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t) = \underline{\phi}(\cdot, \cdot, \cdot, t) \circ \underline{\phi}^{-1}(\underline{X}, 0) \ ; \tag{7.4}$$

toutes les formules précédemment données demeurent alors valables : c'est ainsi en particulier que l'on obtient, à partir de (4.12) le résultat déjà donné au chapitre I :

$$\mathrm{d}\Omega_t = \mathrm{d}\Omega_0 \frac{\mathrm{D}(x^1, x^2, x^3)}{\mathrm{D}(a^1, a^2, a^3)} \Big/ \frac{\mathrm{D}(X^1, X^2, X^3)}{\mathrm{D}(a^1, a^2, a^3)} \ .$$

7.3 Étude pratique des déformations

L'étude des déformations est un aspect essentiel dans la modélisation des milieux continus, principalement pour ses applications à la mécanique des solides déformables.

On retiendra le caractère ***tensoriel*** des grandeurs introduites : $\underline{\underline{C}}(\underline{X}, t), \underline{\underline{e}}(\underline{X}, t), \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X}, t)$, ...

Cette propriété, outre l'intérêt mathématique qui apparaîtra notamment dans la formulation des lois de comportement (par exemple en élasticité), présente des conséquences pratiques importantes :

aussi bien pour les ***déformations finies*** (Green-Lagrange) que pour les déformations linéarisées, on procèdera souvent en premier lieu à la détermination des ***directions principales*** et au calcul des ***dilatations*** et des ***déformations principales*** ;

les formules de ***changement de base*** (annexe I, § 3.2 et 5.9) permettent ensuite de calculer de façon systématique les composantes des tenseurs dans les bases les plus appropriées : notamment le passage d'un repère principal à un repère commode pour le calcul par (3.6) et (3.7) de la dilatation ou de l'allongement unitaire dans une direction donnée.

Du point de vue physique on retiendra que les dilatations et les déformations sont des ***grandeurs sans dimensions***.

La détermination expérimentale des tenseurs correspondants s'appuie sur des mesures de dilatation et d'allongement unitaire et sur les formules (3.6) ou (3.7). Elle

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

nécessite donc la comparaison, à l'échelle locale lorsque la transformation n'est pas homogène (cas général), des longueurs d'un vecteur matériel dans la configuration initiale de référence et dans la configuration actuelle. Les techniques expérimentales employées sont nombreuses.

- Extensomètres à fil résistant (jauges électriques de déformation) : le principe de la méthode consiste à faire subir à un fil la même extension que celle du matériau dans une direction donnée, et à mesurer la variation de résistance électrique correspondante (l'effet est amplifié en repliant le fil plusieurs fois sur lui-même). Ces extensomètres, collés à la surface du solide étudié, sont groupés en rosettes (3 jauges), de façon à recueillir suffisamment d'information pour la détermination de la déformation dans le plan tangent à la surface du solide (figure 12).
- Méthode du moiré : il s'agit d'une technique de marquage de la surface du solide par un réseau de traits fins et rapprochés (gravure, ou procédés d'impression divers). On compare le réseau déformé au réseau initial par observation et dépouillement des réseaux de franges de moiré (figure 13).
- Méthodes optiques diverses : holographie, moiré interférométrique, méthode de granularité, stéréophotogrammétrie.
- Marquage : à la surface d'un solide, par de petits cercles ($\varnothing$ = quelques millimètres) et observation des ellipses obtenues après déformation (figure 14), à l'intérieur d'un solide par un réseau (cf. chapitre I, figures 1 et 2) ou par des inclusions.
- Vernis craquelants et substances analogues déposées à la surface d'un solide.

Les dernières méthodes citées ci-dessus sont surtout qualitatives.

Enfin il est bon de connaître quelques ordres de grandeur de déformations typiques pour les solides :

l'allongement unitaire pour une éprouvette d'acier en traction, à sa limite d'élasticité initiale est de l'ordre de 10^{-3} ;

l'allongement unitaire pour une éprouvette d'acier doux à l'issue de son palier plastique est de l'ordre de 10^{-2} ;

l'allongement unitaire d'une éprouvette de béton en compression sous charge de courte durée avant ruine est de l'ordre de 10^{-3} ;

l'allongement unitaire local dans une expérience de striction en traction d'une éprouvette métallique est de l'ordre de 1 ; pour les polymères les ordres de grandeur des déformations sont beaucoup plus élevés.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

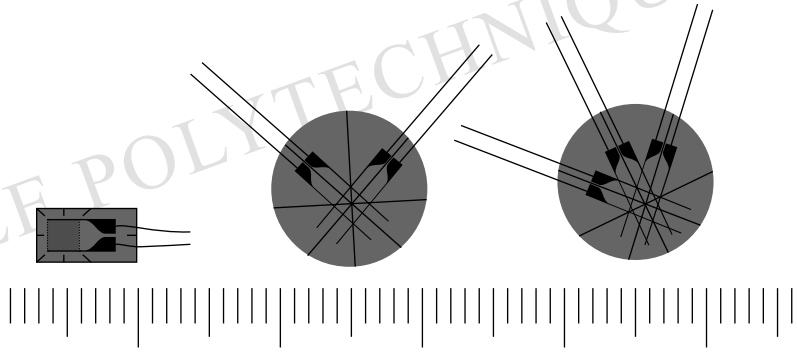
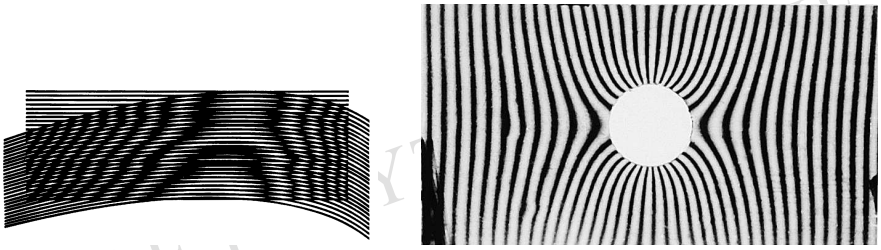


Figure 12 – Jauge extensométrique unidirectionnelle et rosettes de jauges bi- et tridirectionnelles (photos : J. Salençon).



a) principe *b) exemple de franges observées*

Figure 13 – Méthode du moiré (Laboratoire Central des Ponts et Chaussées)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Figure 14 – Marquage à la surface d'un solide (CETIM)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Récapitulatif des formules essentielles

• ***Transformation quelconque***

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$$
$$0 < J(\underline{X}, t) = \frac{\mathrm{D}\ (x^1, x^2, x^3)}{\mathrm{D}\ (X^1, X^2, X^3)} < +\infty$$

Gradient de la transformation :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\nabla \phi}}(\underline{X}, t)$$
$$\underline{\mathrm{d}M} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\mathrm{d}M_0}$$

Transport :

$$\mathrm{d}\Omega_t = \mathrm{d}\Omega_0 \ \det\left(\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)\right) = J(\underline{X}, t)\, \mathrm{d}\Omega_0$$
$$\underline{\mathrm{d}a} = J(\underline{X}, t)\, {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\mathrm{d}A}$$

Dilatations déformations :

$$\underline{\mathrm{d}M} \,.\, \underline{\mathrm{d}M'} = \underline{\mathrm{d}M_0} \,.\, \underline{\underline{C}}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\mathrm{d}M'_0}$$
$$\underline{\underline{C}}(\underline{X}, t) = {}^t\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$$

$$\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{C}}(\underline{X}, t) - \underline{\underline{\mathbb{1}}}\right)$$
$$\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}s_0^2 = 2\, \underline{\mathrm{d}M_0} \,.\, \underline{\underline{e}}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\mathrm{d}M_0}$$

Déplacement :

$$\underline{\xi}(\underline{X}, t) = \underline{\phi}(\underline{X}, t) - \underline{X}$$

$$\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X}, t) + {}^t\underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X}, t) + {}^t\underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X}, t)\right)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- ***Transformation infinitésimale :*** $\|\underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X},t)\| \ll 1$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t) = \frac{1}{2}\big(\underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X},t) + {}^t\underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X},t)\big)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t) \simeq \frac{1}{2}\big(\underline{\underline{\mathrm{grad}\,\xi}}(\underline{x},t) + {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}\,\xi}}(\underline{x},t)\big)\,, \quad \underline{x} = \phi(\underline{X},t)$$

$$(\mathrm{d}\Omega_t - \mathrm{d}\Omega_0)/\mathrm{d}\Omega_0 \simeq \ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t) = \mathrm{div}\,\underline{\xi}(\underline{X},t)$$

$$(\mathrm{d}s - \mathrm{d}s_0)/\mathrm{d}s_0 \simeq \varepsilon_{11}(\underline{X},t)$$

$$\theta \simeq 2\,\varepsilon_{12}(\underline{X},t)$$

Conditions de compatibilité géométrique : (en coordonnées cartésiennes orthonormées)

$$\varepsilon_{ij,k\ell} + \varepsilon_{k\ell,ij} - \varepsilon_{ik,j\ell} - \varepsilon_{j\ell,ik} = 0$$

Composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en coordonnées cylindriques (cf. annexe II)

$$\underline{\xi} = \xi_r\,\underline{e}_r + \xi_\theta\,\underline{e}_\theta + \xi_z\,\underline{e}_z$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\xi_r}{r} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \xi_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \xi_\theta}{\partial r} - \frac{\xi_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \xi_r}{\partial \theta}\Big)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial \xi_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_\theta}{\partial z}\Big) \qquad \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \xi_r}{\partial z} + \frac{\partial \xi_z}{\partial r}\Big)$$

$$\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\xi_r}{r} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en coordonnées sphériques (cf. annexe II)

$$\underline{\xi} = \xi_r\,\underline{e}_r + \xi_\theta\,\underline{e}_\theta + \xi_\varphi\,\underline{e}_\varphi$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\xi_r}{r} \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\xi_\theta}{r}\cot\theta + \frac{\xi_r}{r}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_\theta}{\partial r} - \frac{\xi_\theta}{r}\Big)$$

$$\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\cot\theta}{r}\xi_\varphi\Big)$$

$$\varepsilon_{\varphi r} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} - \frac{\xi_\varphi}{r}\Big)$$

$$\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\xi_\theta}{r}\cot\theta + 2\frac{\xi_r}{r}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Exercices

II.1 - Extension simple. R étant un repère cartésien orthonormé dans le référentiel $\mathcal{R}$, on considère la transformation homogène définie, à l'instant $t > 0$, par :

$$x_1 = X_1(1+\alpha t)\ ,\ x_2 = X_2\ ,\ x_3 = X_3\ ,\ \alpha > 0\ .$$

Déterminer le tenseur $\underline{\underline{F}}(t)$ de la transformation. Étudier le transport d'un vecteur, d'un volume, d'un vecteur aire. Calculer le tenseur des dilatations et le tenseur des déformations de Green-Lagrange. Déterminer leurs directions principales. Préciser l'hypothèse de la transformation infinitésimale ; donner les expressions linéarisées correspondantes.

Éléments de réponse.

- $\underline{\underline{F}}(t) = (1+\alpha t)\,\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$
  $\underline{v} = (1+\alpha t)V_1\,\underline{e}_1 + V_2\,\underline{e}_2 + V_3\,\underline{e}_3$
  $\Omega_t = (1+\alpha t)\Omega_0$ (cf. Ex.I.1)
  $\underline{n} = \dfrac{1}{\sqrt{N_1^2 + (1+\alpha t)^2(N_2^2+N_3^2)}}(N_1\,\underline{e}_1 + (1+\alpha t)(N_2\,\underline{e}_2 + N_3\,\underline{e}_3))$
  $a = A\sqrt{N_1^2 + (1+\alpha t)^2(N_2^2+N_3^2)}.$

- $\underline{\underline{C}}(t) = (1+\alpha t)^2\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$
  $\underline{\underline{e}}(t) = (\alpha t + \alpha^2 t^2/2)\,\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$.
  Directions principales de $\underline{\underline{C}}(t)$ et $\underline{\underline{e}}$ dans κ_0 : $\underline{e}_1$ et toute direction orthogonale à $\underline{e}_1$.
  Dilatations principales : $\lambda_1 = 1+\alpha t\ ,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$;
  déformations principales : $e_{11} = \alpha t + \alpha^2 t^2/2\ ,\ e_{22} = e_{33} = 0$.

- $\|\underline{\underline{\nabla\xi}}\| \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha t| \ll 1$
  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \alpha t\,\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1\ ,\ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \alpha t$.

II.2 - Glissement simple. Soit $R = (O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ un repère cartésien orthonormé dans le référentiel $\mathcal{R}$. On considère la transformation homogène définie à l'instant t par :

$$\underline{\xi} = 2\alpha t X_2\,\underline{e}_1\ .$$

Calculer $\underline{\underline{F}}(t), \underline{\underline{C}}(t)$; déterminer les dilatations principales et les directions principales de $\underline{\underline{C}}(t)$. Étudier le cas de la transformation infinitésimale.

Éléments de réponse.

- $\underline{\underline{F}}(t) = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 2\alpha t\,\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$.
  $\det \underline{\underline{F}}(t) = 1$: pas de variation de volume.
  $\underline{\underline{C}}(t) = \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\underline{\underline{e}}(t) = \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\alpha t\,(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) + 4\,\alpha^2 t^2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$.

- Les valeurs principales de $\underline{\underline{C}}(t)$ et ses directions principales dans κ_0 s'obtiennent immédiatement par le calcul à partir de l'expression ci-dessus, puisque la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ est orthonormée ; on détermine les directions propres et valeurs propres de l'application linéaire associée à $\underline{\underline{C}}(t)$:

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

$\lambda_1^2 = 1 + 2\alpha t\sqrt{1+\alpha^2t^2} + 2\alpha^2t^2$ d'où $\lambda_1 = (\sqrt{1+\alpha^2t^2} + \alpha t)$,
$\lambda_2^2 = 1 - 2\alpha t\sqrt{1+\alpha^2t^2} + 2\alpha^2t^2$ d'où $\lambda_2 = (\sqrt{1+\alpha^2t^2} - \alpha t)$,
$\lambda_3^2 = 1$ d'où $\lambda_3 = 1$.
On vérifie que $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.
Les directions principales correspondantes sont, dans κ_0 :
$\underline{e}_V = \underline{e}_1\cos\varphi + \underline{e}_2\sin\varphi$, $\underline{e}_W = -\underline{e}_1\sin\varphi + \underline{e}_2\cos\varphi$, $\underline{e}_3$,
avec $\tan\varphi = \lambda_1 = 1/\lambda_2$, $(\tan 2\varphi = -1/\alpha\, t)$.
Le transport convectif des vecteurs $\underline{e}_V, \underline{e}_W, \underline{e}_3$ donne respectivement les vecteurs $\lambda_1(\underline{e}_1\sin\varphi + \underline{e}_2\cos\varphi)$, $\lambda_2(-\underline{e}_1\cos\varphi + \underline{e}_2\sin\varphi)$, et $\underline{e}_3$ dont on vérifie l'orthogonalité.
En posant $\underline{e}_v = \underline{e}_1\sin\varphi + \underline{e}_2\cos\varphi$ et $\underline{e}_w = -\underline{e}_1\cos\varphi + \underline{e}_2\sin\varphi$, la décomposition polaire $\underline{\underline{F}}(t) = \underline{\underline{R}}(t)\,.\,\underline{\underline{S}}(t)$ s'explicite en :
$\underline{\underline{S}}(t) = \lambda_1\,\underline{e}_V\otimes\underline{e}_V + \lambda_2\,\underline{e}_W\otimes\underline{e}_W + \lambda_3\,\underline{e}_3\otimes\underline{e}_3$,
$\underline{\underline{R}}(t) = \underline{e}_v\otimes\underline{e}_V + \underline{e}_w\otimes\underline{e}_W + \underline{e}_3\otimes\underline{e}_3$ ou encore
$\underline{\underline{R}}(t) = \sin 2\varphi\,(\underline{e}_1\otimes\underline{e}_1 + \underline{e}_2\otimes\underline{e}_2) + \cos 2\varphi\,(\underline{e}_2\otimes\underline{e}_1 - \underline{e}_1\otimes\underline{e}_2) + \underline{e}_3\otimes\underline{e}_3$
qui représente la rotation d'angle $(\pi/2 - 2\varphi)$ autour de $\underline{e}_3$.
Ces résultats peuvent aussi s'obtenir géométriquement en remarquant que le losange de κ_0, construit sur les vecteurs unitaires $\underline{OA}_0 = \underline{e}_1$ et $\underline{OB}_0 = (-\alpha t\,\underline{e}_1 + \underline{e}_2)/\sqrt{1+\alpha^2t^2}$ se transforme à l'instant t en le losange de κ_t construit sur les vecteurs unitaires $\underline{OA} = \underline{e}_1$ et $\underline{OB} = (\alpha t\,\underline{e}_1 + \underline{e}_2)/\sqrt{1+\alpha^2t^2}$. Dans $\kappa_0, (\underline{OA}_0, \underline{OB}_0) = 2\varphi$; les vecteurs $\underline{e}_V$ et $\underline{e}_W$ sont dirigés selon les bissectrices intérieure et extérieure de cet angle parallèles aux diagonales du losange. Elles sont transportées convectivement à l'instant t selon les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $(\underline{OA}, \underline{OB}) = (\pi - 2\varphi)$ dans κ_t dont $\underline{e}_v$ et $\underline{e}_w$ sont les vecteurs unitaires.

- Transformation infinitésimale.
$\|\underline{\underline{\nabla\xi}}\| \ll 1 \quad\Leftrightarrow\quad |\,\alpha t\,| \ll 1$:
$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \alpha t\,(\underline{e}_1\otimes\underline{e}_2 + \underline{e}_2\otimes\underline{e}_1)$, $\underline{\underline{w}}(t) = \alpha t\,(\underline{e}_1\otimes\underline{e}_2 - \underline{e}_2\otimes\underline{e}_1)$
$\varepsilon_1(t) = \alpha t$, $\varepsilon_2(t) = -\alpha t$, $\varepsilon_3(t) = 0$.
Directions principales de $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$:
$\underline{e}_V = (\underline{e}_1 + \underline{e}_2)\sqrt{2}/2$, $\underline{e}_W = (\underline{e}_2 - \underline{e}_1)\sqrt{2}/2$, $\underline{e}_3 = 0$
$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \alpha t\,(\underline{e}_V\otimes\underline{e}_V - \underline{e}_W\otimes\underline{e}_W)$;
les directions principales sont les bissectrices de $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ et $\underline{e}_3$, et les déformations principales ε_i dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ sont égales en valeur absolue et de signes opposés ($\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}} = 0$: absence de variation de volume).

II.3 - « Double glissement ». R est un repère cartésien orthonormé dans le référentiel $\mathcal{R}$. On considère la transformation homogène définie à l'instant $t > 0$ par :

$$\underline{\xi} = \alpha t(X_2\,\underline{e}_1 + X_1\,\underline{e}_2)\ ,\ \alpha > 0\ .$$

Calculer la dilatation volumique dans ce mouvement, le tenseur des dilatations et le tenseur des déformations de Green-Lagrange. Déterminer les directions principales de ces tenseurs et les expressions de ceux-ci dans le repère principal orthonormé. Préciser l'hypothèse de la transformation infinitésimale et donner les expressions linéarisées correspondantes.

Éléments de réponse

- Dilatation volumique = $\det\underline{\underline{F}}(t) = 1 - \alpha^2t^2$
$(|\,\alpha t\,| < 1$ cf. Ex.I.2)
$\underline{\underline{C}}(t) = \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\alpha t\,(\underline{e}_1\otimes\underline{e}_2 + \underline{e}_2\otimes\underline{e}_1) + \alpha^2t^2(\underline{e}_1\otimes\underline{e}_1 + \underline{e}_2\otimes\underline{e}_2) = \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\underline{\underline{e}}(t)$.

- Trièdre principal de $\underline{\underline{C}}(t)$ et $\underline{\underline{e}}(t)$ dans κ_0 :
$\underline{e}_V = (\underline{e}_1 + \underline{e}_2)/\sqrt{2}$, $\underline{e}_W = (\underline{e}_2 - \underline{e}_1)/\sqrt{2}$, $\underline{e}_3$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

$\underline{\underline{C}}(t) = (1+\alpha t)^2 \underline{e}_V \otimes \underline{e}_V + (1-\alpha t)^2 \underline{e}_W \otimes \underline{e}_W + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$
$\underline{\underline{e}}(t) = (\alpha t + \alpha^2 t^2/2)\, \underline{e}_V \otimes \underline{e}_V + (-\alpha t + \alpha^2 t^2/2)\, \underline{e}_W \otimes \underline{e}_W$.

- $\|\underline{\underline{\nabla \xi}}\| \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\,\alpha t\,| \ll 1$
  $\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \alpha t\, (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) = \alpha t\, (\underline{e}_V \otimes \underline{e}_V - \underline{e}_W \otimes \underline{e}_W)$
  $\det \underline{\underline{F}}(t) \simeq 1 + \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}} = 1$.

Commentaire.
En transformation finie le « double glissement » induit une variation de volume ; les directions principales de la déformation sont dirigées selon les bissectrices de $\underline{e}_1, \underline{e}_2$. ***En transformation infinitésimale*** le double glissement s'effectue sans variation de volume ; du point de vue de la déformation le « double glissement » est équivalent au glissement simple (Ex.II.2).

II.4 - $R = (O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ est un repère cartésien normé dans lequel $\underline{e}_3$ est orthogonal à $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$. Étudier la transformation homogène définie à l'instant t par :

$$\underline{\xi} = \alpha t\, (X^2 \underline{e}_1 + X^1 \underline{e}_2) \qquad \alpha > 0\ .$$

Éléments de réponse :

- $\underline{\underline{\nabla \xi}} = \alpha t\, (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}^2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}^1)$, $\underline{\underline{F}}(t) = \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\nabla \xi}}$
  dilatation volumique $= \det \underline{\underline{F}}(t) = 1 - \alpha^2 t^2 \quad (\Rightarrow \alpha t < 1)$.

- $\underline{\underline{C}}(t) = \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\alpha t\, \big(\underline{e}^2 \otimes \underline{e}^1 + \underline{e}^1 \otimes \underline{e}^2 + g_{12}\, (\underline{e}^2 \otimes \underline{e}^2 + \underline{e}^1 \otimes \underline{e}^1)\big)$
  $+ (\alpha t)^2 \big(\underline{e}^2 \otimes \underline{e}^2 + \underline{e}^1 \otimes \underline{e}^1 + g_{12}\, (\underline{e}^2 \otimes \underline{e}^1 + \underline{e}^1 \otimes \underline{e}^2)\big)$
  avec $g_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j$

- En regroupant les termes :
  $\underline{\underline{C}}(t) = \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\alpha t\, \big((\underline{e}^1 + g_{12}\, \underline{e}^2) \otimes \underline{e}^2 + (\underline{e}^2 + g_{21}\, \underline{e}^1) \otimes \underline{e}^1\big) + (\alpha t)^2 \big((\underline{e}^1 + g_{12}\, \underline{e}^2) \otimes \underline{e}^1$
  $+ (\underline{e}^2 + g_{21}\, \underline{e}^1) \otimes \underline{e}^2\big)$
  d'où la représentation mixte de $\underline{\underline{C}}(t)$
  $\underline{\underline{C}}(t) = \underline{\underline{\mathbb{1}}} + (\alpha t)^2 (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}^1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}^2) + 2\alpha t\, (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}^2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}^1)$.
  On en déduit les directions principales de $\underline{\underline{C}}(t)$ dans κ_0, comme dans Ex.II.3 :
  $\underline{e}_V = (\underline{e}_1 + \underline{e}_2)/\sqrt{2(1+g_{12})}$, $\underline{e}_W = (\underline{e}_1 - \underline{e}_2)/\sqrt{2(1-g_{12})}$, $\underline{e}_3$ avec les dilatations principales $(1+\alpha t)$, $(1-\alpha t)$, 1.
  $\underline{\underline{C}}(t) = (1+\alpha t)^2 \underline{e}_V \otimes \underline{e}_V + (1-\alpha t)^2 \underline{e}_W \otimes \underline{e}_W + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$.

Commentaire.
Il s'agit du « double glissement » en coordonnées obliques, identique à celui traité en coordonnées orthogonales (Ex.II.3).

II.5 - Ellipsoïde des dilatations. On considère, à l'instant t, la transformation homogène qui laisse invariante l'origine O et qui est caractérisée par le tenseur gradient $\underline{\underline{F}}(t)$. Déterminer le domaine Ω_0 dont le transporté par le mouvement est, à l'instant t, une sphère de centre O et de rayon R. Déterminer le domaine Ω'_t transporté par le mouvement, à l'instant t, d'une sphère Ω'_0 de centre O et de rayon R_0 dans κ_0.

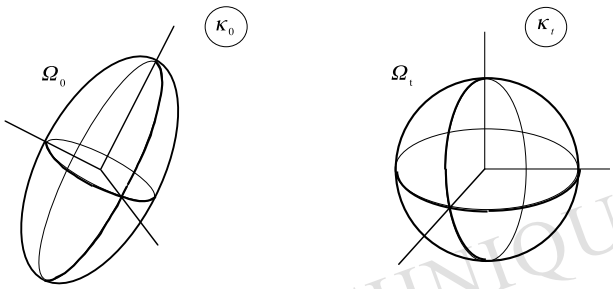
Éléments de réponse :

- Le domaine Ω_t transporté de Ω_0 a pour équation $\underline{x}^2 = R^2$. D'où l'équation de Ω_0 : $\underline{X} \cdot \underline{\underline{C}}(t) \cdot \underline{X} = R^2$ qui s'écrit dans les axes principaux de $\underline{\underline{C}}(t)$ dans κ_0 :
  $(\lambda_1 X_1)^2 + (\lambda_2 X_2)^2 + (\lambda_3 X_3)^2 = R^2$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Ω_0 est l'ellipsoïde de demi-axes $R/\lambda_1, R/\lambda_2$ et R/λ_3 selon les directions principales de $\underline{\underline{C}}(t)$ dans κ_0.

- L'équation de Ω'_0 est $\underline{X}^2 = R_0^2$, d'où pour Ω'_t : $\underline{x} \,.\, (\underline{\underline{F}} \,.\, {}^t\underline{\underline{F}}(t))^{-1} \,.\, \underline{x} = R_0^2$.
  Ω'_t est l'ellipsoïde dont les axes sont obtenus par le transport convectif dans κ_t des directions principales de $\underline{\underline{C}}(t)$ dans κ_0. Demi-axes : $\lambda_1 R_0, \lambda_2 R_0, \lambda_3 R_0$.
  L'équation de Ω'_t dans la base orthonormée correspondante $(\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3)$, principale pour $\underline{\underline{F}}(t) \,.\, {}^t\underline{\underline{F}}(t) : (x'_1/\lambda_1)^2 + (x'_2/\lambda_2)^2 + (x'_3/\lambda_3)^2 = R_0^2$.



Commentaire.
Pour $R = 1$, Ω_0 est appelé « ellipsoïde réciproque des déformations ».
Ω'_t, pour $R_0 = 1$, est « l'ellipsoïde des déformations ».

II.6 - « Tourbillon ponctuel ». On considère le mouvement plan défini en coordonnées cylindriques, pour $r \neq 0$, par :

$$\underline{U}(r, \theta, z, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\, \underline{e}_\theta \quad \text{où } \Gamma \text{ est une constante réelle.}$$

Déterminer les trajectoires et donner la représentation lagrangienne de ce mouvement. Calculer le gradient de la transformation entre M_0, de coordonnées (R, Θ, Z) dans la configuration $\kappa_0(t = 0)$ et M de coordonnées (r, θ, z) dans κ_t, et le tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}$; comparer avec les résultats de Ex.II.2 et commenter : en déduire les directions principales de $\underline{\underline{C}}$ en M_0 et la rotation de ce trièdre dans le transport convectif de M_0 à M. Étudier le cas de la transformation infinitésimale après en avoir explicité les hypothèses.

Éléments de réponse.

- En coordonnées cylindriques

  $$\underline{U} = \underline{e}_r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \underline{e}_\theta r \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \underline{e}_z \frac{\mathrm{d}z}{dt}$$

  d'où ici, pour la particule située en M_0 dans κ_0 :

  $$r(R, \Theta, Z, t) = R, \quad \theta(R, \Theta, Z, t) = \Theta + \frac{\Gamma}{2\pi R^2} t = \Theta + \alpha(R) t\,, \quad z(R, \Theta, Z, t) = Z\ .$$

  Les trajectoires sont des cercles d'axe Oz.

- On calcule $\underline{\underline{F}}$ par : $\underline{\mathrm{d}M} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\mathrm{d}M}_0$.
  $\underline{\mathrm{d}M}_0 = \underline{e}_R \mathrm{d}R + \underline{e}_\Theta R \mathrm{d}\Theta + \underline{e}_Z \mathrm{d}Z$ dans $(\underline{e}_R, \underline{e}_\Theta, \underline{e}_Z)$ base locale orthonormée en M_0 ;

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

$\underline{\mathrm{d}M} = \underline{e}_r \mathrm{d}R + \underline{e}_\theta (R\mathrm{d}\Theta - 2\alpha(R)t\,\mathrm{d}R) + \underline{e}_z \mathrm{d}Z$ dans $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ base locale orthonormée en M ;
d'où : $\underline{\underline{F}}(R,\Theta,Z,t) = \underline{e}_r \otimes \underline{e}_R - 2\alpha(R)t\,\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_R + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\Theta + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_Z$.

- On calcule $\underline{\underline{C}}$ par $\underline{\underline{C}} = {}^t\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}$:
$\underline{\underline{C}}(R,\Theta,Z,t) = \underline{\underline{\mathbb{1}}} - 2\alpha(R)t\,(\underline{e}_R \otimes \underline{e}_\Theta + \underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_R) + 4\alpha^2(R)t^2 \underline{e}_R \otimes \underline{e}_R$.
On peut aussi, pour un calcul direct de $\underline{\underline{C}}$, utiliser la formule « $\mathrm{du}\,\mathrm{ds}^2$ » qui donne :
$4\alpha^2(R)t^2(\mathrm{d}R)^2 - 4\alpha(R)t\,R\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}R = 2\,\underline{\mathrm{d}M}_0 \cdot \underline{\underline{e}}(R,\Theta,Z,t) \cdot \underline{\mathrm{d}M}_0$.

- La comparaison de l'expression obtenue pour $\underline{\underline{C}}$ avec les résultats de Ex.II.2 montre que la déformation est localement assimilable à celle correspondant au glissement simple défini dans Ex.II.2 où le trièdre $(-\underline{e}_\Theta, \underline{e}_R, \underline{e}_Z)$ jouerait en M_0 le rôle du trièdre $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ et $\alpha(R)$ remplaçant α.

  Plus précisément, en introduisant : $\underline{\underline{U}}(R,t) = \underline{e}_r \otimes \underline{e}_R + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\Theta + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_Z$

  on a : $\underline{\underline{F}}(R,\Theta,Z,t) = \underline{\underline{U}}(R,t) \cdot (\underline{\underline{\mathbb{1}}} - 2\alpha(R)t\,\underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_R)$
  qui montre que la transformation homogène tangente en M_0 est le produit du glissement de Ex.II.2 défini avec $\alpha(R)$ dans les axes $(-\underline{e}_\Theta, \underline{e}_R, \underline{e}_Z)$ suivi de la rotation d'angle $\alpha(R)t$ autour de $\underline{e}_Z$ qui correspond à $\underline{\underline{U}}(R,t)$.
  On en déduit également que : $\det \underline{\underline{F}}(R,\Theta,Z,t) = 1$; il n'y a pas de variation de volume.

- Les directions principales de $\underline{\underline{C}}(R,\Theta,Z,t)$ en M_0 sont, d'après les résultats de Ex.II.2, les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $(-\underline{e}_\Theta, \underline{e}_R + \alpha(R)t\,\underline{e}_\Theta)$.
  La décomposition polaire de $\underline{\underline{F}}(R,\Theta,Z,t)$ montre que, dans le transport convectif de M_0 à M, ce trièdre subit, autour de $\underline{e}_Z$ la rotation d'angle $\omega(R,t) = -\mathrm{Arctan}\,(\alpha(R)t)$ correspondant au glissement simple, puis la rotation d'angle $\alpha(R)t$ correspondant à $\underline{\underline{U}}(R,t)$; soit, au total, la rotation autour de $\underline{e}_Z$, d'angle :
  $\beta(R,t) = \alpha(R)t - \mathrm{Arctan}\,(\alpha(R)t)$ dans la décomposition polaire de $\underline{\underline{F}}(R,\Theta,Z,t)$.

- Transformation infinitésimale.

$$\|\underline{\underline{\nabla \xi}}\| \ll 1 \Leftrightarrow |\,\alpha(R)t\,| \ll 1 \text{ c'est-à-dire } |\,\theta - \Theta\,| \ll 1.$$

  Les directions principales de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sont les bissectrices de $(-\underline{e}_\Theta, \underline{e}_R)$ et $\underline{e}_Z$, avec pour valeurs principales ε_i correspondantes : $\alpha(R)t, -\alpha(R)t, 0$. La rotation $\beta(R,t)$ est nulle au 1er ordre (elle est du 3ème ordre en $\alpha(R)t$).

Commentaire.
Le mouvement étudié ici correspond à un modèle classique pour un fluide incompressible. Il sera repris dans Ex.III.3 du point de vue cinématique, justifiant la terminologie de « tourbillon ponctuel ».
Le lien mis en évidence avec le glissement simple ne doit pas surprendre puisque le mouvement s'effectue par rotation autour de Oz de couches cylindriques concentriques dont la vitesse angulaire croît au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'axe. On remarque que la transformation infinitésimale est ici liée à la valeur de l'angle $\alpha(R)t = (\underline{OM}_0, \underline{OM})$ dont a tourné la particule, qui doit demeurer faible : elle correspond à des durées d'autant plus brèves que la particule est plus proche de l'axe.

II.7 - Cercle de Mohr des déformations. On se place dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale. $R = (O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ est orthonormé. La déformation est plane parallèlement à $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ c'est-à-dire que $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0$. On étudie le tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X}, t)$ en un point $\underline{X}$ donné à l'instant t. On désigne par $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \equiv \underline{e}_z)$ la base orthonormée de ses directions principales et par ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 = 0$ les valeurs principales correspondantes. On introduit les variables

$$\Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2\ ,\ r = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2\ ,\ \varphi = (\underline{e}_x, \underline{e}_1)\ .$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Exprimer les composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$ dans R en fonction de Θ, r, φ. En déduire les directions du plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ pour lesquelles l'allongement unitaire est extrémal, ainsi que celles pour lesquelles le glissement est maximal lorsque $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$ est donné.

Éléments de réponse ;

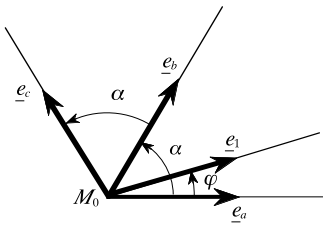
- Par les formules de changement de repères :
$\varepsilon_{xx} = \Theta/2 + r\cos 2\varphi$, $\varepsilon_{yy} = \Theta/2 - r\cos 2\varphi$, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = r\sin 2\varphi$, autres ε_{ij} nuls dans R.

- On fixe $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \Theta$ et r. On suppose $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. En faisant varier φ on étudie par $\varepsilon_{xx} = \delta(\underline{e}_x)$ et $2\varepsilon_{xy}$, les variations de l'allongement unitaire et du glissement : allongement unitaire maximal pour $\varphi = 0, \varepsilon_{xx} = \varepsilon_1 = \Theta/2 + r$; minimal pour $\varphi = \pi/2$, $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_2 = \Theta/2 - r$. Glissement maximal pour $\varphi = \pi/4$, $2\varepsilon_{xy} = 2r = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$.

Commentaire.
On rapprochera cet exercice de la représentation de Mohr pour les contraintes exposée au chapitre VI section 3.

II.8 - Extensométrie. On se place dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale. On suppose que la déformation est plane perpendiculairement à la direction du vecteur normé $\underline{e}_3$. On étudie le tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$ en un point $\underline{X}$ donné, à l'instant t. Afin de déterminer expérimentalement ce tenseur, on dispose selon les directions de trois vecteurs normés $\underline{e}_a$, $\underline{e}_b$, $\underline{e}_c$ orthogonaux à $\underline{e}_3$, des jauges extensométriques donnant les allongements unitaires : $\delta(\underline{e}_a) = \delta_a$, $\delta(\underline{e}_b) = \delta_b$, $\delta(\underline{e}_c) = \delta_c$. On suppose, selon la pratique courante, que $\underline{e}_b$ est la bissectrice de l'angle $(\underline{e}_a, \underline{e}_c) = 2\alpha$.

Donner l'expression de $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$ dans la base normée $(\underline{e}_a, \underline{e}_c, \underline{e}_3)$. Déterminer les directions principales et les valeurs principales de $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$ dans les deux cas classiques pour les applications pratiques : $\alpha = \pi/4$ et $\alpha = \pi/3$.



Éléments de réponse :

- $\varepsilon_{aa} = \delta(\underline{e}_a) = \delta_a$, $\varepsilon_{cc} = \delta(\underline{e}_c) = \delta_c$
$\underline{e}_b = (\underline{e}_a + \underline{e}_c)/2\cos\alpha \Rightarrow \varepsilon_{ac} = \varepsilon_{ca} = 2\delta_b\cos^2\alpha - (\delta_a + \delta_c)/2$
$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t) = \varepsilon_{aa}\,\underline{e}^a \otimes \underline{e}^a + \varepsilon_{ac}\,\underline{e}^a \otimes \underline{e}^c + \varepsilon_{ca}\,\underline{e}^c \otimes \underline{e}^a + \varepsilon_{cc}\,\underline{e}^c \otimes \underline{e}^c$

- On pose $\varphi = (\underline{e}_a, \underline{e}_1)$, $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ directions principales de $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$. Avec les notations et les résultats de Ex.II.7
$\delta_a = \Theta/2 + r\cos 2\varphi, \quad \delta_b = \Theta/2 + r\cos 2(\varphi - \alpha), \quad \delta_c = \Theta/2 + r\cos 2(\varphi - 2\alpha).$

- $\alpha = \pi/4$
$\Theta = \delta_a + \delta_c$,
$r\cos 2\varphi = (\delta_a - \delta_c)/2$, $r\sin 2\varphi = (2\delta_b - \delta_a - \delta_c)/2$ d'où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varphi, (\varepsilon_3 = 0)$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- $\alpha = \pi/3$
  $\Theta = 2(\delta_a + \delta_b + \delta_c)/3$
  $r\cos 2\varphi = (2\delta_a - \delta_b - \delta_c)/3$, $r\sin 2\varphi = \sqrt{3}(\delta_b - \delta_c)/3$ d'où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varphi, (\varepsilon_3 = 0)$.

II.9 - Compatibilité des déformations thermiques. On se place dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale. On considère un solide homogène, constitué d'un matériau isotrope, que l'on soumet à un champ d'écart de température $\tau(\underline{X})$ à partir du champ de température $T_0(\underline{X})$ dans la configuration de référence. On suppose que les déformations thermiques correspondantes, par rapport à la configuration de référence sont linéaires et de la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_\tau(\underline{X}) = \alpha\tau(\underline{X})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}\,,$$

où α est la constante thermique caractéristique de ce matériau isotrope. Quelle doit être la forme du champ τ pour que ces déformations thermiques soient géométriquement compatibles hors de toute condition sur les déplacements imposée au contour du solide ? Montrer que la condition trouvée est suffisante même si le solide étudié est multiplement connexe.

Éléments de réponse :

- À partir des conditions écrites sur les $\varepsilon_{ij,k\ell}$ il vient :
  $\tau_{,22} + \tau_{,33} = 0$, $\tau_{,11} + \tau_{,22} = 0$, $\tau_{,11} + \tau_{,33} = 0$, $\tau_{,21} = 0$, $\tau_{,23} = 0$, $\tau_{,31} = 0$.
  Le champ τ doit être une fonction affine des coordonnées cartésiennes (orthonormées ou non).

- On pose $\alpha\tau = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + b$, en coordonnées cartésiennes orthornormées.
  L'intégration de $\underline{\underline{\varepsilon}}_\tau$ donne le champ $\underline{\xi}_\tau$ de composantes :
  $\xi_1 = \dfrac{a_1}{2}(X_1^2 - X_2^2 - X_3^2) + a_2X_1X_2 + a_3X_1X_3 + bX_1 - rX_2 + qX_3 + \lambda_1$
  $\xi_2 = \dfrac{a_2}{2}(X_2^2 - X_1^2 - X_3^2) + a_1X_2X_1 + a_3X_2X_3 + bX_2 - pX_3 + rX_1 + \lambda_2$
  $\xi_3 = \dfrac{a_3}{2}(X_3^2 - X_1^2 - X_2^2) + a_1X_3X_1 + a_2X_3X_2 + bX_3 - qX_1 + pX_2 + \lambda_3$
  où (p, q, r) sont les composantes du vecteur rotation et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ celles du vecteur translation d'un mouvement rigidifiant arbitraire. Une fois ces constantes déterminées, le champ $\underline{\xi}_\tau$ est une fonction univoque de $\underline{X}$: les « conditions de fermeture » à vérifier dans le cas d'un domaine multiplement connexe sont donc automatiquement vérifiées.

II.10 - Déformations thermiques. On se place dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale. Une plaque de section circulaire, d'axe OX_3, de rayon R, d'épaisseur uniforme, repose sur le plan $X_3 = 0$ le point O étant fixé. Sa température initiale est uniforme égale à T_0 dans la configuration de référence. On porte la face supérieure de la plaque $(X_3 = h)$ à la température uniforme $T' < T_0$, ce qui induit dans la plaque un champ d'écart de température $\tau(\underline{X})$ par rapport à T_0 qui est supposé fonction linéaire de la cote X_3. On suppose que les déformations thermiques sont de la forme $\underline{\underline{\varepsilon}}_\tau(\underline{X}) = \alpha\tau(\underline{X})\underline{\underline{\mathbb{1}}}$. Calculer les déplacements des points de la plaque dus à cet écart de température. Comment se transforment les plans d'équations $X_3 =$ Constante « feuillets » de la plaque ?

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Éléments de réponse :

- En appliquant les résultats de Ex.II.9 on obtient pour $\underline{\xi}_\tau(\underline{X})$:
  $\xi_1 = a_3 X_1 X_3 - r X_2 + q X_3 + \lambda_1$
  $\xi_2 = a_3 X_2 X_3 - p X_3 + r X_1 + \lambda_2$
  $\xi_3 = \dfrac{a_3}{2}(X_3^2 - X_1^2 - X_2^2) - q X_1 + p X_2 + \lambda_3$
  avec $a_3 = \alpha(T' - T_0)/h$.
  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On peut prendre $p = q = r = 0$ (rotation d'ensemble nulle).
  Le feuillet $X_3 =$ constante $= c$ se transforme en :
  $x_1 = X_1(1 + a_3 c)\ ,\ x_2 = X_2(1 + a_3 c)\ ,\ x_3 = c\,(1 + \dfrac{a_3}{2}c) - \dfrac{a_3}{2}\big(\dfrac{x_1^2}{(1 + a_3 c)^2} + \dfrac{x_2^2}{(1 + a_3 c)^2}\big)$.
  On remarque que $a_3 c = \alpha(T' - T_0)c/h \ll 1$. L'équation du transformé du feuillet $X_3 = c$ peut donc être simplifiée en : $x_3 = c - \dfrac{a_3}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, paraboloïde de révolution de sommet $(0, 0, c)$, d'axe $\underline{e}_3$ et de rayon de courbure au sommet $-1/a_3 = -h/\alpha(T' - T_0)$.

Commentaire.

Le problème traité se place en fait dans le cadre de l'hypothèse des petits déplacements qui sera exposée au chapitre VIII (§ 2.1). On peut alors assimiler les surfaces transformées des feuillets de la plaque à des calottes sphériques parallèles, de rayon $-h/\alpha(T' - T_0)$.

C'est au chapitre X que seront énoncés et démontrés les théorèmes d'unicité pour la solution d'un problème d'équilibre thermoélastique linéarisé qui fournissent la pleine justification des résultats trouvés ici.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Chapitre III

Cinématique du milieu continu

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MOTS CLÉS

Taux de déformation.
Taux de déformation volumique.
Taux de rotation. Vecteur tourbillon.
Dérivée particulaire. Terme de convection.
Conservation de la masse. Équation de continuité.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En bref...

Le point de vue incrémental pour la description de l'évolution d'un système peut être abordé en description lagrangienne ou en description eulérienne.

Dans la description lagrangienne, la dérivation par rapport au temps s'identifie à la *dérivée particulaire* qui suit l'évolution d'une grandeur attachée à une particule, à un ensemble discret de particules ou, plus généralement, à un domaine matériel (sections 2 et 4). **Au plan géométrique, la cinématique du milieu continu se déduit directement de l'étude du transport convectif, de la transformation et de la déformation entre une configuration initiale de référence et la configuration actuelle**.

Ainsi apparaissent naturellement les notions de *taux lagrangiens* d'extension, de dilatation volumique, de déformation, qui désignent les dérivées temporelles des grandeurs correspondantes définies dans la comparaison de la configuration actuelle avec la configuration de référence. Ils présentent toutefois l'inconvénient de caractériser l'évolution infinitésimale à venir à l'instant actuel en se référant à l'instant initial (section 2).

C'est dans la description eulérienne, dont il est le fondement, que le point de vue incrémental trouve sa pleine cohérence. À chaque instant l'évolution infinitésimale à venir y est définie sur la configuration actuelle. Au plan géométrique, le mouvement étant donné par le champ des vitesses, c'est le gradient de ce champ sur la configuration actuelle qui définit localement la transformation infinitésimale. Le tenseur *taux de déformation* (eulérien), partie symétrique de ce gradient, y caractérise l'évolution de la déformation, rapportée à la configuration actuelle qui joue ainsi, à chaque instant, le rôle de configuration de référence. La partie antisymétrique du gradient du champ de vitesse est le *taux de rotation*. Il définit localement le mouvement infinitésimal de rotation de la matière, auquel s'ajoute le mouvement infinitésimal de déformation pure, défini par le tenseur taux de déformation (section 3).

La description eulérienne, définissant les grandeurs sur la configuration actuelle en fonction des variables géométriques et du temps, n'identifie pas les éléments matériels. La *dérivation particulaire* doit alors y être effectuée comme la *dérivation par rapport au temps en suivant la particule ou l'élément matériel concerné*. Ceci explique la structure des formules cor-

respondantes où l'on trouve de façon systématique un terme qui exprime la dérivation partielle par rapport au temps les variables géométriques étant maintenues constantes (point ou domaine géométrique « figé »), auquel s'ajoute un *terme de convection*. Celui-ci est la contribution due au transport convectif de la particule ou du domaine matériel auquel est attachée la grandeur considérée (section 4).

Une attention particulière est apportée à la dérivation particulaire des intégrales de volume en raison du rôle privilégié qui leur revient pour définir les grandeurs physiques relatives à un système dans la modélisation du milieu continu. Ainsi la masse d'un système s'exprime-t-elle comme l'intégrale de sa masse volumique. La loi de *conservation de la masse* se traduit par la nullité de la dérivée particulaire de cette intégrale. L'exploitation de cette équation globale conduit, au plan local, à *l'équation de continuité* qui s'exprime, en description eulérienne, par une équation différentielle et l'équation de saut associée (section 5).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Principales notations

Notation	Signification	1ère formule
$\underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X},t)$	gradient lagrangien du champ de vitesse	(2.7)
$\underline{\underline{\operatorname{grad} U}}(\underline{x},t)$	gradient eulérien du champ de vitesse	(3.4)
$\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)$	taux de déformation (eulérien)	(3.9)
$\dot{\theta}$	taux de glissement	(3.18)
$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x},t)$	taux de rotation	(3.21)
$\underline{\Omega}(\underline{x},t)$	vecteur tourbillon	(3.22)
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ ou $\cdot$	symboles de la dérivation particulaire	(2.2)
$\underline{a}(\underline{x},t)$	accélération en représentation eulérienne	(4.16)
$\underline{W}$	vitesse de propagation	(4.30)
$[\![\ \ ]\!]$	symbole du « saut » ou discontinuité	(4.32)
$\rho(\underline{x},t)$	masse volumique dans κ_t	(5.1)
$\rho_0(\underline{X})$	masse volumique dans κ_0	(5.8)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Présentation 93
2 Cinématique lagrangienne du milieu continu 93
2.1 Transport convectif et dérivation particulaire 93
2.2 Taux de déformation lagrangien 95
3 Cinématique eulérienne du milieu continu 96
3.1 Problématique 96
3.2 Dérivée particulaire d'un vecteur 96
3.3 Taux de déformation (eulérien) 97
3.4 Utilisation du tenseur taux de déformation 98
3.5 Taux de rotation. Taux de déformation volumique 100
3.6 Comparaison avec la déformation linéarisée en transformation infinitésimale 103
3.7 Compatibilité d'un champ de taux de déformation 104
3.8 Mouvement rigidifiant 105
3.9 Formulation faible de la compatibilité géométrique 105
3.10 Hypothèse de la transformation infinitésimale 106
3.11 Objectivité 107
4 Dérivées particulaires 107
4.1 Dérivées particulaires en description lagrangienne 107
4.2 Dérivées particulaires en description eulérienne 108
4.3 Dérivée particulaire d'une fonction de point 109
4.4 Dérivée particulaire d'une intégrale de volume 110
4.5 Dérivation particulaire d'une circulation 119
4.6 Dérivation particulaire d'un flux 120
5 Conservation de la masse 121
5.1 Équation de continuité 121
5.2 Forme intégrale 123
5.3 Dérivée particulaire de l'intégrale d'une densité massique en description eulérienne 124
Récapitulatif des formules essentielles 126
Exercices 130

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Cinématique du milieu continu

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Présentation

Au chapitre précédent on s'est attaché à la comparaison entre la configuration de référence et la configuration actuelle, essentiellement au plan géométrique, sans considération de l'histoire intermédiaire du système étudié. Comme on l'a dit alors, l'argument t intervenait dans les diverses expressions comme le paramètre indexant la configuration actuelle.

On se propose maintenant de ***suivre*** l'évolution du système en fonction de la variable temps.

On s'intéressera d'abord à l'aspect purement géométrique de cette évolution : c'est l'étude de la ***cinématique*** du milieu continu tridimensionnel. À partir de celle-ci on examinera d'autres aspects de cette évolution, notamment en considérant les grandeurs physiques attachées au système ou à ses éléments constitutifs, dans leurs représentations lagrangiennes ou eulériennes, et les dérivations temporelles de ces grandeurs.

Sous une forme suggestive, qui se réfère au propos initial concernant le chapitre II, on pourrait décrire l'objet du présent chapitre comme le suivi du « film » de l'évolution du système par la comparaison de ses images « vue par vue ».

2 Cinématique lagrangienne du milieu continu

2.1 Transport convectif et dérivation particulaire

Dans un référentiel $\mathcal{R}$, la description lagrangienne (chapitre I, section 3) repose sur la donnée de la correspondance qui définit, à chaque instant t, la position géométrique $\underline{x}$ de la particule identifiée par sa position $\underline{X}$ dans la configuration de référence κ_0 :

$$\underline{x} = \underline{\phi}\,(\underline{X}\,, t)\ . \tag{2.1}$$

La fonction $\underline{\phi}$, dont on a donné les conditions de régularité spatiales et temporelles (chapitre I, § 3.3), explicite le ***transport convectif*** de la particule $\underline{X}$ entre la configuration κ_0 et la configuration κ_t. Dans toute la suite de cette section, on suppose que la fonction $\underline{\phi}$ est continue et continûment différentiable (C^2) sur le domaine considéré au cours de l'évolution.

La vitesse de la particule $\underline{X}$ à l'instant t est obtenue par dérivation de l'équation

(2.1) par rapport au temps :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{U}\,(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{\phi}\,(\underline{X}, t)}{\partial t}\ . \tag{2.2}$$

Dans cette formule apparaît la notation générique « $\dot{a}$ », qui sera utilisée dans toute la suite pour désigner la dérivée par rapport au temps de la grandeur a attachée à un élément matériel, en suivant cet élément matériel dans son mouvement. Ici la grandeur a est le vecteur-position $\underline{x}$ attaché à la particule $\underline{X}$. Cette dérivée est appelée ***dérivée particulaire*** de la grandeur a. Elle sera également notée $\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$.

En description lagrangienne la dérivée particulaire s'identifie évidemment à la simple dérivée partielle par rapport à la variable temps puisque les variables spatiales y repèrent l'élément matériel concerné.

Au chapitre II (§ 4.2) a été défini le transport convectif d'un vecteur élémentaire $\underline{\mathrm{d}M_0}$ attaché à la particule $\underline{X}$ dans une transformation quelconque entre κ_0 et κ_t. Le tenseur gradient de la transformation entre les configurations κ_0 et κ_t :

$$\underline{\underline{F}}\,(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\nabla \phi}}\,(\underline{X}, t) \tag{2.3}$$

fournit l'expression de ce transport convectif

$$\underline{\mathrm{d}M} = \underline{\underline{F}}\,(\underline{X}, t)\,.\,\underline{\mathrm{d}M_0} \tag{2.4}$$

qui signifie, du point de vue physique, que les particules matérielles qui constituent le vecteur élémentaire, c'est-à-dire infinitésimal, $\underline{\mathrm{d}M_0}$ en $\underline{X}$ sont transportées dans κ_t sur le vecteur infinitésimal $\underline{\mathrm{d}M}$ en $\underline{x}$. En suivant le transport convectif de ***ce vecteur*** entre les instants t et $(t + \mathrm{d}t)$ on définit la dérivée particulaire $\widehat{\underline{\mathrm{d}M}}$ dont l'expression résulte immédiatement de (2.4) :

$$\widehat{\underline{\mathrm{d}M}} = \underline{\underline{\dot{F}}}\,(X, t)\,.\,\underline{\mathrm{d}M_0}\ . \tag{2.5}$$

Compte tenu de (2.3) on a :

$$\underline{\underline{\dot{F}}}\,(\underline{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{\underline{\nabla \phi}}\,(\underline{X}, t)\right) \tag{2.6}$$

qui n'est autre que le gradient du champ de vitesse $\underline{U}$ sur la configuration κ_0 :

$$\underline{\underline{\dot{F}}}\,(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\nabla U}}\,(\underline{X}, t)\ . \tag{2.7}$$

Pour un volume matériel élémentaire $\mathrm{d}\Omega_0$ dans κ_0, attaché à la particule $\underline{X}$, le transport convectif dans κ_t s'exprime par :

$$\begin{cases} \mathrm{d}\Omega_t = J(\underline{X}, t)\,\mathrm{d}\Omega_0 \\ J(\underline{X}, t) = \det\left(\underline{\underline{F}}\,(\underline{X}, t)\right)\ . \end{cases} \tag{2.8}$$

La dérivée particulaire $\widehat{\mathrm{d}\Omega_t}$ est donc :

$$\widehat{\mathrm{d}\Omega_t} = \dot{J}\,(\underline{X}, t)\,\mathrm{d}\Omega_0 \tag{2.9}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

où

$$\dot{J}\,(\underline{X},t) = \widehat{\det}\,\big(\underline{\underline{F}}\,(\underline{X},t)\big)\ ^{(1)} \tag{2.10}$$

On peut aussi s'intéresser au transport d'une surface élémentaire :

$$\underline{\mathrm{d}a} = J\,(\underline{X},t)\,{}^{t}\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}A} \tag{2.11}$$

qui fournit l'expression de la dérivée particulaire du vecteur aire élémentaire

$$\widehat{\mathrm{d}a} = \dot{J}\,(\underline{X},t)\,{}^{t}\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}A} + J\,(\underline{X},t)\,\widehat{{}^{t}\underline{\underline{F}}^{-1}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}A} \tag{2.12}$$

avec

$$\widehat{{}^{t}\underline{\underline{F}}^{-1}}(\underline{X},t) = \frac{\partial}{\partial t}\big({}^{t}\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)\big)\ .$$

2.2 Taux de déformation lagrangien

La formule (2.9) donne l'expression du ***taux de dilatation volumique lagrangien*** :

$$\frac{\widehat{\mathrm{d}\Omega_t}}{\mathrm{d}\Omega_0} = \dot{J}\,(\underline{X},t)\ . \tag{2.13}$$

L'évolution de la métrique attachée à la particule $\underline{X}$ dans le transport convectif est mesurée par la dérivée du produit scalaire de deux vecteurs matériels élémentaires attachés à cette particule. De

$$\underline{\mathrm{d}M}\,.\,\underline{\mathrm{d}M'} = \underline{\mathrm{d}M_0}\,.\,\big(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\underline{\underline{e}}\,(\underline{X},t)\big)\,.\,\underline{\mathrm{d}M'_0} \tag{2.14}$$

et

$$\underline{\mathrm{d}M}\,.\,\underline{\mathrm{d}M'} = \underline{\mathrm{d}M_0}\,.\,\big({}^{t}\underline{\underline{\nabla\phi}}\,(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{\nabla\phi}}\,(\underline{X},t)\big)\,.\,\underline{\mathrm{d}M'_0} \tag{2.15}$$

il résulte, par dérivation :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\underline{\mathrm{d}M}\,.\,\underline{\mathrm{d}M'}) = 2\,\underline{\mathrm{d}M_0}\,.\,\underline{\dot{e}}\,(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}M'_0} \tag{2.16}$$

avec

$$\underline{\dot{e}}\,(\underline{X},t) = \frac{1}{2}\big({}^{t}\underline{\underline{\nabla U}}\,(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{\nabla\phi}}\,(\underline{X},t) + {}^{t}\underline{\underline{\nabla\phi}}\,(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{\nabla U}}\,(\underline{X},t)\big)\ . \tag{2.17}$$

Le ***taux de déformation lagrangien*** $\underline{\dot{e}}\,(\underline{X},t)$ fournit l'expression de la dérivée particulaire du produit scalaire de deux vecteurs matériels élémentaires, forme bilinéaire symétrique sur la configuration de référence κ_0 .

(1) qui ***n'est pas égal*** à $\det\,\big(\underline{\underline{\nabla U}}\,(\underline{X},t)\big)$!

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Remarques

- L'argument essentiel dans tous les raisonnements qui précèdent est que, par définition même de la description lagrangienne, la dérivée particulaire s'identifie à la dérivée partielle par rapport au temps.
- Du point de vue physique, on retiendra que les taux de dilatation et de déformation ont la dimension de l'inverse d'un temps.

3 Cinématique eulérienne du milieu continu

3.1 Problématique

Si l'on se réfère à l'objet du présent chapitre tel que décrit de façon schématique dans la section 1, l'approche ci-dessus de la cinématique n'est que partiellement satisfaisante : on s'y intéresse aux dérivées particulaires à l'instant t de divers éléments matériels, comparant ainsi deux configurations infiniment voisines κ_t et $\kappa_{t+\mathrm{d}t}$ mais on exprime le résultat de cette comparaison sur la configuration de référence κ_0.

Un point de vue incrémental pur nécessite que ces dérivations soient exprimées sur la configuration actuelle. Ceci conduit à considérer la description eulérienne (chapitre I, section 4).

On rappelle que la définition eulérienne d'un mouvement (chapitre I, § 4.1) consiste en la donnée, à chaque instant t, de la vitesse $\underline{U}$ en fonction des ***coordonnées spatiales dans la configuration actuelle*** κ_t :

$$\underline{U} = \underline{U}_t(\underline{x}, t)\ . \tag{3.1}$$

Dans toute la suite de cette section la fonction $\underline{U}_t$ est supposée continue et continûment différentiable.

3.2 Dérivée particulaire d'un vecteur

Dans le cadre de la description eulérienne, l'objectif est ici d'exprimer la dérivée particulaire $\dot{\widehat{\underline{\mathrm{d}M}}}$, définie au paragraphe 2.1, sous forme purement eulérienne.

En rapprochant les expressions (2.4) et (2.5, 2.7) pour $\underline{\mathrm{d}M}$ et $\dot{\widehat{\underline{\mathrm{d}M}}}$ respectivement, il vient

$$\dot{\widehat{\underline{\mathrm{d}M}}} = \underline{\underline{\nabla U}}\,(\underline{X}\,.\,t)\,.\,(\underline{\underline{F}}^{-1}\,(\underline{X}, t))\,.\,\underline{\mathrm{d}M}\ . \tag{3.2}$$

Cette formule, qui conserve les variables lagrangiennes n'apparaît pas encore constituer l'expression cherchée.

Il faut alors rappeler la relation entre les descriptions lagrangienne et eulérienne du champ de vitesse $\underline{U}$:

$$\begin{cases} \underline{U}\,(\underline{X}, t) = \underline{U}_t\,(\underline{x}, t) \\ \\ \text{avec } \underline{x} = \underline{\phi}\,(\underline{X}, t)\ . \end{cases} \tag{3.3}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En notant, comme indiqué au chapitre II (§ 5.3), par $\underline{\underline{\operatorname{grad} U}}\,(\underline{x},t)$ le gradient de la fonction $\underline{U}_t$ par rapport à la variable $\underline{x}$ sur κ_t, c'est-à-dire le ***gradient eulérien du champ de vitesse***, on déduit de (3.3) :

$$(3.4)\qquad \begin{cases} \forall\, \underline{\mathrm{d}X} \in \kappa_0\ , \\ \underline{\mathrm{d}U} = \underline{\underline{\nabla U}}\,(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}X} = \underline{\underline{\operatorname{grad} U}}\,(\underline{x},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}x} = \underline{\underline{\operatorname{grad} U}}\,(\underline{x},t)\,.\,\underline{\underline{\nabla\phi}}\,(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}X} \end{cases}$$

d'où

$$(3.5)\qquad \begin{cases} \underline{\underline{\nabla U}}\,(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{F}}^{-1}\,(\underline{X},t) = \underline{\underline{\operatorname{grad} U}}\,(\underline{x},t) \\ \text{avec } \underline{x} = \underline{\phi}\,(\underline{X},t)\ . \end{cases}$$

Il en résulte que (3.2) se met dans la forme purement eulérienne :

$$(3.6)\qquad \boxed{\underline{\dot{\mathrm{d}M}} = \underline{\underline{\operatorname{grad} U}}\,(\underline{x},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}M}}$$

Une démonstration plus intuitive de cette formule essentielle peut être donnée en remarquant que, comme indiqué du chapitre I (§ 4.1), la description eulérienne peut être envisagée à chaque instant comme une description lagrangienne qui prend la configuration actuelle ***figée*** comme configuration de référence. La formule lagrangienne (2.5, 2.7) fournit alors le résultat eulérien cherché (3.6) en substituant à $\underline{\mathrm{d}M}_0$ et $\underline{\underline{\nabla U}}\,(\underline{X},t)$ respectivement $\underline{\mathrm{d}M}$ et $\underline{\underline{\operatorname{grad} U}}\,(\underline{x},t)$.

3.3 Taux de déformation (eulérien)

À partir de la formule (3.6) il est aisé d'exprimer la dérivée particulaire du produit scalaire $\underline{\mathrm{d}M}\,.\,\underline{\mathrm{d}M'}$ introduite au paragraphe 2.2 :

$$(3.7)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\underline{\mathrm{d}M}\,.\,\underline{\mathrm{d}M'}) = \underline{\mathrm{d}M}\,.\,\big(\underline{\underline{\operatorname{grad} U}}\,(\underline{x},t) + {}^t\underline{\underline{\operatorname{grad} U}}\,(\underline{x},t)\big)\,.\,\underline{\mathrm{d}M'}$$

que l'on met sous la forme

$$(3.8)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\underline{\mathrm{d}M}\,.\,\underline{\mathrm{d}M'}) = 2\,\underline{\mathrm{d}M}\,.\,\underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}M'}$$

en introduisant le tenseur symétrique $\underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t)$

$$(3.9)\qquad \underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t) = \frac{1}{2}\big(\underline{\underline{\operatorname{grad} U}}\,(\underline{x},t) + {}^t\underline{\underline{\operatorname{grad} U}}\,(\underline{x},t)\big)\ .$$

Le tenseur $\underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t)$ est le ***taux de déformation (eulérien)***[(2)]. On voit sur la formule (3.9) que ce tenseur n'est autre que la ***partie symétrique du gradient***

[(2)] En l'absence de précision, l'expression « taux de déformation » désigne le tenseur $\underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t)$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

eulérien du champ de vitesse $\underline{U}$. Dans un repère cartésien orthonormé ses composantes ont la forme simple :

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \text{ également notées } d_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \,. \tag{3.10}$$

Les expressions des composantes de $\underline{\underline{d}}\,(\underline{x}, t)$ en coordonnées cylindriques ou sphériques sont données dans le formulaire à la fin du présent chapitre.

Le tenseur taux de déformation $\underline{\underline{d}}\,(\underline{x}, t)$ fournit, par (3.8), l'expression de la dérivée particulaire du produit scalaire de deux vecteurs matériels élémentaires, forme bilinéaire symétrique sur la configuration actuelle κ_t. Cette expression est l'homologue de (2.16) ; on ne manquera pas de remarquer que les expressions de $\dot{\underline{\underline{e}}}\,(\underline{X}, t)$ et $\underline{\underline{d}}\,(\underline{x}, t)$ en fonction de $\underline{\underline{\nabla U}}\,(\underline{X}, t)$ et $\underline{\underline{\operatorname{grad} U}}\,(\underline{x}, t)$ ne sont pas semblables. Il est utile pour certaines applications (cf. chapitre V, § 4.1) d'établir la relation entre $\dot{\underline{\underline{e}}}\,(\underline{X}, t)$ et $\underline{\underline{d}}\,(\underline{x}, t)$: en rapprochant (2.16) et (3.8) compte tenu de (2.4) on obtient

$$\begin{cases} \underline{\underline{d}}\,(\underline{x}, t) = {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}\,(\underline{X}, t) \,.\, \dot{\underline{\underline{e}}}\,(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\underline{F}}^{-1}\,(\underline{X}, t) \\ \text{où } \underline{x} = \underline{\phi}\,(\underline{X}, t) \,. \end{cases} \tag{3.11}$$

3.4 Utilisation du tenseur taux de déformation

En exploitant la présentation de la description eulérienne comme une description lagrangienne à l'instant t sur la configuration actuelle « figée », on pressent que l'utilisation du tenseur taux de déformation $\underline{\underline{d}}\,(\underline{x}, t)$ sera, dans le mouvement infinitésimal entre les instants t et $(t + \mathrm{d}t)$, semblable à celle du tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}\,(\underline{X}, t)$ entre les configurations κ_0 et κ_t.

Plus précisément on définit, à partir du tenseur taux de déformation, le taux d'extension et le taux de glissement.

Taux d'extension

On considère un vecteur élémentaire $\underline{\mathrm{d}M}$ orienté selon le vecteur unitaire $\underline{e}_1$ d'une base quelconque au point M dans κ_t. On désigne, comme au chapitre II (§ 4.3), par $\mathrm{d}s$ la longueur de ce vecteur :

$$\underline{\mathrm{d}M} = \underline{e}_1 \,\mathrm{d}s \tag{3.12}$$

$$\mathrm{d}s^2 = \underline{\mathrm{d}M} \,.\, \underline{\mathrm{d}M} \,. \tag{3.13}$$

Dans le mouvement infinitésimal entre κ_t et $\kappa_{t+\mathrm{d}t}$ au point M, le vecteur $\underline{\mathrm{d}M}$ est transporté sur le vecteur $(\underline{\mathrm{d}M} + \dot{\underline{\mathrm{d}M}}\,\mathrm{d}t)$ de longueur $(\mathrm{d}s + \dot{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t)$. Par dérivation de (3.13) d'une part, et en appliquant (3.8) compte tenu de (3.12) d'autre part, on obtient

$$\mathrm{d}s\,\dot{\mathrm{d}s} = (\mathrm{d}s)^2 \,\underline{e}_1 \,.\, \underline{\underline{d}}\,(\underline{x}, t) \,.\, \underline{e}_1 \tag{3.14}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

d'où l'expression du ***taux d'extension*** ou taux d'allongement unitaire selon la direction $\underline{e}_1$ au point M de κ_t :

$$\frac{\dot{\widehat{\mathrm{d}s}}}{\mathrm{d}s} = d_{11}\,(\underline{x},t) \tag{3.15}$$

(on rappelle que $d_{11}\,(\underline{x},t) = \underline{e}_1 \,.\, \underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t) \,.\, \underline{e}_1)$.

Taux de glissement

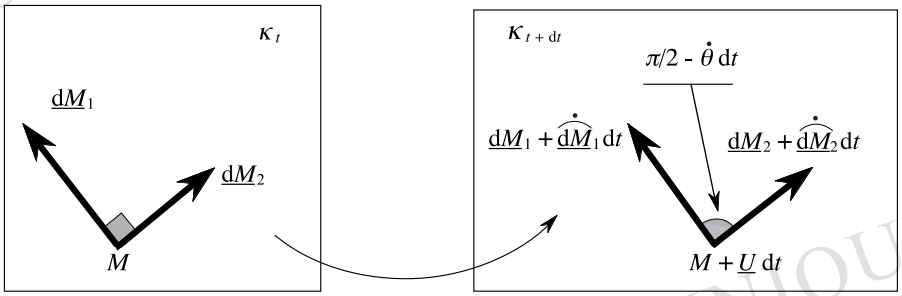


Figure 1 – Taux de glissement de deux directions orthogonales dans κ_t

On considère deux vecteurs élémentaires $\underline{\mathrm{d}M}_1$ et $\underline{\mathrm{d}M}_2$ au point M dans κ_t , orientés selon les vecteurs unitaires $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ orthogonaux : $\underline{\mathrm{d}M}_1 = \underline{e}_1\,\mathrm{d}s_1$ et $\underline{\mathrm{d}M}_2 = \underline{e}_2\,\mathrm{d}s_2$. Dans le mouvement infinitésimal entre κ_t et $\kappa_{t+\mathrm{d}t}$ au point M , les vecteurs $\underline{\mathrm{d}M}_1$ et $\underline{\mathrm{d}M}_2$ sont transportés respectivement sur les vecteurs $\underline{\mathrm{d}M}_1 + \dot{\widehat{\mathrm{d}\underline{M}_1}}\,\mathrm{d}t$ et $\underline{\mathrm{d}M}_2 + \dot{\widehat{\mathrm{d}\underline{M}_2}}\,\mathrm{d}t$ (figure 1) qui font entre eux l'angle $(\pi/2 - \dot{\theta}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}t)$. Compte tenu de l'orthogonalité des vecteurs dans κ_t la dérivée de leur produit scalaire transporté par le mouvement se réduit à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\underline{\mathrm{d}M}_1 \,.\, \underline{\mathrm{d}M}_1) = \mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\,\dot{\theta}(\underline{x},t)\ ; \tag{3.16}$$

elle peut aussi être évaluée en appliquant (3.8)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\underline{\mathrm{d}M}_1 \,.\, \underline{\mathrm{d}M}_1) = 2\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\,\underline{e}_1 \,.\, \underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t) \,.\, \underline{e}_2\ . \tag{3.17}$$

D'où l'expression du taux de glissement $\dot{\theta}\,(\underline{x},t)$ des deux directions orthogonales selon les vecteurs unitaires $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ au point M dans κ_t :

$$\dot{\theta}\,(\underline{x},t) = 2\,d_{12}\,(\underline{x},t)\ ; \tag{3.18}$$

on rappelle que $d_{12}\,(\underline{x},t) = \underline{e}_1 \,.\, \underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t) \,.\, \underline{e}_2$.

Directions principales

Le taux de déformation $\underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t)$, tenseur euclidien symétrique réel admet ***dans*** κ_t un trièdre orthogonal de ***directions principales*** (cf. annexe I, § 5.10). Dans la base orthonormée de ses directions principales, $\underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t)$ s'écrit :

$$\underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t) = d_1\,(\underline{x},t)\,\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + d_2\,(\underline{x},t)\,\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + d_3\,(\underline{x},t)\,\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \tag{3.19}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

où $d_1(\underline{x},t)$, $d_2(\underline{x},t)$ et $d_3(\underline{x},t)$ sont les taux d'extension dans les trois directions principales.

Il résulte immédiatement de l'application de la formule (3.18) que pour chaque couple de directions principales au point M on a $\dot{\theta}=0$. Autrement dit : un trièdre de vecteurs matériels élémentaires attachés au point M, colinéaires à trois directions principales orthogonales de $\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)$, demeure orthogonal dans la transformation infinitésimal entre les instants t et $(t+\mathrm{d}t)$; son orientation est évidemment conservée.

La réciproque de cette propriété découle directement de (3.18) (comme au chapitre II, § 3.2). Il s'agit d'une propriété caractéristique des directions principales du taux de déformation.

> ***Dans le mouvement à l'instant t défini par le champ de vitesse $\underline{U}=\underline{U}_t(\underline{x},t)$ sur κ_t , le trièdre orthogonal des directions principales de $\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)$ en M demeure orthogonal.***

En outre, si l'on considère en M un vecteur $\underline{\mathrm{d}M}_{(i)}$ de κ_t dirigé selon une direction principale de $\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)$, par exemple la direction $\underline{e}_i$, on a évidemment à partir de (3.19) :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}M}_{(i)}=d_i(\underline{x},t)\,\underline{\mathrm{d}M}_{(i)} \tag{3.20}$$

qui rappelle que les directions principales de $\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)$ en M sont les directions propres de l'application linéaire qui lui est associée (figure 2).

3.5 Taux de rotation. Taux de déformation volumique

Taux de rotation

La formule (3.9) montre que la partie symétrique du gradient du champ de vitesse est le taux de déformation en M. Il est naturel d'introduire, pour compléter la décomposition de $\underline{\underline{\mathrm{grad}\,U}}(\underline{x},t)$, la partie antisymétrique de ce tenseur :

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x},t)=\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}\,U}}(\underline{x},t)-{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}\,U}}(\underline{x},t)\right). \tag{3.21}$$

Ce tenseur antisymétrique est appelé ***taux de rotation*** en M (la terminologie sera justifiée dans la suite). Il lui est associé le vecteur $\underline{\Omega}(\underline{x},t)$, appelé vecteur ***tourbillon*** du champ de vitesse en M, défini par :

$$\forall\,\underline{\mathrm{d}M}\in\kappa_t\ ,\ \underline{\underline{\Omega}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}M}=\underline{\Omega}(\underline{x},t)\wedge\underline{\mathrm{d}M}\ ^{(3)} \tag{3.22}$$

On vérifie, par exemple en calculant les composantes de $\underline{\Omega}(\underline{x},t)$ dans un repère orthonormé, que :

$$\underline{\Omega}(\underline{x},t)=\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\underline{U}(\underline{x},t)\ . \tag{3.23}$$

(3) Dans toute base orthonormée ***directe*** $(\underline{e}_1\,,\,\underline{e}_2\,,\,\underline{e}_3)$ la relation entre $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x},t)$ et $\underline{\Omega}(\underline{x},t)$ s'explicite sous la forme :
$\underline{\Omega}=p\,\underline{e}_1+q\,\underline{e}_2+r\,\underline{e}_3$, $\underline{\underline{\Omega}}=-(p\,(\underline{e}_2\otimes\underline{e}_3-\underline{e}_3\otimes\underline{e}_2)+q\,(\underline{e}_3\otimes\underline{e}_1-\underline{e}_1\otimes\underline{e}_3)+r\,(\underline{e}_1\otimes\underline{e}_2-\underline{e}_2\otimes\underline{e}_1))$
ou $\underline{\Omega}=-(\Omega_{23}\,\underline{e}_1+\Omega_{31}\,\underline{e}_2+\Omega_{12}\,\underline{e}_3)$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Avec cette décomposition, la formule de dérivation particulaire d'un vecteur (3.6) devient :

$$\widehat{\underline{\mathrm{d}M}} = \underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}M} + \underline{\Omega}\,(\underline{x},t) \wedge \underline{\mathrm{d}M}\ . \tag{3.24}$$

En particulier, si l'on considère un vecteur élémentaire $\underline{\mathrm{d}M}_{(i)}$ colinéaire à une direction principale $\underline{e}_i$ du taux de déformation $\underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t)$ au point M on a, en application de (3.20)

$$\widehat{\underline{\mathrm{d}M}}_{(i)} = d_i\,(\underline{x},t)\,\underline{\mathrm{d}M}_{(i)} + \underline{\Omega}\,(\underline{x},t) \wedge \underline{\mathrm{d}M}_{(i)}\ . \tag{3.25}$$

L'interprétation physique du vecteur tourbillon et la justification de la terminologie « taux de rotation » découlent directement de l'équation (3.25). En effet, considérant un trièdre de ***vecteurs matériels élémentaires*** $\underline{\mathrm{d}M}_1$, $\underline{\mathrm{d}M}_2$, $\underline{\mathrm{d}M}_3$ attachés à M, colinéaires à trois directions principales orthogonales ($\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$) de $\underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t)$, on a en application de (3.25) :

$$\left\{\begin{array}{l} \widehat{\underline{\mathrm{d}M}}_1 = d_1\,(\underline{x},t)\,\underline{\mathrm{d}M}_1 + \underline{\Omega}\,(\underline{x},t) \wedge \underline{\mathrm{d}M}_1 \\ \widehat{\underline{\mathrm{d}M}}_2 = d_2\,(\underline{x},t)\,\underline{\mathrm{d}M}_2 + \underline{\Omega}\,(\underline{x},t) \wedge \underline{\mathrm{d}M}_2 \\ \widehat{\underline{\mathrm{d}M}}_3 = d_3\,(\underline{x},t)\,\underline{\mathrm{d}M}_3 + \underline{\Omega}\,(\underline{x},t) \wedge \underline{\mathrm{d}M}_3\ . \end{array}\right. \tag{3.26}$$

Ces trois équations montrent que, dans la transformation infinitésimale entre les instants t et $(t + \mathrm{d}t)$, le trièdre de ***vecteurs matériels***, qui demeure orthogonal comme on l'a déjà démontré, subit la rotation infinitésimale définie par le vecteur $\underline{\Omega}\,(\underline{x},t)\,\mathrm{d}t$ tandis que chacun des vecteurs matériels considérés subit l'allongement unitaire $d_i\,(\underline{x},t)\,\mathrm{d}t$. Autrement dit :

> $\underline{\Omega}(\underline{x},t)$ ***est le vecteur vitesse de rotation instantanée du trièdre des directions principales de*** $\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)$***, à l'instant*** t ***dans le transport par le mouvement.***

On peut aussi introduire la notion de mouvement moyen de la matière en M à l'instant t : c'est le mouvement rigidifiant dans lequel le torseur des quantités de mouvement (cf. chapitre IV, § 7.2) d'un petit volume sphérique $\delta\Omega_t$, de centre M et de diamètre δ est identique à celui du même petit volume dans le mouvement réel à l'instant t. P désignant le point courant de $\delta\Omega_t$ et α_i les coordonnées de $\underline{MP}$ selon les directions principales de $\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)$ de vecteurs unitaires $\underline{e}_i$, on a (au premier ordre en δ) :

$$\underline{U}(P,t) = \underline{U}(\underline{x},t) + \underline{\Omega}(\underline{x},t) \wedge \underline{MP} + \sum_i \alpha_i d_i(\underline{x},t)\,\underline{e}_i\ ;$$

on en déduit que le mouvement rigidifiant moyen en M à l'instant t est défini par le champ de vitesse :

$$\overline{\underline{U}}(P,t) = \underline{U}(\underline{x},t) + \underline{\Omega}(\underline{x},t) \wedge \underline{MP}\ .$$

Le vecteur tourbillon $\underline{\Omega}(\underline{x},t)$ apparaît alors comme le vecteur vitesse de rotation moyenne instantanée de la matière en M. $\underline{\Omega}(\underline{x},t)$ peut être mis en évidence expérimentalement au moyen du vorticimètre, petit équipage flottant à la surface d'un écoulement de fluide dont la rotation permet de « visualiser » le vecteur tourbillon.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La définition (3.22, 3.23) adoptée ici pour le vecteur tourbillon est classique. On définit aussi le vecteur ***vorticité*** (*vorticity vector* dans la terminologie anglo-saxonne), égal au rotationnel de $\underline{U}$, dont l'usage tend actuellement à se substituer à celui du vecteur tourbillon.

Taux de dilatation volumique

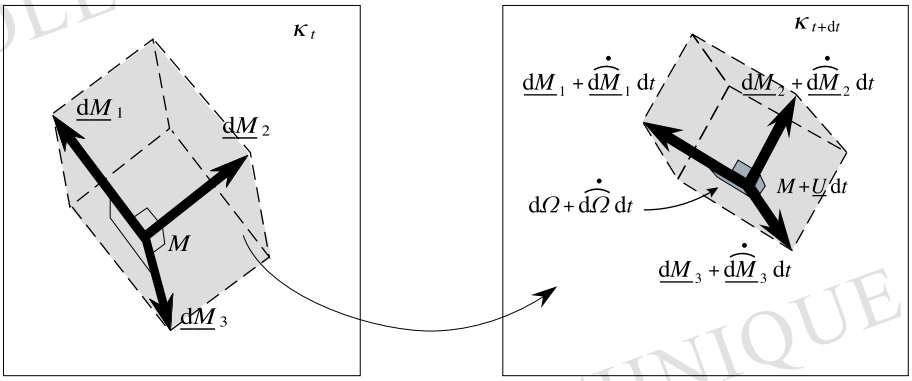


Figure 2 – Trièdre de vecteurs matériels colinéaires aux directions principales de $\underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t)$

Des équations (3.26) résulte également l'expression du taux de dilatation volumique. Le volume $d\Omega_t$ du parallélépipède construit, en M, sur les mêmes vecteurs matériels $\underline{dM}_1, \underline{dM}_2, \underline{dM}_3$ dans κ_t (figure 2) est le produit mixte [4] :

$$d\Omega_t = (\underline{dM}_1, \underline{dM}_2, \underline{dM}_3) \tag{3.27}$$

d'où

$$\dot{d\Omega}_t = (\dot{\underline{dM}}_1, \underline{dM}_2, \underline{dM}_3) + (\underline{dM}_1, \dot{\underline{dM}}_2, \underline{dM}_3) + (\underline{dM}_1, \underline{dM}_2, \dot{\underline{dM}}_3)\ . \tag{3.28}$$

Compte tenu de (3.26), en simplifiant les notations, (3.28) se transforme en :

$$\begin{aligned}\dot{d\Omega}_t = {} & (d_1+d_2+d_3)(\underline{dM}_1\ ,\ \underline{dM}_2\ ,\ \underline{dM}_3) + (\underline{\Omega}\wedge\underline{dM}_1\ ,\ \underline{dM}_2\ ,\ \underline{dM}_3) \\ & + (\underline{dM}_1\ ,\ \underline{\Omega}\wedge\underline{dM}_2\ ,\ \underline{dM}_3) + (\underline{dM}_1\ ,\ \underline{dM}_2\ ,\ \underline{\Omega}\wedge\underline{dM}_3)\end{aligned} \tag{3.29}$$

Les trois derniers termes de (3.29) sont nuls puisque les vecteurs $\underline{dM}_1$, $\underline{dM}_2$ et $\underline{dM}_3$ sont mutuellement orthogonaux ; d'où l'expression du taux de dilatation volumique :

$$\boxed{\frac{\dot{d\Omega}_t}{d\Omega_t} = \mathrm{tr}\ \left(\underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t)\right) = \mathrm{div}\ \underline{U}\,(\underline{x},t)} \tag{3.30}$$

[4] L'ordre des trois vecteurs est choisi de manière à constituer un trièdre direct.

Une conséquence immédiate et importante de ce résultat est qu'un mouvement dans lequel il n'y a ***pas de variation de volume*** à l'instant t au point M (mouvement isochore en M à l'instant t) est caractérisé par la condition

$$\text{div}\ \underline{U}\,(\underline{x},t) = 0\ . \tag{3.31}$$

Ce sera le cas, en particulier, des écoulements de fluides (modélisés comme) incompressibles et des évolutions de solides, tels que le caoutchouc, soumises à la liaison interne d'incompressibilité (cf. chapitre VII, § 4.3), pour lesquels on écrira :

$$\forall\, \underline{x} \in\ \Omega_t\ ,\ \text{div}\ \underline{U}\,(\underline{x},t) = 0\ . \tag{3.32}$$

En rapprochant l'expression (3.30) du taux (eulérien) de dilatation volumique et le résultat (2.13) obtenu par le taux lagrangien, on obtient entre ces deux grandeurs la relation :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{tr}\ \underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t) = \dot{J}(\underline{X},t)\, J^{-1}\,(\underline{X},t) \\ \\ \text{où}\ \underline{x} = \underline{\phi}\,(\underline{X},t)\ ^{(5)}\ . \end{array}\right. \tag{3.33}$$

Remarque

Les résultats qui précèdent concernant la vitesse de rotation du trièdre des directions principales ***matérialisées*** et le taux de dilatation volumique confirment la signification géométrique des terminologies « rotationnel » et « divergence ». On prendra garde toutefois au facteur 1/2 dans la définition (3.23) du vecteur tourbillon.

3.6 Comparaison avec la déformation linéarisée en transformation infinitésimale

La comparaison (figure 3) des formules (3.8, 3.9, 3.15, 3.18, 3.21 et 3.30) avec les formules ***linéarisées*** écrites, dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale, au chapitre II (section 5) s'impose. La similitude est évidente.

Cette constatation ne doit pas surprendre. En effet, l'opération de dérivation à laquelle il est procédé ici correspond à une transformation infinitésimale à partir de la configuration actuelle prise comme référence. Mais il convient de bien noter que la validité des formules relatives à $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est liée à l'hypothèse $\|\,\underline{\underline{\nabla\xi}}\,\| \ll 1$ de la transformation infinitésimale. Ceci précise la signification du taux de glissement $\dot{\theta}$ vis-à-vis du glissement θ introduit au chapitre II (§ 3.2).

(5) On peut rapprocher ce résultat de l'expression (3.5) de $\underline{\underline{\text{grad}\,U}}\,(\underline{x},t)$. Ainsi on a :

$\underline{\underline{\text{grad}\,U}}\,(\underline{x},t) = (\dfrac{\partial}{\partial t}\,\underline{\underline{\nabla\phi}}\,(\underline{X},t))\,.\,(\underline{\underline{\nabla\phi}}\,(\underline{X},t))^{-1}$ et $\text{div}\ \underline{U}\,(\underline{x},t) = (\dfrac{\partial}{\partial t}\ \det\ \underline{\underline{\nabla\phi}}\,(\underline{X},t))/\det\ \underline{\underline{\nabla\phi}}\,(\underline{X},t)$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Taux de déformation	Déformation linéarisée
$\underline{\underline{d}} = (\underline{\underline{\operatorname{grad} U}} + {}^t\underline{\underline{\operatorname{grad} U}})/2$	$\underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{\nabla\xi}} + {}^t\underline{\underline{\nabla\xi}})/2$
$\underline{\underline{\Omega}} = (\underline{\underline{\operatorname{grad} U}} - {}^t\underline{\underline{\operatorname{grad} U}})/2$	$\underline{\underline{w}} = (\underline{\underline{\nabla\xi}} - {}^t\underline{\underline{\nabla\xi}})/2$
$\overset{\cdot}{\widehat{\mathrm{d}M \cdot \mathrm{d}M'}} = 2\,\mathrm{d}\underline{M} \cdot \underline{\underline{d}} \cdot \mathrm{d}\underline{M'}$	$\mathrm{d}\underline{M} \cdot \mathrm{d}\underline{M'} - \mathrm{d}\underline{M_0} \cdot \mathrm{d}\underline{M'_0} \simeq 2\,\mathrm{d}\underline{M_0} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \mathrm{d}\underline{M'_0}$
$\overset{\cdot}{\widehat{\mathrm{d}s}}/\mathrm{d}s = d_{11}$	$(\mathrm{d}s - \mathrm{d}s_0)/\mathrm{d}s_0 \simeq \varepsilon_{11}$
$\overset{\cdot}{\widehat{\mathrm{d}\Omega_t}}/\mathrm{d}\Omega_t = \operatorname{div}\underline{U}$	$(\mathrm{d}\Omega_t - \mathrm{d}\Omega_0)/\mathrm{d}\Omega_0 \simeq \operatorname{div}\underline{\xi}$
$\dot{\theta} = 2\,d_{12}$	$\theta \simeq 2\,\varepsilon_{12}$

Figure 3 – Taux de déformation et déformation linéarisée

3.7 Compatibilité d'un champ de taux de déformation

Le problème posé est analogue à celui examiné au chapitre II (section 6).

Étant donné un champ de tenseurs du second ordre symétriques défini sur la configuration κ_t, à quelles conditions ce champ constitue-t-il véritablement un champ de taux de déformation, c'est-à-dire dérive-t-il d'un champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ par les formules (3.9) ?

Comme on l'a signalé ci-dessus, la formule (3.9) reliant $\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)$ à $\underline{U}(\underline{x}, t)$ est identique à la formule (5.2) du chapitre II reliant, dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale, la déformation linéarisée $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X}, t)$ au déplacement $\underline{\xi}(\underline{X}, t)$. Le problème de la compatibilité d'un champ de taux de déformation se trouve donc résolu par simple changement de notations à partir des résultats du chapitre II (section 6).

L'espace étant rapporté à un repère cartésien orthonormé, les conditions nécessaires et suffisantes (si le domaine d'étude est simplement connexe) pour la compatibilité d'un champ de taux de déformation s'écrivent :

$$d_{ij,k\ell} + d_{k\ell,ij} - d_{ik,j\ell} - d_{j\ell,ik} = 0 \qquad i,j,k,\ell = 1,2,3 \tag{3.34}$$

ou encore :

$$\begin{cases} 2\,d_{23,23} = d_{33,22} + d_{22,33} \text{ et permutation circulaire ,} \\ \\ d_{13,23} - d_{12,33} - d_{33,21} + d_{32,31} = 0 \text{ et permutation circulaire .} \end{cases} \tag{3.35}$$

On insistera à nouveau sur le fait que ces formules concernent, ***en toute généralité***, le tenseur taux (eulérien) de déformation. Elles diffèrent en cela des résultats homologues énoncés au chapitre II qui ne sont valables que dans le cadre de la transformation infinitésimale pour la déformation linéarisée.

L'intégration d'un champ de taux de déformation compatible $\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)$ pour construire les champs de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ dont il dérive se fait par la méthode indi-

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

quée au chapitre II (§ 6.2) pour l'intégration d'un champ de déformation linéarisée $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$; le tenseur taux de rotation $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x},t)$ joue ici, vis-à-vis de $\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)$, le rôle de $\underline{\underline{w}}(\underline{X},t)$ vis-à-vis de $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X},t)$. ***Le champ $\underline{U}(\underline{x},t)$ est déterminé à un champ de vitesse rigidifiant près.***

3.8 Mouvement rigidifiant

On suppose ici que le mouvement défini à l'instant t par le champ de vitesse $\underline{U}$ sur Ω_t est ***rigidifiant*** sur une partie Ω'_t de Ω_t , c'est-à-dire que, sur Ω'_t , $\underline{U}\,(\underline{x},t)$ est de la forme

$$\underline{U}\,(\underline{x},t) = \underline{U}_0\,(t) + \underline{\omega}\,(t) \wedge \underline{OM} \tag{3.36}$$

ou encore, en introduisant $\underline{\underline{\omega}}\,(t)$, le tenseur du second ordre, antisymétrique, associé au vecteur $\underline{\omega}\,(t)$ (cf. § 3.5) :

$$\forall\, \underline{x} \in\ \Omega_t\ ,\ \underline{U}\,(\underline{x},t) = \underline{U}_0\,(t) + \underline{\underline{\omega}}\,(t)\,.\,\underline{OM}\ . \tag{3.37}$$

Il résulte de façon évidente de (3.37) que

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, \underline{x} \in\ \Omega'_t \subset \Omega_t\ , \\ \underline{\underline{\operatorname{grad} U}}\,(\underline{x},t) = \underline{\underline{\omega}}\,(t) \\ \underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t) = 0\ ,\ \underline{\underline{\Omega}}\,(\underline{x}\ ,\ t) = \underline{\underline{\omega}}\,(t)\ . \end{array}\right. \tag{3.38}$$

En d'autres termes si le mouvement de Ω'_t à l'instant est rigidifiant, le champ de taux de déformation sur Ω'_t est nul. (On remarque qu'en conséquence de (3.11) le champ de taux lagrangien de déformation $\underline{\underline{\dot{e}}}$ est également nul sur Ω'_0.)

Pour la réciproque on suppose qu'à l'instant t , sur un domaine Ω'_t le champ de taux de déformation $\underline{\underline{d}}$ est connu, identiquement nul :

$$\forall\, \underline{x} \in\ \Omega'_t\ ,\quad \underline{\underline{d}}\,(\underline{x},t) = 0\ . \tag{3.39}$$

Alors, en appliquant à ce champ $\underline{\underline{d}}$ sur Ω'_t la méthode d'intégration rappelée au paragraphe précédent, on constate que le champ est évidemment compatible, et dérive du champ de vitesse nul à un mouvement rigidifiant près, c'est-à-dire que ***le mouvement de Ω'_t à l'instant t est un mouvement rigidifiant***.

3.9 Formulation faible de la compatibilité géométrique

On a vu au chapitre II (§ 6.2) comment les formules exprimant la compatibilité d'un champ de déformation linéarisée $\underline{\underline{\varepsilon}}$, ou ici d'un champ de taux de déformation $\underline{\underline{d}}$, sont homologues de la condition « rotationnel nul » pour qu'un champ de vecteurs soit un champ de gradient.

La ***formulation faible*** de cette dernière condition est connue en analyse fonctionnelle. Sous réserve que les espaces fonctionnels sur lesquels on opère soient convenablement définis, on

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

établit la condition nécessaire et suffisante suivante pour qu'un champ de vecteur $\underline{u}$ défini sur un volume Ω de $\mathbb{R}^3$ soit un champ de gradient :

$$(3.40)\qquad \begin{cases} \forall \underline{v} \;\Big|\; \begin{array}{l} \text{à support compact sur } \mathbb{R}^3 \,, \\ \operatorname{div} \underline{v} = 0 \text{ sur } \Omega \,, \\ \underline{v}(\underline{x}) \,.\, \underline{n}(\underline{x}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ (\underline{n}(\underline{x}) : \text{ normale extérieure au point courant de } \partial\Omega) \,. \end{array} \\ \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{v}(\underline{x}) \,.\, \underline{u}(\underline{x})\, d\Omega = 0 \,. \end{cases}$$

La formulation faible des conditions (3.34) pour la compatibilité d'un champ de tenseurs symétriques $\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)$ défini à l'instant t sur le volume Ω_t dans la configuration κ_t est analogue : le champ $\underline{\underline{d}}$ est compatible, c'est-à-dire dérive par (3.9) d'un champ de vecteur $\underline{U}$ défini sur κ_t, si et seulement si

$$(3.41)\qquad \begin{cases} \forall \underline{\underline{\sigma}} \;\Big|\; \begin{array}{l} \text{symétrique} \,, \\ \text{à support compact sur } \mathbb{R}^3 \,, \\ \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \text{ sur } \Omega_t \,, \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \,.\, \underline{n}(\underline{x}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega_t \\ (\underline{n}(\underline{x}) : \text{ normale extérieure au point courant de } \partial\Omega_t) \,. \end{array} \\ \\ \displaystyle\int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)\, d\Omega_t = 0 \,. \end{cases}$$

L'interprétation mécanique des champs $\underline{\underline{\sigma}}$ qui permettent, dans cette formulation, de caractériser par dualité les champs $\underline{\underline{d}}$ compatibles, apparaîtra au chapitre V (§ 3.13) à travers la modélisation des efforts intérieurs par les contraintes de Cauchy.

Dans le même ordre d'idées on peut remarquer qu'en conséquence directe de (3.40) on écrira la formulation faible de la condition de compatibilité d'un champ de tenseurs $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$ défini à l'instant t sur un volume Ω_0 dans la configuration κ_0, c'est-à-dire la condition nécessaire et suffisante pour que $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$ soit le gradient d'une fonction vectorielle $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ (cf. chapitre II, § 6.1) :

$$(3.42)\qquad \begin{cases} \forall \underline{\underline{B}} \;\Big|\; \begin{array}{l} \text{à support compact sur } \mathbb{R}^3 \,, \\ \operatorname{div} \underline{\underline{B}} = 0 \text{ sur } \Omega_0 \,, \\ \underline{\underline{B}}(\underline{X}) \,.\, \underline{N}(\underline{X}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega_0 \\ (\underline{N}(\underline{X}) : \text{ normale extérieure au point courant de } \partial\Omega_0) \,. \end{array} \\ \\ \displaystyle\int_{\Omega_0} {}^t\underline{\underline{B}}(\underline{X}) : \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)\, d\Omega_0 = 0 \,. \end{cases}$$

L'interprétation mécanique des champs $\underline{\underline{B}}$ considérés ci-dessus apparaîtra également au chapitre V (§ 4.2).

3.10 Hypothèse de la transformation infinitésimale

Dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale on a montré (chapitre II, § 5.3) qu'en ne conservant que les termes du premier ordre on peut confondre les gradients pris sur les configurations initiale et actuelle en des points homologues. On peut alors, au premier ordre :

- d'une part assimiler $\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)$ à $(\underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X}, t) + {}^t\underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X}, t))/2 = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\underline{X}, t)$ avec $\underline{x} = \underline{\phi}\,(\underline{X}, t)$,
- d'autre part, à partir de (2.15) dans laquelle $\underline{\underline{\nabla\phi}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X}, t)$,

  assimiler $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\underline{X}, t)$ à $(\underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X}, t) + {}^t\underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X}, t))/2$.

On peut donc, dans cette hypothèse, confondre au premier ordre les taux de déformation lagrangien et eulérien en des points homologues de κ_0 et κ_t.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

3.11 Objectivité

Comme on l'a dit au chapitre I (§ 2.4), la vitesse $\underline{U}$ n'est pas une grandeur objective. En effet les vitesses $\underline{U}(\underline{x},t)$ et $\underline{U}^*(\underline{x}^*,t)$ observées pour une même particule à l'instant t située en $\underline{x}$ dans $\mathcal{R}$ et en $\underline{x}^*$ dans $\mathcal{R}^*$ ($\underline{x}$ et $\underline{x}^*$ points géométriquement coïncidants de $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{R}^*$ à l'instant t) sont liées par la formule de composition des vitesses :

$$\underline{U}(\underline{x},t) = \underline{U}^*(\underline{x}^*,t) + \underline{U}_{\mathrm{e}}(\underline{x}^*,t) \tag{3.43}$$

où $\underline{U}_{\mathrm{e}}(\underline{x}^*,t)$ est la vitesse du point $\underline{x}^*$ de $\mathcal{R}^*$ par rapport au point $\underline{x}$ de $\mathcal{R}$ définie par le mouvement rigidifiant de $\mathcal{R}^*$ par rapport à $\mathcal{R}$ à l'instant t.

L'objectivité du tenseur taux de déformation résulte de l'objectivité du scalaire $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underline{\mathrm{d}M}\,.\,\underline{\mathrm{d}M'})$ qui exprime le taux de variation du produit scalaire $\underline{\mathrm{d}M}\,.\,\underline{\mathrm{d}M'}$ à travers la formule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underline{\mathrm{d}M}\,.\,\underline{dM'}) = 2\,\underline{\mathrm{d}M}\,.\,\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}M'}$ où $\underline{\mathrm{d}M}$ et $\underline{\mathrm{d}M'}$ sont eux-mêmes objectifs.

En revanche le gradient du champ de vitesse et le taux de rotation ne sont pas objectifs : observés dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ à l'instant t les gradients sont respectivement $\underline{\underline{\mathrm{grad}\,U}}(\underline{x},t)$ et $\underline{\underline{\mathrm{grad}\,U^*}}(\underline{x}^*,t)$ liés par la relation (3.44) conséquence de (3.43) :

$$\underline{\underline{\mathrm{grad}\,U}}(\underline{x},t) = \underline{\underline{\mathrm{grad}\,U^*}}(\underline{x}^*,t) + \underline{\underline{\Omega}}_{\mathrm{e}}(t) \tag{3.44}$$

où $\underline{\underline{\Omega}}_{\mathrm{e}}(t)$ désigne le tenseur antisymétrique associé au vecteur $\underline{\Omega}_{\mathrm{e}}(t)$, rotation instantanée de $\mathcal{R}^*$ par rapport à $\mathcal{R}$ à l'instant t. De même :

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x},t) = \underline{\underline{\Omega}}^*(\underline{x}^*,t) + \underline{\underline{\Omega}}_{\mathrm{e}}(t)\ . \tag{3.45}$$

Ces résultats sont conformes à l'intuition : $\dot{\widehat{\mathrm{d}s}}$ est objectif mais $\dot{\widehat{\underline{\mathrm{d}M}}}$ ne l'est pas en raison de la rotation relative de $\mathcal{R}^*$ par rapport à $\mathcal{R}$ à l'instant t.

4 Dérivées particulaires

4.1 Dérivées particulaires en description lagrangienne

On a introduit au paragraphe 2.1 la notion de ***dérivée particulaire*** d'une grandeur attachée à une particule matérielle, ou à un élément matériel (ligne, surface, volume).

Du point de vue lagrangien, une telle grandeur, quelle qu'en soit la nature (scalaire, vectorielle, tensorielle), est définie en fonction de la particule ou de l'ensemble de particules concerné et du temps (chapitre I, § 3.1).

Lorsque la grandeur est attachée à une particule ou à un nombre discret de particules, il s'agit d'une ***fonction*** :

$$\mathcal{B} = B(\underline{X},t) \tag{4.1}$$

ou

$$\mathcal{B} = B(\underline{X}_\alpha, \underline{X}_\beta, \ldots, t) \tag{4.2}$$

où $\underline{X}$ désigne le vecteur-position de la particule dans κ_0 (resp. $\underline{X}_\alpha, \underline{X}_\beta, \ldots$ pour les particules en nombre discret).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Pour une grandeur attachée à un système matériel, on doit considérer l'***intégrale*** de volume, de surface ou de ligne prise sur le domaine (Ω_0 , Σ_0 ou L_0) occupé par le système dans la configuration κ_0, d'une fonction $B_0(\underline{X}, t)$ qui est la densité volumique, surfacique ou linéique de la grandeur concernée dans la configuration de référence :

$$\mathcal{I} = I(\Omega_0, t) = \int_{\Omega_0} B_0(\underline{X}, t)\, \mathrm{d}\Omega_0 \tag{4.3}$$

ou

$$\mathcal{I} = I(\Sigma_0, t) = \int_{\Sigma_0} B_0(\underline{X}, t)\, \mathrm{d}\Sigma_0 \tag{4.4}$$

ou

$$\mathcal{I} = I(L_0, t) = \int_{L_0} B_0(\underline{X}, t)\, \mathrm{d}L_0 \tag{4.5}$$

La dérivée particulaire s'obtient alors, dans tous les cas, par simple dérivation partielle par rapport au temps. ($B(\underline{X}, t)$ et $B_0(\underline{X}, t)$ sont supposées continues et continûment différentiables par rapport à t).

$$\dot{\mathcal{B}} = \frac{\partial B}{\partial t} \tag{4.6}$$

$$\dot{\mathcal{I}} = \frac{\partial I}{\partial t} = \int \frac{\partial B_0}{\partial t}\ . \tag{4.7}$$

4.2 Dérivées particulaires en description eulérienne

Le calcul des dérivées particulaires en description eulérienne n'est évidemment pas aussi simple. Les grandeurs sont en effet définies en fonction des positions géométriques dans la configuration κ_t, et du temps t (chapitre I, § 4.1) : fonctions de point (ou de points), intégrales de densités volumiques, surfaciques ou linéiques dans la configuration actuelle. On a ainsi :

$$\mathcal{B} = b(\underline{x}, t) \tag{4.8}$$

ou

$$\mathcal{B} = b(\underline{x}_\alpha, \underline{x}_\beta, \ldots, t) \quad ; \tag{4.9}$$

et aussi :

$$\mathcal{I} = i(\Omega_t, t) = \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t)\, \mathrm{d}\Omega_t \tag{4.10}$$

$$\mathcal{I} = i(\Sigma_t, t) = \int_{\Sigma_t} b(\underline{x}, t)\, \mathrm{d}\Sigma_t \tag{4.11}$$

$$\mathcal{I} = i(L_t, t) = \int_{L_t} b(\underline{x}, t)\, \mathrm{d}L_t \tag{4.12}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On doit alors dériver ces fonctions ou ces intégrales par rapport au temps en suivant la particule ou l'ensemble de particules concerné.

Plusieurs méthodes peuvent être employées pour procéder au calcul de $\dot{\mathcal{B}}$ ou $\dot{\mathcal{I}}$ à partir des formules de définition (4.8) à (4.12) : on doit procéder à la dérivation totale par rapport au temps en considérant que les variables $\underline{x}$ ou $(\underline{x}_\alpha, \underline{x}_\beta, \ldots)$ dans (4.8, 4.9), et les domaines Ω_t, Σ_t, L_t dans (4.10 à 4.12) dépendent du temps par les formules du transport convectif.

Une méthode sûre (mais parfois assez lourde) pour ce type de calculs consiste à se ramener en description lagrangienne où l'on applique les résultats du paragraphe 4.1, et à repasser ensuite en description eulérienne pour obtenir la forme eulérienne cherchée. Les paragraphes suivants sont consacrés à la dérivation particulaire, en description eulérienne, pour des grandeurs définies par (4.8, 4.10 à 4.12).

4.3 Dérivée particulaire d'une fonction de point

La grandeur $\mathcal{B}$, définie par (4.8) en description eulérienne, s'écrit aussi en description lagrangienne :

$$\mathcal{B} = b\,(\underline{x}, t) = b\big(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t\big) = B(\underline{X}, t) \tag{4.13}$$

d'où, en application de (4.6) avec les hypothèses de continuité et différentiabilité sur b et $\underline{\phi}$:

$$\dot{\mathcal{B}} = \frac{\partial b}{\partial t} + (\operatorname{grad} b)\,.\,\underline{\dot{\phi}}$$

soit encore pour $\dot{\mathcal{B}}$ également notée $\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$:

$$\boxed{\dot{\mathcal{B}} = \frac{\mathrm{d}b(\underline{x}, t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial b(\underline{x}, t)}{\partial t} + (\operatorname{grad} b(\underline{x}, t))\,.\,\underline{U}(\underline{x}, t)} \tag{4.14}$$ [6]

(formule valable quel que soit l'ordre de la grandeur tensorielle $\mathcal{B}$).

La formule (4.14) s'écrit aussi en introduisant la dérivée de b selon le vecteur $\underline{U}$ (cf. annexe I, § 6.2) :

$$\dot{\mathcal{B}} = \frac{\mathrm{d}b(\underline{x}, t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial b(\underline{x}, t)}{\partial t} + \mathrm{D}_{\underline{U}} b(\underline{x}, t)\,. \tag{4.15}$$

La structure des formules (4.14) et (4.15) met en évidence que la dérivée particulaire de la grandeur $\mathcal{B}$ en description eulérienne est la somme de deux contributions. Le premier terme $\dfrac{\partial b\,(\underline{x}, t)}{\partial t}$ correspond à la variation de b au point géométrique $\underline{x}$ en fonction du temps : il correspond à la seule cause de variation de $\mathcal{B}$ si

[6] On rappelle que $\dfrac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{U}_t(\underline{x}, t)$ noté $\underline{U}(\underline{x}, t)$, où $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

la particule est immobile à l'instant t dans le référentiel considéré. Le second terme, $\mathrm{D}_{\underline{U}} b\,(\underline{x},t) = \big(\operatorname{grad} b\,(\underline{x},t)\big)\,.\,\underline{U}\,(\underline{x},t)$ correspond à la variation de la grandeur $\mathcal{B}$ due au mouvement de la particule dans le référentiel, c'est-à-dire à son transport convectif : il constitue la seule cause de variation de $\mathcal{B}$ si le champ b est stationnaire à l'instant t. Ce second terme, appelé ***terme de convection***, dépend linéairement de $\underline{U}\,(\underline{x},t)$.

La formule (4.14) permet notamment de calculer l'accélération d'une particule en description eulérienne :

$$\underline{a}\,(\underline{x},t) = \frac{\mathrm{d}\underline{U}(\underline{x},t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \underline{U}(\underline{x},t)}{\partial t} + \underline{\underline{\operatorname{grad} U}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{U}(\underline{x},t) \quad (4.16)$$ [7]

soit, en coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$a_i = \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\,U_j = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_{i,j}\,U_j\ .$$

4.4 Dérivée particulaire d'une intégrale de volume

Soit $\mathcal{I}$ définie par (4.10) en description eulérienne. En appliquant les résultats des chapitres I et II, on peut ramener l'intégration sur le volume Ω_0 occupé par les particules dans la configuration de référence κ_0 :

$$\mathcal{I} = i\,(\Omega_t\ ,\ t) = I(\Omega_0,t) = \int_{\Omega_0} b\big(\underline{\phi}(\underline{X},t),t\big)J(\underline{X},t)\,\mathrm{d}\Omega_0 \quad (4.17)$$

qui est formellement identique à (4.3) avec pour densité volumique à l'instant t dans la configuration de référence κ_0 :

$$B_0(\underline{X},t) = B(\underline{X},t)J(\underline{X},t)$$

où $B(\underline{X},t)$ est définie par (4.13).

Cas classique : fonctions continues et continûment différentiables.

On suppose la continuité et la continue différentiabilité des fonctions B et $\underline{\phi}$ sur Ω_0, d'où celles de b et $\underline{U}$ sur Ω_t.

♦ ***Approche lagrangienne***

On obtient par dérivation sous le signe « somme » de la formule (4.17) :

$$\dot{\mathcal{I}} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial B(\underline{X},t)}{\partial t} J(\underline{X},t)\,\mathrm{d}\Omega_0 + \int_{\Omega_0} B(\underline{X},t)\dot{J}(\underline{X},t)\,\mathrm{d}\Omega_0\ .$$

Cette formule peut maintenant être écrite en représentation eulérienne (intégrale sur Ω_t) compte tenu de ce que, par (2.9) et (3.30) :

$$\dot{J}(\underline{X},t)\,\mathrm{d}\Omega_0 = \dot{\widehat{\mathrm{d}\Omega_t}} = \operatorname{div}\underline{U}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t \quad ; \quad (4.18)$$

[7] On vérifiera que l'on peut aussi transformer cette expression en : $\underline{a}(\underline{x},t) = \dfrac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{\operatorname{grad}}\left(\dfrac{\underline{\underline{U^2}}}{2}\right) + (\operatorname{rot}\underline{U}) \wedge \underline{U}$, particulièrement utile en mécanique des fluides.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

on obtient ainsi avec (4.14) en allégeant les notations :

$$\boxed{\dot{\mathcal{I}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t} b\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_t}\left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} + b\ \mathrm{div}\ \underline{U}\right)\mathrm{d}\Omega_t} \tag{4.19}$$

ou encore :

$$\dot{\mathcal{I}} = \int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial b}{\partial t} + (\mathrm{grad}\, b)\,.\,\underline{U} + b\ \mathrm{div}\ \underline{U}\right)\mathrm{d}\Omega_t\ . \tag{4.20}$$

Les formules ci-dessus sont valables quel que soit l'ordre de la grandeur tensorielle $\mathcal{B}$.

Elles mettent en évidence que, formellement, la dérivée particulaire de $\mathcal{I}$ s'obtient en effectuant la ***dérivation particulaire***, sous le signe « somme » de l'intégrale eulérienne, ***de la mesure*** $b\,\mathrm{d}\Omega_t$:

$$\mathcal{I} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t} b\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_t}\widehat{\dot{b\,\mathrm{d}\Omega_t}} \tag{4.21}$$

avec

$$\widehat{\dot{b\,\mathrm{d}\Omega_t}} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\Omega_t + b\,\widehat{\dot{\mathrm{d}\Omega_t}} = \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} + b\ \mathrm{div}\ \underline{U}\right)\mathrm{d}\Omega_t\ . \tag{4.22}$$

On peut aussi remarquer que, dans le cas où $\mathcal{B}$ est une grandeur scalaire, on sait que :

$$\mathrm{div}(b\,\underline{U}) = (\underline{\mathrm{grad}\, b})\,.\,\underline{U} + b\,\mathrm{div}\,\underline{U} \quad ; \tag{4.23}$$

cette formule se généralise sans peine (par exemple en explicitant les opérations) au cas d'une grandeur $\mathcal{B}$ vectorielle ou tensorielle d'ordre quelconque sous la forme :

$$\mathrm{div}(b\otimes\underline{U}) = (\mathrm{grad}\, b)\,.\,\underline{U} + b\,\mathrm{div}\,\underline{U}\ . \tag{4.24}$$

En transformant (4.20) on obtient pour $\dot{\mathcal{I}}$ la nouvelle forme :

$$\dot{\mathcal{I}} = \int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial b}{\partial t} + \mathrm{div}(b\otimes\underline{U})\right)\mathrm{d}\Omega_t\ ^{(8)} \tag{4.25}$$

d'où, en application de la formule de la divergence, (annexe I, § 6.3)

$$\boxed{\dot{\mathcal{I}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t} b\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_t}\frac{\partial b}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t}(b\otimes\underline{U})\,.\,\underline{\mathrm{d}a}} \tag{4.26}$$

où $\underline{\mathrm{d}a} = \underline{n}\,\mathrm{d}a$ désigne le vecteur-aire élémentaire dans κ_t.

(8) On rappelle que si b est un scalaire, $(b\otimes\underline{U})$ n'est autre que le produit $b\,\underline{U}$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On retrouve, dans la formule (4.26), la structure mise en évidence, dans le cas d'une grandeur $\mathcal{B}$ définie par une fonction, sur les formules (4.14) et (4.15). La dérivée particulaire $\dot{\mathcal{I}}$ est, en effet, à nouveau la somme de deux contributions. Le premier terme $\displaystyle\int_{\Omega_t} \frac{\partial b\,(\underline{x},t)}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega_t$ correspond à la variation de l'intégrale $\mathcal{I} = i(\Omega_t, t)$ en fonction du temps sur le volume Ω_t considéré comme figé : seule cause de variation de $\mathcal{I}$ en l'absence de variation du domaine Ω_t, c'est-à-dire si le domaine Ω_t est stationnaire à l'instant t. Le second terme $\displaystyle\int_{\partial\Omega_t} \left(b\,(\underline{x},t) \otimes \underline{U}\,(\underline{x},t)\right) \underline{\mathrm{d}a}$ correspond à la variation de l'intégrale $\mathcal{I} = i\,(\Omega_t, t)$ due au transport convectif du domaine Ω_t : c'est, notamment la seule cause de variation de $\mathcal{I}$ si le champ b est stationnaire sur Ω_t à l'instant t. Ce terme, appelé encore ***terme de convection***, dépend linéairement du champ $\underline{U}$. On remarque que c'est bien le transport convectif ***du domaine*** Ω_t qui engendre ce terme : en particulier, le terme de convection peut être nul sans que le champ $\underline{U}$ soit nul sur Ω_t à l'instant t.

$$\dot{\mathcal{I}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,i\,(\Omega_t,t) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\,i\,(\Omega_t,t) \;+\; \partial_{\Omega_t} i\,(\Omega_t,t) \tag{4.27}$$

$$\begin{matrix}\text{dérivée}\\ \text{particulaire}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{dérivée}\\ \text{sur } \Omega_t \text{ figé}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{terme de}\\ \text{convection}\end{matrix}$$

♦ ***Approche eulérienne***

L'analyse, qui vient d'être faite, de la structure de la formule (4.26) et la remarque finale révèlent la démarche eulérienne et guident la démonstration directe illustrée sur la figure 4.

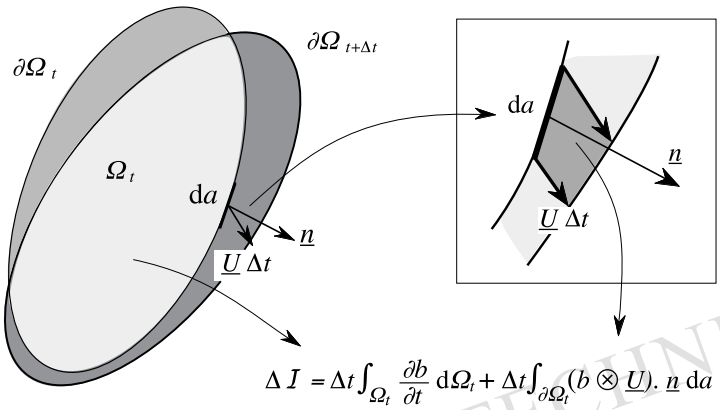


Figure 4 – Dérivée particulaire d'une intégrale de volume

L'idée en est, ***en suivant le volume matériel*** entre les instants infiniment voisins t et $(t + \Delta t)$, de faire le « bilan » de l'intégrale attachée à ce volume. Celui-ci se compose, au premier ordre en $\Delta t\,(> 0)$, de deux termes additifs dus :

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- pour les ***points géométriques*** situés à la fois dans Ω_t et $\Omega_{t+\Delta t}$, à la variation de la grandeur intégrée en fonction du temps (à $\underline{x}$ fixé),
- pour les ***points géométriques*** situés dans Ω_t et qui n'appartiennent plus à $\Omega_{t+\Delta t}$, et pour les ***points géométriques*** situés dans $\Omega_{t+\Delta t}$ et qui n'appartenaient pas à Ω_t, à la « perte » ou au « gain » correspondant sur la grandeur intégrée.

Au premier ordre en Δt, le premier de ces deux termes fournit la contribution égale à :

$$\Delta\mathcal{I}_1 = \Delta t \int_{\Omega_t} \frac{\partial b}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega_t \tag{4.28}$$

dans la variation de l'intégrale $\mathcal{I}$, et le second, qui concerne le volume algébrique balayé par la frontière $\partial\Omega_t$, fournit la contribution :

$$\Delta\mathcal{I}_2 = \Delta t \int_{\partial\Omega_t} b\,(\underline{U}\,.\,\underline{n})\,\mathrm{d}a = \Delta t \int_{\partial\Omega_t} (b\otimes\underline{U})\,.\,\underline{\mathrm{d}a}\;. \tag{4.29}$$

Par passage à la limite sur $\frac{\Delta\mathcal{I}_1+\Delta\mathcal{I}_2}{\Delta t}$ quand $\Delta t \searrow 0$, on retrouve la formule (4.26) pour $\dot{\mathcal{I}}$.

Cas où b et $\underline{U}$ sont continues et continûment différentiables, par morceaux.

Les formules précédentes ont été établies dans les hypothèses de continuité et de continue différentiabilité des fonctions B et $\underline{\phi}$ sur Ω_0, b et $\underline{U}$ sur Ω_t. En particulier le passage de (4.25) à (4.26) utilise la formule de la divergence en supposant $(b\otimes\underline{U})$ continue et différentiable.

On se propose maintenant d'examiner le cas où les fonctions B sur Ω_0, b et/ou $\underline{U}$ sur Ω_t sont continues et continûment différentiables ***par morceaux***, $\underline{\phi}$ demeurant continue.

♦ ***Approche eulérienne***

La méthode de démonstration précédente en représentation eulérienne permet d'aborder ce problème en restant proche de l'intuition physique.

Pour cela on désigne par Σ_t une surface géométrique au franchissement de laquelle, dans la configuration $\kappa_t, b(\underline{x},t)$ et/ou $\underline{U}(\underline{x},t)$ sont discontinues (figure 5). En chaque point M de Σ_t on définit la ***vitesse de propagation de la surface géométrique*** Σ_t, soit $\underline{W}(\underline{x},t)$, par la formule (4.30) où M_Δ désigne le point situé sur la surface géométrique $\Sigma_{t+\Delta t}$, à l'intersection de celle-ci avec la normale en M à Σ_t :

$$\underline{W}(\underline{x},t) = \lim_{\Delta t\to 0} (\underline{MM_\Delta}/\Delta t)\;,\ (\Delta t>0) \quad ; \tag{4.30}$$

$\underline{W}(\underline{x},t)$ est donc, par définition, normale à Σ_t en M :

$$\underline{W}(\underline{x},t) = W(\underline{x},t)\,\underline{n}(\underline{x},t) \tag{4.31}$$

où $\underline{n}(\underline{x},t)$ désigne un vecteur normal unitaire à Σ_t au point M.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

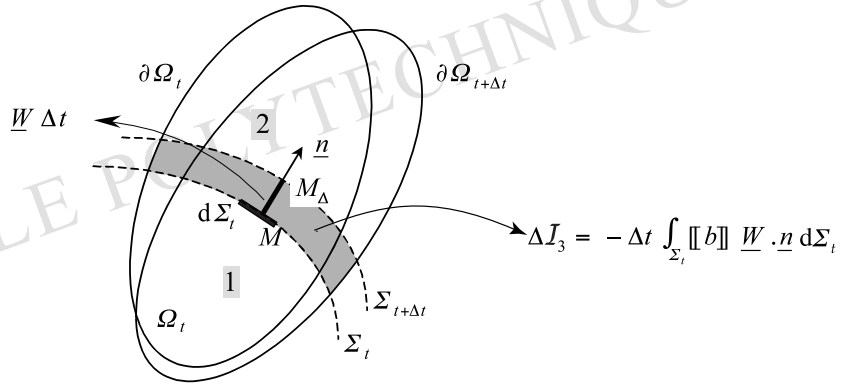


Figure 5 – Dérivée particulaire d'une intégrale de volume dans le cas de discontinuité : le terme de saut

On convient de repérer par les indices inférieurs 1 et 2 les régions situées de part et d'autre de Σ_t franchie ***dans le sens de*** $\underline{n}(\underline{x},t)$; ces mêmes indices sont aussi utilisés pour distinguer les valeurs de b et de $\underline{U}$ de part et d'autre de Σ_t. Le symbole $[\![\ \ ]\!]$ désigne la discontinuité de la grandeur concernée au franchissement de Σ_t dans le sens de $\underline{n}(\underline{x},t)$. Ainsi :

$$\forall \underline{x} \in \Sigma_t\,, \quad [\![\, b(\underline{x},t)\,]\!] = b_2(\underline{x},t) - b_1(\underline{x},t) \tag{4.32}$$

et de même pour $[\![\,\underline{U}\,]\!]$ [(9)].

On reprend la méthode du bilan de l'intégrale attachée au volume matériel.

On doit alors, dans le calcul de la variation $\Delta\mathcal{I}$, examiner avec attention les ***points géométriques*** situés à la fois dans Ω_t et dans $\Omega_{t+\Delta t}$. En effet, parmi ceux-ci il en est qui, situés « en aval » de la surface de discontinuité Σ_t (à l'instant t), voient passer cette surface pendant l'intervalle de temps Δt, et se trouvent situés en « amont » de la surface $\Sigma_{t+\Delta t}$ (à l'instant $t+\Delta t$). Ces points géométriques, qui correspondent au volume balayé par la surface de discontinuité (figure 5) entre les instants t et $(t+\Delta t)$, introduisent un nouveau terme additif dans la variation de l'intégrale : pour chacun d'eux il y a un gain (algébrique) de la grandeur intégrée égal à « valeur amont moins valeur aval » $= b_1 - b_2 = -[\![\, b \,]\!]$.

La contribution correspondante, à ajouter à $\Delta\mathcal{I}_1$ et $\Delta\mathcal{I}_2$ toujours données par (4.28) et (4.29), est ainsi, au premier ordre en Δt, égale à :

$$\Delta\mathcal{I}_3 = \Delta t \int_{\Sigma_t} (b_1 - b_2)\, \underline{W}\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}\Sigma_t = -\Delta t \int_{\Sigma_t} [\![\, b \,]\!]\, W\,\mathrm{d}\Sigma_t\ . \tag{4.33}$$

[(9)] Toutes les formules sont algébriques. L'orientation transversale de Σ_t est quelconque, c'est-à-dire que $\underline{n}(\underline{x},t)$ et $\underline{W}(\underline{x},t)$ peuvent ne pas être de même sens. Bien noter que la définition du saut $[\![\ \ ]\!]$ est liée à ***l'orientation de*** $\underline{n}$ et non à celle de $\underline{W}$. En particulier, si $W > 0$, $[\![\, b \,]\!]$ est égale à la différence (valeur aval - valeur amont) et est l'opposé du saut ressenti en un point géométrique au franchissement de la surface de discontinuité : c'est l'explication du signe « moins » dans la formule (4.34).

Par passage à la limite sur $\frac{\Delta\mathcal{I}_1+\Delta\mathcal{I}_2+\Delta\mathcal{I}_3}{\Delta t}$ quand $\Delta t \searrow 0$, on obtient la nouvelle formule pour $\dot{\mathcal{I}}$:

$$\dot{\mathcal{I}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t} b\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial b}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega_t - \int_{\Sigma_t} [\![\, b \,]\!]\, W\,\mathrm{d}\Sigma_t + \int_{\partial\Omega_t} (b\otimes \underline{U})\,.\,\underline{\mathrm{d}a} \tag{4.34}$$

On retrouve dans cette formule la structure de (4.14) et de (4.26) qui est apparente dans la démonstration : les deux premiers termes de $\dot{\mathcal{I}}$ sont issus de $(\Delta\mathcal{I}_1 + \Delta\mathcal{I}_3)$: ils correspondent à la variation de l'intégrale sur le volume géométrique figé. Le troisième terme est le terme de convection : c'est le seul terme qui manifeste la dépendance de $\dot{\mathcal{I}}$ par rapport au champ $\underline{U}$; il est identique à celui obtenu dans (4.26) et dépend linéairement du champ $\underline{U}$ sur $\partial\Omega_t$.

Il est possible de transformer (4.34) en utilisant la formule de la divergence généralisée au cas d'une fonction tensorielle f continue et continûment différentiable par morceaux qui s'écrit [(10)]

$$\int_{\Omega_t} \mathrm{div}\, f\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_t} [\![\, f \,]\!]\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}\Sigma_t = \int_{\partial\Omega_t} f\,.\,\underline{\mathrm{d}a}\,. \tag{4.35}$$

On obtient ainsi à partir de (4.34), avec $f = b\otimes\underline{U}$ dans (4.35) et en regroupant les termes :

$$\dot{\mathcal{I}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t} b\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_t} \Big(\frac{\partial b}{\partial t} + \mathrm{div}(b\otimes\underline{U})\Big)\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_t} [\![\, b\otimes(\underline{U}-\underline{W}) \,]\!]\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}\Sigma_t\,. \tag{4.36}$$

♦ ***Approche lagrangienne***

Il est évidemment possible d'établir la formule (4.36) en suivant la démarche adoptée précédemment, c'est-à-dire en se ramenant en représentation lagrangienne. Ceci nécessite au préalable d'introduire quelques concepts et notations de portée générale.

Vitesses de propagation, célérités.

On désigne par Σ_0 la position géométrique de la surface de discontinuité à l'instant de référence $t = 0$, dans la configuration κ_0. On note $\underline{X}_0$ le vecteur-position du point courant M_0 de Σ_0.

Σ_t peut être décrite à partir de Σ_0 en introduisant un homéomorphisme, fonction de t, qui exprime le transport géométrique de Σ_0 sur Σ_t, soit $\underline{x} = \underline{\delta}(\underline{X}_0, t)$, défini sur Σ_0 en écrivant qu'à chaque instant t la vitesse de propagation de Σ_t, introduite en (4.30) est :

$$\underline{W}(\underline{x}, t) = \frac{\partial\underline{\delta}(\underline{X}_0, t)}{\partial t}\ ,\ \forall M_0 \in \Sigma_0 \tag{4.37}$$

avec la condition initiale évidente $\underline{\delta}(\underline{X}_0, 0) = \underline{X}_0\ ,\ \forall M_0 \in \Sigma_0$.

Par ailleurs l'homéomorphisme de la description lagrangienne du mouvement permet de définir, pour chaque instant t, la surface géométrique Σ_{0t} dans κ_0 dont les points sont transportés

(10) Cette formule se démontre en appliquant la formule de la divergence classique séparément sur les volumes découpés dans Ω_t par Σ_t et en rassemblant les résultats obtenus. Elle peut aussi être interprétée dans le cadre de la ***théorie des distributions***. Le premier membre de (4.35) n'est autre que l'intégrale $\int_{\Omega_t} \mathrm{div}\, f$ prise au sens des distributions, où la distribution $\mathrm{div}\, f$ s'explicite en : $\mathrm{div}\, f = \{\mathrm{div}\, f\} + [\![\, f \,]\!]\,.\,\underline{n}\,\delta_{\Sigma_t}$, avec $\{\mathrm{div}\, f\}$ la distribution définie par la ***fonction*** $\mathrm{div}\, f$, et δ_{Σ_t} la distribution de Dirac sur Σ_t. Cette même méthode fournit immédiatement l'écriture de (4.14) si b est continue et continûment différentiable par morceaux.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

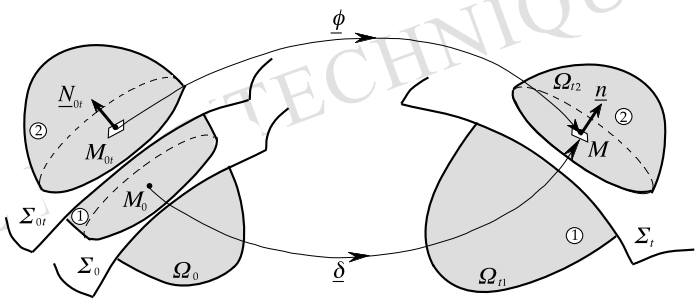


Figure 6 – Surfaces de discontinuité dans les configurations initiale et actuelle

sur Σ_t dans κ_t dans le ***transport convectif*** entre les instants 0 et t (figure 6). Pour le point courant M de Σ_t on a donc à la fois : $\underline{x} = \underline{\delta}(\underline{X}_0, t)$ et $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}_{0t}, t)$ où $\underline{X}_{0t}$ désigne le vecteur-position du point M_{0t}, antécédent de M dans κ_0 par $\underline{\phi}$.

On en déduit la correspondance qui relie, dans κ_0, les points M_0 et M_{0t} associés à un même point géométrique M de Σ_t par le transport géométrique et par le transport convectif :

$$\underline{\phi}(\underline{X}_{0t}, t) = \underline{x} = \underline{\delta}(\underline{X}_0, t) \tag{4.38}$$

ou encore

$$\underline{X}_{0t} = \underline{\phi}^{-1}\big(\underline{\delta}(\underline{X}_0, t), t\big)\ .$$

La surface géométrique Σ_{0t} n'est, en général, pas fixe dans la configuration κ_0. On peut en définir la vitesse de propagation dans κ_0 de manière analogue à $\underline{W}$ par (4.30) :

$$\underline{V}_0(\underline{X}_{0t}, t) = V_0(\underline{X}_{0t}, t)\,\underline{N}_{0t} \quad \text{avec} \quad V_0(\underline{X}_{0t}, t) = \underline{N}_{0t} \cdot \frac{\partial \underline{X}_{0t}(\underline{X}_0, t)}{\partial t}\ .$$

$\underline{V}_0$ n'est autre que la ***célérité*** de la surface de discontinuité, ou ***onde***, par rapport à la matière dans l'état de référence.

La ***célérité de l'onde par rapport à la matière dans l'état actuel*** est :

$$\underline{V}(\underline{x}, t) = \big(W(\underline{x}, t) - \underline{U}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}\big)\,\underline{n} \tag{4.39}$$

où $\underline{U}(\underline{x}, t) = \dfrac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}_{0t}, t)}{\partial t}$.

En dérivant la correspondance (4.38) par rapport à t et compte tenu de (4.37) on obtient :

$$\underline{W}(\underline{x}, t) - \underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\nabla \phi}}(\underline{X}_{0t}, t) \cdot \frac{\partial \underline{X}_{0t}(\underline{X}_0, t)}{\partial t}\ .$$

Cette formule peut être transformée en introduisant les vecteurs-aires élémentaires $\underline{\mathrm{d}a}$ sur Σ_t et $\underline{\mathrm{d}A_t}$ sur Σ_{0t} (cf. chapitre II, formule (4.13)) et il vient :

$$J(\underline{X}_{0t}, t)\,\underline{V}_0(\underline{X}_{0t}, t) \cdot \underline{\mathrm{d}A_t} = \underline{V}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\mathrm{d}a}\ . \tag{4.40}$$

On remarque que si $\underline{\delta}$ est identique à $\underline{\phi}$ ou, plus généralement, si $\dfrac{\partial \underline{X}_{0t}}{\partial t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\phi}^{-1}\big(\underline{\delta}(\underline{X}_0, t), t\big)$ est tangente à Σ_{0t}, il n'y a pas propagation de Σ_{0t} dans κ_0, et Σ_t suit la matière dans κ_t : $\underline{V}_0 = 0$ et $\underline{V} = 0$.

Discontinuités. Relations cinématiques de compatibilité.

En écrivant la formule (4.40) sur Σ_{0t} on doit évidemment préciser le côté de la surface qui est considéré : $\underline{U}$ peut, par hypothèse, y être discontinu (et donc $\underline{V}$) et cette discontinuité

implique celles de $\underline{\underline{\nabla\phi}}$ et de J comme on l'expliquera plus loin. On écrira donc sur Σ_{0t}, de part et d'autre :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1\, \underline{V}_0 \cdot \underline{\mathrm{d}A}_t = (\underline{W} - \underline{U}_1) \cdot \underline{\underline{\mathrm{d}a}} \\ J_2\, \underline{V}_0 \cdot \underline{\mathrm{d}A}_t = (\underline{W} - \underline{U}_2) \cdot \underline{\underline{\mathrm{d}a}} \, . \end{array} \right. \tag{4.41}$$

On doit alors remarquer que, $\underline{\phi}$ étant supposée continue sur Ω_0 et par rapport au temps, les discontinuités de ses dérivées sur Σ_{0t} ne sont pas indépendantes : il y a continuité des dérivées de $\underline{\phi}$ selon les directions tangentes à Σ_{0t} dans « l'espace-temps » $\{\underline{X}_{0t} \times t\}$. Cela signifie que lorsque l'on suit Σ_{0t} dans sa propagation dans κ_0, c'est-à-dire pour des accroissements $\underline{\mathrm{d}X}$ et $\mathrm{d}t$ ***liés par la seule relation*** (en M_{0t} , à l'instant t) :

$$\underline{N}_{0t} \cdot \underline{\mathrm{d}X} = V_0 \, \mathrm{d}t$$

qui assure que le point géométrique de vecteur-position $(\underline{X}_{0t} + \underline{dX})$ se trouve sur $\Sigma_{0,t+\mathrm{d}t}$, on a :

$$[\![\, \underline{\underline{\nabla\phi}}(\underline{X}_{0t}, t) \,]\!] \cdot \underline{\mathrm{d}X} + \left[\!\!\left[\frac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}_{0t}, t)}{\partial t} \right]\!\!\right] \mathrm{d}t = 0 \, .$$

On en déduit la forme nécessaire de $[\![\, \underline{\underline{\nabla\phi}}(\underline{X}_{0t}, t) \,]\!]$ et de $[\![\, \underline{U} \,]\!]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\![\, \underline{\underline{\nabla\phi}}(\underline{X}_{0t}, t) \,]\!] = \underline{\lambda} \otimes \underline{N}_{0t} \\ [\![\, \underline{U} \,]\!] = \left[\!\!\left[\dfrac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}_{0t}, t)}{\partial t} \right]\!\!\right] = -\underline{\lambda}\, V_0 \end{array} \right. \tag{4.42}$$

où $\underline{\lambda}$ est un vecteur arbitraire, ou la relation équivalente si $V_0 \neq 0$:

$$[\![\, \underline{\underline{\nabla\phi}}(\underline{X}_{0t}, t) \,]\!] = -\frac{1}{V_0} [\![\, \underline{U} \,]\!] \otimes \underline{N}_{0t} \quad \text{si } V_0 \neq 0 \, .$$

Une conséquence importante des relations (4.42) vaut d'être signalée ici :

$$\underline{V}_0 = 0 \quad (\text{et donc } \underline{V}_1 = 0 \text{ et } \underline{V}_2 = 0) \Rightarrow [\![\, \underline{U} \,]\!] = 0 \quad ;$$

ce résultat signifie qu'une ***onde de discontinuité de vitesse n'est compatible avec l'hypothèse de continuité*** ($\underline{\phi}$ continue sur Ω_0) ***que si sa célérité par rapport à la matière est non nulle*** (résultat physiquement évident [11] ; cf. aussi § 5.1).

Le raisonnement mis en œuvre ci-dessus pour établir les formules (4.42), qui exploite la continuité d'une fonction (ici $\underline{\phi}$) au franchissement d'une surface de discontinuité de ses dérivées, est dû à Hadamard [12]. Les relations correspondantes (4.42) sont souvent appelées : ***relations cinématiques de compatibilité d'Hadamard***. On en rencontrera d'autres exemples (cf. chapitre VIII).

Dérivée particulaire d'une intégrale de volume.

On reprend l'intégrale $\mathcal{I}$ définie par la formule (4.10), que l'on ramène en représentation lagrangienne, comme indiqué par (4.17), sous la forme :

$$\mathcal{I} = \int_{\Omega_{0t_1}} B(\underline{X}, t) J(\underline{X}, t) \, \mathrm{d}\Omega_0 + \int_{\Omega_{0t_2}} B(\underline{X}, t) J(\underline{X}, t) \, \mathrm{d}\Omega_0$$

où Ω_0 est séparé en Ω_{0t_1} et Ω_{0t_2} par la surface Σ_{0t}, à la traversée de laquelle B ou J sont discontinues à l'instant t.

[11] Si la discontinuité de vitesse était stationnaire, elle concernerait toujours les mêmes particules, induisant ainsi un saut de $\underline{\phi}$, contradictoire avec l'hypothèse.
[12] J. Hadamard (1865-1963).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Le calcul de la dérivée de $\mathcal{I}$ par rapport au temps doit tenir compte du fait que les domaines Ω_{0t_1} et Ω_{0t_2} évoluent en raison de la propagation de Σ_{0t} dans κ_0 à la vitesse $\underline{V}_0$. On obtient ainsi :

$$\dot{\mathcal{I}} = \int_{\Omega_{0t_1}} \frac{\partial}{\partial t}(BJ)\,\mathrm{d}\Omega_0 + \int_{\Omega_{0t_2}} \frac{\partial}{\partial t}(BJ)\,\mathrm{d}\Omega_0 + \\ + \int_{\Sigma_{0t}} B_1(\underline{X},t)\,J_1(\underline{X},t)\,\underline{V}_0(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}A}_t - \int_{\Sigma_{0t}} B_2(\underline{X},t)\,J_2(\underline{X},t)\,\underline{V}_0(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}A}_t\ . \tag{4.43}$$

Le passage en représentation eulérienne se fait sans difficulté en utilisant la formule (4.41). On retrouve ainsi la formule (4.36) :

$$\dot{\mathcal{I}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t} b\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_t} (\frac{\partial b}{\partial t} + \mathrm{div}(b\otimes\underline{U}))\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_t} [\![\, b\otimes(\underline{U}-\underline{W})\,]\!]\,.\,\underline{\mathrm{d}a}\ .$$

Formules de bilan

Même si l'on s'est référé au point de vue lagrangien pour asseoir quelques démonstrations, c'est évidemment le point de vue eulérien qui se révèle le mieux adapté et le plus fécond en cinématique. La méthode du bilan utilisée plus haut en est un exemple.

Du point de vue mathématique, le problème posé par le calcul de la dérivée particulaire d'une intégrale de volume en description eulérienne est celui de la dérivation par rapport au temps de l'intégrale d'une fonction des variables d'espace et de temps sur un volume d'intégration qui dépend lui-même du temps (le problème est classique pour une intégrale simple). Les formules (4.26) et (4.34) mettent en évidence que le caractère variable du volume d'intégration se traduit dans cette dérivée par un terme additif de flux, qui correspond au volume balayé par la frontière du volume d'intégration et qui dépend linéairement du champ de vitesse sur cette frontière. C'est, dans (4.26) et (4.34) le terme : $\int_{\partial\Omega_t}(\underline{b}\otimes\underline{U})\,.\,\underline{\mathrm{d}a}$.

Les démonstrations données dans l'approche eulérienne pour les formules (4.26) et (4.34) par la méthode du bilan ne font pas explicitement référence au fait que le champ de vecteurs $\underline{U}$ sur κ_t est le champ de vitesse (réel) des particules du système : il s'agit purement et simplement d'une « comptabilité » qui compare les intégrales sur deux volumes géométriques aux instants infiniment voisins t et $(t+\Delta t)$. C'est ainsi que la description eulérienne permet l'extension des résultats établis pour les dérivées particulaires.

Considérant une grandeur b définie en description eulérienne, c'est-à-dire par la donnée de $b(\underline{x},t)$, on se propose de calculer à l'instant t la dérivée par rapport au temps de l'intégrale de b prise sur un volume Ω_t fonction du temps dont la variation à l'instant t est définie par un champ de vecteurs $\underline{u}$ continu et continûment différentiable par morceaux sur $\partial\Omega_t$. En désignant cette dérivée par $\left(\frac{\delta\mathcal{I}}{\delta t}\right)_{\underline{u}}$, on a en reprenant (4.34) :

$$\left(\frac{\delta\mathcal{I}}{\delta t}\right)_{\underline{u}} = \int_{\Omega_t}\frac{\partial b}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega_t - \int_{\Sigma_t}[\![\, b\,]\!]\,W\,\mathrm{d}\Sigma_t + \int_{\partial\Omega_t}(b\otimes\underline{u})\,.\,\underline{\mathrm{d}a}\ . \tag{4.44}$$

Ainsi, en choisissant le champ $\underline{u}=0$, $\left(\frac{\delta\mathcal{I}}{\delta t}\right)_0$ n'est autre que la dérivée de l'intégrale prise sur un volume géométrique fixe (c'est le volume « figé » des démonstrations précédentes) :

$$\left(\frac{\delta\mathcal{I}}{\delta t}\right)_0 = \int_{\Omega_t}\frac{\partial b}{\partial t}\mathrm{d}\Omega_t - \int_{\Sigma_t}[\![\, b\,]\!]\,W\,\mathrm{d}\Sigma_t\ ; \tag{4.45}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

en choisissant $\underline{u} = \underline{U}$, on retrouve la dérivée particulaire

$$\left(\frac{\delta \mathcal{I}}{\delta t}\right)_{\underline{U}} = \dot{\mathcal{I}} = \left(\frac{\delta \mathcal{I}}{\delta t}\right)_0 + \int_{\partial\Omega_t} (b \otimes \underline{U}) \,.\, \underline{\mathrm{d}a} \,. \tag{4.46}$$

Il est commode de poser, par analogie avec (4.14, 4.15)

$$\forall \underline{u} \,, \quad \int_{\partial\Omega_t} (b \otimes \underline{u}) \,.\, \underline{\mathrm{d}a} = \mathrm{D}_{\underline{u}} \mathcal{I} \,, \tag{4.47}$$

et l'on obtient la formule générale :

$$\left(\frac{\delta \mathcal{I}}{\delta t}\right)_{\underline{u}} = \left(\frac{\delta \mathcal{I}}{\delta t}\right)_0 + \mathrm{D}_{\underline{u}} \mathcal{I} \,. \tag{4.48}$$

Il est fait usage de cette formule en mécanique des fluides car elle permet de choisir la surface de contrôle (frontière de Ω_t et champ $\underline{u}$) la mieux adaptée au problème étudié. La définition de la dérivation $\left(\frac{\delta}{\delta t}\right)_{\underline{u}}$ et les raisonnements correspondants sont possibles en description lagrangienne, avec une certaine lourdeur ; ils reposent fondamentalement sur le fait que les dérivées par rapport au temps qui interviennent sont toujours des dérivées à droite et que l'on peut donc, à l'instant t, choisir $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ indépendamment de la connaissance de $\underline{\phi}$.

4.5 Dérivation particulaire d'une circulation

Circulation d'une quantité vectorielle

La grandeur considérée ici est la circulation d'une fonction vectorielle $\underline{b}(\underline{x}, t)$ sur une courbe L_t de κ_t :

$$\mathcal{I} = i(L_t, t) = \int_{L_t} \underline{b}(\underline{x}, t) \,.\, \underline{\tau}(\underline{x}) \, \mathrm{d}L_t \tag{4.49}$$

où $\underline{\tau}(\underline{x})$ est le vecteur unitaire tangent au point M de L_t.

La dérivée particulaire de $\mathcal{I}$ s'intéresse à l'évolution de $\mathcal{I}$ dans le transport convectif de la courbe L_t, domaine matériel. Sur cette courbe matérielle, $\underline{\tau}(\underline{x}) \, \mathrm{d}L_t$ n'est autre que le vecteur matériel élémentaire $\underline{\mathrm{d}M}$ et l'on peut écrire :

$$\mathcal{I} = i(L_t, t) = \int_{L_t} \underline{b}(\underline{x}, t) \,.\, \underline{\mathrm{d}M} \,. \tag{4.50}$$

Le calcul direct de l'expression eulérienne de la dérivée particulaire $\dot{\mathcal{I}} = \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ correspond à la dérivation formelle sous le signe « somme » (cf. (4.21) pour l'intégrale de volume) :

$$\dot{\mathcal{I}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{L_t} \underline{b} \,.\, \underline{\mathrm{d}M} = \int_{L_t} \widehat{\underline{b} \,.\, \underline{\mathrm{d}M}} = \int_{L_t} \frac{\mathrm{d}\underline{b}}{\mathrm{d}t} \,.\, \underline{\mathrm{d}M} + \int_{L_t} \underline{b} \,.\, \widehat{\underline{\mathrm{d}M}} \,^{(13)} \,. \tag{4.51}$$

Compte tenu de l'expression (3.6) de $\widehat{\underline{\mathrm{d}M}}$, il vient ainsi :

$$\dot{\mathcal{I}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{L_t} \underline{b} \,.\, \underline{\tau} \, \mathrm{d}L_t = \int_{L_t} (\frac{\mathrm{d}\underline{b}}{\mathrm{d}t} + \underline{b} \,.\, \underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}}) \,.\, \underline{\tau} \, \mathrm{d}L_t \,. \tag{4.52}$$

(13) Cette équation s'explicite en description lagrangienne :

$$\dot{\mathcal{I}} = \int_{L_0} \frac{\partial B(\underline{X}, t)}{\partial t} \,.\, \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\mathrm{d}M_0} + \int_{L_0} B(\underline{X}, t) \,.\, \dot{\underline{\underline{F}}}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\mathrm{d}M_0}$$

où $B(\underline{X}, t) = b(\underline{x}, t)$ avec $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$; et l'on rappelle que $\dot{\underline{\underline{F}}}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}}(\underline{x}, t)$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Cette équation se développe aussi en

$$\dot{\mathcal{I}} = \int_{L_t} \frac{\partial \underline{\underline{b}}}{\partial t} \,.\, \underline{\tau}\, \mathrm{d}L_t + \int_{L_t} (\underline{\underline{\text{grad } b}}) \,.\, \underline{U} + \underline{b} \,.\, \underline{\underline{\text{grad } U}}) \,.\, \underline{\tau}\, \mathrm{d}L_t \tag{4.53}$$

dont la deuxième intégrale représente le terme de convection.

Circulation d'une quantité tensorielle

Si $\mathcal{I}$ est donnée comme la circulation d'une fonction tensorielle quelconque, par exemple :

$$\underline{\underline{\mathcal{I}}} = \int_{L_t} \underline{\underline{b}}(\underline{x}, t) \,.\, \underline{\tau}\, \mathrm{d}L_t \tag{4.54}$$

on montre aisément, comme au paragraphe 4.5, et en s'appuyant sur (4.53), que l'on a :

$$\dot{\underline{\underline{\mathcal{I}}}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{L_t} \underline{\underline{b}} \,.\, \underline{\tau}\, \mathrm{d}L_t = \int_{L_t} (\frac{\partial \underline{\underline{b}}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad } b}} \,.\, \underline{U} + \underline{\underline{b}} \,.\, \underline{\underline{\text{grad } U}}) \,.\, \underline{\tau}\, \mathrm{d}L_t \ . \tag{4.55}$$

Remarque

Les raisonnements qui précèdent sont liés à la forme particulière de l'intégrale de ligne $i(L_t, t)$ dont on cherche la dérivée particulaire : s'agissant de la circulation d'une quantité, on a pu reconnaître que l'élément d'intégration sur L_t n'est autre que le vecteur matériel élémentaire.

Comme on l'a expliqué à propos de la dérivée particulaire d'une intégrale de volume, le résultat établi ci-dessus peut aussi être appliqué en substituant, dans (4.52,. . ., 4.56), au champ de vitesse $\underline{U}$ un champ de vecteur $\underline{u}$ continu et continûment différentiable quelconque défini sur L_t. Il fournit alors l'expression de la dérivée $\left(\frac{\delta \mathcal{I}}{\delta t}\right)_{\underline{u}}$ homologue de (4.44).

4.6 Dérivation particulaire d'un flux

Flux d'une quantité vectorielle

La grandeur considérée est le flux d'une fonction vectorielle $\underline{b}(\underline{x}, t)$ à travers une surface Σ_t de κ_t :

$$\mathcal{I} = i(\Omega_t, t) = \int_{\Sigma_t} \underline{b}(\underline{x}, t) \,.\, \underline{n}(\underline{x})\, \mathrm{d}\Sigma_t \ . \tag{4.56}$$

Dans le transport convectif de la surface Σ_t, domaine matériel d'intégration, $\underline{n}(\underline{x})\, \mathrm{d}\Sigma_t$ n'est autre que le vecteur-aire élémentaire $\underline{\mathrm{d}a}$:

$$\mathcal{I} = i(\Omega_t, t) = \int_{\Sigma_t} \underline{b}(\underline{x}, t) \,.\, \underline{\mathrm{d}a} \ . \tag{4.57}$$

La dérivée particulaire $\dot{\mathcal{I}}$ s'obtient par dérivation formelle sous le signe « somme » :

$$\dot{\mathcal{I}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Sigma_t} \underline{b} \,.\, \underline{\mathrm{d}a} = \int_{\Sigma_t} \widehat{\underline{b} \,.\, \underline{\mathrm{d}a}} = \int_{\Sigma_t} \frac{\mathrm{d}\underline{\underline{b}}}{\mathrm{d}t} \,.\, \underline{\mathrm{d}a} + \int_{\Sigma_t} \underline{b} \,.\, \widehat{\underline{\mathrm{d}a}} \ , \tag{4.58}$$

et nécessite le calcul de la dérivée particulaire $\widehat{\underline{\mathrm{d}a}}$ du vecteur-aire $\underline{\mathrm{d}a}$.

Le raisonnement est semblable à celui mis en œuvre au chapitre II (§ 2.4) pour établir la formule de transport du vecteur-aire. On a, $\forall\, \underline{\mathrm{d}M} \in \kappa_t$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\underline{\mathrm{d}M} \,.\, \underline{\mathrm{d}a}) = \widehat{\mathrm{d}\Omega_t} = (\mathrm{div}\, \underline{U})\, \underline{\mathrm{d}M} \,.\, \underline{\mathrm{d}a}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underline{\mathrm{d}M}\,.\,\underline{\mathrm{d}a}) = (\underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}}\,.\,\underline{\mathrm{d}M})\,.\,\underline{\mathrm{d}a} + \underline{\mathrm{d}M}\,.\,\underline{\dot{\mathrm{d}a}}\,.$$

D'où l'expression de $\underline{\dot{\mathrm{d}a}}$:

$$\underline{\dot{\mathrm{d}a}} = \underline{\mathrm{d}a}\,\mathrm{div}\,\underline{U} - {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}}\,.\,\underline{\mathrm{d}a}\,. \tag{4.59}$$

On en déduit l'expression de la dérivée particulaire $\dot{\mathcal{I}}$:

$$\dot{\mathcal{I}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma_t}\underline{b}\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}\Sigma_t = \int_{\Sigma_t}(\frac{\mathrm{d}\underline{b}}{\mathrm{d}t} + \underline{b}\,\mathrm{div}\,\underline{U} - \underline{b}\,.\,{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}})\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}\Sigma_t\ ^{(14)}\,. \tag{4.60}$$

En explicitant la dérivée particulaire $\dfrac{\mathrm{d}\underline{b}}{\mathrm{d}t}$ on obtient :

$$\dot{\mathcal{I}} = \int_{\Sigma_t}\frac{\partial\underline{b}}{\partial t}\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}\Sigma_t + \int_{\Sigma_t}\big((\underline{\underline{\mathrm{grad}\ b}})\,.\,\underline{U} - (\underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}})\,.\,\underline{b} + \underline{b}\ \mathrm{div}\ \underline{U}\big)\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}\Sigma_t \tag{4.61}$$

dont la deuxième intégrale représente le terme de convection.

Flux d'une quantité tensorielle

L'intégrale $\mathcal{I}$ est donnée sous la forme du flux d'une fonction tensorielle ; par exemple :

$$\underline{\underline{\mathcal{I}}} = \int_{\Sigma_t}\underline{\underline{b}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}\Sigma_t\,. \tag{4.62}$$

En décomposant le tenseur $\underline{\underline{b}}(\underline{x},t)$ on aura :

$$\underline{\underline{\mathcal{I}}} = \underline{e}_i\otimes\int_{\Sigma_t}b^{ij}(\underline{x},t)\,\underline{e}_j\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}\Sigma_t\,.$$

La dérivée particulaire de chacune des intégrales (indice i) se calcule comme ci-dessus et l'on obtient :

$$\dot{\underline{\underline{\mathcal{I}}}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma_t}\underline{\underline{b}}\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}\Sigma_t = \int_{\Sigma_t}(\frac{\partial\underline{\underline{b}}}{\partial t} + \underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}}}}\,\underline{b}\,.\,\underline{U} - \underline{\underline{b}}\,.\,{}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}} + \underline{\underline{b}}\,\mathrm{div}\,\underline{U})\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}\Sigma_t \tag{4.63}$$

Remarque

La même remarque qu'au paragraphe (4.5) concernant le calcul de la dérivée $(\dfrac{\delta\mathcal{I}}{\delta t})_{\underline{u}}$ en substituant à $\underline{U}$ dans (4.60,. . ., 4.63) un champ continu, continûment différentiable quelconque défini sur Σ_t, vaut également ici.

5 Conservation de la masse

5.1 Équation de continuité

La conservation de la masse de tout système matériel au cours des transformations qu'il subit est un principe fondamental de la mécanique classique.

(14) L'explicitation de ce raisonnement en description lagrangienne est sans surprise. Comme au paragraphe 4.5, c'est la forme particulière de l'intégrale de surface considérée (flux d'une quantité) qui permet de reconnaître le vecteur-aire élémentaire comme élément d'intégration.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La notion de milieu ***continu*** tridimensionnel implique que la masse d'un système matériel occupant un volume Ω_t dans la configuration κ_t s'obtient comme l'intégrale d'une densité volumique finie, appelée ***masse volumique*** dans la configuration κ_t :

$$\mathcal{M} = m(\Omega_t, t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t)\, \mathrm{d}\Omega_t \ . \tag{5.1}$$

$\rho(\underline{x}, t)$ joue dans cette intégrale le rôle de $b(\underline{x}, t)$ dans la formule (4.10). L'homologue de $B(\underline{X}, t)$ définie par la formule (4.13) est alors $P(\underline{X}, t)$ obtenue par :

$$P(\underline{X}, t) = \rho\big(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t\big) \tag{5.2}$$

en sorte que :

$$\mathcal{M} = m(\Omega_t, t) = M(\Omega_0, t) = \int_{\Omega_0} P(\underline{X}, t) J(\underline{X}, t) \mathrm{d}\Omega_0 \ . \tag{5.3}$$

Le principe de la conservation de la masse implique que pour ***tout*** système matériel la dérivée particulaire des intégrales (5.1) ou (5.3) soit nulle.

Cas où ρ et U sont continues et continûment différentiables

La conservation de la masse s'exprime alors, conformément aux résultats du paragraphe 4.4, par :

$$\forall \Omega_t \ , \ \dot{\mathcal{M}} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \int_{\Omega_t} \Big(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \rho \underline{U}\Big) \mathrm{d}\Omega_t = 0 \tag{5.4}$$

d'où, compte tenu de ce que Ω_t est arbitraire :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \rho \underline{U} = 0} \tag{5.5}$$

et les formules équivalentes :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\, \mathrm{div}\ \underline{U} = 0} \tag{5.6}$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\underline{\mathrm{grad}}\ \rho)\ .\ \underline{U} + \rho\, \mathrm{div}\ \underline{U} = 0 \ . \tag{5.7}$$

Chacune de ces équations, qui traduit la conservation de la masse, est aussi appelée ***équation de continuité***.

On remarque que la nullité de la dérivée particulaire $\dot{\mathcal{M}}$, signifie que l'intégrale (5.3) ne dépend pas du temps t, autrement dit que $P(\underline{X}, t) J(\underline{X}, t)$, qui joue le rôle de

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

$B_0(\underline{X},t)$ dans (4.3), est indépendant de t et est donc égal à la masse volumique $\rho_0(\underline{X})$ au point courant M_0 à l'instant $t=0$ quand le système occupe la configuration κ_0 :

$$P(\underline{X},t)J(\underline{X},t)=\rho_0(\underline{X})\ . \tag{5.8}$$

C'est l'équation de continuité en description lagrangienne.

On notera ainsi :

$$\mathrm{d}m=\rho_0(\underline{X})\,\mathrm{d}\Omega_0=\rho(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t \tag{5.9}$$

la masse du même volume ***matériel*** élémentaire.

On peut aussi écrire l'équation (5.8) sous la forme :

$$\rho(\underline{x},t)=\rho_0(\underline{X})/J(\underline{X},t)\ . \tag{5.10}$$

Cas des ondes de choc : ρ et $\underline{U}$ continues et continûment différentiables par morceaux

La conservation de la masse s'exprime alors à partir de la formule (4.36) :

$$\forall\Omega_t\ ,\ \dot{\mathcal{M}}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\int_{\Omega_t}(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\ \rho\underline{U})\,\mathrm{d}\Omega_t+\int_{\Sigma_t}[\![\,\rho(\underline{U}-\underline{W})\,]\!]\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}\Sigma_t\ . \tag{5.11}$$

En exploitant le caractère arbitraire de Ω_t on en déduit, outre l'équation (5.5), ou (5.6), valable hors des surfaces de discontinuité Σ_t, l'équation (5.12) à satisfaire sur Σ_t :

$$[\![\,\rho(\underline{U}-\underline{W})\,]\!]\,.\,\underline{n}=0\quad\text{sur }\Sigma_t \tag{5.12}$$

qui signifie que ***le débit en masse de matière à travers la surface géométrique Σ_t se conserve.***

Cette formule montre aussi qu'un saut de vitesse $[\![\,\underline{U}\,]\!]$ au franchissement de Σ_t, s'il n'est pas tangentiel à Σ_t, implique un saut $[\![\,\rho\,]\!]$ non nul de la masse volumique et inversement. On est alors en présence d'une ***onde de choc***[(15)].

5.2 Forme intégrale

En utilisant la formule (4.26), ou (4.34) pour inclure l'éventualité d'ondes de choc, la conservation de la masse s'écrit aussi :

$$\forall\Omega_t\ ,\ \dot{\mathcal{M}}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\int_{\Omega_t}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega_t-\int_{\Sigma_t}[\![\,\rho\,]\!]\,W\,\mathrm{d}\Sigma_t+\int_{\partial\Omega_t}\rho\underline{U}\,.\,\underline{\mathrm{d}a}=0\ , \tag{5.13}$$

(15) On rappelle (cf. § 4.4) que pour respecter l'hypothèse de continuité ($\underline{\phi}$ continue sur Ω_0 et par rapport au temps), une surface de discontinuité de vitesse ($[\![\,\underline{U}\,]\!]\neq 0$) ne peut être stationnaire par rapport à la matière : $(\underline{U}_1-\underline{W})\,.\,\underline{n}\neq 0$, $(\underline{U}_2-\underline{W})\,.\,\underline{n}\neq 0$; ceci implique que ρ_1 et ρ_2 ne sont ni nuls ni infinis dans (5.12). Plus généralement, si l'on se place dans le cadre de l'hypothèse plus faible « $\underline{\phi}$ continue et continûment différentiable, ***par morceaux*** » (cf. chapitre I, § 3.3), les surfaces de discontinuité de $\underline{\phi}$ sont nécessairement stationnaires par rapport à la matière, car leur propagation induirait au passage, pour les particules concernées, des vitesses en « δ » (Dirac). Une discontinuité de vitesse $[\![\,\underline{U}\,]\!]$ stationnaire est alors possible au franchissement d'une telle surface : elle est nécessairement tangentielle ; l'équation (5.12) est trivialement vérifiée.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

qui met en évidence le terme de convection : ***flux de masse sortant à travers*** $\partial\Omega_t$.

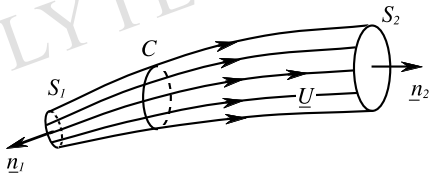


Figure 7 – Tube de courant

Il est souvent utile en mécanique des fluides d'appliquer cette formule à des volumes Ω_t de forme particulière. Ces volumes, appelés ***tubes de courant*** (figure 7), sont limités latéralement par les lignes de courant à l'instant t s'appuyant sur une courbe fermée C, et aux extrémités par deux sections S_1 et S_2.
On obtient alors :

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}\Omega_t - \int_{\Sigma_t} [\![\,\rho\,]\!]\, W\,\mathrm{d}\Sigma_t + \int_{S_1} \rho\,\underline{U}\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}a + \int_{S_2} \rho\,\underline{U}\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}a = 0\,. \tag{5.14}$$

Si l'on s'intéresse par exemple à un écoulement de fluide incompressible homogène, ou à un écoulement stationnaire de fluide quelconque, les deux premiers termes de l'équation (5.14) sont nuls. Considérant alors un ***tube de courant infiniment fin*** limité par des sections droites élémentaires, S_1 à l'amont et S_2 à l'aval, la formule (5.14) signifie, compte tenu des orientations opposées des normales sur S_1 et S_2, que :

$$\rho_1 U_1 S_1 = \rho_2 U_2 S_2 \tag{5.15}$$

(où U désigne le module de la vitesse $\underline{U}$) : il y a alors conservation du débit de masse le long d'une ligne de courant.

5.3 Dérivée particulaire de l'intégrale d'une densité massique en description eulérienne

On considère une intégrale de volume $\mathcal{I}$ telle que (4.10) définie maintenant par une ***densité massique*** et non plus volumique, c'est-à-dire que l'on a, avec (5.9) :

$$\mathcal{I} = i(\Omega_t, t) = \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t)\,\mathrm{d}m\,. \tag{5.16}$$

On vérifie alors sans difficulté, par exemple en passant en représentation lagrangienne, que $\dot{\mathcal{I}}$ s'exprime sous la forme :

$$\boxed{\dot{\mathcal{I}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t} b\,\mathrm{d}m = \int_{\Omega_t} \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}m} \quad (16) \tag{5.17}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Cette formule, valable quelle que soit la nature (scalaire, vectorielle, tensorielle) de la grandeur $\mathcal{B}$, est particulièrement commode ; aussi cherchera-t-on, chaque fois que cela sera possible lorsque l'on devra calculer la dérivée particulaire d'une intégrale de volume, à exprimer cette dernière au moyen de la mesure $\mathrm{d}m$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

(16) Par dérivation formelle sous le signe « somme » :

$$\dot{\mathcal{I}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t} b\,\mathrm{d}m = \int_{\Omega_t} \widehat{\dot{b\,\mathrm{d}m}} = \int_{\Omega_t} \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}m \quad \text{puisque} \quad \widehat{\dot{\mathrm{d}m}} = 0\ .$$

Récapitulatif des formules essentielles

• ***Description eulérienne :***

$$\underline{U} = \underline{U}(\underline{x}, t)$$

$$\widehat{\dot{\mathrm{d}\underline{M}}} = \underline{\underline{\text{grad}\, U}}(\underline{x}, t) \,.\, \mathrm{d}\underline{M}$$

taux de dilatation volumique

$$\widehat{\dot{\mathrm{d}\Omega}}_t = \text{ div } \underline{U}(\underline{x}, t)\, \mathrm{d}\Omega_t$$

taux de déformation :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\underline{M} \,.\, \mathrm{d}\underline{M}') = 2\, \mathrm{d}\underline{M} \,.\, \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) \,.\, \mathrm{d}\underline{M}'$$

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2}\big(\underline{\underline{\text{grad}\, U}}(\underline{x}, t) + {}^t\underline{\underline{\text{grad}\, U}}(\underline{x}, t)\big)$$

$$\frac{\widehat{\dot{\mathrm{d}s}}}{\mathrm{d}s} = d_{11}(\underline{x}, t)$$

$$\dot{\theta} = 2\, d_{12}(\underline{x}, t)$$

taux de rotation :

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2}\big(\underline{\underline{\text{grad}\, U}}(\underline{x}, t) - {}^t\underline{\underline{\text{grad}\, U}}(\underline{x}, t)\big)$$

tourbillon :

$$\underline{\Omega}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2}\underline{\text{rot}}\, \underline{U}(\underline{x}, t)$$

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) \,.\, \mathrm{d}\underline{M} = \underline{\Omega}(\underline{x}, t) \wedge \mathrm{d}\underline{M} \;,\; \forall\, \mathrm{d}\underline{M}$$

compatibilité d'un champ de taux de déformation :

$$d_{ij,k\ell} + d_{k\ell,ij} - d_{ik,j\ell} - d_{j\ell,ik} = 0 \qquad i, j, k, \ell = 1, 2, 3$$

• ***Taux de déformation eulérien et lagrangien :***

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) = {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\underline{\dot{e}}}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) \;,\; \underline{x} = \underline{\phi}\,(\underline{X}, t)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

• ***Dérivées particulaires en représentation eulérienne :***
($\mathcal{B}$: grandeur tensorielle d'ordre quelconque)

- $\mathcal{B} = b(\underline{x}, t)$ $\qquad \dot{\mathcal{B}} = \dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial b}{\partial t} + \mathrm{grad}\ b \,.\, \underline{U}$

- $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t)\, \mathrm{d}\Omega_t$ $\qquad \dot{\mathcal{I}} = \displaystyle\int_{\Omega_t} (\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} + b\ \mathrm{div}\ \underline{U})\, \mathrm{d}\Omega_t$

  $\dot{\mathcal{I}} = \displaystyle\int_{\Omega_t} \frac{\partial b}{\partial t}\, \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} (b \otimes \underline{U}) \,.\, \underline{\mathrm{d}a} = \int_{\Omega_t} (\frac{\partial b}{\partial t} + \ \mathrm{div}\ (b \otimes \underline{U}))\, \mathrm{d}\Omega_t$

- $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t)\, \mathrm{d}\Omega_t$, b et/ou $\underline{U}$ discontinues sur Σ_t

  $\dot{\mathcal{I}} = \displaystyle\int_{\Omega_t} \frac{\partial b}{\partial t}\, \mathrm{d}\Omega_t - \int_{\Sigma_t} [\![\, b \,]\!]\, W\, \mathrm{d}\Sigma_t + \int_{\partial\Omega_t} (b \otimes \underline{U}) \,.\, \underline{\mathrm{d}a}$

  $\dot{\mathcal{I}} = \displaystyle\int_{\Omega_t} (\frac{\partial b}{\partial t} + \ \mathrm{div}\ (b \otimes \underline{U}))\, \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_t} [\![\, b \otimes (\underline{U} - \underline{W}) \,]\!] \,.\, \underline{n}\, \mathrm{d}\Sigma_t$

- $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{\Sigma_t} b(\underline{x}, t) \,.\, \underline{\mathrm{d}a}$ $\qquad \dot{\mathcal{I}} = \displaystyle\int_{\Sigma_t} (\dot{\mathcal{B}} + b\ \mathrm{div}\ \underline{U} - b \,.\, \underline{\underline{{}^t\mathrm{grad}\ U}}) \,.\, \underline{\mathrm{d}a}$

- $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{L_t} b(\underline{x}, t) \,.\, \underline{\tau}(\underline{x})\, \mathrm{d}L_t$ $\qquad \dot{\mathcal{I}} = \displaystyle\int_{L_t} (\dot{\mathcal{B}} + b \,.\, \underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}}) \,.\, \underline{\tau}\, \mathrm{d}L_t$

• ***Conservation de la masse, équation de continuité***

- $\mathrm{d}m = \rho(\underline{x}, t)\, \mathrm{d}\Omega_t = \rho_0(\underline{X})\, \mathrm{d}\Omega_0$

  $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\ \mathrm{div}\ \underline{U} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \ \mathrm{div}\ \rho\underline{U} = 0$

  $[\![\, \rho(\underline{U} - \underline{W}) \,]\!] \,.\, \underline{n} = 0 \quad \mathrm{sur}\ \Sigma_t$

  $\displaystyle\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, \mathrm{d}\Omega_t - \int_{\Sigma_t} [\![\, \rho \,]\!] W\, \mathrm{d}\Sigma_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho\underline{U} \,.\, \underline{\mathrm{d}a} = 0$

- $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t)\, \mathrm{d}m$ $\qquad \dot{\mathcal{I}} = \displaystyle\int_{\Omega_t} \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}m$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Formules explicites dans les systèmes de coordonnées usuelles

(cf. Annexe II)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- ***Coordonnées cartésiennes orthonormées***

$$\underline{U} = U_x\,\underline{e}_x + U_y\,\underline{e}_y + U_z\,\underline{e}_z$$

$$\underline{\underline{\operatorname{grad} U}} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\,\underline{e}_i \otimes e_j$$

$$\underline{\underline{d}} = d_{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \qquad d_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\Big)$$

$$\operatorname{div} \underline{U} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

$$\dot{\mathcal{B}} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x_i} U_i \quad (\mathcal{B} \text{ scalaire ou tensorielle d'ordre quelconque})$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- ***Coordonnées cylindriques***

$$\underline{U} = U_r\,\underline{e}_r + U_\theta\,\underline{e}_\theta + U_z\,\underline{e}_z$$

$\underline{\underline{\operatorname{grad} U}}$ est donné dans l'annexe II

$$d_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r} \quad d_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \quad d_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

$$d_{r\theta} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial \theta}\Big)$$

$$d_{\theta z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial z}\Big) \quad d_{zr} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r}\Big)$$

$$\operatorname{div} \underline{U} = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

$$\dot{\mathcal{B}} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial r} U_r + \frac{\partial b}{\partial \theta}\frac{U_\theta}{r} + \frac{\partial b}{\partial z} U_z \quad (\mathcal{B} \text{ scalaire})$$

$$\left.\begin{aligned} &\underline{\mathcal{B}} = b_r\,\underline{e}_r + b_\theta\,\underline{e}_\theta + b_z\,\underline{e}_z \\ &\dot{\underline{\mathcal{B}}} = \frac{\mathrm{d}\underline{b}}{\mathrm{d}t} = \Big(\frac{\mathrm{d}b_r}{\mathrm{d}t} - \frac{b_\theta U_\theta}{r}\Big)\,\underline{e}_r + \Big(\frac{\mathrm{d}b_\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{b_r U_\theta}{r}\Big)\,\underline{e}_\theta + \frac{\mathrm{d}b_z}{\mathrm{d}t}\,\underline{e}_z \\ &\underline{a} = \frac{\mathrm{d}\underline{U}}{\mathrm{d}t} = \Big(\frac{\mathrm{d}U_r}{\mathrm{d}t} - \frac{U_\theta^2}{r}\Big)\,\underline{e}_r + \Big(\frac{\mathrm{d}U_\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{U_r U_\theta}{r}\Big)\,\underline{e}_\theta + \frac{\mathrm{d}U_z}{\mathrm{d}t}\,\underline{e}_z \end{aligned}\right\} (\mathcal{B} \text{ vectorielle})$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- ***Coordonnées sphériques***

$\underline{U} = U_r\,\underline{e}_r + U_\theta\,\underline{e}_\theta + U_\varphi\,\underline{e}_\varphi$

$\underline{\underline{\text{grad}\,U}}$ est donné dans l'annexe II

$$d_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r} \quad d_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{U_\theta}{r}\cot\theta + \frac{U_r}{r}$$

$$d_{r\theta} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r}\Big)$$

$$d_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial U_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\cot\theta}{r}U_\varphi\Big)$$

$$d_{\varphi r} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r}\Big)$$

$$\text{div}\,\underline{U} = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{U_\theta}{r}\cot\theta + 2\frac{U_r}{r}$$

$$\dot{\mathcal{B}} = \frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial r}U_r + \frac{\partial b}{\partial \theta}\frac{U_\theta}{r} + \frac{\partial b}{\partial \varphi}\frac{U_\varphi}{r\sin\theta} \quad (\mathcal{B}\text{ scalaire})$$

$$\underline{\mathcal{B}} = b_r\,\underline{e}_r + b_\theta\,\underline{e}_\theta + b_\varphi\underline{e}_\varphi \quad (\underline{\mathcal{B}}\text{ vectorielle})$$

$$\dot{\underline{\mathcal{B}}} = \frac{\mathrm{d}\underline{b}}{\mathrm{d}t} = \Big(\frac{\mathrm{d}b_r}{\mathrm{d}t} - \frac{b_\theta U_\theta + b_\varphi U_\varphi}{r}\Big)\,\underline{e}_r + \Big(\frac{\mathrm{d}b_\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{b_r U_\theta}{r} - \cot\theta\frac{b_\varphi U_\varphi}{r}\Big)\,\underline{e}_\theta + \Big(\frac{\mathrm{d}b_\varphi}{\mathrm{d}t} + \cot\theta\frac{b_\theta U_\varphi}{r} + \frac{b_r U_\varphi}{r}\Big)\,\underline{e}_\varphi$$

$$\underline{a} = \frac{\mathrm{d}\underline{U}}{\mathrm{d}t} = \Big(\frac{\mathrm{d}U_r}{\mathrm{d}t} - \frac{U_\theta^2 + U_\varphi^2}{r}\Big)\,\underline{e}_r + \Big(\frac{\mathrm{d}U_\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{U_r U_\theta - U_\varphi^2\cot\theta}{r}\Big)\,\underline{e}_\theta + \Big(\frac{\mathrm{d}U_\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{U_r U_\varphi + U_\theta U_\varphi\cot\theta}{r}\Big)\,\underline{e}_\varphi$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Exercices

III.1 - $R = (O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ est un repère cartésien orthonormé dans le référentiel $\mathcal{R}$. On considère le mouvement défini par :

$$U_1(\underline{x}, t) = \varphi_1(x_2, t)\ ,\ U_2(\underline{x}, t) = \varphi_2(x_1, t)\ ,\ U_3(\underline{x}, t) = 0\ ,$$

où φ_1 et φ_2 sont des fonctions continues et continûment différentiables. Calculer le tenseur taux de déformation ; déterminer ses directions principales et ses valeurs principales. Calculer le taux de dilatation volumique dans ce mouvement. Déterminer le tenseur taux de rotation et le vecteur tourbillon ; à quelle condition le mouvement étudié est-il irrotationnel ?

Éléments de réponse :

$\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$;

directions principales : bissectrices de $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, et $\underline{e}_3$;

valeurs principales : $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)$, $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)$, 0.

$\dot{\widehat{\mathrm{d}\Omega_t}}/\mathrm{d}\Omega_t = \operatorname{div} \underline{U}(\underline{x}, t) = 0$.

$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$, $\underline{\Omega}(\underline{x}, t) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right)\underline{e}_3$.

Mouvement irrotationnel : $\underline{\Omega}(\underline{x}, t) \equiv 0$ si et seulement si
$\varphi_1(x_2, t) = \alpha(t)x_2 + a_1(t)$, $\varphi_2(x_1, t) = \alpha(t)x_1 + a_2(t)$.

Commentaire.
À rapprocher de Ex. II.3.

III.2 - Source ponctuelle. Dans un système de coordonnées cylindriques (O, r, θ, z) on considère le champ de vitesse défini pour $r \neq 0$, par :

$$U_r(\underline{x}, t) = \beta(t)/r\ ,\ U_\theta(\underline{x}, t) = 0\ ,\ U_z(\underline{x}, t) = 0\ .$$

Déterminer le tenseur taux de déformation et calculer le taux de déformation volumique. Calculer le vecteur tourbillon.

Éléments de réponse :

$\underline{\underline{\operatorname{grad} \underline{U}}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) = -\dfrac{\beta(t)}{r^2}(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r - \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta)$
$\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z$ sont les directions principales de $\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)$.
$\dot{\widehat{\mathrm{d}\Omega_t}}/\mathrm{d}\Omega_t = \operatorname{tr} \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) = 0$
$\underline{\Omega}(\underline{x}, t) = 0$: mouvement irrotationnel.

Commentaire.
Le mouvement plan défini pour $r \neq 0$ par $U_r(\underline{x}, t) = \beta(t)/r$ fluides incompressibles : mouvement induit par une source (ou un puits) ponctuel en O de débit $2\pi\beta(t)$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

III.3 - Tourbillon ponctuel. On considère le mouvement plan défini en coordonnées cylindriques, pour $r \neq 0$, par :

$$\underline{U}(\underline{x},t) = \underline{U}(r,\theta,z,t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\,\underline{e}_\theta \text{ où } \Gamma \text{ est une constante réelle .}$$

Calculer le tenseur taux de déformation $\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)$, le taux de dilatation volumique, le tenseur taux de rotation et le vecteur tourbillon $\underline{\Omega}(\underline{x},t)$, la circulation du vecteur vitesse $\underline{U}(\underline{x},t)$ sur une courbe fermée entourant Oz.

Éléments de réponse :

• Le mouvement est stationnaire

$\underline{\underline{\text{grad}\ U}}(\underline{x}) = -\dfrac{\Gamma}{2\pi r^2}\,(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r) \equiv \underline{\underline{d}}(\underline{x})$;

directions principales de $\underline{\underline{d}}(\underline{x})$: bissectrices de $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$ et $\underline{e}_z$;

valeurs principales : $-\dfrac{\Gamma}{2\pi r^2}$, $\dfrac{\Gamma}{2\pi r^2}$, 0.

$\dot{\widehat{\mathrm{d}\Omega_t}}/\mathrm{d}\Omega_t = \mathrm{tr}\ \underline{\underline{d}}(\underline{x}) = 0.$

• $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}) = 0$, $\underline{\Omega}(\underline{x}) = 0$:

L étant une courbe fermée entourant Oz : $\displaystyle\oint_L \underline{U}(\underline{x})\,.\,\underline{\tau}(\underline{x})\,\mathrm{d}L = \Gamma.$

Commentaire.

Il s'agit de l'aspect cinématique du mouvement étudié dans Ex. II.6. Les résultats obtenus ici rejoignent ceux obtenus dans Ex. II.6 pour la transformation infinitésimale (cf. § 4.4) : notamment $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}) = 0$ correspond à $\beta(R,t) = 0$ démontré alors dans ce cas.

$\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{U}(\underline{x}) = 2\,\underline{\Omega}(\underline{x})$ est nul et la circulation de $\underline{U}(\underline{x})$ sur toute courbe entourant l'axe Oz est égale à Γ : ceci n'est pas contradictoire avec la formule de Stokes puisque l'axe $Oz(r=0)$ ne fait pas partie du domaine de définition du mouvement. On peut l'y inclure en considérant que $\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{U}$ est, en tout point de Oz, une mesure de Dirac ponctuelle d'intensité Γ dirigée selon $\underline{e}_z$: d'où la terminologie de « tourbillon ponctuel ».

III.4 - Mouvements irrotationnels sans variation de volume. Dans un référentiel $\mathcal{R}$ on considère un domaine $\mathcal{D}_t$ simplement connexe dans la configuration κ_t. Donner la forme générale des champs de vitesse $\underline{U}$ pour lesquels le vecteur tourbillon est nul en tout point de $\mathcal{D}_t$ à l'instant t. À quelle condition ces mouvements irrotationnels correspondent-ils à un taux de dilatation volumique nul ?

Éléments de réponse :

• $\underline{U}(\underline{x},t) = \underline{\text{grad}}\ \varphi(\underline{x},t)$,

φ, deux fois continûment différentiable quelconque, est appelée « potentiel » des vitesses.

• $\Delta\varphi(\underline{x},t) = 0.$

(Gradient et laplacien par rapport aux variables d'espace).

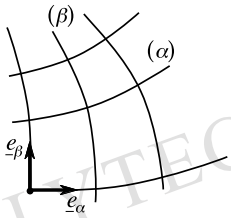
III.5 - Équations de Geiringer. $R = (O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ étant un repère cartésien orthonormé dans le référentiel $\mathcal{R}$, on considère un domaine $\mathcal{D}$ du plan $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$. On donne dans $\mathcal{D}$ deux familles de courbes continues et à tangente continue, dites familles α et β, orthogonales entre elles, telles qu'en tout point de $\mathcal{D}$ passe une courbe et une seule de chaque famille ; on désigne par $\underline{e}_\alpha$ et $\underline{e}_\beta$ les vecteurs normés tangents à ces courbes au point courant, orientés de façon que $(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta) = +\pi/2$, et par R_α et R_β les rayons de courbure algébriques correspondants (cf. annexe I, § 6.4). On

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

considère les champs de vitesse en déformation plane parallèlement au plan $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$, que l'on définit par la donnée de leurs composantes en chaque point de $\mathcal{D}$ dans la base $(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta, \underline{e}_z)$: $U_\alpha(\underline{x}, t), U_\beta(\underline{x}, t)$ indépendants de $z, U_z(\underline{x}, t) = 0$. Donner les expressions de $\underline{\underline{\text{grad}}}\, \underline{U}(\underline{x}, t)$ et de $\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)$. Montrer que tout champ de vitesse en déformation plane ainsi défini, qui satisfait les équations différentielles

(1) $\mathrm{D}_{\underline{e}_\alpha} U_\alpha(\underline{x}, t) - U_\beta(\underline{x}, t)/R_\alpha(\underline{x}) = 0$ le long des lignes α ,
(2) $\mathrm{D}_{\underline{e}_\beta} U_\beta(\underline{x}, t) + U_\alpha(\underline{x}, t)/R_\beta(\underline{x}) = 0$ le long des lignes β ,

correspond à un taux de dilatation volumique nul ; déterminer alors les directions principales de $\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)$ et les valeurs principales correspondantes ; interpréter les lignes α et β. Étudier le cas particulier où les lignes α sont des droites issues de O et les lignes β les cercles de centre O : donner alors la forme générale des champs de vitesse satisfaisant (1) et (2) ; déterminer, parmi ces mouvements, ceux qui sont irrotationnels.



Éléments de réponse :

• On s'appuie sur la formule $\underline{\underline{\text{grad}}}\, \underline{U} \,.\, \underline{w} = \mathrm{D}_{\underline{w}} \underline{U}$ que l'on applique à $\underline{w} = \underline{e}_\alpha, \underline{w} = \underline{e}_\beta, \underline{w} = \underline{e}_z$, comme dans l'annexe I (§ 6.4).

Noter que $\mathrm{D}_{\underline{e}_\alpha}$ et $\mathrm{D}_{\underline{e}_\beta}$ s'écrivent aussi couramment $\dfrac{\partial}{\partial s_\alpha}$ et $\dfrac{\partial}{\partial s_\beta}$. On remarque que : $\mathrm{D}_{\underline{e}_\alpha} \underline{e}_\alpha = \underline{e}_\beta / R_\alpha$, $\mathrm{D}_{\underline{e}_\alpha} \underline{e}_\beta = -\underline{e}_\alpha / R_\alpha$, $\mathrm{D}_{\underline{e}_\beta} \underline{e}_\alpha = \underline{e}_\beta / R_\beta$, $\mathrm{D}_{\underline{e}_\beta} \underline{e}_\beta = -\underline{e}_\alpha / R_\beta$.

D'où :

$$\underline{\underline{\text{grad}}}\, \underline{U}(\underline{x}, t) = (\mathrm{D}_{\underline{e}_\alpha} U_\alpha - U_\beta / R_\alpha)\, \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha + (\mathrm{D}_{\underline{e}_\alpha} U_\beta + U_\alpha / R_\alpha)\, \underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_\alpha + (\mathrm{D}_{\underline{e}_\beta} U_\alpha - U_\beta / R_\beta)\, \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta + (\mathrm{D}_{\underline{e}_\beta} U_\beta + U_\alpha / R_\beta)\, \underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_\beta$$

$\text{div}\, \underline{U}(\underline{x}, t) = \mathrm{D}_{\underline{e}_\alpha} U_\alpha - U_\beta / R_\alpha + \mathrm{D}_{\underline{e}_\beta} U_\beta + U_\alpha / R_\beta$ est nulle si (1) et (2) sont satisfaites. Alors :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} (\mathrm{D}_{\underline{e}_\alpha} U_\beta + U_\alpha / R_\alpha + \mathrm{D}_{\underline{e}_\beta} U_\alpha - U_\beta / R_\beta)\, (\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta + \underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_\alpha) \,.$$

Les directions principales de $\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)$ sont les bissectrices de $(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta)$ et $\underline{e}_z$; les lignes α et β sont les enveloppes des directions pour lesquelles le taux de glissement est maximal.

• Dans le cas particulier indiqué on retrouve :

$$\underline{\underline{\text{grad}}}\, \underline{U} = \frac{\partial U_r}{\partial r}\, \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{\partial U_\theta}{\partial r}\, \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \Big(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r}\Big)\, \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \Big(\frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r}\Big)\, \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \,.$$

(1) et (2) imposent : $U_r = -\partial f(\theta, t)/\partial \theta \quad U_\theta = f(\theta, t) + g(r, t)$.

On a : $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) = \dfrac{1}{2} (g' + f''/r + (f + g)/r)\, (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r - \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta)$.

Mouvement irrotationnel si et seulement si :

$U_r(\underline{x}, t) = \alpha(t) \cos\theta + \beta(t) \sin\theta$, $U_\theta(\underline{x}, t) = -\alpha(t) \sin\theta + \beta(t) \cos\theta + \gamma(t)/r$.

Commentaire.

Cet exercice se rattache à la théorie de la plasticité en déformation plane pour les matériaux de Tresca ou de von Mises : les équations (1) et (2) sont les équations de Geiringer. Si le champ de vitesse est connu sur un arc de courbe (ni α ni β), les équations (1) et (2) permettent,

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

par intégration, de le calculer dans tout un domaine (lignes caractéristiques et domaine de détermination pour un système d'équations aux dérivées partielles hyperbolique linéaire). Dans le cas particulier, les deux premiers termes définissent un mouvement de translation uniforme $\underline{U}(\underline{x},t) = \alpha(t)\underline{e}_x + \beta(t)\underline{e}_y$ (solution banale), le troisième correspond au mouvement étudié dans Ex. III.3.

III.6 - Soit $\underline{v}$ un champ de vecteurs différentiable, défini à chaque instant t sur la configuration κ_t. On désigne par O un point fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$, par M le point courant dans un domaine $\mathcal{D}_t$ de volume Ω_t dans κ_t. Établir les formules :

$$\int_{\Omega_t} \rho\underline{\dot{v}}\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\underline{v})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} (\rho\underline{v})\,\underline{U}\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}a$$

$$\int_{\Omega_t} \underline{OM}\wedge\rho\underline{\dot{v}}\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_t} \underline{OM}\wedge\frac{\partial}{\partial t}(\rho\underline{v})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{OM}\wedge((\rho\underline{v})\underline{U}\,.\,\underline{n})\,\mathrm{d}a - \int_{\Omega_t} \underline{U}\wedge\rho\underline{v}\,\mathrm{d}\Omega_t\ .$$

Examiner le cas particulier où le champ $\underline{v}$ est le champ de vitesse $\underline{U}$.

Éléments de réponse :

On applique les formules de la dérivation particulaire aux intégrales

$\displaystyle\int_{\Omega_t} \rho\underline{v}\,\mathrm{d}\Omega_t$ et $\displaystyle\int_{\Omega_t} \underline{OM}\wedge\rho\underline{v}\,\mathrm{d}\Omega_t$.

Commentaire.

Dans le cas particulier, le résultat établi sera utilisé au chapitre IV section 7 : il indique que le torseur des quantités d'accélération est égal à la dérivée particulaire du torseur des quantités de mouvement, et il exprime cette dernière au moyen de densités volumique et surfacique.

III.7 - Théorème de Kelvin ; théorème de Helmholtz. On considère, dans un référentiel $\mathcal{R}$, un mouvement dont le champ des accélérations en représentation eulérienne dérive à chaque instant d'un potentiel uniforme. On désigne par L_t une courbe fermée dans la configuration κ_t, et par Γ la circulation du vecteur vitesse $\underline{U}(\underline{x},t)$ sur cette courbe L_t. On suppose que L_t ne rencontre aucune surface de discontinuité de vitesse. Démontrer que la dérivée particulaire de Γ est nulle. On désigne par Σ_t une portion de surface dans la configuration κ_t, supposée ne rencontrer aucune surface de discontinuité de la vitesse, et par ϕ le flux du vecteur tourbillon $\underline{\Omega}(\underline{x},t)$ à travers Σ_t : évaluer la dérivée particulaire de ϕ. On définit à chaque instant t, dans κ_t, les lignes-tourbillons : lignes enveloppes du champ des vecteurs tourbillons qui constituent une famille à deux paramètres ; on définit aussi les surfaces-tourbillons : surfaces engendrées par les lignes-tourbillons s'appuyant sur une courbe donnée arbitraire. Démontrer que les surfaces-tourbillons et les lignes-tourbillons sont des éléments matériels. Calculer la dérivée particulaire du vecteur $\underline{\Omega}(\underline{x},t)/\rho(\underline{x},t)$.

Éléments de réponse :

• $\dot{\Gamma} = \displaystyle\int_{L_t} (\underline{\dot{U}} + \underline{U}\,.\,\underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}})\,.\,\underline{\mathrm{d}M} = \int_{L_t} \underline{a}\,.\,\underline{\mathrm{d}M} + \int_{L_t} (\underline{\mathrm{grad}}\,(\frac{U^2}{2}))\,.\,\underline{\mathrm{d}M}$ d'après (4.52) ,

d'où $\dot{\Gamma} = 0$ sous les hypothèses indiquées.

L_t désignant la frontière de Σ_t on a $2\phi = \Gamma$ d'où : $2\dot{\phi} = \dot{\Gamma} = 0$.

• Les surfaces-tourbillons sont caractérisées par le fait que le long de toute courbe fermée, réductible à un point, tracée sur une surface-tourbillon, la circulation de la vitesse est nulle. Le transport convectif d'une surface-tourbillon à l'instant t conserve cette propriété puisque

$\dot{\Gamma} = 0$: la surface transportée demeure donc une surface-tourbillon. En considérant une ligne-tourbillon comme l'intersection de deux surfaces-tourbillons on démontre le résultat relatif aux lignes-tourbillons.

• On écrit que, pour un vecteur-aire quelconque $\underline{\mathrm{d}a}$:

$\dot{\widehat{\mathrm{d}\phi}} = \dot{\widehat{\underline{\Omega}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}a}}} = 0$;

en appliquant la formule (4.59) qui donne la dérivée particulaire du vecteur-aire on obtient :

$\dot{\underline{\Omega}} = -\underline{\Omega}\ \mathrm{div}\ \underline{U} + (\underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}})\,.\,\underline{\Omega}$

et, puisque $\mathrm{div}\ \underline{U} = -\dot{\rho}/\rho$, il vient : $\dot{\widehat{(\underline{\Omega}/\rho)}} = (\underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}})\,.\,(\underline{\Omega}/\rho)$.

Commentaire.

L'existence d'un potentiel des accélérations uniforme se démontre en mécanique des fluides lorsque les forces de masse dérivent elles-mêmes d'un potentiel uniforme et si le fluide considéré est « barotrope ». Le résultat établi, concernant la conservation de la circulation de la vitesse dans les conditions indiquées, est le théorème de Kelvin. Le caractère matériel des lignes et surfaces-tourbillons est l'objet du théorème de Helmholtz. Le dernier résultat établi montre que le vecteur $\underline{\Omega}(\underline{x},t)/\rho(\underline{x},t)$ subit un simple transport convectif, c'est-à-dire évolue comme le vecteur matériel $\underline{\mathrm{d}M}$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Chapitre IV

Les puissances virtuelles et la modélisation des efforts

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MOTS CLÉS

Système. Sous-systèmes.
Efforts extérieurs. Efforts intérieurs.
Quantités d'accélération.
Référentiel galiléen.
Loi fondamentale. Loi des actions mutuelles.
Dualisation. Principe des puissances virtuelles.
Vitesses virtuelles. Mouvement virtuel.
Mouvement virtuel rigidifiant.
Distributeurs. Torseurs.
Quantités de mouvement. Théorème d'Euler.
Théorème de l'énergie cinétique.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En bref...

La modélisation des efforts suppose, en préalable, la modélisation géométrique du système étudié et doit être cohérente avec elle. C'est ainsi que le concept de force (concentrée) est lié à celui de point matériel dont la position suffit à décrire l'état géométrique, et la vitesse le mouvement. Sur cet exemple il apparaît que la loi fondamentale de la dynamique est équivalente à une formulation mathématique dualisée qui exprime l'égalité du produit scalaire de cette force par un *vecteur quelconque* et du produit scalaire de la quantité d'accélération du point matériel par ce même vecteur : on dit qu'il y a égalité des puissances virtuelles de la force appliquée et de la quantité d'accélération dans toute vitesse virtuelle du point matériel (sections 1 et 2).

Cette idée est le fondement de l'approche par les *puissances virtuelles.*

L'exemple d'un système de points matériels met en évidence la notion de sous-systèmes d'un système donné et la distinction à établir entre efforts extérieurs et efforts intérieurs au système ou à un sous-système.

Les vitesses virtuelles de chacun des points matériels constitutifs du système (ou d'un sous-système) engendrent les mouvements virtuels de ce système (ou sous-système).

Les efforts extérieurs, intérieurs et les quantités d'accélération définissent pour le système ou le sous-système des formes linéaires sur l'espace vectoriel de ses mouvements virtuels appelées puissances virtuelles. La formulation dualisée de la loi fondamentale de la dynamique apparaît sur l'espace vectoriel des mouvements virtuels : la somme des puissances virtuelles des efforts extérieurs et des efforts intérieurs est égale à la puissance virtuelle des quantités d'accélération en repère galiléen, dans tout mouvement virtuel du système (ou du sous-système). La dualisation de la loi des actions mutuelles se réfère aux mouvements virtuels *rigidifiants* : la puissance virtuelle des efforts intérieurs au système (ou au sous-système) est nulle dans tout mouvement rigidifiant le système (ou le sous-système) (sections 1 et 2).

Ces deux énoncés « des puissances virtuelles » sont alors posés en *principe*. Ils constituent le fondement de la méthode des puissances virtuelles :

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

à partir de l'*intuition issue de l'expérience*,

- **cerner les concepts que l'on souhaite formaliser dans cette modélisation,**

sur cette base

- **définir la modélisation géométrique du système,**
- **définir l'espace vectoriel des mouvements virtuels, et les formes linéaires sur cet espace qui expriment les puissances virtuelles des efforts extérieurs, des efforts intérieurs et des quantités d'accélération,**

par application du principe des puissances virtuelles

- **affiner, si nécessaire, ces expressions pour assurer la cohérence du modèle,**
- **déduire la formulation, dans le cadre de la modélisation construite, de la loi des actions mutuelles et de la loi fondamentale de la dynamique** (sections 3 et 4).

Le rôle essentiel joué par les mouvements virtuels rigidifiants conduit à leur étude particulière. On introduit ainsi la notion de *distributeur*. Par dualité apparaît la notion de *torseur* (section 5).

On met alors en évidence des résultats généraux, valables pour toute modélisation mécaniquement cohérente, qui expriment la loi fondamentale de la dynamique et la loi des actions mutuelles en termes de torseurs (section 6).

Si l'on s'intéresse plus particulièrement aux milieux continus classiques, sans précisions supplémentaires sur la modélisation des efforts, la loi fondamentale de la dynamique prend aussi la forme des théorèmes de la quantité de mouvement en termes de torseurs, et conduit au théorème de l'énergie cinétique (section 7).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Principales notations

Notation	Signification	1ère formule
$\mathcal{R}$	référentiel galiléen	(1.1)
$\mathcal{S}$	système	(1.2)
$\mathcal{S}'$	sous-système de $\mathcal{S}$	(1.5)
$\underline{\hat{U}}$	vitesse virtuelle	(2.1)
$\mathcal{P}_{(e)}, \mathcal{P}'_{(e)}$	puissance virtuelle des efforts extérieurs pour $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$	(2.6)(2.8)
$\mathcal{P}_{(i)}, \mathcal{P}'_{(i)}$	puissance virtuelle des efforts intérieurs pour $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$	(2.6)(2.8)
$\mathcal{A}, \mathcal{A}'$	puissance virtuelle des quantités d'accélération pour $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$	(2.6)(2.8)
$\hat{\mathbf{U}}$	mouvement virtuel	(4.1)(4.2)
$\{\hat{\mathcal{D}}\}$	distributeur	(5.2)
$[\mathcal{F}]$	torseur	(5.7)
$[\mathcal{F}] \,.\, \{\hat{\mathcal{D}}\}$	produit de dualité « torseur-distributeur »	(5.8)
$[\mathcal{F}_e]$, $[\mathcal{F}'_e]$	torseur des efforts extérieurs à $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$	(6.1)
$[\mathcal{F}_i]$, $[\mathcal{F}'_i]$	torseur des efforts intérieurs à $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$	(6.1)
$[\mathcal{M}\mathfrak{A}]$, $[\mathcal{M}\mathfrak{A}']$	torseur des quantités d'accélération de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$	(6.1)
$[\mathcal{MU}]$, $[\mathcal{MU}']$	torseur des quantités de mouvement de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$	(7.6)
$K(\underline{U})$, $K'(\underline{U})$	énergie cinétique de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$	(7.25)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Problématique de la modélisation des efforts 143
1.1 Modélisation des efforts pour un système de points matériels 143
1.2 La méthode des puissances virtuelles 147
2 Dualisation et puissances virtuelles pour un système de points matériels 148
2.1 Système constitué d'un point matériel 148
2.2 Système de points matériels 148
2.3 Vitesses virtuelles, mouvements virtuels, puissances virtuelles 151
2.4 Énoncé des puissances virtuelles 153
2.5 Modélisation des efforts et mouvements virtuels 153
3 Méthode des puissances virtuelles pour un système de points matériels 154
3.1 Présentation de la méthode des puissances virtuelles . . . 154
3.2 Exemple de mise en œuvre 154
3.3 Commentaires sur cette application de la méthode des puissances virtuelles 158
3.4 Compatibilité géométrique des $\hat{\delta}_{ij}$. Systèmes de barres articulées 158
4 La méthode des puissances virtuelles 160
4.1 Présentation générale de la méthode 160
4.2 Récapitulatif de la méthode des puissances virtuelles . . . 162
4.3 Commentaires 163
4.4 Changement de référentiel. Objectivité 163
5 Mouvements rigidifiants ; distributeurs, torseurs 164
5.1 Distributeurs 164
5.2 Torseurs 165
5.3 Restriction d'une forme linéaire définie sur un espace de mouvements virtuels aux mouvements virtuels rigidifiants 166
5.4 Torseur d'un système de forces 166
5.5 Champs de distributeurs et de torseurs ; dérivation 167
5.6 Distributeurs et torseurs tensoriels 169
6 Résultats généraux 170
6.1 Définition du système et des mouvements considérés . . . 170
6.2 Puissances virtuelles 170
6.3 Loi des actions mutuelles et loi fondamentale de la dynamique 171
6.4 Commentaires 171
7 Théorèmes de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique 172
7.1 Définition du système et des mouvements considérés . . . 172
7.2 Torseur des quantités d'accélération ; torseur des quantités de mouvement 173
7.3 Conservation de la quantité de mouvement 174
7.4 Théorème d'Euler 175

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

7.5 Théorème de l'énergie cinétique 177
7.6 Champ de vitesse réel discontinu : ondes de choc 178
8 Et maintenant. 182
Récapitulatif des formules essentielles 183
Exercices 185

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Les puissances virtuelles et la modélisation des efforts

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Problématique de la modélisation des efforts

Les trois chapitres précédents ont été consacrés à la modélisation géométrique du ***milieu continu déformable*** à partir de l'intuition expérimentale. Afin d'en établir la modélisation mécanique il est maintenant nécessaire d'introduire, pour le milieu continu, le concept ***d'efforts*** et d'établir les lois qui régissent le mouvement et l'équilibre d'un système dans cette modélisation.

1.1 Modélisation des efforts pour un système de points matériels

Point matériel

Pour la mécanique du point matériel de masse m, la ***loi fondamentale de la dynamique*** postule l'existence d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ dans lequel on énonce :

$$\text{en référentiel galiléen } \mathcal{R}\,, \quad \underline{F} = m\underline{a}\,. \tag{1.1}$$

La modélisation des efforts est fondée sur la notion de ***force*** représentée par le vecteur $\underline{F}$ de $\mathbb{R}^3$, tandis que $\underline{a}$ est l'accélération de la masse ponctuelle considérée dans le référentiel $\mathcal{R}$. Le produit $m\underline{a}$ est la quantité d'accélération de la masse m.

Système de points matériels

On considère maintenant un ensemble de n points matériels dans sa configuration κ_t à l'instant t. Pour chaque point matériel (j) de masse m_j l'effort à introduire au premier membre de la loi fondamentale (1.1) résulte de la ***composition vectorielle*** de la force $\underline{F}_j$ exercée sur (j) par le monde « extérieur » à l'ensemble des n points matériels considérés, et des efforts exercés sur (j) par les autres points matériels (i) de l'ensemble $(i \neq j, i = 1, 2, \ldots, n)$.

Ces efforts exercés par les points matériels du système les uns sur les autres sont supposés découplés, c'est-à-dire que la présence du point matériel (k) n'a aucun effet sur les efforts exercés par les autres points matériels (i) sur le point matériel (j). Il s'agit donc d'interactions binaires et l'on désigne par $\underline{F}_{ij}$ la force exercée par le point matériel (i) sur le point matériel (j), $(i \neq j, i = 1, 2, \ldots, n)$.

L'ensemble des n points matériels ci-dessus constitue un système mécanique $\mathcal{S}$ pour lequel on vient de procéder à une modélisation des efforts qui met en évidence les ***efforts extérieurs*** $\underline{F}_j$ et les ***efforts intérieurs*** $\underline{F}_{ij}$ (figure 1).

Pour ce système les lois de la mécanique s'expriment par les ***lois de Newton*** de la façon suivante.

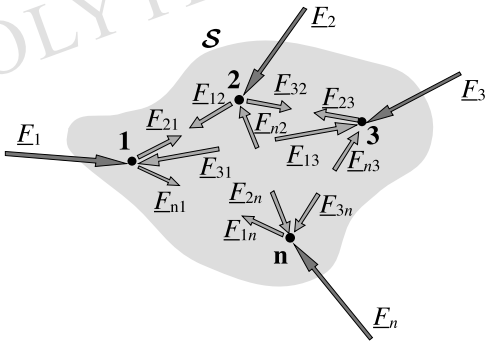


Figure 1 – Système de masses ponctuelles : efforts extérieurs et efforts intérieurs

D'une part, l'écriture de la ***loi fondamentale de la dynamique*** (1.1) pour chaque point matériel du système $\mathcal{S}$:

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{cases} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R} \ , \\ \forall (j) \in \mathcal{S} \ , \ \underline{F}_j + \sum\limits_{\substack{(i)\in\mathcal{S} \\ i\neq j}} \underline{F}_{ij} = m_j \underline{a}_j \ ^{(1)} \end{cases}$$

où l'on reconnaît la structure

(1.3)

Force extérieure sur (j)	+	Forces intérieures sur (j)	=	Quantité d'accélération de (j)

D'autre part, l'écriture du ***principe de l'action et de la réaction*** qui régit les forces d'interaction pour chaque couple de points matériels et exprime que la force exercée par (i) sur (j) forme avec la force exercée par (j) sur (i) un système de forces équivalent à zéro :

$$\text{(1.4)} \qquad \begin{cases} \forall (i) \in \mathcal{S} \ , \ \forall (j) \neq (i) \in \mathcal{S} \ , \\ \underline{F}_{ij} + \underline{F}_{ji} = 0 \\ \underline{OM}_i \wedge \underline{F}_{ji} + \underline{OM}_j \wedge \underline{F}_{ij} = 0 \ . \end{cases}$$

où O désigne un point géométrique arbitraire dans κ_t .

(1) Dans ce chapitre la convention de sommation sur les indices répétés ***ne sera pas utilisée*** : toutes les sommations seront explicitées.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

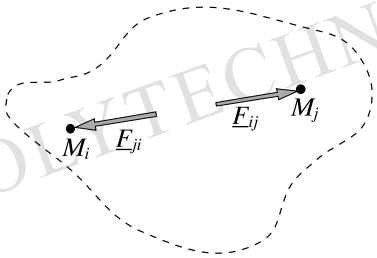


Figure 2 – Système de masses ponctuelles : principe de l'action et de la réaction

Sous-système

Dans une ***expérience de pensée***, on considère une partie du système précédent définissant ainsi un sous-système $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$. Pour ce sous-système la distinction entre efforts extérieurs et intérieurs se réfère à $\mathcal{S}'$ et non plus à $\mathcal{S}$.

Compte tenu de la description des efforts d'interaction entre les points matériels du système $\mathcal{S}$, la ***force extérieure*** $\underline{F}'_j$ sur un point matériel (j) de $\mathcal{S}'$ est déterminée de façon évidente à partir des efforts $\underline{F}_j$ et $\underline{F}_{ij}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \ , \ \forall (j) \in \mathcal{S}' \ , \\ \underline{F}'_j = \underline{F}_j + \sum\limits_{(i) \notin \mathcal{S}'} \underline{F}_{ij} \ . \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Les efforts intérieurs sur le point matériel (j) de $\mathcal{S}'$ se réduisent à ceux exercés par les autres points matériels de $\mathcal{S}'$: $\underline{F}_{ij}$, $(i) \in \mathcal{S}'$, $i \neq j$.

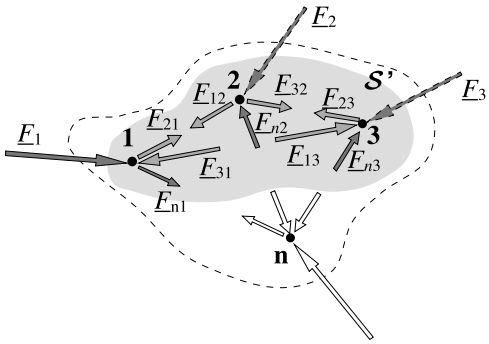


Figure 3 – Sous-système $\mathcal{S}'$: efforts extérieurs et efforts intérieurs

Il en résulte que la loi fondamentale de la dynamique (1.2) peut aussi être mise sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R} \ , \\ \forall (j) \in \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \ , \\ \underline{F}'_j + \sum\limits_{\substack{(i) \in \mathcal{S}' \\ i \neq j}} \underline{F}_{ij} = m_j \underline{a}_j \end{array} \right. \tag{1.6}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

qui a, vis-à-vis de $\mathcal{S}'$, la même structure que (1.2) vis-à-vis de $\mathcal{S}$
(1.7)

Force extérieure / $\mathcal{S}'$ sur (j)	+	Forces intérieures / $\mathcal{S}'$ sur (j)	=	Quantité d'accélération de (j)

Par ailleurs le principe de l'action et de la réaction écrit en (1.4) pour les forces d'interaction pour chaque couple de points matériels de $\mathcal{S}$ contient notamment l'écriture de ce même principe pour chaque couple de points matériels de $\mathcal{S}'$.

Loi des actions mutuelles

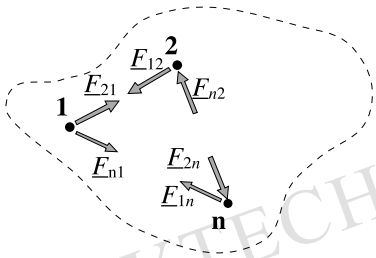


Figure 4 – Système de masses ponctuelles : loi des actions mutuelles

On peut aussi remarquer que le principe de l'action et de la réaction (1.4) est équivalent à l'énoncé (1.8) qui considère, au lieu des couples de points matériels, l'ensemble des points matériels d'un sous-système quelconque $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ (dont $\mathcal{S}$ lui-même). Cet énoncé est celui de la ***loi des actions mutuelles***. Il exprime que les efforts intérieurs à un sous-système quelconque forment un système de forces équivalent à zéro c'est-à-dire de résultante et de moment résultant nuls [(2)] :

$$\text{(1.8)} \qquad \begin{cases} \forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}\ , \\ \displaystyle\sum_{(j)\in\mathcal{S}'} \sum_{\substack{(i)\in\mathcal{S}' \\ i\neq j}} \underline{F}_{ij} = 0 \\ \displaystyle\sum_{(j)\in\mathcal{S}'} \sum_{\substack{(i)\in\mathcal{S}' \\ i\neq j}} \underline{OM}_j \wedge \underline{F}_{ij} = 0 \end{cases}$$

En résumé...

Pour un système de points matériels on a vu que la description des efforts extérieurs et intérieurs donnée pour le système $\mathcal{S}$ permet de déterminer les efforts correspondant à tout sous-système $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$. Les lois de la mécanique s'expriment par la loi fondamentale de la dynamique et la loi des actions mutuelles, sous la même forme, pour le système $\mathcal{S}$ et pour tout sous-système $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$.

[(2)] Cf. § 5.4.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Référentiels non galiléens

Les énoncés de la loi fondamentale (1.1, 1.2, 1.6) qui définissent la modélisation des efforts sont relatifs à un référentiel galiléen. La question se pose alors d'en déduire la modélisation dans un autre référentiel.

Pour cela on rappelle les formules (cf. chapitre III, § 3.11) exprimant la « composition » des vitesses et des accélérations lors d'un « changement de référentiel ». Le référentiel $\mathcal{R}^*$ étant animé, par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, du mouvement d'entraînement défini par le champ de vitesse rigidifiant $\underline{U}_{\mathrm{e}}$ dont la vitesse instantanée de rotation est $\underline{\omega}_{\mathrm{e}}$, on a :

$$\underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}^*(\underline{x}^*) + \underline{U}_{\mathrm{e}}(\underline{x}^*) \tag{1.9}$$

$$\underline{a}(\underline{x}) = \underline{a}^*(\underline{x}^*) + \underline{a}_{\mathrm{e}}(\underline{x}^*) + 2\,\underline{\omega}_{\mathrm{e}} \wedge \underline{U}^*(\underline{x}^*)\ , \tag{1.10}$$

dans lesquelles $\underline{U}(\underline{x})$ et $\underline{U}^*(\underline{x}^*)$ d'une part, $\underline{a}(\underline{x})$ et $\underline{a}^*(\underline{x}^*)$ d'autre part, désignent respectivement la vitesse et l'accélération du point matériel en $\underline{x}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ et $\underline{x}^*$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}^*$, $\underline{a}_{\mathrm{e}}(\underline{x}^*)$ est l'accélération en $\underline{x}^*$ du point géométrique lié à $\mathcal{R}^*$ dans le mouvement d'entraînement par rapport à $\mathcal{R}$ et $2\,\underline{\omega}_{\mathrm{e}} \wedge \underline{U}^*(\underline{x}^*) = \underline{a}_{\mathrm{c}}(\underline{x}^*)$ est l'accélération complémentaire (ou de Coriolis [3]).

Un ***changement de référentiel galiléen*** est caractérisé par le fait que $\underline{U}_{\mathrm{e}}$, est un champ de vitesse de translation indépendant du temps ($\underline{\omega}_{\mathrm{e}} = 0$, $\underline{a}_{\mathrm{e}} = 0$). On en déduit que la modélisation établie dans un référentiel galiléen demeure identique dans tout autre référentiel de ce type.

Dans le cas d'un ***changement de référentiel quelconque***, en appliquant la formule de composition des accélérations (1.10) à la loi fondamentale (1.2) écrite dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ on obtient l'expression de la loi fondamentale en référentiel non galiléen :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{dans le référentiel } \mathcal{R}^*\ , \\ \forall (j) \in \mathcal{S}\ ,\ \underline{F}_j + \displaystyle\sum_{\substack{(i)\in\mathcal{S} \\ i\neq j}} \underline{F}_{ij} - m_j(\underline{a}_{\mathrm{e}})_j - 2\,m_j\underline{\omega}_{\mathrm{e}} \wedge \underline{U}_j^* = m_j\underline{a}_j^*\ , \end{array}\right. \tag{1.11}$$

et la formule homologue à partir de (1.6). On peut interpréter cette formule en disant que la loi fondamentale conserve la même forme que (1.2) en référentiel non galiléen à condition d'ajouter, à la représentation des efforts extérieurs établie en référentiel galiléen, les forces fictives d'inertie d'entraînement $-m_j(\underline{a}_{\mathrm{e}})_j$ et les forces fictives complémentaires $-2\,m_j\underline{\omega}_{\mathrm{e}} \wedge \underline{U}_j^*$.

1.2 La méthode des puissances virtuelles

Le problème de la modélisation des efforts pour le milieu continu concerne la ***représentation des efforts extérieurs et intérieurs*** pour tout système $\mathcal{S}$ défini dans le cadre de la modélisation géométrique établie dans les chapitres précédents, et

[3] G. Coriolis (1792-1843).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

pour tout sous-système $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$, ainsi que l'écriture des équations exprimant la ***loi fondamentale de la dynamique*** et la ***loi des actions mutuelles***, homologues de (1.2), (1.6) et (1.4).

Diverses approches peuvent être employées pour cette construction. On a choisi la méthode des ***puissances virtuelles*** qui présente l'avantage de mettre en relief la cohérence entre la modélisation géométrique et la modélisation des efforts et qui a une portée générale : suivant l'intuition issue de l'expérience elle permet, à partir de la description géométrique adoptée, la construction de représentations des efforts cohérentes et l'obtention des équations correspondantes. La méthode sera appliquée à plusieurs reprises, pour le milieu continu tridimensionnel au chapitre V et pour les milieux curvilignes au chapitre XI : on pourra ainsi remarquer le caractère systématique de la démarche en même temps que la structure commune des équations obtenues.

Les sections suivantes (2 et 3) ont pour objet d'introduire le concept de puissances virtuelles et la méthode correspondante en partant du modèle connu examiné ci-dessus, celui des systèmes discrets constitués de points matériels.

2 Dualisation et puissances virtuelles pour un système de points matériels

2.1 Système constitué d'un point matériel

La dualisation de la loi fondamentale pour un point matériel s'opère de façon évidente. En désignant par $\underline{\hat{U}}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$, l'équation (1.1) est équivalente à l'énoncé :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R}\ , \\ \forall \underline{\hat{U}} \in \mathbb{R}^3 \\ \underline{F}\,.\,\underline{\hat{U}} = m\underline{a}\,.\,\underline{\hat{U}}\ . \end{array}\right. \tag{2.1}$$

En définissant sur $\mathbb{R}^3$ les formes linéaires $\mathcal{P}$ et $\mathcal{A}$ par

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{P}(\underline{\hat{U}}) = \underline{F}\,.\,\underline{\hat{U}} \\ \mathcal{A}(\underline{\hat{U}}) = m\underline{a}\,.\,\underline{\hat{U}}\ , \end{array}\right. \tag{2.2}$$

on aboutit à la formulation duale de (1.1)

$$\left\{\begin{array}{l} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R}\ , \\ \forall \underline{\hat{U}} \in \mathbb{R}^3\ ,\ \mathcal{P}(\underline{\hat{U}}) = \mathcal{A}(\underline{\hat{U}})\ . \end{array}\right. \tag{2.3}$$

2.2 Système de points matériels

On considère à nouveau le système $\mathcal{S}$ représenté sur la figure 1, constitué de n masses ponctuelles m_j affectées aux points matériels (j) situés en M_j à l'instant t dans la configuration κ_t.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Dualisation de la loi fondamentale de la dynamique

♦ ***Pour le système $\mathcal{S}$***

Pour chaque point matériel (j) de $\mathcal{S}$, la dualisation de la loi fondamentale de la dynamique (1.2) nécessite, comme ci-dessus, l'introduction d'un vecteur arbitraire $\underline{\hat{U}}_j$ de $\mathbb{R}^3$. On obtient ainsi l'énoncé dual, équivalent à (1.2) :

$$(2.4)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R} \ , \\ \forall (j) \in \mathcal{S} \ , \ \forall \underline{\hat{U}}_j \in \mathbb{R}^3 \ , \\ \underline{F}_j \cdot \underline{\hat{U}}_j + \sum\limits_{\substack{(i)\in\mathcal{S} \\ i\neq j}} \underline{F}_{ij} \cdot \underline{\hat{U}}_j = m_j \underline{a}_j \cdot \underline{\hat{U}}_j \ . \end{array} \right.$$

Il est évident, compte tenu du caractère arbitraire de chacun des n vecteurs $\underline{\hat{U}}_j$, que l'énoncé précédent est équivalent à l'énoncé global :

$$(2.5)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R} \ , \\ \forall \underline{\hat{U}}_1, \ldots, \underline{\hat{U}}_n \in \mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3 \ , \\ \sum\limits_{(j)\in\mathcal{S}} \underline{F}_j \cdot \underline{\hat{U}}_j + \sum\limits_{(j)\in\mathcal{S}} \sum\limits_{\substack{(i)\in\mathcal{S} \\ i\neq j}} \underline{F}_{ij} \cdot \underline{\hat{U}}_j = \sum\limits_{(j)\in\mathcal{S}} m_j \underline{a}_j \cdot \underline{\hat{U}}_j \ . \end{array} \right.$$

En définissant sur $\mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3$ les trois formes linéaires

$$(2.6)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_{(e)}(\underline{\hat{U}}_1, \ldots, \underline{\hat{U}}_n) = \sum\limits_{(j)\in\mathcal{S}} \underline{F}_j \cdot \underline{\hat{U}}_j \\ \mathcal{P}_{(i)}(\underline{\hat{U}}_1, \ldots, \underline{\hat{U}}_n) = \sum\limits_{(j)\in\mathcal{S}} \sum\limits_{\substack{(i)\in\mathcal{S} \\ i\neq j}} \underline{F}_{ij} \cdot \underline{\hat{U}}_j \\ \mathcal{A}(\underline{\hat{U}}_1, \ldots, \underline{\hat{U}}_n) = \sum\limits_{(j)\in\mathcal{S}} m_j \underline{a}_j \cdot \underline{\hat{U}}_j \end{array} \right.$$

on aboutit à la ***formulation duale de la loi fondamentale de la dynamique pour le système $\mathcal{S}$*** :

$$(2.7)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R} \ , \\ \forall \underline{\hat{U}}_1, \ldots, \underline{\hat{U}}_n \in \mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{P}_{(e)}(\underline{\hat{U}}_1, \ldots, \underline{\hat{U}}_n) + \mathcal{P}_{(i)}(\underline{\hat{U}}_1, \ldots, \underline{\hat{U}}_n) = \mathcal{A}(\underline{\hat{U}}_1, \ldots, \underline{\hat{U}}_n) \ . \end{array} \right.$$

♦ ***Pour un sous-système $\mathcal{S}'$***

Pour un sous-système quelconque $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$, la démarche de dualisation est identique à partir de l'équation (1.6) qui ne concerne que les points matériels de $\mathcal{S}'$. On associe un vecteur arbitraire $\underline{\hat{U}}_j$ de $\mathbb{R}^3$ à chacun de ces points et la partition, explicitée par (1.5) et (1.7), entre forces extérieures et intérieures relativement à $\mathcal{S}'$ conduit à définir

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

pour $\mathcal{S}'$ les formes linéaires suivantes sur $\mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3$:

$$(2.8)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}' = (\ell), \ldots, (p) \ , \\ \forall \hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p \in \mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3 \ , \\ \mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p) = \displaystyle\sum_{(j)\in\mathcal{S}'} \underline{F}'_j \cdot \hat{\underline{U}}_j \\ \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p) = \displaystyle\sum_{(j)\in\mathcal{S}'} \sum_{\substack{(i)\in\mathcal{S}' \\ i\neq j}} \underline{F}_{ij} \cdot \hat{\underline{U}}_j \\ \mathcal{A}'(\hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p) = \displaystyle\sum_{(j)\in\mathcal{S}'} m_j \underline{a}_j \cdot \hat{\underline{U}}_j \ . \end{array} \right.$$

L'expression dualisée de la loi fondamentale de la dynamique pour le sous-système $\mathcal{S}'$ s'exprime alors par la formule (2.9) homologue évidente de (2.7) :

$$(2.9)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R} \ , \\ \mathcal{S}' = (\ell), \ldots, (p) \subset \mathcal{S} \ , \\ \forall \hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p \in \mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3 \ , \\ \mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p) + \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p) = \mathcal{A}'(\hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p) \ . \end{array} \right.$$

Dualisation de la loi des actions mutuelles

La loi des actions mutuelles est exprimée par la formule (1.8) qui représente un système de deux équations vectorielles pour chaque sous-système $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$, y compris $\mathcal{S}$ lui-même. La dualisation de chaque tel système de deux équations se fait en introduisant deux vecteurs arbitraires de $\mathbb{R}^3$, soient $\hat{\underline{U}}_0$ et $\hat{\underline{\omega}}_0$. Ainsi (1.8) est équivalente à :

$$(2.10)\quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \ , \\ \forall \hat{\underline{U}}_0 \in \mathbb{R}^3 \ , \ \forall \hat{\underline{\omega}}_0 \in \mathbb{R}^3 \ , \\ \Big(\displaystyle\sum_{(j)\in\mathcal{S}'} \sum_{\substack{(i)\in\mathcal{S}' \\ i\neq j}} \underline{F}_{ij} \Big) \cdot \hat{\underline{U}}_0 + \Big(\sum_{(j)\in\mathcal{S}'} \sum_{\substack{(i)\in\mathcal{S}' \\ i\neq j}} \underline{OM}_j \wedge \underline{F}_{ij} \Big) \cdot \hat{\underline{\omega}}_0 = 0 \ . \end{array} \right.$$

On peut alors poser :

$$(2.11)\quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{\underline{U}}_0 \in \mathbb{R}^3 \ , \ \forall \hat{\underline{\omega}}_0 \in \mathbb{R}^3 \ , \\ \forall (j) \in \mathcal{S}' \ , \\ \hat{\underline{U}}_j = \hat{\underline{U}}_0 + \hat{\underline{\omega}}_0 \wedge \underline{OM}_j \ , \end{array} \right.$$

ce qui permet de mettre (2.10) sous la forme :

$$(2.12)\quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \ , \\ \forall \hat{\underline{U}}_0 \in \mathbb{R}^3 \ , \ \forall \hat{\underline{\omega}}_0 \in \mathbb{R}^3 \ , \\ \displaystyle\sum_{(j)\in\mathcal{S}'} \sum_{\substack{(i)\in\mathcal{S}' \\ i\neq j}} \underline{F}_{ij} \cdot \hat{\underline{U}}_j = 0 \quad \text{si (2.11)} \ . \end{array} \right.$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On reconnaît dans (2.12) la forme linéaire $\mathcal{P}'_{(i)}$ définie en (2.8). D'où la formulation duale de la loi des actions mutuelles (1.8) :

$$\text{(2.13)} \qquad \begin{cases} \forall \mathcal{S}' = (\ell), \ldots, (p) \subseteq \mathcal{S} \ , \\ \forall \hat{\underline{U}}_0 \in \mathbb{R}^3 \ , \ \forall \hat{\underline{\omega}}_0 \in \mathbb{R}^3 \ , \\ \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p) = 0 \quad \text{si (2.11)} \ . \end{cases}$$

On peut remarquer que les vecteurs $\hat{\underline{U}}_j$ astreints à satisfaire (2.11) sont tels que :

$$\text{(2.14)} \qquad \begin{cases} \forall (i) \in \mathcal{S}' \ , \ \forall (j) \in \mathcal{S}' \\ \underline{M_i M_j} \, . \, (\hat{\underline{U}}_j - \hat{\underline{U}}_i) = 0 \quad \text{si (2.11)} \ , \end{cases}$$

c'est-à-dire que si les points géométriques $M_j, (j) \in \mathcal{S}'$, dans κ_t étaient animés des vitesses $\hat{\underline{U}}_j$ définies par (2.11) à partir de $\hat{\underline{U}}_0$ et $\hat{\underline{\omega}}_0$ leurs distances respectives ($|\underline{M_i M_j}|$) seraient conservées. Le mouvement instantané correspondant n'est autre que le ***mouvement rigidifiant*** défini par les vecteurs arbitraires $\hat{\underline{U}}_0$, (vitesse du point O) et $\hat{\underline{\omega}}_0$ (vitesse de rotation). Cette remarque sera mise à profit dans la suite.

2.3 Vitesses virtuelles, mouvements virtuels, puissances virtuelles

Point matériel

Dans le cas d'un point matériel, pour lequel l'effort est modélisé par une force $\underline{F}$ appliquée au point M dans κ_t à l'instant t, le produit scalaire $\underline{F} \, . \, \hat{\underline{U}}$ qui apparaît dans (2.1) associe à tout vecteur $\hat{\underline{U}}$ de $\mathbb{R}^3$ la ***puissance*** de la force $\underline{F}$ dans le mouvement du point matériel considéré qui serait animé de la vitesse $\hat{\underline{U}}$ à l'instant t.

Afin d'insister sur le caractère arbitraire du vecteur $\hat{\underline{U}}$ de $\mathbb{R}^3$ dans (2.1), qui implique notamment que $\hat{\underline{U}}$ n'a rien à connaître des restrictions éventuelles imposées à la vitesse du ***point matériel*** en M dans son mouvement réel, la terminologie choisie est la suivante.

$\hat{\underline{U}}$ est la ***vitesse virtuelle*** du point matériel en M ; elle définit, dans $\mathcal{R}$, un ***mouvement virtuel*** de ce point matériel.

$\mathcal{P}(\hat{\underline{U}}) = \underline{F} \, . \, \hat{\underline{U}}$ est la ***puissance virtuelle de la force*** $\underline{F}$ dans ce mouvement virtuel.

$\mathcal{A}(\hat{\underline{U}}) = m\underline{a} \, . \, \hat{\underline{U}}$ est, par assimilation, la ***puissance virtuelle de la quantité d'accélération*** $m\underline{a}$ du point matériel dans ce mouvement virtuel.

Système de points matériels

Les mêmes arguments peuvent être repris pour un système $\mathcal{S}$ de plusieurs points matériels.

L'ensemble des vecteurs $\hat{\underline{U}}_1, \ldots, \hat{\underline{U}}_n$ arbitraires dans $\mathbb{R}^3$ introduits dans (2.5) est une distribution de ***vitesses virtuelles*** dans κ_t pour les points matériels (j) de $\mathcal{S}$. Il définit un ***mouvement virtuel*** (m.v.) du système $\mathcal{S}$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

$\mathcal{P}_{(e)}(\hat{\underline{U}}_1, \ldots, \hat{\underline{U}}_n) = \sum_{(j)\in\mathcal{S}} \underline{F}_j \,.\, \hat{\underline{U}}_j$ est, pour $\mathcal{S}$, la ***puissance virtuelle des efforts extérieurs*** dans ce mouvement virtuel ;

$\mathcal{P}_{(i)}(\hat{\underline{U}}_1, \ldots, \hat{\underline{U}}_n) = \sum_{(j)\in\mathcal{S}} \sum_{\substack{(i)\in\mathcal{S}' \\ i\neq j}} \underline{F}_{ij} \,.\, \hat{\underline{U}}_j$ est, pour $\mathcal{S}$, la ***puissance virtuelle des efforts intérieurs*** ;

$\mathcal{A}(\hat{\underline{U}}_1, \ldots, \hat{\underline{U}}_n) = \sum_{(j)\in\mathcal{S}} m_j \underline{a}_j \,.\, \hat{\underline{U}}_j$ est la ***puissance virtuelle des quantités d'accélération***.

De même pour un sous-système $(\ell), \ldots, (p) = \mathcal{S}'$, le ***mouvement virtuel*** de $\mathcal{S}'$ est défini dans $\mathcal{R}$ par $\hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p$ et les puissances virtuelles, homologues des précédentes sont $\mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p)$, $\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p)$ et $\mathcal{A}'(\hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p)$ définies par (2.8).

Il est clair que, pour le système $\mathcal{S}$ ou pour un sous-système $\mathcal{S}'$ quelconque, l'ensemble des mouvements virtuels à une structure d'espace vectoriel.

Parmi ces mouvements virtuels, la dualisation de la loi des actions mutuelles ne porte que sur les distributions de vitesses virtuelles $\hat{\underline{U}}_j$ qui satisfont sur $\mathcal{S}$ ou sur le sous-système $\mathcal{S}'$ considéré la condition (2.11). Mettant à profit la remarque faite au paragraphe 2.2 à partir de la formule (2.14) il est naturel d'adopter pour cette classe de mouvements virtuels la terminologie de ***mouvement virtuel rigidifiant*** (m.v.r.) le système $\mathcal{S}$ ou le sous-système considéré.

Changement de référentiel

Les vecteurs $\hat{\underline{U}}_j$ introduits aux paragraphes 2.1 et 2.2 sont les instruments mathématiques de la dualisation de la loi fondamentale et de la loi des actions mutuelles. Ces vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^3$ sont définis à l'instant t sur la configuration actuelle du système étudié, et ne sont en rien concernés par le concept de changement de référentiel.

En revanche, l'interprétation, qui vient d'être donnée, de chacun de ces vecteurs $\hat{\underline{U}}_j$ comme la vitesse virtuelle de la masse ponctuelle en M_j, et de l'ensemble de ces vecteurs comme définissant un mouvement virtuel du système de masses ponctuelles (j) ou de ses sous-systèmes, introduit ***pour ces mouvements virtuels*** le concept fécond de changement de référentiel. Il s'agit, considérant deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ quelconques, d'énoncer que deux distributions de vecteurs $\hat{\underline{U}}_j$ et $\hat{\underline{U}}^*_j$ définissent, dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ respectivement, le ***même mouvement virtuel*** si elles sont liées par la relation (1.9) valable pour les mouvements réels, soit ici : $\hat{\underline{U}}_j = \hat{\underline{U}}^*_j + (\underline{U}^*_e)_j$.

On remarque alors qu'un changement de référentiel ***quelconque*** est sans effet sur la valeur de la puissance virtuelle des efforts intérieurs. En effet on a, par exemple pour $\mathcal{S}'$,

$$\sum_{(j)\in\mathcal{S}'} \sum_{\substack{(i)\in\mathcal{S}' \\ i\neq j}} \underline{F}_{ij} \,.\, \hat{\underline{U}}_j = \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p) = \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}^*_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}^*_p) + \mathcal{P}'_{(i)}((\underline{U}_e)_\ell, \ldots, (\underline{U}_e)_p) \tag{2.15}$$

dont le dernier terme est nul puisque les $(\underline{U}_e)_j$ correspondent à un mouvement rigidifiant. On peut ainsi énoncer, avec la définition précédente, que la puissance virtuelle des efforts intérieurs au système ou à un de ses sous-systèmes est indépendante du référentiel dans lequel est observé le mouvement virtuel considéré. On reviendra sur cette question au paragraphe 4.4.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

2.4 Énoncé des puissances virtuelles

En conclusion, pour le système de points matériels étudié avec la modélisation des efforts présentée dans la section 1, on a montré l'équivalence entre les lois de la mécanique (lois de Newton) et l'énoncé suivant dit « ***des puissances virtuelles*** », avec les définitions données plus haut :

$$\text{(2.16)}\qquad \begin{cases} \text{pour } \mathcal{S} \\ \text{en référentiel galiléen ,} \\ \forall\, \underline{\hat{U}}_1, \dots, \underline{\hat{U}}_n \text{ m.v. de } \mathcal{S} \\ \mathcal{P}_{(e)}(\underline{\hat{U}}_1, \dots, \underline{\hat{U}}_n) + \mathcal{P}_{(i)}(\underline{\hat{U}}_1, \dots, \underline{\hat{U}}_n) = \mathcal{A}(\underline{\hat{U}}_1, \dots, \underline{\hat{U}}_n) \end{cases}$$

$$\text{(2.17)}\qquad \begin{cases} \forall\, \mathcal{S}' = (\ell), \dots, (p) \subset \mathcal{S} \\ \text{en référentiel galiléen ,} \\ \forall\, \underline{\hat{U}}_\ell, \dots, \underline{\hat{U}}_p \text{ m.v. de } \mathcal{S}' \\ \mathcal{P}'_{(e)}(\underline{\hat{U}}_\ell, \dots, \underline{\hat{U}}_p) + \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{\hat{U}}_\ell, \dots, \underline{\hat{U}}_p) = \mathcal{A}'(\underline{\hat{U}}_\ell, \dots, \underline{\hat{U}}_p) \end{cases}$$

$$\text{(2.18)}\qquad \begin{cases} \forall\, \mathcal{S}' = (\ell), \dots, (p) \subseteq \mathcal{S} \\ \forall\, \underline{\hat{U}}_\ell, \dots, \underline{\hat{U}}_p \text{ m.v.r. de } \mathcal{S}' \\ \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{\hat{U}}_\ell, \dots, \underline{\hat{U}}_p) = 0 \end{cases}$$

dont la première proposition (2.16, 2.17) dualise la loi fondamentale de la dynamique, et la seconde (2.18) la loi des actions mutuelles.

2.5 Modélisation des efforts et mouvements virtuels

L'objectif annoncé de cette présentation était, à partir d'une modélisation connue des efforts et des énoncés correspondants des lois de la mécanique, de dégager les principes de la dualisation ainsi que des énoncés qui pourraient être posés, dans la suite, comme principes fondamentaux (cf. section 3).

Dans cette démarche, les espaces sur lesquels est effectuée la dualisation pour un système ou pour ses sous-systèmes sont évidemment directement déterminés par la connaissance préalable que l'on a de la modélisation : les efforts étant modélisés par des forces, c'est-à-dire des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, la dualité à travers le produit scalaire euclidien introduit les vecteurs arbitraires $\underline{\hat{U}}_j$ de $\mathbb{R}^3$.

On pourrait imaginer de partir d'une autre modélisation des efforts où, abandonnant le concept de masses ponctuelles, interviendraient en M_j, outre des forces $\underline{F}_j$ et $\underline{F}_{ij}$ comme dans le cas précédent, des couples $\underline{\Gamma}_j$ et $\underline{\Gamma}_{ij}$. La dualisation introduirait alors, outre les vecteurs $\underline{\hat{U}}_j$, un autre jeu de vecteurs arbitraires $\underline{\hat{r}}_j$ de $\mathbb{R}^3$. Ces $\underline{\hat{r}}_j$, associés à des couples dans le produit scalaire, prendraient la signification de ***vitesses de rotation virtuelles*** en chaque point M_j, et des produits du type $\underline{\Gamma} \,.\, \underline{\hat{r}}$ viendraient compléter les expressions de $\mathcal{P}_{(e)}(\underline{\hat{U}}_1, \dots, \underline{\hat{U}}_n, \underline{\hat{r}}_1, \dots, \underline{\hat{r}}_n)$, $\mathcal{P}'_{(e)}$, $\mathcal{P}_{(i)}$, $\mathcal{P}'_{(i)}$... Un mouvement virtuel de $\mathcal{S}$ serait alors défini par $(\underline{\hat{U}}_1, \dots, \underline{\hat{U}}_n, \underline{\hat{r}}_1, \dots, \underline{\hat{r}}_n)$. Les mouvements

virtuels rigidifiant $\mathcal{S}'$, sur lesquels $\mathcal{P}'_{(i)}$ serait nulle, seraient définis par (2.11) pour $\underline{\hat{U}}_\ell, \ldots, \underline{\hat{U}}_p$ avec, de plus :

$$\underline{\hat{r}}_\ell = \ldots = \underline{\hat{r}}_p = \ldots = \underline{\hat{\omega}}_0 \ . \tag{2.19}$$

On reviendra sur cette idée au chapitre V (section 5) et au chapitre XI mais on doit déjà insister sur le lien existant entre les mouvements virtuels considérés dans la dualisation et la modélisation même des efforts à laquelle on aboutit.

3 Méthode des puissances virtuelles pour un système de points matériels

3.1 Présentation de la méthode des puissances virtuelles

L'idée directrice de la méthode des puissances virtuelles consiste à aborder le problème de la modélisation des efforts par dualité en s'appuyant sur le principe des puissances virtuelles (2.16 à 2.18) posé ***a priori*** comme fondamental.

Après la définition géométrique du système étudié qui implique celle de ses mouvements réels, la démarche impose de commencer par définir les ***mouvements virtuels*** qui vont être considérés pour le système et pour ses sous-systèmes et qui doivent constituer des espaces vectoriels.

Puis, en se donnant les expressions des ***formes linéaires*** $\mathcal{P}_{(e)}, \mathcal{P}'_{(e)}, \mathcal{P}_{(i)}, \mathcal{P}'_{(i)}, \mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sur ces espaces vectoriels, on va esquisser la forme de la modélisation des efforts que l'on souhaite construire : les cofacteurs introduits par ces formes traduisent la représentation des efforts extérieurs et intérieurs.

L'exploitation du principe des puissances virtuelles permettra d'achever la modélisation en aboutissant aux équations de la dynamique pour le système étudié.

Le choix des espaces vectoriels des mouvements virtuels, « instruments mathématiques » de la construction par dualisation, est, à la fois, totalement libre et essentiel. Les mouvements virtuels n'ont rien à connaître des limitations éventuelles imposées aux mouvements réels du système considéré dans son évolution mécanique particulière, mais ils doivent évidemment, pour que la construction faite ait une quelconque utilité pratique, inclure tous ces mouvements réels.

3.2 Exemple de mise en œuvre

On se propose, sans entrer dans les détails de démonstration ni répéter l'argumentation de dualisation de la section 2, de montrer comment la modélisation des efforts qui a servi de point de départ dans la section 1 peut être construite par la méthode des puissances virtuelles.

Modélisation géométrique ; mouvements réels

Le système $\mathcal{S}$ est décrit comme constitué de n points matériels (j) de masse m_j, qui

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

occupent dans la configuration κ_t, les positions géométriques M_j. Un sous-système $\mathcal{S}'$ est une partie de $\mathcal{S}$, isolée par la pensée, constituée des points matériels $(\ell), \ldots, (p)$. S'agissant de points matériels la configuration géométrique du système est définie par la donnée des seules positions géométriques des points M_j à cet instant. Les mouvements réels du système $\mathcal{S}$ ou d'un sous-système $\mathcal{S}'$ sont définis sur κ_t, par les vitesses $\underline{U}_j$ des points correspondants.

Espaces vectoriels des mouvements virtuels

L'espace vectoriel des mouvements virtuels du système $\mathcal{S}$ est engendré par n vitesses virtuelles $\underline{\hat{U}}_j$ (vecteurs de $\mathbb{R}^3$) affectées aux points M_j. Les mouvements virtuels d'un sous-système $\mathcal{S}'$ sont définis de la même manière. Ces espaces vectoriels contiennent évidemment les mouvements réels du système $\mathcal{S}$ (ou du sous-système $\mathcal{S}'$) et les mouvements rigidifiant $\mathcal{S}$ (ou $\mathcal{S}'$).

Écriture des formes linéaires $\mathcal{P}_{(e)}$ et $\mathcal{P}'_{(e)}$

Ces choix étant faits, l'écriture la plus générale de $\mathcal{P}_{(e)}$, forme linéaire sur l'espace vectoriel engendré par les $\underline{\hat{U}}_j$ est :

$$\mathcal{P}_{(e)}(\underline{\hat{U}}_1, \ldots, \underline{\hat{U}}_n) = \sum_{(j)\in\mathcal{S}} \underline{F}_j \,.\, \underline{\hat{U}}_j \tag{3.1}$$

où les $\underline{F}_j$ sont des cofacteurs arbitraires.

De même pour $\mathcal{P}'_{(e)}$ relative à $\mathcal{S}'$:

$$\mathcal{P}'_{(e)}(\underline{\hat{U}}_\ell, \ldots, \underline{\hat{U}}_p) = \sum_{(j)\in\mathcal{S}'} \underline{F}'_j \,.\, \underline{\hat{U}}_j \tag{3.2}$$

où $\underline{F}'_j$, cofacteur affecté à M_j, dépend du sous-système $\mathcal{S}'$ considéré auquel appartient le point matériel (j).

Les $\underline{F}_j$ et les $\underline{F}'_j$ modélisent les efforts extérieurs à $\mathcal{S}$ et à $\mathcal{S}'$ respectivement.

Écriture des formes linéaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$

Les mouvements réels du système définissent les accélérations $\underline{a}_j$ des points matériels, d'où les quantités d'accélération $m_j\underline{a}_j$. La puissance virtuelle des quantités d'accélération s'écrit donc :

$$\mathcal{A}(\underline{\hat{U}}_1, \ldots, \underline{\hat{U}}_n) = \sum_{(j)\in\mathcal{S}} m_j\underline{a}_j \,.\, \underline{\hat{U}}_j \quad \text{pour } \mathcal{S}\,, \tag{3.3}$$

$$\mathcal{A}'(\underline{\hat{U}}_\ell, \ldots, \underline{\hat{U}}_p) = \sum_{(j)\in\mathcal{S}'} m_j\underline{a}_j \,.\, \underline{\hat{U}}_j \quad \text{pour } \mathcal{S}'\,. \tag{3.4}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Écriture des formes linéaires $\mathcal{P}_{(i)}$ et $\mathcal{P}'_{(i)}$

Dans les énoncés des puissances virtuelles la distinction entre efforts extérieurs et efforts intérieurs est sans ambiguïté. Ainsi, pour le système $\mathcal{S}$ l'écriture la plus générale de la forme linéaire $\mathcal{P}_{(i)}$ est

$$\mathcal{P}_{(i)}(\hat{\underline{U}}_1, \ldots, \hat{\underline{U}}_n) = \sum_{(j)\in\mathcal{S}} \underline{\Phi}_j \cdot \hat{\underline{U}}_j \ , \tag{3.5}$$

où chaque cofacteur $\underline{\Phi}_j$ modélise les efforts intérieurs exercés par les points matériels de $\mathcal{S} - (j)$ sur (j).

Pour un sous-système $\mathcal{S}'$ on écrit de même, de la façon la plus générale

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p) = \sum_{(j)\in\mathcal{S}'} \underline{\Phi}'_j \cdot \hat{\underline{U}}_j \ , \tag{3.6}$$

les $\underline{\Phi}'_j$ modélisant les efforts intérieurs exercés par les points matériels de $\mathcal{S}' - (j)$ sur (j).

En particulier, si $\mathcal{S}'$ est un sous-système binaire (i), (j) la puissance virtuelle $\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}_i, \hat{\underline{U}}_j)$ se met sous la forme

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}_i, \hat{\underline{U}}_j) = \underline{F}_{ji} \cdot \hat{\underline{U}}_i + \underline{F}_{ij} \cdot \hat{\underline{U}}_j \ , \tag{3.7}$$

où $\underline{F}_{ji} = \underline{\Phi}'_i$ (resp. $\underline{F}_{ij} = \underline{\Phi}'_j$) modélise l'effort exercé par (j) sur (i), [resp. (i) sur (j)].

En rappelant que le concept de sous-système n'est que le résultat d'une expérience de pensée et ne modifie en rien les interactions entre les points matériels du système et en rapprochant ces trois expressions il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\, \mathcal{S}' = (\ell), \ldots, (p) \subseteq \mathcal{S} \\ \forall\, \hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p \text{ m.v. de } \mathcal{S}' \\ \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p) = \displaystyle\sum_{(j)\in\mathcal{S}'} \sum_{\substack{(i)\in\mathcal{S}' \\ i\neq j}} \underline{F}_{ij} \cdot \hat{\underline{U}}_j \end{array} \right. \tag{3.8}$$

où les $\underline{F}_{ij}$, a priori arbitraires, ***indépendants du sous-système considéré***, sont définis à partir des sous-systèmes constitués de ***deux*** éléments.

La puissance virtuelle des efforts intérieurs pour le système $\mathcal{S}$ (ou pour un sous-système $\mathcal{S}'$) dans un mouvement virtuel $(\hat{\underline{U}}_1, \ldots, \hat{\underline{U}}_n)$ quelconque est la somme des puissances virtuelles des efforts intérieurs, dans ce mouvement virtuel, pour tous les sous-systèmes de ***deux*** éléments identifiables dans $\mathcal{S}$ (ou dans $\mathcal{S}'$).

Application du principe des puissances virtuelles

♦ ***Énoncé dual de la loi des actions mutuelles***

On considère les sous-systèmes $\mathcal{S}'$ constitués de deux points matériels quelconques (i) et (j), pour lesquels la proposition (2.18) du principe des puissances virtuelles s'écrit $\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}_i, \hat{\underline{U}}_j) =$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

0 dans tout mouvement virtuel rigidifiant $\mathcal{S}'$. On retrouve évidemment, par le raisonnement du paragraphe 2.2, le principe de l'action et de la réaction :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{F}_{ij} + \underline{F}_{ji} = 0 \\ \underline{OM}_i \wedge \underline{F}_{ji} + \underline{OM}_j \wedge \underline{F}_{ij} = 0 \, , \end{array} \right. \tag{3.9}$$

et l'expression (3.7) de $\mathcal{P}'_{(i)}$ pour le sous-système considéré devient alors :

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}_i, \hat{\underline{U}}_j) = \underline{F}_{ij} \cdot (\hat{\underline{U}}_j - \hat{\underline{U}}_i) \, . \tag{3.10}$$

Avec les notations

$$\underline{e}_{ij} = \underline{M_i M_j}/|\underline{M_i M_j}| \qquad \text{(vecteur unitaire colinéaire à } \underline{M_i M_j}) \, , \tag{3.11}$$

$$\underline{F}_{ij} = -F_{ij} \, \underline{e}_{ij} \, , \tag{3.12}$$

$$\hat{\dot{\delta}}_{ij} = (\hat{\underline{U}}_j - \hat{\underline{U}}_i) \cdot \underline{e}_{ij} \, , \tag{3.13}$$

l'expression (3.10) de $\mathcal{P}'_{(i)}$ pour le sous-système de deux points matériels devient :

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}_i, \hat{\underline{U}}_j) = -F_{ij} \hat{\dot{\delta}}_{ij} \, . \tag{3.14}$$

Dans cette formule $\hat{\dot{\delta}}_{ij}$ désigne le taux d'allongement virtuel de la longueur $|\underline{M_i M_j}|$ dû aux vitesses virtuelles $\hat{\underline{U}}_i$ et $\hat{\underline{U}}_j$ des points géométriques M_i et M_j, terminologie qui rappelle que la formule (3.13) est identique à celle qui donne le taux d'allongement réel $\dot{\delta}_{ij}$ de $|\underline{M_i M_j}|$ pour des vitesses réelles $\underline{U}_i$ et $\underline{U}_j$; F_{ij} est positive si la force $\underline{F}_{ij}$ est attractive. Pour un sous-système $\mathcal{S}'$ quelconque, y compris $\mathcal{S}$ lui-même, on aura alors l'expression transformée de (3.7) :

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p) = - \sum_{(j) \in \mathcal{S}'} \sum_{\substack{(i) \in \mathcal{S}' \\ i > j}} F_{ij} \hat{\dot{\delta}}_{ij} \, . \tag{3.15}$$

Les formules (3.14) et (3.15) illustrent bien l'interprétation donnée plus haut pour l'écriture (3.7) de $\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}_\ell, \ldots, \hat{\underline{U}}_p)$. En effet, (3.14) permet d'identifier clairement les termes de l'expression (3.15) pour un sous-système quelconque $\mathcal{S}'$: chacun d'eux correspond à un sous-système constitué de deux éléments et ne fait intervenir que le « taux de déformation virtuelle » de ce sous-système binaire. Ainsi (3.14) définit en quelque sorte une « ***densité*** » ***discrète de puissance virtuelle des efforts intérieurs***, le niveau élémentaire correspondant étant représenté par les sous-systèmes binaires : le calcul de $\mathcal{P}_{(i)}$ ou $\mathcal{P}'_{(i)}$ se fait par sommation de cette densité sur le système ou le sous-système quelconque considéré.

Ceci achève de préciser la forme de la modélisation des efforts intérieurs : ils sont représentés par un jeu de $n(n-1)/2$ scalaires indépendants F_{ij}.

♦ *Énoncé dual de la loi fondamentale*

On applique la proposition (2.16) du principe des puissances virtuelles au système $\mathcal{S}$. Par le raisonnement du paragraphe 2.2 on retrouve immédiatement la loi fondamentale sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R} \, , \\ \forall (j) \in \mathcal{S} \, , \; \underline{F}_j + \displaystyle\sum_{\substack{(i) \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \underline{F}_{ij} = m_j \underline{a}_j \, . \end{array} \right. \tag{3.16}$$

De même, l'application de (2.17) à un sous-système $(\ell), \ldots, (p) = \mathcal{S}'$ quelconque de $\mathcal{S}$ fournit l'énoncé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R} \, , \\ \forall (j) \in \mathcal{S}' \, , \; \underline{F}'_j + \displaystyle\sum_{\substack{(i) \in \mathcal{S}' \\ i \neq j}} \underline{F}_{ij} = m_j \underline{a}_j \, . \end{array} \right. \tag{3.17}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En identifiant (3.16) et (3.17) on obtient la formule (3.18) qui explicite les efforts extérieurs à $\mathcal{S}'$ exercés sur $(j) \in \mathcal{S}'$:

$$\forall (j) \in \mathcal{S}' \ , \ \underline{F}'_j = \underline{F}_j + \sum_{(i) \notin \mathcal{S}'} \underline{F}_{ij} \ . \tag{3.18}$$

3.3 Commentaires sur cette application de la méthode des puissances virtuelles

La mise en œuvre de la méthode des puissances virtuelles guidée par l'expérience qui oriente le type de modélisation auquel on souhaite aboutir a permis, à partir de la définition de la modélisation géométrique et des espaces vectoriels des mouvements virtuels puis de l'écriture des diverses puissances virtuelles sur ces espaces, d'assurer la cohérence de la construction effectuée et d'obtenir sans ambiguïté les équations qui régissent le système.

On remarque en particulier que, malgré la similitude des notations, il y a une différence de point de vue essentielle entre l'écriture de (2.16, 2.17) pour le système $\mathcal{S}$ et pour un sous-système $\mathcal{S}'$ quelconque autre que $\mathcal{S}$: dans le premier cas, les forces extérieures $\underline{F}_j$ sont connues, elles font en quelque sorte partie des « données », dans le second cas les forces extérieures $\underline{F}'_j$ font partie des « inconnues » et sont explicitées, à l'issue de la construction de la modélisation, par la formule (3.18).

3.4 Compatibilité géométrique des $\hat{\dot{\delta}}_{ij}$. Systèmes de barres articulées

Compatibilité géométrique

Considérant les positions géométriques des n points $M_1, \ldots, M_n$ on peut se poser le problème de compatibilité géométrique suivant : étant donné un jeu de taux d'allongement virtuels $\hat{\dot{\delta}}_{ij}$, à quelle condition ceux-ci dérivent-ils, au sens de (3.13), d'un mouvement virtuel $(\underline{\hat{U}}_1, \ldots, \underline{\hat{U}}_n)$ dans $\mathcal{R}$? La réponse à cette question peut évidemment s'obtenir directement à partir des équations de définition (3.13) en y éliminant les $\underline{\hat{U}}_i$. Une autre méthode, que l'on va exposer ci-dessous, résulte de l'application du principe des puissances virtuelles, la modélisation des efforts pour le système ***étant maintenant acquise***.

Pour cela, on considère toutes les distributions d'efforts intérieurs $\underline{F}_{ij}$ qui satisfont la loi des actions mutuelles (3.9) et la loi fondamentale (3.16) avec des efforts extérieurs $\underline{F}_j$ et des quantités d'accélération $m_j \underline{a}_j$ nuls :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (i) \in \mathcal{S} \ , \ \forall (j) \in \mathcal{S} \ , \\ \underline{F}_{ij} = -F_{ij} \underline{e}_{ij} \ , \ \underline{F}_{ij} = -\underline{F}_{ji} \ ; \\ \forall (j) \in \mathcal{S} \ , \\ \displaystyle\sum_{\substack{(i) \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \underline{F}_{ij} = 0 \ . \end{array} \right. \tag{3.19}$$

Une telle distribution d'efforts intérieurs est dite ***autoéquilibrée*** pour le système $\mathcal{S}$. L'ensemble de ces distributions autoéquilibrées constitue un espace vectoriel noté $\mathbb{A}$. On déduit

alors de (2.16, 2.17) et (3.15) :

$$(3.20)\qquad \begin{cases} \forall (F_{ij}, i \neq j = 1, 2, \ldots, n) \in \mathbb{A}\ , \\ \forall (\underline{\hat{U}}_1, \ldots, \underline{\hat{U}}_n) \text{ m.v. pour } \mathcal{S}\ , \\ -\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i>j} F_{ij} \hat{\dot{\delta}}_{ij} = 0\ . \end{cases}$$

Cette formule fournit, sous forme dualisée, les conditions nécessaires [4] de compatibilité géométrique des taux d'allongement virtuels $\hat{\dot{\delta}}_{ij}$ pour que ceux-ci dérivent de n vitesses virtuelles $\underline{\hat{U}}_j$. On peut vérifier que cette condition d'***orthogonalité des taux d'allongement virtuels géométriquement compatibles aux efforts intérieurs autoéquilibrés*** est suffisante.

Système de barres articulées

L'intérêt de ce résultat géométrique n'est guère apparent sur le système considéré ici d'un ensemble de particules ponctuelles. En revanche on peut remarquer que la description donnée au paragraphe 3.2 est également adaptée à l'étude de la statique d'un système de barres, non chargées entre leurs extrémités, assemblées entre elles en des nœuds articulés (figure 5) où sont appliqués les efforts extérieurs au système.
Les points géométriques M_j représentent les nœuds de la structure : ils correspondent à des points matériels de masses nulles. Tous les nœuds de la structure ne sont pas nécessairement reliés entre eux par une barre : deux nœuds M_ℓ et M_m qui ne sont pas ainsi reliés n'exercent, l'un sur l'autre, aucun effort et $F_{\ell m} = 0$.

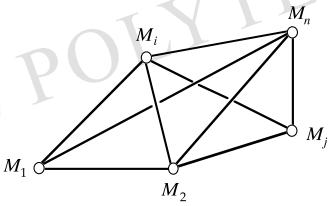


Figure 5 – Système de barres articulées

Pour un tel système les équations de la statique (équations d'équilibre) sont identiques aux équations (1.2) et (1.4) où $m_j \underline{a}_j = 0$, et le principe des puissances virtuelles s'exprime par (2.16 à 2.18) avec les expressions explicitées ci-dessus pour les diverses puissances virtuelles où $m_j \underline{a}_j = 0$ dans (3.3) ou (3.4).

Homologue du problème posé aux chapitres II (§ 6.2) et III (§ 3.7) pour le milieu continu, le problème de la compatibilité géométrique des taux d'extension des barres constitutives du système vise à déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur les $\hat{\dot{\delta}}_{ij}$ correspondants pour que la continuité géométrique du système de barres soit maintenue : en d'autres termes, les barres soumises aux taux d'extension $\hat{\dot{\delta}}_{ij}$ doivent demeurer assemblées en tous les nœuds, ceux-ci étant alors animés de vitesses $\underline{\hat{U}}_i, \ldots, \underline{\hat{U}}_j$.
Les conditions de compatibilité sont données par (3.20) ***en y imposant la nullité des*** $F_{\ell m}$ associées aux nœuds M_ℓ et M_m non reliés entre eux par des barres : les $\hat{\dot{\delta}}_{ij}$ dans les barres du système sont orthogonaux au sous-espace de $\mathbb{A}$ dont les $F_{\ell m}$ sont fixées à zéro pour ces nœuds.

[4] Dans $\mathbb{R}^3$ la dimension de $\mathbb{A}$ est égale à 0 pour $n \leq 4$, et à $(n-3)(n-4)/2$ pour $n \geq 5$. Il en résulte que pour $n \leq 4$ les $\hat{\dot{\delta}}_{ij}$ n'ont aucune condition de compatibilité à satisfaire, tandis que pour $n \geq 5$ la formule (3.20) laisse $(3n-6)$ degrés de liberté aux $\hat{\dot{\delta}}_{ij}$ qui sont au nombre de $n(n-1)/2$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Si l'on désigne par k [5] la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{A}$ lorsque ces $F_{\ell m}$ sont fixées à zéro, deux circonstances sont possibles :

• $k = 0$, le sous-espace vectoriel en question se réduit à la seule distribution des efforts intérieurs nuls ($\forall i, j,\ F_{ij} = 0$) ; (3.20) n'impose aucune restriction aux $\hat{\dot{\delta}}_{ij}$ donnés, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de condition de compatibilité géométrique à satisfaire par ces $\hat{\dot{\delta}}_{ij}$;

• $k \geq 1$, et (3.20) est la formulation dualisée de k conditions de compatibilité géométrique à satisfaire par les $\hat{\dot{\delta}}_{ij}$ donnés.

Le point de vue développé dans ce paragraphe est évidemment à rapprocher de ce qui a été dit au chapitre III (§ 3.9) à propos de la formulation faible de la compatibilité géométrique et sera repris au chapitre V (§ 3.13 et 4.2).

4 La méthode des puissances virtuelles

4.1 Présentation générale de la méthode

La section précédente a développé, sur l'exemple d'un système de points matériels, l'application de la méthode des puissances virtuelles dont l'esprit a été présenté au paragraphe 3.1. Comme on l'avait annoncé cette analyse n'avait pour but que « d'acclimater » la méthode des puissances virtuelles, par une présentation inductive, l'objectif poursuivi étant la formulation d'une méthode générale, à caractère systématique, pour la construction de la modélisation des efforts.

On se propose désormais de retenir ***l'énoncé des puissances virtuelles***, tel qu'il a été dégagé au paragraphe 2.4 dans le cas des systèmes discrets constitués de points matériels, comme principe fondamental d'une méthode de modélisation des efforts en y généralisant la signification des notions de vitesses virtuelles, mouvements virtuels et puissances virtuelles introduites sur l'exemple au paragraphe 2.3.

Le choix des ***espaces vectoriels des mouvements virtuels*** pour le système et ses sous-systèmes, après la modélisation géométrique et la définition des mouvements réels, est l'étape primordiale de la méthode. C'est vis-à-vis des mouvements virtuels, qui jouent en quelque sorte le rôle des « fonctions-tests » de certaines théories mathématiques, que sont définies les représentations des efforts construites. Ils en délimitent donc le domaine de validité. Pour cette raison il est essentiel que l'espace vectoriel des mouvements virtuels du système contienne les mouvements réels de celui-ci, faute de quoi la modélisation des efforts construite n'aurait pas de pertinence pratique [6]. Il convient ici d'insister sur la signification de la terminologie « mouvements réels » : il s'agit, une fois posée la modélisation géométrique du système, des mouvements qui sont pris en compte dans les évolutions réelles du système dans le cadre de cette modélisation ; on trouvera au chapitre XII (§ 2.1 et 2.5), à propos des milieux curvilignes,

[5] k est appelé « degré d'hyperstaticité » (cf. chapitre X, § 6.1, et chapitre XI, § 4.5).

[6] Les choses sont, en fait, un peu plus subtiles et les mouvements réels ont, dans l'espace vectoriel des mouvements virtuels, un « statut particulier » dont l'explicitation nécessiterait des développements mathématiques hors de propos ici faute de disposer d'exemples permettant de les illustrer. Une manifestation de ce « particularisme » apparaîtra dans le cas du milieu continu tridimensionnel lorsque le champ de vitesse réel est discontinu (onde de choc) aux paragraphes 7.6 de ce chapitre et 3.11 du chapitre V : on y verra notamment comment sont alors définies les formes linéaires $\mathcal{A}(\underline{U})$ et $\mathcal{P}_{(i)}(\underline{U})$ exprimant la puissance réelle des quantités d'accélération et la puissance réelle des efforts intérieurs.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

une illustration de cette discussion.

À partir de ce choix essentiel on exprime, par des ***formes linéaires continues*** sur l'espace vectoriel des mouvements virtuels, les puissances virtuelles des efforts extérieurs, des efforts intérieurs et des quantités d'accélération pour le système. On procède de même pour les sous-systèmes, dont les mouvements virtuels sont définis sur la géométrie correspondante.

L'application du ***principe des puissances virtuelles*** permet alors :

- d'abord, par l'énoncé dual de la loi des actions mutuelles, de contrôler a priori la conformité des expressions proposées pour la puissance virtuelle des efforts intérieurs pour le système et pour ses sous-systèmes ; éventuellement, de préciser ces expressions de façon à ce que cet énoncé soit satisfait ;
- par l'énoncé dual de la loi fondamentale, si les expressions proposées pour les diverses puissances sont cohérentes entre elles du point de vue mathématique (cohérence des hypothèses physiques sous-jacentes), d'obtenir les équations de la dynamique qui correspondent à la modélisation construite pour le système et pour tout sous-système, et aussi d'expliciter les efforts extérieurs sur un sous-système quelconque.

Le caractère systématique et structuré de la méthode est mis en évidence dans le tableau récapitulatif donné au paragraphe 4.2. Il doit néanmoins demeurer clair qu'il ne s'agit pas d'une méthode axiomatique ! Les divers choix auxquels on doit procéder soulignent que des hypothèses, guidées par l'expérience, par l'intuition et par le type de modèle mathématique de la réalité physique auquel on veut aboutir, sont introduites. La ***validation*** du modèle obtenu par une telle construction est, bien entendu, l'étape ultime.

Il convient d'ajouter que la méthode des puissances virtuelles n'est pas la seule façon de construire les modélisations qui seront présentées dans la suite. Aussi bien pour le milieu continu (chapitre V) que pour les milieux curvilignes (chapitre XI) on dispose d'autres approches qui seront évoquées le moment venu, complétant utilement la présentation par les puissances virtuelles pour la bonne compréhension des modèles. L'intérêt essentiel de cette méthode réside dans son caractère unitaire et systématique qui permet notamment la construction cohérente de modélisations plus originales.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

4.2 Récapitulatif de la méthode des puissances virtuelles

① On procède à la ***définition géométrique*** du système $\mathcal{S}$ et de ses sous-systèmes $\mathcal{S}'$ et à la description de ses ***mouvements réels dans le cadre de cette modélisation géométrique***, dans sa ***configuration actuelle***.

② On définit l'espace vectoriel des ***mouvements virtuels*** (m.v.) $\hat{\mathbf{U}}$ du système, qui doit contenir les mouvements rigidifiant le système et l'ensemble de ses mouvements réels. On définit de façon identique l'espace vectoriel des mouvements virtuels d'un sous-système quelconque.

③ Sur ces espaces vectoriels on écrit les formes linéaires continues $\mathcal{A}(\hat{\mathbf{U}})$ et $\mathcal{A}'(\hat{\mathbf{U}})$ qui expriment la ***puissance virtuelle des quantités d'accélération*** du système $\mathcal{S}$ ou d'un sous-système quelconque $\mathcal{S}'$. Les cofacteurs sont les quantités d'accélération.

④ Pour le système $\mathcal{S}$ on postule l'expression de la forme linéaire continue $\mathcal{P}_{(e)}(\hat{\mathbf{U}})$ pour la ***puissance virtuelle des efforts extérieurs*** à partir de l'expérience et de l'intuition de la modélisation recherchée. De même pour un sous-système quelconque on postule l'expression de $\mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\mathbf{U}})$ qui ne repose que sur l'intuition (cf. § 4.3).

⑤ On postule les expressions des formes linéaires continues $\mathcal{P}_{(i)}(\hat{\mathbf{U}})$ et $\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}})$ pour la ***puissance virtuelle des efforts intérieurs*** au système $\mathcal{S}$ ou à un sous-système quelconque $\mathcal{S}'$. Les cofacteurs introduits aboutiront à la modélisation correspondante des efforts intérieurs.

⑥ On écrit le ***principe des puissances virtuelles*** :

$$\begin{cases} \forall\, \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \\ \forall\, \hat{\mathbf{U}} \text{ m.v.r. } \mathcal{S}' \quad , \quad \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \text{en référentiel galiléen,} \\ \text{pour } \mathcal{S}\,, \\ \forall\, \hat{\mathbf{U}} \text{ m.v.} \quad , \quad \mathcal{P}_{(e)}(\hat{\mathbf{U}}) + \mathcal{P}_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = \mathcal{A}(\hat{\mathbf{U}}) \\ \forall\, \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\,, \\ \forall\, \hat{\mathbf{U}} \text{ m.v.} \quad , \quad \mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\mathbf{U}}) + \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = \mathcal{A}'(\hat{\mathbf{U}}) \end{cases} \tag{4.2}$$

⑦ En exploitant les énoncés (4.1) puis (4.2),
- on contrôle la conformité des expressions proposées pour $\mathcal{P}_{(i)}(\hat{\mathbf{U}})$ et $\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}})$, que l'on précise éventuellement ;
- on vérifie la cohérence des expressions retenues pour $\mathcal{P}_{(e)}(\hat{\mathbf{U}})$, $\mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\mathbf{U}})$ et $\mathcal{P}_{(i)}(\hat{\mathbf{U}})$, $\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}})$;
- on déduit les équations de la dynamique pour le système $\mathcal{S}$ et pour tout sous-système $\mathcal{S}'$;
- on explicite la représentation des efforts.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

4.3 Commentaires

L'écriture des formes linéaires continues $\mathcal{A}(\hat{\mathbf{U}})$ et $\mathcal{A}'(\hat{\mathbf{U}})$ ne pose guère de problème puisque, les mouvements réels du système et de ses sous-systèmes étant connus à partir de la modélisation géométrique, les quantités d'accélération le sont également [7].

La similitude des notations adoptées pour les formes linéaires relatives au système lui-même d'une part et à ses sous-systèmes d'autre part ne doit pas occulter la différence essentielle entre le système, que l'on peut appréhender concrètement et sur lequel on peut expérimenter, et ses sous-systèmes qui sont « découpés par la pensée ». Comme indiqué plus haut, cette différence se manifeste lors de l'écriture des formes linéaires $\mathcal{P}_{(e)}(\hat{\mathbf{U}})$ et $\mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\mathbf{U}})$: l'expérience guide couramment l'écriture de $\mathcal{P}_{(e)}(\hat{\mathbf{U}})$ (comme on en verra des exemples aux chapitres V et XI) ; les efforts extérieurs correspondants, cofacteurs dans $\mathcal{P}_{(e)}(\hat{\mathbf{U}})$, ont, en quelque sorte, le statut de « données ». En revanche, pour un sous-système $\mathcal{S}'$, les efforts extérieurs – du moins ceux exercés par $(\mathcal{S} - \mathcal{S}')$ sur $\mathcal{S}'$ – ne bénéficient pas d'un tel support expérimental et l'écriture de $\mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\mathbf{U}})$ repose sur des hypothèses et des « intuitions » ; ces efforts extérieurs, cofacteurs dans $\mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\mathbf{U}})$, ont quant à eux le statut « d'inconnues ».

L'écriture des formes linéaires continues $\mathcal{P}_{(i)}(\hat{\mathbf{U}})$ et $\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}})$, astreintes à vérifier (4.1), découle également d'hypothèses qui doivent être cohérentes avec celles faites pour $\mathcal{P}_{(e)}(\hat{\mathbf{U}})$ et $\mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\mathbf{U}})$.

4.4 Changement de référentiel. Objectivité

Il est utile de reprendre ici, au plan général, les considérations évoquées au paragraphe 2.3 sur l'exemple du système constitué de points matériels. Un mouvement virtuel du système $\mathcal{S}$ (ou d'un sous-système quelconque $\mathcal{S}'$) est défini à l'instant t dans la configuration actuelle par un champ de vitesse (de déplacement, de rotation). Les puissances virtuelles sont des formes linéaires continues sur l'espace vectoriel de ces champs. Dans leur rôle de fonctions tests, outils mathématiques de la dualisation, les champs de vitesse virtuelle ne sont pas concernés par le concept de changement de référentiel. En revanche, considérés comme définissant des mouvements (au sens propre du terme) virtuels du système (ou sous-système), contenant notamment les mouvements réels, ce concept peut leur être appliqué comme indiqué au paragraphe 2.3, comme s'il s'agissait de mouvements véritables.

Considérant que le mouvement virtuel est défini dans un référentiel $\mathcal{R}$ par le champ de vitesse virtuelle $(\hat{\mathbf{U}})$, ce même mouvement virtuel est alors décrit dans un référentiel $\mathcal{R}^*$ par le champ $(\hat{\mathbf{U}}^*)$ lié au précédent par la relation (1.9). On peut alors remarquer que la forme linéaire continue qui exprime la puissance virtuelle des efforts intérieurs prend la même valeur pour le champ de vitesses qui décrit le mouvement virtuel dans $\mathcal{R}$ et pour celui qui le décrit dans $\mathcal{R}^*$. On a en effet, par la linéarité de $\mathcal{P}'_{(i)}$:

$$\forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}\ ,\ \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}) = \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\mathbf{U}}^*) + \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U}_{\mathrm{e}}) \tag{4.3}$$

où $\mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U}_{\mathrm{e}})$ est nulle en application de (4.1) puisque $\underline{U}_{\mathrm{e}}$ est le champ de vitesse du mouvement rigidifiant d'entraînement de $\mathcal{R}^*$ par rapport à $\mathcal{R}$.

[7] Seule, la définition de ces formes lorsque le champ de vitesse réel présente des discontinuités et que l'on choisit pour champ de vitesse virtuel ce même champ de vitesse réel nécessite une écriture particulière, explicitée au paragraphe 7.6 dans le cas du milieu continu classique.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Le résultat s'applique en particulier si $(\hat{\mathbf{U}})$ et $(\hat{\mathbf{U}}^*)$ définissent un mouvement ***réel*** du système (ou sous-système) observé dans deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$: la formule (4.3) exprime alors, selon la définition donnée au paragraphe 2.4 du chapitre I, l'objectivité de la puissance des efforts intérieurs. On dira de même que, dans le cas général, (4.3) exprime ***l'objectivité de la puissance virtuelle des efforts intérieurs***.

5 Mouvements rigidifiants ; distributeurs, torseurs

5.1 Distributeurs

Les développements précédents mettent en évidence le rôle essentiel joué par les mouvements virtuels rigidifiants qu'illustre notamment l'énoncé du principe des puissances virtuelles relatif à la puissance virtuelle des efforts intérieurs.

Le champ de vitesse virtuel pour un tel mouvement est, comme on l'a rappelé au paragraphe 2.2, défini par une formule telle que :

$$\underline{\hat{U}}(\underline{x}) = \underline{\hat{U}}_0 + \underline{\hat{\omega}}_0 \wedge \underline{OM} \tag{5.1}$$

où $\underline{\hat{U}}(\underline{x})$ est la vitesse au point courant M, O est un point géométrique donné, $\underline{\hat{U}}_0$ et $\underline{\hat{\omega}}_0$ sont deux vecteurs arbitraires de $\mathbb{R}^3$ qui représentent respectivement la vitesse virtuelle au point O et la vitesse de rotation virtuelle en ce point.

En introduisant, comme au chapitre III (§ 3.8), le tenseur du second ordre ***antisymétrique*** $\underline{\underline{\hat{\omega}}}_0$ défini à partir de $\underline{\hat{\omega}}_0$ par la formule canonique

$$\forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^3\ ,\ \underline{A} \wedge \underline{v} = \underline{\underline{A}} \,.\, \underline{v}\ ^{(8)}\ , \tag{5.2}$$

le champ de vitesse virtuel est alors également décrit par

$$\underline{\hat{U}}(\underline{x}) = \underline{\hat{U}}_0 + \underline{\underline{\hat{\omega}}}_0 \,.\, \underline{OM} \tag{5.3}$$

qui implique $\underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{\hat{U}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\hat{\omega}}}_0$.

On dit que $O, \underline{\hat{U}}_0, \underline{\hat{\omega}}_0$, définissent le ***distributeur*** de vitesse du champ $\underline{\hat{U}}$. Ce distributeur sera noté :

$$\{\hat{\mathcal{D}}\} = \{\, O\,,\, \underline{\hat{U}}_0\,,\, \underline{\hat{\omega}}_0\,\} = \{\, O\,,\, \underline{\hat{U}}_0\ ,\ \underline{\underline{\hat{\omega}}}_0\,\}\ . \tag{5.4}$$

$\underline{\hat{U}}_0$ et $\underline{\hat{\omega}}_0$ étant ses éléments de réduction au point O.

Ces formules mettent en évidence la dépendance linéaire des champs de vitesse $\underline{\hat{U}}$ des mouvements virtuels rigidifiants de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ en fonction des vecteurs $\underline{\hat{U}}_0$ et $\underline{\hat{\omega}}_0$ qui les définissent par rapport à un même point géométrique O.

L'ensemble de ces champs de vitesse, identifiable à l'ensemble des distributeurs, est un espace vectoriel de dimension 6.

(8) Dans une base orhonormée ***directe*** $(\underline{e}_1\,,\,\underline{e}_2\,,\,\underline{e}_3)$ la relation entre $\underline{\underline{\hat{\omega}}}_0$ et $\underline{\hat{\omega}}_0 = \hat{p}\,\underline{e}_1 + \hat{q}\,\underline{e}_2 + \hat{r}\,\underline{e}_3$ s'écrit : $\underline{\underline{\hat{\omega}}}_0 = -(\hat{p}\,(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2) + \hat{q}\,(\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3) + \hat{r}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1))$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Un même champ de vitesse virtuel rigidifiant $\hat{\underline{U}}$ peut évidemment être défini en se référant à un autre point O'. En appliquant la formule (5.1) il vient :

$$\hat{\underline{U}}_{0'} = \hat{\underline{U}}_0 + \hat{\underline{\omega}}_0 \wedge \underline{OO'}$$
$$\hat{\underline{U}}(\underline{x}) = \hat{\underline{U}}_{0'} + \hat{\underline{\omega}}_0 \wedge \underline{O'M}$$

d'où

$$(5.5)\quad \{\hat{\mathcal{D}}\} = \{\, O\,,\, \hat{\underline{U}}_0\,,\, \hat{\underline{\omega}}_0\,\} = \{\, O'\,,\, \hat{\underline{U}}_0 + \hat{\underline{\omega}}_0 \wedge \underline{OO'}\,,\, \hat{\underline{\omega}}_0\,\} = \{\, O'\,,\, \hat{\underline{U}}_0 + \underline{\underline{\omega}}_0 \cdot \underline{OO'}\,,\, \hat{\underline{\omega}}_0\,\}\,.$$

5.2 Torseurs

L'énoncé du principe des puissances virtuelles incite, pour connaître l'expression des puissances des divers efforts dans les mouvements virtuels rigidifiants, à étudier les ***formes linéaires*** sur l'espace vectoriel des champs de vitesse virtuels correspondants.

Soit $\mathcal{F}$ une forme linéaire quelconque sur l'espace vectoriel des mouvements virtuels rigidifiants. Considérant un distributeur $\{\hat{\mathcal{D}}\} = \{\, O\,,\, \hat{\underline{U}}_0\,,\, \hat{\underline{\omega}}_0\,\}$ et le champ de vitesse virtuel rigidifiant $\hat{\underline{U}}$ qu'il définit, $\mathcal{F}(\hat{\underline{U}})$ est nécessairement de la forme :

$$(5.6)\qquad \mathcal{F}(\hat{\underline{U}}) = \underline{F}_0 \cdot \hat{\underline{U}}_0 + \underline{C}_0 \cdot \hat{\underline{\omega}}_0\,,$$

forme linéaire de $\hat{\underline{U}}_0$ et $\hat{\underline{\omega}}_0$ qui est définie, par rapport au point O, par les vecteurs $\underline{F}_0$ et $\underline{C}_0$.

On dit que $\underline{F}_0$ et $\underline{C}_0$ sont les éléments de réduction en O du ***torseur*** noté $[\mathcal{F}]$:

$$(5.7)\qquad [\mathcal{F}] = [\, O\,,\, \underline{F}_0\,, \underline{C}_0\,]\,.$$

Le torseur $[\mathcal{F}]$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des distributeurs, et l'on note par :

$$(5.8)\qquad [\mathcal{F}]\,.\,\{\hat{\mathcal{D}}\} = [\, O, \underline{F}_0\,,\, \underline{C}_0\,]\,.\,\{\, O\,, \hat{\underline{U}}_0\,,\, \hat{\underline{\omega}}_0\,\} = \underline{F}_0 \cdot \hat{\underline{U}}_0 + \underline{C}_0 \cdot \hat{\underline{\omega}}_0$$

le produit de dualité correspondant.

Les torseurs ainsi définis par dualité sur l'espace vectoriel des distributeurs dépendent linéairement de leurs éléments de réduction en O et constituent un espace vectoriel de dimension 6.

La définition du même torseur $[\mathcal{F}]$ par rapport à un autre point O' s'obtient à partir de (5.3) et (5.8) en écrivant l'invariance du produit de dualité :

$$\forall \{\hat{\mathcal{D}}\} \qquad [\mathcal{F}]\,.\,\{\hat{\mathcal{D}}\} = \underline{F}_0 \cdot (\hat{\underline{U}}_{0'} - \hat{\underline{\omega}}_0 \wedge \underline{OO'}) + \underline{C}_0 \cdot \hat{\underline{\omega}}_0$$
$$= \underline{F}_0 \cdot \hat{\underline{U}}_{0'} + (\underline{C}_0 + \underline{O'O} \wedge \underline{F}_0) \cdot \hat{\underline{\omega}}_0\,.$$

Les éléments de réduction de $[\mathcal{F}]$ en O' sont $\underline{F}_{0'} = \underline{F}_0$ et $\underline{C}_{0'} = \underline{C}_0 + \underline{O'O} \wedge \underline{F}_0$ et en introduisant le tenseur du second ordre antisymétrique $\underline{\underline{F}}_0$ associé à $\underline{F}_0$ par (5.2) :

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

(5.9) $[\mathcal{F}] = [\,O, \underline{F}_0\,,\, \underline{C}_0\,] = [\,O'\,,\, \underline{F}_0\,,\, \underline{C}_0 + \underline{O'O} \wedge \underline{F}_0\,] = [\,O'\,,\, \underline{F}_0\,,\, \underline{C}_0 - \underline{\underline{F}}_0 \cdot \underline{O'O}\,]$ [(9)] .

5.3 Restriction d'une forme linéaire définie sur un espace de mouvements virtuels aux mouvements virtuels rigidifiants

Pour tout système $\mathcal{S}$ ou sous-système $\mathcal{S}'$ on a vu (cf. section 4) que l'espace vectoriel des mouvements virtuels introduit dans la modélisation pour l'application de la méthode des puissances virtuelles, quel qu'il soit, contient toujours l'espace vectoriel des mouvements rigidifiant le système ou le sous-système concerné. Cet espace est toujours identifiable à l'espace $\mathbb{R}^6$ des distributeurs $\{\hat{\mathcal{D}}\}$.

Il en résulte qu'une forme linéaire $\mathcal{P}$ définie sur l'espace des mouvements virtuels définit toujours, par sa restriction à l'espace des mouvements rigidifiants, un torseur $[\mathcal{F}]$.

L'identification de ce torseur se fait en explicitant le produit de dualité correspondant :

(5.10) $$\forall \{\hat{\mathcal{D}}\}\ ,\ [\mathcal{F}]\,.\,\{\hat{\mathcal{D}}\} = \mathcal{P}(\underline{\hat{U}}) \quad \text{pour } \mathcal{S}$$

(et formule homologue pour un sous-système $\mathcal{S}'$) où $\underline{\hat{U}}$ est la restriction à $\mathcal{S}$ (ou à $\mathcal{S}'$) du champ de vitesse engendré par $\{\hat{\mathcal{D}}\}$ dans $\mathbb{R}^3$.

5.4 Torseur d'un système de forces

L'étude du cas particulier des systèmes de ***forces*** permet de « concrétiser » la notion de torseur introduite au paragraphe (5.2).

On considère par exemple un système $\mathcal{S}$ pour lequel certains efforts sont représentés par un système de forces et de couples, concentrés et répartis :

- des forces ponctuelles $\underline{F}_i$ et des couples concentrés $\underline{C}_i$ en des points M_i ,
- des densités de forces et de couples, linéiques $\underline{F}_L(\underline{x})$ et $\underline{C}_L(\underline{x})$ sur des lignes L, surfaciques $\underline{F}_\Sigma(\underline{x})$ et $\underline{C}_\Sigma(\underline{x})$ sur des surfaces Σ, volumiques $\underline{F}_\Omega(\underline{x})$ et $\underline{C}_\Omega(\underline{x})$ sur des volumes Ω.

On désigne par $\mathcal{P}$ la forme linéaire qui exprime la puissance de ces efforts dans un mouvement virtuel quelconque de $\mathcal{S}$.

La restriction de $\mathcal{P}$ aux mouvements virtuels rigidifiants engendrés par les distributeurs $\{\hat{\mathcal{D}}\} = \{\,O\ ,\ \underline{\hat{U}}_0\ ,\ \underline{\hat{\omega}}_0\,\}$ selon la formule (5.1) s'écrit :

$$\mathcal{P}(\underline{\hat{U}}) = \sum \underline{F}_i \cdot \underline{\hat{U}}(\underline{x}_i) + \sum \underline{C}_i \cdot \underline{\hat{\omega}}_0 + \int_L (\underline{F}_L(\underline{x}) \cdot \underline{\hat{U}}(\underline{x}) + \underline{C}_L(\underline{x}) \cdot \underline{\hat{\omega}}_0)\, \mathrm{d}L + \int_\Sigma + \int_\Omega$$

[(9)] La comparaison des formules (5.3) et (5.9) montre que les règles opératoires pour les éléments de réduction du distributeur $\{\hat{\mathcal{D}}\} = \{\,O\ ,\ \underline{\hat{U}}_0\ ,\ \underline{\hat{\omega}}_0\,\}$ sont les mêmes que celles qui seraient appliquées aux éléments de réduction d'un ***torseur*** $[\hat{\mathcal{D}}]$ défini par $[\hat{\mathcal{D}}] = [\,O\ ,\ \underline{\hat{\omega}}_0\ ,\ \underline{\hat{U}}_0\,]$. Certains auteurs, après avoir introduit la notion de torseur pour un système de vecteurs (forces ; cf. § 5.4), tirent avantage de cette remarque pour définir les mouvements rigidifiants par des torseurs du type de $[\hat{\mathcal{D}}]$ ci-dessus.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

qui permet d'identifier selon (5.10) le torseur $[\mathcal{F}] = [\, O \,,\, \underline{F}_0 \,,\, \underline{C}_0 \,]$, appelé ***torseur du système de forces***. On trouve pour les éléments de réduction :

$$\underline{F}_0 = \sum \underline{F}_i + \int_L \underline{F}_L(\underline{x})\,\mathrm{d}L + \int_\Sigma \underline{F}_\Sigma(\underline{x})\,\mathrm{d}a + \int_\Omega \underline{F}_\Omega(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega \tag{5.11a}$$

(5.11b)

$$\begin{aligned}\underline{C}_0 = &\sum \underline{OM}_i \wedge \underline{F}_i + \int_L \underline{OM} \wedge \underline{F}_L(\underline{x})\,\mathrm{d}L + \int_\Sigma \underline{OM} \wedge \underline{F}_\Sigma(\underline{x})\,\mathrm{d}a + \int_\Omega \underline{OM} \wedge \underline{F}_\Omega(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega \\ &+ \sum \underline{C}_i + \int_L \underline{C}_L(\underline{x})\,\mathrm{d}L + \int_\Sigma \underline{C}_\Sigma(\underline{x})\,\mathrm{d}a + \int_\Omega \underline{C}_\Omega(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\underline{F}_0$ est la résultante du système de forces considéré et $\underline{C}_0$ son moment par rapport à O.

5.5 Champs de distributeurs et de torseurs ; dérivation

On rencontrera, dans la suite, des champs de distributeurs et des champs de torseurs, définis sur l'espace euclidien tridimensionnel (chapitre V, section 5) ou sur une variété unidimensionnelle dans cet espace (chapitre XI). D'autres exemples apparaissent aussi dans la modélisation des plaques, des coques, etc.

Définition

Prenant, pour fixer les idées, le cas de champs définis sur l'espace tridimensionnel on désigne par $\{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x})\}$ et $[\mathcal{F}(\underline{x})]$ les valeurs des champs notés $\{\hat{\mathcal{D}}\}$ et $[\mathcal{F}]$, au point courant $M(\underline{OM} = \underline{x})$.

En règle générale la définition de ces champs est donnée, de façon naturelle, par les champs de vecteurs $\underline{\hat{U}}$ et $\underline{\hat{\omega}}$ pour $\{\hat{\mathcal{D}}\}$, $\underline{F}$ et $\underline{C}$ pour $[\mathcal{F}]$ qui déterminent les ***éléments de réduction*** du distributeur $\{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x})\}$ ou du torseur $[\mathcal{F}(\underline{x})]$ ***au point courant*** M :

$$\{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x})\} = \{\, M \,,\, \underline{\hat{U}}(\underline{x}) \,,\, \underline{\hat{\omega}}(\underline{x}) \,\} \tag{5.12}$$

$$[\mathcal{F}(\underline{x})] = [\, M \,,\, \underline{F}(\underline{x}) \,,\, \underline{C}(\underline{x}) \,]\,. \tag{5.13}$$

Dérivée d'un champ de distributeurs

En supposant la dérivabilité des champs $\underline{\hat{U}}$ et $\underline{\hat{\omega}}$, la dérivée en M du champ de distributeur $\{\hat{\mathcal{D}}\}$ selon la direction $\underline{w}$ est le distributeur défini par le passage à la limite :

$$\mathrm{D}_{\underline{w}}\{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x})\} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x} + \lambda \underline{w})\} - \{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x})\}}{\lambda}\,. \tag{5.14}$$

Le calcul des éléments de réduction de ce distributeur en M nécessite d'expliciter cette formule après avoir transporté les éléments de réduction de $\{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x} + \lambda \underline{w})\}$ au point M par application de (5.5). On a ainsi :

$$\{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x} + \lambda \underline{w})\} = \{\, M \,,\, \underline{\hat{U}}(\underline{x} + \lambda \underline{w}) - \underline{\hat{\omega}}(\underline{x} + \lambda \underline{w}) \wedge \lambda \underline{w} \,,\, \underline{\hat{\omega}}(\underline{x} + \lambda \underline{w}) \,\} \tag{5.15}$$

et, en effectuant le passage à la limite :

$$\mathrm{D}_{\underline{w}}\{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x})\} = \{\, M \,,\, (\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, \underline{\hat{U}}(\underline{x}))\,.\,\underline{w} - \underline{\hat{\omega}}(\underline{x}) \wedge \underline{w} \,,\, (\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, \underline{\hat{\omega}}(\underline{x}))\,.\,\underline{w} \,\}\,. \tag{5.16}$$

En particulier, si $\underline{w}$ est un vecteur $\underline{e}_i$ d'une base en M, la formule (5.16) donne la dérivée partielle :

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x})\} = \left\{ M \,,\, \frac{\partial \underline{\hat{U}}(\underline{x})}{\partial x^i} + \underline{e}_i \wedge \underline{\hat{\omega}}(\underline{x}) \,,\, \frac{\partial \underline{\hat{\omega}}(\underline{x})}{\partial x^i} \right\}\,. \tag{5.17}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Dans le cas d'un champ de distributeurs défini sur une courbe de $\mathbb{R}^3$ en fonction de l'abscisse curviligne s du point courant M sur cette courbe, on obtient la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{\hat{\mathcal{D}}(s)\}$ par un calcul analogue au précédent. La formule, semblable à (5.17), s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{\hat{\mathcal{D}}(s)\} = \left\{ M\ ,\ \frac{\mathrm{d}\underline{\hat{U}}(s)}{\mathrm{d}s} + \underline{t}(s) \wedge \underline{\hat{\omega}}(s)\ ,\ \frac{\mathrm{d}\underline{\hat{\omega}}(s)}{\mathrm{d}s} \right\} \tag{5.18}$$

où $\underline{t}(s)$ désigne le vecteur unitaire tangent en M à la courbe, (cf. chapitre XI).

Gradient d'un champ de distributeurs

La formule (5.16) met en évidence la linéarité de $\mathrm{D}_{\underline{w}}\{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x})\}$ par rapport à $\underline{w}$. On définit ainsi le gradient en M du champ de distributeur $\{\hat{\mathcal{D}}\}$ noté grad $\{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x})\}$; c'est le ***distributeur tensoriel*** (cf. § 5.6) :

$$\text{grad } \{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x})\} = \{M\ ,\ \underline{\underline{\text{grad } \hat{U}}}(\underline{x}) - \underline{\underline{\hat{\omega}}}(\underline{x})\ ,\ \underline{\underline{\text{grad } \hat{\omega}}}(\underline{x})\}\ . \tag{5.19}$$

La formule grad $\{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x})\}\,.\,\underline{w} = \mathrm{D}_{\underline{w}}\{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x})\}$ est explicitée par (5.16) qui donne aussi, pour le transport des éléments de réduction du distributeur tensoriel grad $\{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x})\}$, les mêmes règles opératoires que pour $\{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x})\}$.

Dérivée d'un champ de torseurs

Les raisonnements précédents peuvent être repris avec les aménagements nécessaires dans le cas des champs de torseurs, en se référant en particulier à la formule (5.9) pour le transport des éléments de réduction.

On obtient le torseur $\mathrm{D}_{\underline{w}}[\mathcal{F}(\underline{x})]$, dérivée en M du champ $[\mathcal{F}]$ selon le vecteur $\underline{w}$:

$$\mathrm{D}_{\underline{w}}[\mathcal{F}(\underline{x})] = [M\ ,\ \underline{\underline{(\text{grad } F}}(\underline{x}))\,.\,\underline{w}\ ,\ \underline{\underline{(\text{grad } C}}(\underline{x}))\,.\,\underline{w} + \underline{w} \wedge \underline{F}(\underline{x})] \tag{5.20}$$

et la dérivée partielle :

$$\frac{\partial}{\partial x^i}[\mathcal{F}(\underline{x})] = \left[M\ ,\ \frac{\partial \underline{F}(\underline{x})}{\partial x^i}\ ,\ \frac{\partial \underline{C}(\underline{x})}{\partial x^i} + \underline{e}_i \wedge \underline{F}(\underline{x}) \right]\ . \tag{5.21}$$

Le gradient du champ de torseurs $[\mathcal{F}]$ en M est le ***torseur tensoriel*** (cf. § 5.6)

$$\text{grad } [\mathcal{F}(\underline{x})] = [\,M\ ,\ \underline{\underline{\text{grad } F}}(\underline{x})\ ,\ \underline{\underline{\text{grad } C}}(\underline{x}) - \underline{\underline{F}}\,(\underline{x})\,] \tag{5.22}$$

pour lequel la formule (5.20) explicite le produit grad $[\mathcal{F}(\underline{x})]\,.\,\underline{w} = \mathrm{D}_{\underline{w}}[\mathcal{F}(\underline{x})]$ et fournit les règles de transport des éléments de réduction.

Dans le cas d'un champ de torseurs défini sur une courbe de $\mathbb{R}^3$, on obtient la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\mathcal{F}(s)] = \left[M\ ,\ \frac{\mathrm{d}\underline{F}(s)}{\mathrm{d}s}\ ,\ \frac{\mathrm{d}\underline{C}(s)}{\mathrm{d}s} + \underline{t}(s) \wedge \underline{F}(s) \right] \tag{5.23}$$

où $\underline{t}(s)$ est le vecteur unitaire tangent à la courbe en M d'abscisse curviligne s, (cf. chapitre XI).

Commentaires

Les formules de dérivation démontrées ci-dessus vérifient évidemment la formule de dérivation du produit de dualité :

$$\mathrm{D}_{\underline{w}}([\mathcal{F}]\,.\,\{\hat{\mathcal{D}}\}) = \{\hat{\mathcal{D}}\}\,.\,\mathrm{D}_{\underline{w}}[\mathcal{F}] + [\mathcal{F}]\,.\,\mathrm{D}_{\underline{w}}\{\hat{\mathcal{D}}\} \tag{5.24}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ou, pour des champs définis sur une courbe :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}([\mathcal{F}(s)]\,.\,\{\hat{\mathcal{D}}(s)\}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\mathcal{F}(s)]\,.\,\{\hat{\mathcal{D}}(s)\} + [\mathcal{F}(s)]\,.\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{\hat{\mathcal{D}}(s)\} \tag{5.25}$$

qui sera utilisée au chapitre XI.

Le gradient du produit de dualité s'écrit

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}([\mathcal{F}]\,.\,\{\hat{\mathcal{D}}\}) &= \{\hat{\mathcal{D}}\}\,.\,\operatorname{grad}[\mathcal{F}] + [\mathcal{F}]\,.\,\operatorname{grad}\{\hat{\mathcal{D}}\} \\ &= {}^t\operatorname{grad}[\mathcal{F}]\,.\,\{\hat{\mathcal{D}}\} + [\mathcal{F}]\,.\,\operatorname{grad}\{\hat{\mathcal{D}}\}\end{aligned} \tag{5.26}$$

avec ${}^t\operatorname{grad}[\mathcal{F}] = \left[M, {}^t\underline{\underline{\operatorname{grad} F}}, {}^t\underline{\underline{\operatorname{grad} C}} - {}^t\underline{\underline{F}}\right]$ ou, de façon explicite,

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}([\mathcal{F}]\,.\,\{\hat{\mathcal{D}}\})(\underline{x}) = {}& \underline{\hat{U}}(\underline{x})\,.\,\underline{\underline{\operatorname{grad} F}}(\underline{x}) + \underline{F}(\underline{x})\,.\,\underline{\underline{\operatorname{grad} \hat{U}}}(\underline{x}) \\ & + \underline{\hat{\omega}}(\underline{x})\,.\,\underline{\underline{\operatorname{grad} C}}(\underline{x}) + \underline{C}(\underline{x})\,.\,\underline{\underline{\operatorname{grad} \hat{\omega}}}(\underline{x})\,.\end{aligned} \tag{5.27}$$

Comme cela est apparent sur les formules de dérivation ci-dessus, la constance d'un champ de distributeurs $\{\hat{\mathcal{D}}\}$ ou d'un champ de torseurs $[\mathcal{F}]$ n'implique pas, sauf cas particulier, la constance des champs $\underline{\hat{U}}$ et $\underline{\hat{\omega}}$ ou $\underline{F}$ et $\underline{C}$ qui le définissent par (5.12) ou (5.13). On sera ainsi amené, dans l'utilisation qui sera faite ultérieurement de ces concepts mathématiques, à rechercher où se situe la pertinence physique c'est-à-dire par exemple quel(s) champ(s), de $[\mathcal{F}]$ ou de $\underline{F}$ et $\underline{C}$, correspond(ent) à un concept mécanique du point de vue du matériau ou du système étudié. (Cf. chapitre XI, § 3.7 et 3.11, et chapitre XII, § 2.1).

5.6 Distributeurs et torseurs tensoriels

D'une façon générale un distributeur tensoriel $\{\mathbb{D}\} = \{O, \underline{\underline{A}}_0, \underline{\underline{B}}_0\}$ est défini comme un opérateur linéaire sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans l'espace vectoriel des distributeurs

$$\forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad \{\mathbb{D}(\underline{v})\} = \{O, \underline{\underline{A}}_0\,.\,\underline{v}, \underline{\underline{B}}_0\,.\,\underline{v}\} = \{\mathcal{D}\}\,. \tag{5.28}$$

Il en résulte, comme annoncé au § 5.5, que $\{\mathbb{D}\}$ obéit, pour le transport de ses éléments de réduction aux mêmes règles opératoires que les distributeurs. Il est commode pour établir ce résultat de mettre (5.5) sous la forme

$$\{\mathbb{D}\} = \{O', \underline{U}_0 - \underline{\underline{OO'}}\,.\,\underline{\omega}_0, \underline{\omega}_0\} \tag{5.29}$$

où $\underline{\underline{OO'}}$ est le tenseur antisymétrique associé à $\underline{OO'}$ par (5.2) ; on obtient alors aisément

$$\{\mathbb{D}\} = \{O, \underline{\underline{A}}_0, \underline{\underline{B}}_0\} = \{O', \underline{\underline{A}}_0 - \underline{\underline{OO'}}\,.\,\underline{\underline{B}}_0, \underline{\underline{B}}_0\}\,. \tag{5.30}$$

Un torseur tensoriel $[\mathbb{t}] = [O, \underline{\underline{t}}_0, \underline{\underline{c}}_0]$ est défini de façon semblable par

$$\forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad [\mathbb{t}(\underline{v})] = [O, \underline{\underline{t}}_0\,.\,\underline{v}, \underline{\underline{c}}_0\,.\,\underline{v}] = [\mathcal{F}] \tag{5.31}$$

qui obéit pour le transport de ses éléments de réduction aux règles opératoires des torseurs, résultat qui se démontre en mettant (5.9) sous la forme

$$[\mathcal{F}] = [O, \underline{F}_0, \underline{C}_0] = [O', \underline{F}_0, \underline{C}_0 + \underline{\underline{O'O}}\,.\,\underline{F}_0] \tag{5.32}$$

d'où

$$[\mathbb{t}] = [O, \underline{\underline{t}}_0, \underline{\underline{c}}_0] = [O', \underline{\underline{t}}_0, \underline{\underline{c}}_0 + \underline{\underline{O'O}}\,.\,\underline{\underline{t}}_0]\,. \tag{5.33}$$

Les espaces vectoriels des distributeurs et des torseurs tensoriels sont mis en dualité par le produit

$$\left\langle [\mathbb{t}] \,|\, \{\mathbb{D}\} \right\rangle = {}^t[\mathbb{t}] : \{\mathbb{D}\} = [O, {}^t\underline{\underline{t}}_0, {}^t\underline{\underline{c}}_0] : \{O, \underline{\underline{A}}_0, \underline{\underline{B}}_0\} = {}^t\underline{\underline{t}}_0 : \underline{\underline{A}}_0 + {}^t\underline{\underline{c}}_0 : \underline{\underline{B}}_0 \tag{5.34}$$

dont on vérifie l'invariance par les formules de transport (5.30) et (5.33).

Le chapitre V fera appel à cette théorie pour exprimer la puissance virtuelle des efforts intérieurs dans la modélisation des milieux tridimensionnels micropolaires.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

6 Résultats généraux

Le chapitre V sera consacré à la modélisation des efforts pour le milieu continu classique (essentiellement), par la méthode des puissances virtuelles. Cette méthode permet d'ores et déjà de dégager des ***résultats généraux*** immédiatement accessibles, c'est-à-dire sans qu'il soit besoin de préciser les espaces vectoriels des mouvements considérés dans la modélisation ni les formes linéaires construites sur ces espaces, et qui sont ***valables pour toute modélisation***.

6.1 Définition du système et des mouvements considérés

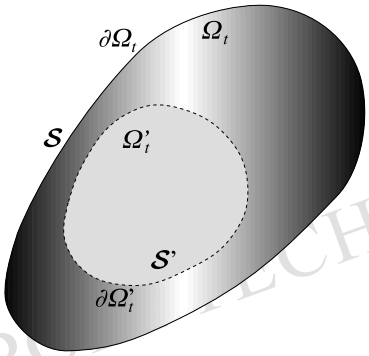


Figure 6 – Définition du système et des sous-systèmes

$\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ désignent respectivement le système considéré et un sous-système quelconque dont la figure 6 fournit une représentation schématique.

Les espaces vectoriels de mouvements réels et virtuels considérés satisfont aux conditions indiquées à la section 4 : l'espace vectoriel des mouvements virtuels contient l'espace vectoriel des mouvements réels, et contient les mouvements rigidifiants pour $\mathcal{S}$ (ou $\mathcal{S}'$).

6.2 Puissances virtuelles

On conserve pour les puissances virtuelles des divers types d'efforts et des quantités d'accélération les notations génériques de la section 4 : ce sont des formes linéaires sur l'espace vectoriel des mouvements virtuels.

Leurs restrictions aux sous-espaces vectoriels des mouvements rigidifiants définissent, comme indiqué au paragraphe 5.3, des ***torseurs***. Ainsi on définit et on identifie pour $\mathcal{S}$ ou pour $\mathcal{S}'$ quelconque :

le torseur des efforts extérieurs	$[\mathcal{F}_e]$ ou $[\mathcal{F}'_e]$,
le torseur des efforts intérieurs	$[\mathcal{F}_i]$ ou $[\mathcal{F}'_i]$,
le torseur des quantités d'accélération	$[\mathcal{M}\mathfrak{A}]$ ou $[\mathcal{M}\mathfrak{A}']$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

par les formules, pour $\mathcal{S}$:

$$\forall\{\hat{\mathcal{D}}\} \quad \begin{cases} [\mathcal{F}_e]\,.\,\{\hat{\mathcal{D}}\} = \mathcal{P}_{(e)}(\underline{\hat{U}})\ , \\ [\mathcal{F}_i]\,.\,\{\hat{\mathcal{D}}\} = \mathcal{P}_{(i)}(\underline{\hat{U}})\ , \\ [\mathcal{M}\mathfrak{A}]\,.\,\{\hat{\mathcal{D}}\} = \mathcal{A}(\underline{\hat{U}})\ , \end{cases} \tag{6.1}$$

et les formules homologues pour $\mathcal{S}'$, où $\underline{\hat{U}}$ désigne la restriction à $\mathcal{S}$ (ou à $\mathcal{S}'$) du champ de vitesse du mouvement virtuel rigidifiant défini par $\{\hat{\mathcal{D}}\}$.

6.3 Loi des actions mutuelles et loi fondamentale de la dynamique

L'application du principe des puissances virtuelles impose à ces torseurs des conditions nécessaires.

L'énoncé (4.1) implique immédiatement :

$$\forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}[\mathcal{F}'_i] = 0\ . \tag{6.2}$$

Autrement dit :

> ***pour $\mathcal{S}$ et pour tout sous-système $\mathcal{S}'$, le torseur des efforts intérieurs est nul.***

C'est la formulation de la **loi des actions mutuelles**.

L'énoncé (4.2), appliqué aux mouvements rigidifiants, implique ensuite, compte tenu de (6.2)

$$\begin{cases} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R}\ , \\ \text{pour } \mathcal{S} \qquad [\mathcal{F}_e] = [\mathcal{M}\mathfrak{A}] \\ \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \qquad [\mathcal{F}'_e] = [\mathcal{M}\mathfrak{A}']\ . \end{cases} \tag{6.3}$$

Autrement dit :

> ***en référentiel galiléen, pour $\mathcal{S}$ et pour tout sous-système $\mathcal{S}'$, le torseur des efforts extérieurs est égal au torseur des quantités d'accélération.***

C'est l'énoncé de la ***loi fondamentale de la dynamique*** pour $\mathcal{S}$ ou un sous-système quelconque $\mathcal{S}'$.

6.4 Commentaires

Il est essentiel de prendre garde à une ***interprétation erronée*** de ces résultats qui consisterait à croire que leur validité est restreinte aux seuls systèmes ou sous-systèmes indéformables ou encore aux systèmes ou sous-systèmes indéformés dans le

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

mouvement réel. Il s'agit là d'une confusion entre mouvements virtuels et mouvements réels : le fait d'exploiter le principe des puissances virtuelles sur le sous-espace des mouvements ***virtuels rigidifiant*** $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$) n'a aucune relation avec une quelconque indéformabilité du système dans son mouvement réel associé aux efforts considérés.

Bien au contraire, les énoncés (6.2) et (6.3) sont les résultats les plus généraux que l'on peut obtenir sans aucune hypothèse sur le choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels (étape ② de la méthode, § 4.2), ni sur la modélisation des efforts construits sur cet espace (étapes ③ à ⑤). Il s'agit d'énoncés à caractère global exprimés en termes de torseurs, qui s'imposent à toute modélisation des efforts mécaniquement cohérente. Ceci sera illustré dans la suite (chapitre V, § 2.6 et 3.4 ; chapitre XI, § 2.6 et 3.7).

Si l'on applique la loi fondamentale (6.3) à un système en équilibre dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ on a, dans ce référentiel :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{pour } \mathcal{S} & [\mathcal{F}_e] = 0 \\ \forall \mathcal{S}' & [\mathcal{F}'_e] = 0 \quad ; \end{array} \right. \tag{6.4}$$

on dit que (6.4) traduit « l'équilibre global » du système $\mathcal{S}$ ou du sous-système $\mathcal{S}'$ considéré : c'est la ***loi fondamentale de la statique***.

On vérifiera sans difficulté que la formulation (6.3) de la loi fondamentale permet de démontrer le résultat suivant : si l'on considère deux sous-systèmes disjoints $\mathcal{S}'_1$ et $\mathcal{S}'_2$ de $\mathcal{S}$ on a, avec des notations évidentes,

$$[\mathcal{F}_{21}] + [\mathcal{F}_{12}] = 0 \tag{6.5}$$

qui exprime le ***principe de l'action et de la réaction*** pour les deux sous-systèmes $\mathcal{S}'_1$ et $\mathcal{S}'_2$.

7 Théorèmes de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique

7.1 Définition du système et des mouvements considérés

On particularise maintenant l'analyse au cas du milieu continu classique dont la modélisation a été faite au chapitre I. La géométrie étant celle représentée à la figure 6, les mouvements réels sont définis par les champs de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$, supposés continus et différentiables [(10)], des particules constitutives du système dans la configuration actuelle.

L'espace vectoriel des mouvements virtuels est l'espace des champs de vecteurs $\underline{\hat{U}}$ définis sur Ω_t dont on précisera la continuité et la dérivabilité.

[(10)] Le cas où $\underline{U}$ est continu et différentiable, ***par morceaux***, est envisagé au paragraphe 7.6 de ce chapitre et au chapitre V (§ 3.9 et 3.11).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

7.2 Torseur des quantités d'accélération ; torseur des quantités de mouvement

Cette description précise la forme de la puissance virtuelle des quantités d'accélération.

$\rho(\underline{x},t)$ désigne la masse volumique du milieu au point géométrique M dans la configuration actuelle ; $\underline{a}(\underline{x},t) = \dfrac{\mathrm{d}\underline{U}(\underline{x},t)}{\mathrm{d}t}$ est l'accélération en ce point. La quantité d'accélération de l'élément de matière $\mathrm{d}m = \rho(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t$ est par définition :

$$\underline{a}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}m = \rho(\underline{x},t)\underline{a}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t = \mathrm{d}m\frac{\mathrm{d}\underline{U}(\underline{x},t)}{\mathrm{d}t}\ , \tag{7.1}$$

ce qui précise les formes linéaires $\mathcal{A}(\hat{\underline{U}})$ et $\mathcal{A}'(\hat{\underline{U}})$; pour $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{A}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)\underline{a}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t \tag{7.2}$$

et formule homologue pour $\mathcal{A}'(\hat{\underline{U}})$.

Le torseur des quantités d'accélération défini par (6.1) s'explicite alors comme indiqué au paragraphe 5.4 (torseur d'un système de forces) ; ainsi pour $\mathcal{S}$:

$$[\mathcal{M}\mathfrak{A}] = [\,O\ ,\ \underline{A}\ ,\ \underline{\delta}_0\,] \tag{7.3}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{A} = \displaystyle\int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)\underline{a}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_t} \underline{a}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}m \\ \underline{\delta}_0 = \displaystyle\int_{\Omega_t} \underline{OM}\wedge\rho(\underline{x},t)\underline{a}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_t} \underline{OM}\wedge\underline{a}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}m \end{array}\right. \tag{7.4}$$

et formules homologues pour $\mathcal{S}'$, sous-système quelconque.

On peut aussi définir la ***quantité de mouvement*** de l'élément de matière $\mathrm{d}m$:

$$\underline{U}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}m = \rho(\underline{x},t)\underline{U}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t \tag{7.5}$$

dont la quantité d'accélération est la dérivée particulaire. Ce champ de vecteurs définit lui aussi un torseur par la formule (5.12), appelé torseur des quantités de mouvement, noté $[\mathcal{M}\mathcal{U}]$ pour $\mathcal{S}$ et $[\mathcal{M}\mathcal{U}']$ pour $\mathcal{S}'$ quelconque, et dont les éléments de réduction sont :

$$[\mathcal{M}\mathcal{U}] = [\,O, \int_{\Omega_t} \underline{U}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}m\ ,\ \int_{\Omega_t} \underline{OM}\wedge\underline{U}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}m\,]\ . \tag{7.6}$$

On démontre alors l'identité, pour $\mathcal{S}$:

$$[\mathcal{M}\mathfrak{A}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathcal{M}\mathcal{U}] \tag{7.7}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

(formule homologue pour $\mathcal{S}'$ sous-système quelconque), où $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathcal{MU}]$ est le torseur, dérivée particulaire de $[\mathcal{MU}]$. Ce torseur s'explicite en effet sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathcal{MU}] = [\,O\,,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t}\underline{U}(\underline{x},t)\mathrm{d}m\,,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t}\underline{OM}\wedge\underline{U}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}m\,] \tag{7.8}$$

où l'on voit que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t}\underline{U}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}m = \int_{\Omega_t}\underline{a}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}m = \underline{A} \tag{7.9}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t}\underline{OM}\wedge\underline{U}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}m = \int_{\Omega_t}\big(\underline{U}(\underline{x},t)\wedge\underline{U}(\underline{x},t)+\underline{OM}\wedge\underline{a}(\underline{x},t)\big)\,\mathrm{d}m = \underline{\delta}_0\ , \tag{7.10}$$

ce qui démontre l'identité annoncée.

7.3 Conservation de la quantité de mouvement

L'identité (7.7) signifie que le torseur des dérivées particulaires des quantités de mouvement des éléments du système $\mathcal{S}$, c'est-à-dire $[\mathcal{MA}]$, est égal à la dérivée particulaire du torseur des quantités de mouvement des éléments du système $\mathcal{S}$.

On obtient ainsi une nouvelle expression de la loi fondamentale de la dynamique (6.3) :

(7.11)

en référentiel galiléen $\mathcal{R}$,

pour $\mathcal{S}$ $\quad [\mathcal{F}_e] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathcal{MU}]$

$\forall\mathcal{S}'$ $\quad [\mathcal{F}'_e] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathcal{MU}']$

En particulier, si le système $\mathcal{S}$ est ***isolé***, c'est-à-dire n'est soumis à aucune action extérieure, on a l'énoncé :

en référentiel galiléen le torseur des quantités de mouvement d'un système isolé se conserve.

Théorème du centre d'inertie

Considérant un sous-système $\mathcal{S}'$ quelconque de $\mathcal{S}$ on désigne par G' son centre d'inertie dans la configuration κ_t, c'est-à-dire le point géométrique dont le vecteur-position dans κ_t est défini par :

$$\underline{x}_{G'} = \frac{1}{\mathcal{M}'}\int_{\Omega'_t}\underline{x}\,\mathrm{d}m \tag{7.12}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

où $\mathcal{M}' = \int_{\Omega'_t} \mathrm{d}m$ désigne la masse de $\mathcal{S}'$.

L'évolution de ce ***point géométrique*** dans le mouvement réel du système permet d'en définir la vitesse $\underline{U}_{G'}$ et l'accélération $\underline{a}_{G'}$. Il vient immédiatement :

$$\underline{U}_{G'} = \frac{\mathrm{d}\underline{x}_{G'}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathcal{M}'} \int_{\Omega'_t} \underline{U}(\underline{x}, t)\, \mathrm{d}m \tag{7.13}$$

et

$$\underline{a}_{G'} = \frac{\mathrm{d}\underline{U}_{G'}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathcal{M}'} \int_{\Omega'_t} \underline{a}(\underline{x}, t)\, \mathrm{d}m\ , \tag{7.14}$$

c'est-à-dire, en se reportant à (7.6) et (7.4) que :

- la résultante du torseur $[\mathcal{M}\mathcal{U}']$ des quantités de mouvement de $\mathcal{S}'$, couramment appelée ***quantité de mouvement du sous-système*** $\mathcal{S}'$, est égale à la quantité de mouvement de la masse $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{S}'$ animée du mouvement du point géométrique G', centre d'inertie de ce sous-système ;

- de même la résultante $\underline{A}'$ de $[\mathcal{M}\mathfrak{A}']$, ***quantité d'accélération du sous-système*** $\mathcal{S}'$, est égale à la quantité d'accélération de la masse $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{S}'$ dans le mouvement du point géométrique G', centre d'inertie de $\mathcal{S}'$.

Ceci permet de déduire de la loi fondamentale sous ses formes (6.3) ou (7.11) un énoncé, homologue de (1.1), pour le mouvement du point géométrique, centre d'inertie de tout sous-système $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$.

$\underline{F}'_e$ désignant la résultante de $[\mathcal{F}'_e]$ on obtient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R}\ , \\ \forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}\ , \\ \underline{F}'_e = \mathcal{M}' \underline{a}_{G'} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{M}' \underline{U}_{G'})\ . \end{array} \right. \tag{7.15}$$

7.4 Théorème d'Euler

En supposant le champ de vitesse réel $\underline{U}$ continu et différentiable, on peut poursuivre la transformation de la formule (7.8) au moyen des expressions générales de la dérivée particulaire d'une intégrale de volume (chapitre III, formule (4.34)).

On a ainsi pour $\underline{A}$:

$$\underline{A} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial(\rho \underline{U})}{\partial t}\, \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} (\rho \underline{U} \otimes \underline{U}) \,.\, \underline{\mathrm{d}a} \tag{7.16}$$

où $\underline{\mathrm{d}a}$ désigne le vecteur-aire élémentaire au contour $\partial\Omega_t$ de Ω_t.

Pour $\underline{\delta}_0$ on obtient :

$$\underline{\delta}_0 = \int_{\Omega_t} \frac{\partial(\underline{OM} \wedge \rho \underline{U})}{\partial t}\, \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} (\underline{OM} \wedge \rho \underline{U})\, \underline{U} \,.\, \underline{\mathrm{d}a} \quad ; \tag{7.17}$$

or, dans la première intégrale on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\underline{OM} \wedge \rho \underline{U}) = \underline{OM} \wedge \frac{\partial(\rho \underline{U})}{\partial t}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

car $\dfrac{\partial(\underline{OM})}{\partial t} = 0$ (dérivée partielle par rapport à t, O et M ***étant fixés***) ; d'où :

$$\underline{\delta}_0 = \int_{\Omega_t} \underline{OM} \wedge \frac{\partial(\rho \underline{U})}{\partial t}\, \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{OM} \wedge (\rho \underline{U})\, \underline{U} \,.\, \underline{\mathrm{d}a}\ . \tag{7.18}$$

Ainsi, par les formules (7.16) et (7.18), $\underline{A}$ et $\underline{\delta}_0$ apparaissent comme les éléments de réduction en O (résultante et moment) du torseur constitué par :

la ***densité volumique*** de forces

$$\frac{\partial(\rho \underline{U})}{\partial t} \qquad \text{dans } \Omega_t \tag{7.19}$$

et la ***densité surfacique*** de forces [11]

$$(\rho \underline{U})\underline{U} \,.\, \underline{n} = \rho(\underline{U} \otimes \underline{U}) \,.\, \underline{n} \quad \text{sur } \partial\Omega_t\ . \tag{7.20}$$

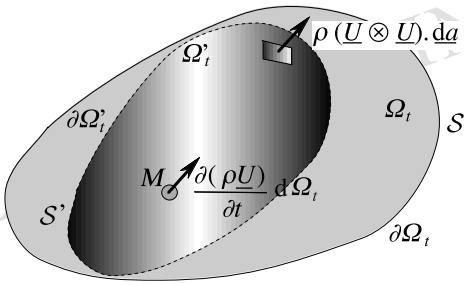


Figure 7 – Théorème d'Euler

On obtient donc une nouvelle expression de la loi fondamentale pour $\mathcal{S}$ (énoncé homologue pour $\mathcal{S}'$, sous-système quelconque de $\mathcal{S}$) :

(7.21)

> ***en référentiel galiléen*** $\mathcal{R}$,
> ***le torseur des efforts extérieurs*** $[\mathcal{F}_e]$ ***est égal à la somme***
> ***du torseur des forces*** $\dfrac{\partial(\rho \underline{U})}{\partial t}\, \mathrm{d}\Omega_t$ ***réparties dans le volume*** Ω_t ,
> ***et du torseur des forces*** $\rho(\underline{U} \otimes \underline{U}) \,.\, \underline{\mathrm{d}a}$ ***réparties au contour*** $\partial\Omega_t$.

Ce résultat constitue le ***théorème d'Euler*** où l'on remarque que $\rho(\underline{U} \otimes \underline{U}) \,.\, \underline{\mathrm{d}a}$ représente le flux sortant de quantité de mouvement à travers l'aire élémentaire da qui est toujours dirigé vers l'extérieur [12].

[11] Il s'agit bien de forces volumiques et surfaciques du point de vue des équations aux dimensions.
[12] On a en effet : $\underline{n} \,.\, \rho(\underline{U} \otimes \underline{U}) \,.\, \underline{n} = \rho(\underline{U} \,.\, \underline{n})^2 \geq 0$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

7.5 Théorème de l'énergie cinétique

Comme on l'a vu, les mouvements réels du système étudié appartiennent à l'espace vectoriel des mouvements virtuels considérés. En appliquant la proposition (4.1) du principe des puissances virtuelles au système $\mathcal{S}$ (ou à un sous-système $\mathcal{S}'$ quelconque) avec un mouvement réel $\underline{U}$ on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R} \ , \\ \mathcal{P}_{(e)}(\underline{U}) + \mathcal{P}_{(i)}(\underline{U}) = \mathcal{A}(\underline{U}) \ , \end{array} \right. \tag{7.22}$$

formule dans laquelle $\mathcal{P}_{(e)}(\underline{U})$ et $\mathcal{P}_{(i)}(\underline{U})$ représentent donc les puissances des efforts extérieurs et intérieurs au système $\mathcal{S}$ dans le mouvement réel $\underline{U}$, et où $\mathcal{A}(\underline{U})$ s'écrit, compte tenu de (7.2) :

$$\mathcal{A}(\underline{U}) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)\underline{a}(\underline{x},t) \,.\, \underline{U}(\underline{x},t)\, \mathrm{d}\Omega_t \tag{7.23}$$

soit encore

$$\mathcal{A}(\underline{U}) = \int_{\Omega_t} \underline{U}(\underline{x},t) \,.\, \frac{\mathrm{d}\underline{U}(\underline{x},t)}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}m \ . \tag{7.24}$$

En désignant par $K(\underline{U})$ l'***énergie cinétique*** du système $\mathcal{S}$ dans le mouvement réel $\underline{U}$:

$$K(\underline{U}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_t} \underline{U}^2(\underline{x},t)\, \mathrm{d}m \ , \tag{7.25}$$

on reconnaît dans (7.24) la dérivée particulaire de $K(\underline{U})$:

$$\mathcal{A}(\underline{U}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K(\underline{U}) \tag{7.26}$$

(formule homologue pour $\mathcal{S}'$, sous-système quelconque).

On obtient donc alors, à partir de (7.22), l'expression du théorème de l'énergie cinétique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R} \ , & \\ \text{pour } \mathcal{S} & \mathcal{P}_{(e)}(\underline{U}) + \mathcal{P}_{(i)}(\underline{U}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K(\underline{U}) \\ \forall \mathcal{S}' & \mathcal{P}'_{(e)}(\underline{U}) + \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K'(\underline{U}) \end{array} \right. \tag{7.27}$$

autrement dit :

> ***en référentiel galiléen, la dérivée particulaire de l'énergie cinétique de tout sous-système $\mathcal{S}'$ dans le mouvement réel est égale à la somme des puissances de tous les efforts, extérieurs et intérieurs à $\mathcal{S}'$, dans ce même mouvement.***

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

7.6 Champ de vitesse réel discontinu : ondes de choc

Puissances virtuelles des quantités de mouvement et des quantités d'accélération

On peut, de manière analogue à la puissance virtuelle des quantités d'accélération $\mathcal{A}(\underline{\hat{U}})$ donnée par (7.2), définir la puissance virtuelle des quantités de mouvement soit :

$$\mathcal{V}(\underline{\hat{U}}) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)\underline{U}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}\,\mathrm{d}\Omega_t \tag{7.28}$$

(et formule homologue pour $\mathcal{V}'(\underline{\hat{U}})$ relative à $\mathcal{S}'$, sous-système quelconque de $\mathcal{S}$).

Supposant d'abord le champ de vitesse virtuel $\underline{\hat{U}}$ continu et continûment différentiable, on remarque que, lorsque le champ de vitesse $\underline{U}$ est continu et continûment différentiable, $\mathcal{A}(\underline{\hat{U}})$ apparaît formellement comme la dérivée particulaire, calculée à ***l'instant*** t, de $\mathcal{V}(\underline{\hat{u}})$ où le champ $\underline{\hat{u}}$ est une ***fonction de*** x ***et de*** t ***astreinte à satisfaire à l'instant*** t :

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{\hat{u}}(\underline{x},t) = \underline{\hat{U}}(\underline{x}) \\ \dfrac{\mathrm{d}\underline{\hat{u}}(\underline{x},t)}{\mathrm{d}t} = 0 \end{array}\right. \tag{7.29}$$

c'est-à-dire que le champ $\underline{\hat{u}}$ est engendré par le champ virtuel $\underline{\hat{U}}$ entraîné par le mouvement ; en effet on a, compte tenu de (7.29)

$$\mathcal{A}(\underline{\hat{U}}) = \int_{\Omega_t} \frac{\mathrm{d}\underline{U}(\underline{x},t)}{\mathrm{d}t}\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\rho(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\mathrm{d}\big(\underline{U}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{u}}(\underline{x},t)\big)}{\mathrm{d}t}\,\rho(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t\ ,$$

soit :

$$\mathcal{A}(\underline{\hat{U}}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)\underline{U}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{u}}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{V}(\underline{\hat{u}})\ . \tag{7.30}$$

Lorsque le champ de vitesse virtuel $\underline{\hat{U}}$ est continu et continûment différentiable par morceaux, on vérifie, en appliquant la formule (4.36) du chapitre III pour le calcul de $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{V}(\underline{\hat{u}})$ que l'équation (7.30) demeure valable en raison des conditions (7.29) imposées au champ $\underline{\hat{u}}$: celles-ci impliquent en effet qu'à l'instant t la surface de discontinuité du champ $\underline{\hat{u}}$ suit le mouvement de la matière.

Expression de la puissance virtuelle des quantités d'accélération dans le cas des ondes de choc

Dans le cas où le champ de vitesse $\underline{U}$ est discontinu, la définition de $\mathcal{A}(\underline{\hat{U}})$ par la formule (7.2) est incomplète : des termes correspondant à la contribution de la discontinuité $[\![\,\underline{U}\,]\!]$ au franchissement des surfaces de discontinuité Σ_t doivent en effet y intervenir en plus des termes réguliers [13].

En revanche, la définition (7.28) de $\mathcal{V}(\underline{\hat{U}})$ n'est aucunement affectée par l'existence éventuelle de discontinuités de $\underline{U}$, pourvu qu'aucune des surfaces de discontinuité du champ virtuel $\underline{\hat{U}}$ ne coïncide avec celles du champ réel $\underline{U}$. L'idée est alors d'obtenir l'expression complète de $\mathcal{A}(\underline{\hat{U}})$ à partir de $\mathcal{V}(\underline{\hat{U}})$ en appliquant la formule (7.30), associée à (7.29), prise ainsi comme définition pour ces champs $\underline{\hat{U}}$.

Partant de (7.30) on doit effectuer le calcul de la dérivée particulaire. En se référant à la formule (4.36) du chapitre III, il vient, compte tenu de (7.29) et en simplifiant les notations :

$$\mathcal{A}(\underline{\hat{U}}) = \int_{\Omega_t} \Big(\frac{\mathrm{d}(\rho\underline{U})}{\mathrm{d}t}\,.\,\underline{\hat{U}} + (\rho\underline{U}\,.\,\underline{\hat{U}})\ \mathrm{div}\ \underline{U}\Big)\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_t} [\![\,\rho\underline{U}\,.\,\underline{\hat{U}}\,(\underline{U}-\underline{W})\,]\!]\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}\Sigma_t \tag{7.31}$$

[13] On rappelle que Σ_t désigne de façon générique les surfaces de discontinuité de $\underline{U}$ et que $\underline{W}$ est la vitesse de propagation de Σ_t : $\underline{W}$ est normale à Σ_t (cf. chapitre III, § 4.4).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

où $\underline{\hat{U}}$ est supposé continu au franchissement des surfaces de discontinuité Σ_t de $\underline{U}$.

En tenant compte de la conservation de la masse (formules (5.5) et (5.12) du chapitre III), il vient :

$$\mathcal{A}(\underline{\hat{U}}) = \int_{\Omega_t} \rho \frac{\mathrm{d}\underline{\underline{U}}}{\mathrm{d}t} \cdot \underline{\hat{U}} \, \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_t} \rho [\![\underline{U}]\!] \cdot \underline{\hat{U}} \, (\underline{U} - \underline{W}) \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}\Sigma_t \ .$$

On reconnaît dans cette expression de $\mathcal{A}(\underline{\hat{U}})$ le terme régulier de la formule (7.2) auquel s'ajoute le terme de discontinuité sur Σ_t qui est non nul dans le cas des ***ondes de choc*** (discontinuités de vitesse non stationnaires) :

$$\mathcal{A}(\underline{\hat{U}}) = \int_{\Omega_t} \rho \underline{a} \cdot \underline{\hat{U}} \, \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_t} \rho [\![\underline{U}]\!] \cdot \underline{\hat{U}} \, (\underline{U} - \underline{W}) \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}\Sigma_t \tag{7.32}$$

(formule homologue pour $\mathcal{A}'(\underline{\hat{U}})$) où $\underline{\hat{U}}$ est supposé continu sur Σ_t).

Conservation de la quantité de mouvement

La relation entre le torseur des quantités d'accélération et le torseur des quantités de mouvement se déduit directement des formules (7.30) et (7.29). En considérant un mouvement virtuel rigidifiant $\underline{\hat{U}}$ défini par $\{\hat{\mathcal{D}}\}$ quelconque on a :

$$[\mathcal{M}\mathfrak{A}] \cdot \{\hat{\mathcal{D}}\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} ([\mathcal{M}\mathcal{U}] \cdot \{\hat{d}\}) \tag{7.33}$$

où le distributeur $\{\hat{d}\}$, ***fonction de*** t est astreint à satisfaire vis-à-vis de $\{\hat{\mathcal{D}}\}$ les conditions homologues de (7.29) :

$$\begin{cases} \text{à l'instant } t \ , \\ \{\hat{d}\} = \{\hat{\mathcal{D}}\} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\hat{d}\} = 0 \end{cases} \tag{7.34}$$

d'où en explicitant (7.33) :

$$\forall \{\hat{\mathcal{D}}\} \ , \ [\mathcal{M}\mathfrak{A}] \cdot \{\hat{\mathcal{D}}\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [\mathcal{M}\mathcal{U}] \cdot \{\hat{\mathcal{D}}\} \ .$$

On retrouve l'identité (7.7), établie maintenant ***en présence d'onde de choc*** :

$$[\mathcal{M}\mathfrak{A}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [\mathcal{M}\mathcal{U}]$$

(énoncé homologue pour $\mathcal{S}'$, sous-système quelconque de $\mathcal{S}$), dont on déduit le théorème de la conservation de la quantité de mouvement sous la forme (7.11).

Théorème d'Euler

La formule (7.31) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\underline{\hat{U}}) = & \int_{\Omega_t} \Big(\frac{\partial(\rho \underline{U})}{\partial t} + \ \mathrm{div} \ (\rho \underline{U} \otimes \underline{U}) \Big) \cdot \underline{\hat{U}} \, \mathrm{d}\Omega_t \\ & + \int_{\Sigma_t} [\![\underline{\hat{U}} \cdot \rho \underline{U} \otimes \underline{U}]\!] \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}\Sigma_t - \int_{\Sigma_t} [\![\rho \underline{U}]\!] \cdot \underline{\hat{U}} \, W \, \mathrm{d}\Sigma_t \ . \end{aligned} \tag{7.35}$$

On peut alors identifier le torseur des quantités d'accélération en examinant l'expression de $\mathcal{A}(\underline{\hat{U}})$ pour les ***mouvements virtuels rigidifiants*** (cf. § 5.3).

Pour cela on rappelle l'identité :

$$\underline{\hat{U}} \cdot \ \mathrm{div} \ (\rho \underline{U} \otimes \underline{U}) \equiv \ \mathrm{div} \ \big(\underline{\hat{U}} \cdot (\rho \underline{U} \otimes \underline{U}) \big) - {}^t \underline{\underline{\mathrm{grad}}} \ \underline{\hat{U}} : (\rho \underline{U} \otimes \underline{U})$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

dont le dernier terme est nul lorsque $\hat{\underline{U}}$ est rigidifiant défini par $\{\hat{\mathcal{D}}\} = \{\, O\ ,\ \hat{\underline{U}}_0\ ,\ \hat{\underline{\omega}}_0\,\}$, car alors $\underline{\underline{\text{grad}}}\ \hat{U} = \hat{\underline{\underline{\omega}}}_0$ est antisymétrique.

On obtient ainsi, à partir de (7.35) :

$$\forall\{\hat{\mathcal{D}}\}\ ,\ [\mathcal{MA}]\,.\,\{\hat{\mathcal{D}}\} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial(\rho\underline{U})}{\partial t}\,.\,\hat{\underline{U}}\,\mathrm{d}\Omega_t + \left[\int_{\Omega_t} \text{div}\ (\hat{\underline{U}}\,.\,(\rho\underline{U}\otimes\underline{U}))\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_t} [\![\,\hat{\underline{U}}\,.\,\rho\underline{U}\otimes\underline{U}\,]\!]\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}\Sigma_t\right] - \int_{\Sigma_t} [\![\,\rho\underline{U}\,]\!]\,.\,\hat{\underline{U}}\,W\,\mathrm{d}\Sigma_t\ .$$

Dans cette formule, le terme entre crochets se transforme par application de la formule de la divergence pour les fonctions continues et continûment différentiables ***par morceaux*** (cf. chapitre III, formule (4.35)) ; il vient :

(7.36)

$$\forall\{\hat{\mathcal{D}}\}\ ,\ [\mathcal{MA}]\,.\,\{\hat{\mathcal{D}}\} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial(\rho\underline{U})}{\partial t}\,.\,\hat{\underline{U}}\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \hat{\underline{U}}\,.\,(\rho\underline{U}\otimes\underline{U})\,.\,\underline{\mathrm{d}a} - \int_{\Sigma_t} \hat{\underline{U}}\,.\,[\![\,\rho\underline{U}\,]\!]\,W\,\mathrm{d}\Sigma_t\ .$$

Il en résulte que le ***torseur*** $[\mathcal{MA}]$ des quantités d'accélération est défini par le système de forces suivant :

la ***densité volumique*** de forces :

$$\frac{\partial(\rho\underline{U})}{\partial t} \qquad \text{dans } \Omega_t\ , \tag{7.37}$$

la ***densité surfacique*** de forces

$$\rho(\underline{U}\otimes\underline{U})\,.\,\underline{n} \qquad \text{sur } \partial\Omega_t\ , \tag{7.38}$$

et la ***densité surfacique*** de forces

$$-[\![\,\rho\underline{U}\,]\!]\,W \quad \text{sur } \Sigma_t \tag{7.39}$$

(énoncé homologue pour $\mathcal{S}'$, sous-système quelconque de $\mathcal{S}$).

L'énoncé du théorème d'Euler doit donc être complété en présence d'ondes de choc par l'addition dans la formule (7.21) du terme (7.39) qui représente les forces surfaciques sur les surfaces d'onde, dues à la discontinuité de $\underline{U}$.

Théorème de l'énergie cinétique

La formule (7.32) ne permet évidemment pas le calcul de la puissance des quantités d'accélération dans le champ de vitesse réel puisqu'elle suppose le champ $\hat{\underline{U}}$ continu sur Σ_t. Les expressions de $\mathcal{A}(\underline{U})$ et $\mathcal{A}'(\underline{U})$ s'obtiennent alors en partant de la formule (7.26) prise comme définition :

$$\mathcal{A}(\underline{U}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(\underline{U}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t}\frac{1}{2}\rho(\underline{x},t)\underline{U}^2(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t \tag{7.40}$$

(formule homologue pour $\mathcal{A}'(\underline{U})$).

En explicitant la dérivée particulaire ci-dessus par la formule (4.36) du chapitre III on obtient

$$\mathcal{A}(\underline{U}) = \int_{\Omega_t}\rho\underline{a}\,.\,\underline{U}\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_t}\rho\frac{[\![\,\underline{U}^2\,]\!]}{2}(\underline{U}-\underline{W})\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}\Sigma_t \tag{7.41}$$

(formule homologue pour $\mathcal{A}'(\underline{U})$) où l'on reconnaît, en plus du terme régulier de la formule (7.23), le terme de discontinuité sur Σ_t qui est non nul dans le cas des ondes de choc. On

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

peut aussi remarquer que l'expression (7.41) de $\mathcal{A}(\underline{U})$ s'obtient formellement à partir de (7.32) pour $\mathcal{A}(\underline{\hat{U}})$ en y remplaçant, sur Σ_t, $\underline{\hat{U}}$ par la moyenne $(\underline{U}_1 + \underline{U}_2)/2$ des valeurs de $\underline{U}$ de part et d'autre de Σ_t .

Compte tenu de la définition (7.40) ainsi adoptée pour $\mathcal{A}(\underline{U})$ à partir de $K(\underline{U})$ le théorème de l'énergie cinétique apparaît comme la formulation de l'énoncé des puissances virtuelles appliqué au mouvement réel, sous réserve que les formes linéaires exprimant les puissances virtuelles des efforts extérieurs et des efforts intérieurs soient définies sur le mouvement réel ; en fait on verra au chapitre V (§ 3.11) que c'est à travers le théorème de l'énergie cinétique que l'on obtient alors l'expression de la puissance des efforts intérieurs dans le champ de vitesse réel.

Remarque

On rencontre ici une manifestation du « particularisme » des mouvements réels annoncé dans la section 4, à propos de l'écriture de la forme linéaire exprimant la puissance virtuelle des quantités d'accélération. Lorsque le champ de vitesse réel $\underline{U}$ est continu et continûment différentiable, $\mathcal{A}(\underline{\hat{U}})$ est définie par (7.30) pour tous les champs $\underline{\hat{U}}$ continus et continûment différentiables, par morceaux, ce qui comprend le champ $\underline{U}$ lui-même.

En revanche, lorsque le champ de vitesse réel $\underline{U}$ est discontinu, cette définition explicitée par (7.31) ou (7.32) n'est valable que pour les champs de vitesse virtuels $\underline{\hat{U}}$ dont les surfaces de discontinuité sont distinctes de celles de $\underline{U}$, ce qui exclut notamment de choisir pour $\underline{\hat{U}}$ le champ $\underline{U}$ lui-même. La définition de $\mathcal{A}(\underline{U})$ procède alors de la dérivation particulaire de l'énergie cinétique explicitée par (7.41). Le résultat ainsi obtenu permet ensuite, par linéarité, de calculer la puissance virtuelle des quantités d'accélération pour les champs $\underline{\hat{U}}$ dont des surfaces de discontinuité coïncident avec celles de $\underline{U}$.

On doit évidemment se poser la question de la cohérence de ces définitions avec la continuité de la forme linéaire $\mathcal{A}$. D'une façon générale cette cohérence est assurée par la formulation suivante.

La puissance virtuelle des quantités de mouvement, $\mathcal{V}(\underline{\hat{U}})$, est une forme bilinéaire continue sur l'espace produit des champs de vitesse réels et des champs de vitesse virtuels [14] :

$$\mathcal{V}(\underline{\hat{U}}) = \mathcal{K}(\underline{U}, \underline{\hat{U}}) \tag{7.42}$$

(formule homologue pour $\mathcal{V}'(\underline{\hat{U}})$), dont la forme quadratique associée est supposée définie positive. L'énergie cinétique du système dans le mouvement réel est :

$$K(\underline{U}) = \frac{1}{2}\mathcal{K}(\underline{U}, \underline{U}) \ . \tag{7.43}$$

La puissance virtuelle des quantités d'accélération est définie par (7.29 et 7.30), d'où :

$$\mathcal{A}(\underline{\hat{U}}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{K}(\underline{U}, \underline{\hat{u}}) \quad \text{sous (7.29)} \tag{7.44}$$

lorsque les champs virtuels $\underline{\hat{U}}$ sont continus au franchissement des surfaces de discontinuité de $\underline{U}$; et la puissance des quantités d'accélération dans le mouvement réel est définie par (7.40), d'où :

$$\mathcal{A}(\underline{U}) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{K}(\underline{U}, \underline{U}) \ . \tag{7.45}$$

[14] Cf. ***Mécanique***, tome I, chapitre III, par Paul Germain, Ellipses, 1986.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

8 Et maintenant...

La méthode des puissances virtuelles sera utilisée dans la suite pour la construction de diverses modélisations des efforts :

au chapitre V, où l'on s'intéressera au milieu continu classique avec un « clin d'œil » vers les milieux micropolaires ;

au chapitre XI, pour les milieux curvilignes, où après l'étude des fils, variété unidimensionnelle de milieu continu classique, on modélisera les poutres, variété concrète de milieux micropolaires.

Pour le mécanicien l'intérêt de l'approche « puissances virtuelles » ne se limite pas à ce type d'application ! En effet une fois la modélisation des efforts écrite et acquise, le principe des puissances virtuelles est l'instrument privilégié pour la dualisation des équations, fondement des méthodes variationnelles de résolution, comme on le verra au chapitre X dans le cas de l'élasticité.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Récapitulatif des formules essentielles

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

• ***Principe des puissances virtuelles***

$$\begin{cases} \forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \ , \\ \forall \hat{\underline{\mathbf{U}}} \text{ m.v.r. } \mathcal{S}' \quad , \quad \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{\mathbf{U}}}) = 0 \end{cases}$$

en référentiel galiléen $\mathcal{R}$,

$$\begin{cases} \text{pour } \mathcal{S} \ , \\ \forall \hat{\underline{\mathbf{U}}} \text{ m.v.} \quad , \quad \mathcal{P}_{(e)}(\hat{\underline{\mathbf{U}}}) + \mathcal{P}_{(i)}(\hat{\underline{\mathbf{U}}}) = \mathcal{A}(\hat{\underline{\mathbf{U}}}) \\ \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \ , \\ \forall \hat{\underline{\mathbf{U}}} \text{ m.v.} \quad , \quad \mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\underline{\mathbf{U}}}) + \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{\mathbf{U}}}) = \mathcal{A}'(\hat{\underline{\mathbf{U}}}) \end{cases}$$

• ***Distributeurs et torseurs***

$$\{\hat{\mathcal{D}}\} = \{ O \ , \ \underline{\hat{U}}_0 \ , \ \underline{\hat{\omega}}_0 \} = \{ O' \ , \ \underline{\hat{U}}_0 + \underline{\hat{\omega}}_0 \wedge \underline{OO'} \ , \ \underline{\hat{\omega}}_0 \}$$

$$[\mathcal{F}] = [O \ , \ \underline{F}_0 \ , \ \underline{C}_0] = [O' \ , \ \underline{F}_0 \ , \ \underline{C}_0 + \underline{O'O} \wedge \underline{F}_0]$$

$$[\mathcal{F}] \, . \, \{\hat{\mathcal{D}}\} = \underline{F}_0 \cdot \underline{\hat{U}}_0 + \underline{C}_0 \cdot \underline{\hat{\omega}}_0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \{\hat{\mathcal{D}}(\underline{x})\} = \left\{ M \ , \ \frac{\partial \underline{\hat{U}}(\underline{x})}{\partial x^i} + \underline{e}_i \wedge \underline{\hat{\omega}}(\underline{x}) \ , \ \frac{\partial \underline{\hat{\omega}}(\underline{x})}{\partial x^i} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} [\mathcal{F}(\underline{x})] = \left[M \ , \ \frac{\partial \underline{F}(\underline{x})}{\partial x^i} \ , \ \frac{\partial \underline{C}(\underline{x})}{\partial x^i} + \underline{e}_i \wedge \underline{F}(\underline{x}) \right]$$

$$\text{grad} \left([\mathcal{F}] \, . \, \{ \hat{\mathcal{D}} \} \right) = {}^t \text{grad} [\mathcal{F}] \, . \, \{ \hat{\mathcal{D}} \} + [\mathcal{F}] \, . \, \text{grad} \{ \hat{\mathcal{D}} \}$$

• ***Résultats généraux***

loi fondamentale :

$$\begin{cases} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R} \ , \\ [\mathcal{F}_e] = [\mathcal{M}\mathfrak{A}] \\ [\mathcal{F}'_e] = [\mathcal{M}\mathfrak{A}'] \end{cases}$$

loi des actions mutuelles :

$$[\mathcal{F}'_i] = 0$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- ***Conservation de la quantité de mouvement***

  en référentiel galiléen $\mathcal{R}$,

  $$[\mathcal{F}_e] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathcal{MU}]$$
  $$[\mathcal{F}'_e] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathcal{MU}']$$

- ***Théorème d'Euler***

  en référentiel galiléen $\mathcal{R}$,

  $$\forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \ , \ [\mathcal{F}'_e] = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\partial(\rho \underline{U})}{\partial t} \, \mathrm{d}\Omega_t & \text{sur } \Omega'_t \ , \\ \rho(\underline{U} \otimes \underline{U}) \, . \, \underline{\mathrm{d}a} & \text{sur } \partial\Omega'_t \ , \\ -[\![\, \rho \underline{U} \,]\!] \, W \, \mathrm{d}\Sigma_t & \text{sur } \Sigma'_t \text{ si onde de choc} \end{array} \right]$$

- ***Théorème de l'énergie cinétique***

  $$K'(\underline{U}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{U}^2(\underline{x}, t) \, \mathrm{d}\Omega_t$$

  en référentiel galiléen $\mathcal{R}$,

  $$\forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \ , \ \mathcal{P}'_{(e)}(\underline{U}) + \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K'(\underline{U}) \ .$$

- ***Changement de référentiel***

  $$\underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}^*(\underline{x}^*) + \underline{U}_{\mathrm{e}}(\underline{x}^*)$$
  $$\underline{a}(\underline{x}) = \underline{a}^*(\underline{x}^*) + \underline{a}_{\mathrm{e}}(\underline{x}^*) + 2 \, \underline{\omega}_{\mathrm{e}} \wedge \underline{U}^*(\underline{x}^*)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Exercices

IV.1 - Statique des fils : chapitre XI, section 2.

IV.2 - Dynamique des fluides parfaits : chapitre V, section 2.

IV.3 - Statique des poutres : chapitre XI, section 3.

IV.4 - Dynamique des milieux continus : chapitre V, section 3.

IV.5 - Théorème d'Euler : Ex.V.7, Ex.V.8.

IV.6 - Conditions de compatibilité géométrique : Ex. XI.4, Ex. XI. 9, Ex. XI.13.

IV.7 - Calcul à la rupture : Ex.VI.12, Ex.VI.13, Ex. XI.11 à 13.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Chapitre V

Modélisation des efforts pour le milieu continu

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MOTS CLÉS

Forces volumiques. Forces surfaciques.
Pression. Fluide parfait. Fluide visqueux.
Statique des fluides.
Tenseur des contraintes de Cauchy.
Actions de contact. Vecteur-contrainte. Facette.
Équations de la dynamique.
Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En bref...

La construction de la modélisation des efforts en mécanique des milieux continus classique part de la modélisation géométrique : les mouvements réels d'un système sont définis, en description eulérienne, par le champ des vitesses des particules donné sur la configuration actuelle.

Pour l'application de la méthode des puissances virtuelles on choisit, comme espace vectoriel des mouvements virtuels, l'ensemble des champs de vecteurs (vitesses virtuelles) continus et continûment différentiables définis sur la configuration actuelle du système et on élargit ensuite cet espace aux *champs de vecteurs continus et continûment différentiables par morceaux*.

Les efforts extérieurs au système étudié sont modélisés, à travers l'expression de leur puissance virtuelle, par des *densités de forces, volumiques* à l'intérieur du système, et *surfaciques* à son contour. Pour un sous-système quelconque, on fait l'hypothèse que les efforts extérieurs (au sous-système) se décomposent de la même façon. On suppose, de plus, que les particules du système n'exercent *aucun effort à distance* les unes sur les autres.

On postule que la puissance virtuelle des efforts intérieurs se met sous la forme d'une *densité volumique*, indépendante du sous-système considéré, qui est une forme linéaire des valeurs locales du champ de vitesse virtuel et de son gradient. La mise en œuvre du principe des puissances virtuelles précise d'abord l'expression de cette densité de façon à satisfaire la loi des actions mutuelles. On vérifie ensuite que les hypothèses faites dans l'écriture des formes linéaires, qui expriment les diverses puissances virtuelles, sont cohérentes entre elles : on obtient les équations de la dynamique pour le système et pour un sous-système quelconque et on montre que les efforts intérieurs ainsi modélisés correspondent effectivement à des *actions de contact* entre les particules du système (sections 2 et 3)**.**

Dans une première approche les efforts intérieurs sont modélisés par le champ d'un *scalaire* qui est, dans la densité de puissance virtuelle correspondante, la variable duale du taux virtuel de dilatation volumique. Les équations de la dynamique déterminent le gradient de ce champ scalaire et définissent les équations au contour du système ou d'un sous-système quelconque. L'interprétation mécanique conduite à partir de ces équations

identifie le concept de *pression*. Les conditions de compatibilité sur les données imposées par les équations de la dynamique, notamment la condition de normalité des efforts surfaciques au contour du système, montrent les limitations de ce modèle dont le domaine de pertinence couvre néanmoins les *fluides parfaits* et la *statique des fluides* en général (section 2).

L'approche la plus générale dans le cadre fixé par le choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels modélise les efforts intérieurs par le champ d'un *tenseur du deuxième ordre, nécessairement symétrique* pour respecter la loi des actions mutuelles. Ce tenseur est, dans la densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs, la variable duale du taux de déformation virtuel (au signe près). Les équations de la dynamique fournissent, pour ce champ tensoriel symétrique, trois équations aux dérivées partielles du premier ordre et trois équations au contour du système ou d'un sous-système quelconque.

L'interprétation mécanique de la modélisation montre que les efforts intérieurs, réduits à des actions de contact entre les particules du système, sont schématisés de la façon suivante : les particules situées de part et d'autre d'un élément géométrique plan à l'intérieur du système, infiniment près de celui-ci, exercent les unes sur les autres des efforts représentés par des forces surfaciques distribuées sur cet élément appelé aussi « *facette* ». La densité surfacique correspondante est le « *vecteur-contrainte* » sur la facette. Le champ tensoriel symétrique de la modélisation est le *champ des tenseurs des contraintes de Cauchy* (section 3).

La modélisation des efforts intérieurs est naturellement faite sur la configuration actuelle. Le transport, sur la configuration initiale de référence, de l'intégrale donnant la puissance des efforts intérieurs fait apparaître que le taux de déformation lagrangien y est associé par dualité à un tenseur symétrique qui est, de ce point de vue, l'homologue du tenseur des contraintes de Cauchy : c'est le *tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff* (section 4).

Le concept de contrainte, caractéristique de la mécanique des milieux continus classique, se révèle pertinent pour un très grand nombre de problèmes, associé à des matériaux divers (fluides et solides, homogènes ou composites) et à des échelles variées, bien que les phénomènes physiques microscopiques qu'il modélise ainsi à travers la notion d'efforts intérieurs puissent être de natures différentes (section 5).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Principales notations

Notation	Signification	1ère formule
$\underline{F}(\underline{x},t)$	force massique	(2.4)
$\underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t)$	force surfacique au contour de S	(2.5)
$\underline{\mathrm{d}f}_{\Omega}$	force de surface élémentaire au contour de S	(2.5)
$\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)$	force surfacique au contour de S'	(2.8)
$\underline{\mathrm{d}f}_{\Omega'}$	force de surface élémentaire au contour de S'	(2.8)
$p(\underline{x},t)$	pression	(2.14)
$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$	tenseur des contraintes de Cauchy	(3.8)
$\underline{T}(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x}))$	vecteur-contrainte	(3.18)
$\underline{\underline{\pi}}(\underline{X},t)$	tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff	(4.10)
$\underline{\underline{B}}(\underline{X},t)$	tenseur des contraintes de Piola-Lagrange	(4.19)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Position du problème 193
2 Modélisation des efforts intérieurs par un champ scalaire : la pression 194
2.1 Mouvements virtuels. Puissance virtuelle des quantités d'accélération 194
2.2 Puissance virtuelle des efforts extérieurs 195
2.3 Puissance virtuelle des efforts intérieurs 198
2.4 Équations de la dynamique 199
2.5 Pertinence du modèle : champ de pression 202
2.6 Loi fondamentale de la dynamique 203
2.7 Champ de vitesse virtuel discontinu 203
3 Modélisation des efforts intérieurs par un champ tensoriel : les contraintes 206
3.1 Mouvements virtuels. Puissances virtuelles des quantités d'accélération et des efforts extérieurs 206
3.2 Puissance virtuelle des efforts intérieurs 207
3.3 Équations de la dynamique 208
3.4 Commentaires 210
3.5 Tenseur des contraintes de Cauchy. Vecteur-contrainte . . 212
3.6 Modélisation des efforts intérieurs à un milieu continu à partir du concept de vecteur-contrainte 215
3.7 Expressions explicites des équations de la dynamique . . . 218
3.8 Champ de vitesse virtuel discontinu 219
3.9 Discontinuités du champ de contrainte 221
3.10 Théorème d'Euler 225
3.11 Théorème de l'énergie cinétique 227
3.12 Puissance de déformation 228
3.13 Retour sur la compatibilité géométrique : formulation faible 228
3.14 Formulation faible des équations de la dynamique 229
3.15 Objectivité du tenseur des contraintes de Cauchy 229
4 Les contraintes en description lagrangienne 230
4.1 Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 230
4.2 Tenseur des contraintes de Piola-Lagrange. Équations de la dynamique 233
5 Bilan et perspectives 235
5.1 Mécaniciens et Physiciens... 235
5.2 Tableau récapitulatif 236
5.3 Milieux micropolaires 237
Récapitulatif des formules essentielles 241
Exercices 243

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Modélisation des efforts pour le milieu continu

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Position du problème

La mise en œuvre de la méthode des puissances virtuelles a permis dans la section 6 du chapitre précédent de dégager des énoncés généraux, exprimés en termes de torseurs, qui s'imposent à toute modélisation :

- La loi des actions mutuelles, équivalente à l'énoncé (4.1 du chapitre IV) qui exprime la nullité de la puissance virtuelle des efforts intérieurs dans tout mouvement rigidifiant,

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} \text{pour } \mathcal{S} & [\mathcal{F}_i] = 0 \\ \forall \mathcal{S}' & [\mathcal{F}'_i] = 0 \ , \end{cases}$$

- la loi fondamentale de la dynamique,

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{cases} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R} \ , \\ \text{pour } \mathcal{S} \quad [\mathcal{F}_e] = [\mathcal{M}\mathfrak{A}] \\ \forall \mathcal{S}' \qquad [\mathcal{F}'_e] = [\mathcal{M}\mathfrak{A}'] \ . \end{cases}$$

On s'est ensuite intéressé au milieu continu, dans la modélisation géométrique qui en a été introduite au chapitre I, obtenant ainsi les théorèmes de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique.

On se propose maintenant, en précisant les expressions des formes linéaires $\mathcal{P}_{(e)}$ et $\mathcal{P}'_{(e)}$, $\mathcal{P}_{(i)}$ et $\mathcal{P}'_{(i)}$, d'aboutir à travers la méthode des puissances virtuelles, à la modélisation des efforts extérieurs et intérieurs pour le milieu continu. Les choix successifs qui seront faits ici permettront de dégager deux modèles « emboîtés », distincts pour la modélisation des efforts intérieurs :

> d'abord, la représentation des efforts intérieurs par un champ scalaire identifiable à la ***pression***, modélisation adaptée aux fluides parfaits et à la statique des fluides en général,
>
> puis la représentation par un champ tensoriel d'ordre deux, appelé champ de ***contrainte***, qui est la modélisation générale pour la mécanique des milieux continus tridimensionnels classique.

On a, au chapitre IV (section 4), donné une démarche très systématique pour l'application de la méthode des puissances virtuelles, dans laquelle les expressions des

puissances virtuelles des quantités d'accélération, des efforts extérieurs et des efforts intérieurs sont écrites préalablement à (et indépendamment de) toute application des énoncés (4.1) et (4.2). Il va de soi que cette formulation ne visait qu'à une présentation claire et n'a rien de contraignant : il sera souvent avantageux de tenir compte de l'énoncé (4.1), ou de la loi des actions mutuelles qui lui est équivalente (1.1), par exemple dès l'expression de la puissance des efforts intérieurs, de façon à ne pas introduire des termes a priori inutiles. C'est de cette façon que l'on appliquera la méthode dans la suite.

Enfin, on rappelle que l'énoncé (4.2) du principe des puissances virtuelles se réfère à un référentiel galiléen (ou absolu) ; cette condition ne sera plus mentionnée dans toute la suite mais sera sous-entendue à chaque application de la méthode : toutes les équations obtenues (équations de la dynamique) supposeront que le mouvement du système est observé dans un référentiel galiléen.

2 Modélisation des efforts intérieurs par un champ scalaire : la pression

Le système considéré est décrit comme au chapitre IV (section 7) dans la configuration actuelle κ_t par le volume Ω_t, occupé par ses particules ; $\partial\Omega_t$ en désigne la frontière. De même pour un sous-système : Ω'_t , $\partial\Omega'_t$.

Les mouvements réels, qui correspondent à la modélisation géométrique du milieu continu telle qu'elle a été construite au chapitre I, sont décrits par l'évolution des positions géométriques des particules du système à chaque instant, avec les conditions de continuité et de régularité qui ont été exposées alors. Ainsi, du point de vue des champs de vitesse réels à l'instant t sur la configuration κ_t, (indépendamment de conditions supplémentaires qui pourraient être dues au comportement spécifique du matériau constitutif), on a vu que la modélisation du milieu continu considère les champs $\underline{U}$ ***continus et continûment différentiables par morceaux***.

2.1 Mouvements virtuels. Puissance virtuelle des quantités d'accélération

Mouvements virtuels

Les mouvements virtuels considérés dans les constructions auxquelles on va procéder sont définis par les champs de vecteurs $\underline{\hat{U}}$, vitesses virtuelles, définis sur κ_t, auxquels on impose d'abord les conditions de ***continuité et de continue différentiabilité sur*** Ω_t. Un mouvement virtuel sera désormais désigné par $\underline{\hat{U}}$.

On montrera ensuite, pour chacune des deux modélisations présentées, sa mise en œuvre sur l'espace vectoriel des mouvements virtuels définis par des champs de vitesse virtuels $\underline{\hat{U}}$ continus et continûment différentiables ***par morceaux*** (§ 2.7 et 3.8).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Puissance virtuelle des quantités d'accélération

On reprend ici les arguments du chapitre IV (§ 7.2) compte tenu de la forme des mouvements réels.

En supposant le champ de vitesse ***réel*** continu et continûment différentiable sur Ω_t [(1)], la quantité d'accélération de l'élément $\mathrm{d}m = \rho(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t$ est :

$$\underline{a}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}m = \rho(\underline{x},t)\underline{a}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t\ . \tag{2.1}$$

La puissance virtuelle des quantités d'accélération s'écrit pour $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{A}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega_t} \underline{a}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}m = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)\underline{a}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t\ , \tag{2.2}$$

et formule homologue pour $\mathcal{A}'(\hat{\underline{U}})$ relative à $\mathcal{S}'$, sous-système quelconque de $\mathcal{S}$.

On rappelle que l'on a introduit au chapitre IV (section 6), le torseur $[\mathcal{M}\mathfrak{A}]$ des quantités d'accélération pour $\mathcal{S}$:

$$[\mathcal{M}\mathfrak{A}] = [\,O\ ,\ \underline{A}\ ,\ \underline{\delta}_0\,]\ ,$$

dont les éléments de réduction pour une origine O quelconque sont (chapitre IV, § 7.2) :

$$\underline{A} = \int_{\Omega_t} \underline{a}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}m \qquad \underline{\delta}_0 = \int_{\Omega_t} \underline{OM}\wedge\underline{a}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}m\ ; \tag{2.3}$$

et formule homologue pour $[\mathcal{M}\mathfrak{A}']$ relativement à $\mathcal{S}'$.

2.2 Puissance virtuelle des efforts extérieurs

Comme on l'a vu au chapitre IV l'écriture même de la forme linéaire exprimant la puissance virtuelle des efforts extérieurs traduit directement les hypothèses faites quant à la modélisation adoptée pour ces efforts.

Système $\mathcal{S}$

On fait ici l'hypothèse que les efforts extérieurs agissant à chaque instant t sur $\mathcal{S}$ sont de deux types (figure 1).

- D'une part, des ***forces de volume*** définies par une densité ***massique*** $\underline{F}(\underline{x},t)$. Sur l'élément de volume $\mathrm{d}\Omega_t$ en M la force de volume « élémentaire » est donc :

$$\underline{F}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}m = \rho(\underline{x},t)\underline{F}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t\ . \tag{2.4}$$

(1) Le cas où le champ réel $\underline{U}$ est continu et continûment différentiable ***par morceaux*** sera traité au paragraphe 3.9.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

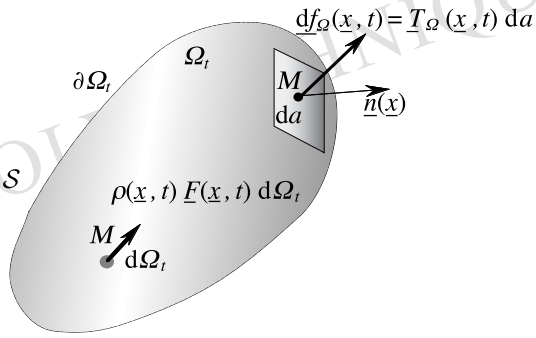


Figure 1 – Efforts extérieurs agissant sur le système

- D'autre part, des ***forces de surface*** exercées au contour $\partial\Omega_t$ de $\mathcal{S}$. Ces forces sont définies en chaque point de $\partial\Omega_t$ par une densité surfacique $\underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t)$: la force de surface « élémentaire » agissant sur l'élément de surface $\mathrm{d}a$ de $\partial\Omega_t$ en M est égale à :

$$\underline{\mathrm{d}f}_{\Omega} = \underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}a\ . \tag{2.5}$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit alors pour $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{P}_{(\mathrm{e})}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)\underline{F}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}a\ . \tag{2.6}$$

Sous-système $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$

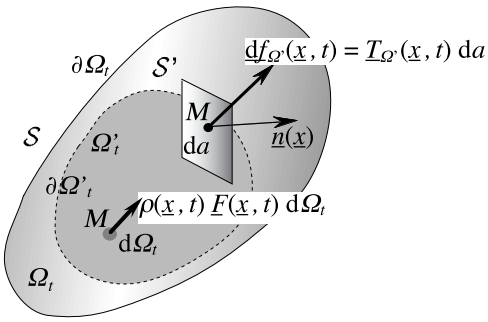


Figure 2 – Efforts extérieurs sur un sous-système

Pour un sous-système $\mathcal{S}'$ quelconque de $\mathcal{S}$ on suppose que les efforts extérieurs, c'est-à-dire exercés sur $\mathcal{S}'$ par l'extérieur de $\mathcal{S}'$, y compris $(\mathcal{S} - \mathcal{S}')$, sont de même nature (figure 2).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- Les ***forces de volume*** sont définies en chaque point M de Ω'_t, par la densité massique $\underline{F}_{\Omega'}(\underline{x},t)$.

  On construit ici la modélisation en faisant l'***hypothèse*** que

$$\forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\ ,\ \underline{F}_{\Omega'}(\underline{x},t) \equiv \underline{F}(\underline{x},t)\ , \tag{2.7}$$

  c'est-à-dire que la densité massique de forces de volume est indépendante de la partition de $\mathcal{S}$. Du point de vue physique cela signifie que cette modélisation se place dans l'hypothèse où les actions à distance entre les particules de $\mathcal{S}$ sont nulles [(2)].
- Les ***forces de surface*** exercées au contour $\partial\Omega'_t$ de $\mathcal{S}'$ sont, quant à elles, définies en chaque point par la densité surfacique $\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)$, donnant ainsi la force de surface « élémentaire » agissant sur l'élément de surface da de $\partial\Omega'_t$ en M :

$$\underline{\mathrm{d}f}_{\Omega'} = \underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}a\ . \tag{2.8}$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit ainsi, pour un sous-système $\mathcal{S}'$ quelconque de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{P}'_{(e)}(\underline{\hat{U}}) = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x},t)\underline{F}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} \underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}a\ . \tag{2.9}$$

Remarque

Il importe ici d'insister (cf. chapitre IV, § 4.3) sur la différence des points de vue que traduisent les notions de système et de sous-systèmes, qui peut être occultée par la similitude des notations dans (2.6) et (2.9). Pour le système $\mathcal{S}$, les efforts extérieurs définis par les champs $\underline{F}$ sur Ω_t , $\underline{T}_\Omega$ sur $\partial\Omega_t$ sont des ***données***. Pour un sous-système $\mathcal{S}'$ quelconque de $\mathcal{S}$, sur les portions de sa frontière $\partial\Omega'_t$ qui ne sont pas communes avec $\partial\Omega_t$, le champ $\underline{T}_{\Omega'}$ des forces extérieures surfaciques ***sera déterminé*** par la modélisation quand sa construction sera achevée (cf. les formules (2.23) et (3.15)).

> On peut aussi préciser que, sur ces portions de $\partial\Omega'_t$, $\underline{T}_{\Omega'}$ représente la densité surfacique des forces exercées ***par*** $(\mathcal{S}-\mathcal{S}')$ sur $\mathcal{S}'$, et ne comprend aucune contribution due à l'extérieur de $\mathcal{S}$. En effet une telle contribution, lorsqu'elle doit être prise en compte, apparaît également dans l'expression de $\mathcal{P}_{(e)}(\underline{\hat{U}})$ pour le système $\mathcal{S}$ lui-même où elle fait l'objet d'une intégrale séparée semblable à la première intégrale de (2.9) (cf. § 3.9 à propos de l'équation (3.39)).

[(2)] La modélisation classique ainsi construite n'est donc valable que pour des systèmes où ce type d'interaction entre les particules est effectivement négligeable vis-à-vis des autres actions qui entrent en jeu. Il s'agit d'un choix de présentation habituel, simplificateur, qui se révèle pertinent pour la grande majorité des applications pratiques. Il n'est pas limitatif quant à l'emploi de la méthode des puissances virtuelles comme le montre d'ailleurs l'exemple choisi au chapitre IV (sections 1 à 3) pour « acclimater » les puissances virtuelles. La méthode des puissances virtuelles se révèle très sûre pour la construction des modélisations homologues de celles présentées dans les sections 2 et 3 de ce chapitre, hors de l'hypothèse (2.7).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Torseurs des efforts extérieurs

Les efforts extérieurs étant ainsi décrits par (2.6) et (2.9) pour $\mathcal{S}$ et pour tout sous-système $\mathcal{S}'$, l'identification du torseur des efforts extérieurs par ses éléments de réduction par rapport à une origine O quelconque est immédiate. On pose :

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{pour } \mathcal{S} & [\mathcal{F}_e] & = [\,O\,,\,\underline{F}_e\,,\,\underline{C}_0\,] \\ \forall \mathcal{S}' & [\mathcal{F}'_e] & = [\,O\,,\,\underline{F}'_e\,,\,\underline{C}'_0\,] \end{array}\right. \tag{2.10}$$

et l'on a, en profitant de la similitude des notations, pour $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{F}'_e = \displaystyle\int_{\Omega'_t} \underline{F}(\underline{x},t)\rho(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} \underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}a \\ \underline{C}'_0 = \displaystyle\int_{\Omega'_t} \underline{OM}\wedge\underline{F}(\underline{x},t)\rho(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} \underline{OM}\wedge\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}a\,. \end{array}\right. \tag{2.11}$$

2.3 Puissance virtuelle des efforts intérieurs

On fait l'hypothèse que la forme linéaire continue, fonctionnelle du champ $\underline{\hat{U}}$, qui exprime la puissance virtuelle des efforts intérieurs pour $\mathcal{S}$ ou pour tout sous-système $\mathcal{S}'$, s'obtient par intégration sur le volume de $\mathcal{S}$ ou de $\mathcal{S}'$, d'une ***densité volumique*** $p_{(i)}(\underline{\hat{U}})$, ***indépendante de*** $\mathcal{S}'$, fonction linéaire des valeurs locales du champ $\underline{\hat{U}}$ et de ses gradients : $\underline{\hat{U}}\,(\underline{x})$, $\underline{\underline{\mathrm{grad}\,\hat{U}}}\,(\underline{x})$, ...

On écrit ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}\,, \\ \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{\hat{U}}) = \displaystyle\int_{\Omega'_t} p_{(i)}(\underline{\hat{U}})\,\mathrm{d}\Omega_t\,. \end{array}\right. \tag{2.12}$$

Modélisation des efforts intérieurs par un champ scalaire

Si l'on retient pour $p_{(i)}\,(\underline{\hat{U}})$ une expression linéaire en fonction des valeurs locales de $\underline{\hat{U}}$ et de son premier gradient, celle-ci est nécessairement de la forme

$$p_{(i)}\,(\underline{\hat{U}}) = \underline{A}\,(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}\,(\underline{x}) - \underline{\underline{t}}\,(\underline{x},t)\;:\;\underline{\underline{\mathrm{grad}\,\hat{U}}}\,(\underline{x},t) \tag{2.13}$$

où $\underline{A}\,(\underline{x},t)$ désigne un vecteur et $\underline{\underline{t}}\,(\underline{x},t)$ un tenseur euclidien du second ordre [3]. L'étude de cette modélisation dans sa forme la plus générale (2.13) fera l'objet de la section 3 et on examinera ici, d'abord, le cas particulier où $\underline{A}\,(\underline{x},t) = 0$ et $\underline{\underline{t}}\,(\underline{x},t) = -p\,(\underline{x},t)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$, $\forall \underline{x} \in\ \Omega_t$, soit :

$$p_{(i)}\,(\underline{\hat{U}}) = p\,(\underline{x},t)\,\mathrm{tr}\,\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}\,\hat{U}}}\,(\underline{x})\right) = p\,(\underline{x},t)\,\mathrm{div}\,\underline{\hat{U}}\,(\underline{x}) \tag{2.14}$$

et

$$\forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}\,,\ \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{\hat{U}}) = \int_{\Omega'_t} p(\underline{x},t)\ \mathrm{div}\ \underline{\hat{U}}(\underline{x})\mathrm{d}\Omega_t\,. \tag{2.15}$$

[3] Le signe « moins » dans cette formule est cohérent avec l'expression classique des équations de la dynamique (§ 3.3) et la convention de signe sur les contraintes (chapitre VI, § 2.3).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Cette expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs vérifie la ***loi des actions mutuelles*** :

$$\forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}\ ,\ \forall \underline{\hat{U}} \text{ m.v.r. pour } \mathcal{S}'\ ,\ \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{\hat{U}}) = 0 \tag{2.16}$$

puisque $\underline{\hat{U}}$ m.v.r. $\Rightarrow$ div $\underline{\hat{U}}(\underline{x}) \equiv 0$.

Dans cette modélisation les efforts intérieurs sont donc modélisés par le ***champ scalaire*** p sur Ω_t.

2.4 Équations de la dynamique

Il reste à examiner les implications de l'autre proposition contenue dans le principe des puissances virtuelles :

$$\begin{cases} \text{pour } \mathcal{S}\ , \\ \forall \underline{\hat{U}} \text{ m.v.} \quad , \quad \mathcal{P}_{(e)}(\underline{\hat{U}}) + \mathcal{P}_{(i)}(\underline{\hat{U}}) = \mathcal{A}(\underline{\hat{U}}) \\ \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\ , \\ \forall \underline{\hat{U}} \text{ m.v.} \quad , \quad \mathcal{P}'_{(e)}(\underline{\hat{U}}) + \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{\hat{U}}) = \mathcal{A}'(\underline{\hat{U}}) \end{cases} \tag{2.17}$$

qui s'écrit ici :

(2.18)

$$\begin{cases} \forall \underline{\hat{U}} \text{ m.v.} \quad , \\ \displaystyle\int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)\underline{F}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}a + \int_{\Omega_t} p(\underline{x},t)\ \mathrm{div}\ \underline{\hat{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t \\ \qquad = \displaystyle\int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)\underline{a}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t\ . \\ \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\ ,\ \forall \underline{\hat{U}} \text{ m.v. de } \mathcal{S}'\ , \\ \displaystyle\int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x},t)\underline{F}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} \underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}a + \int_{\Omega'_t} p(\underline{x},t)\ \mathrm{div}\ \underline{\hat{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t \\ \qquad = \displaystyle\int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x},t)\underline{a}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t\ . \end{cases}$$

En supposant la continuité, et la continue différentiabilité par morceaux, du champ scalaire p et compte tenu de la continuité et de la continue différentiabilité du champ $\underline{\hat{U}}$, on a :

$$p(\underline{x},t)\ \mathrm{div}\ \underline{\hat{U}}(\underline{x}) = \mathrm{div}\ \left(p(\underline{x},t)\underline{\hat{U}}(\underline{x})\right) - \underline{\hat{U}}(\underline{x})\,.\,\underline{\mathrm{grad}}\, p(\underline{x},t) \tag{2.19}$$

que l'on peut substituer dans (2.18) où, par application du théorème de la divergence,

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

il vient :

(2.20)
$$\left\{\begin{array}{l} \forall \underline{\hat{U}} \text{ m.v. ,} \\ \displaystyle\int_{\Omega_t} \big(-\underline{\operatorname{grad}}\, p(\underline{x},t) + \rho(\underline{x},t)(\underline{F}(\underline{x},t) - \underline{a}(\underline{x},t))\big) \,.\, \underline{\hat{U}}(\underline{x})\, \mathrm{d}\Omega_t \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\partial\Omega_t} \big(\underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t) + p(\underline{x},t)\underline{n}(\underline{x})\big) \,.\, \underline{\hat{U}}(\underline{x})\, \mathrm{d}a = 0 \,. \\ \\ \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \,,\ \forall \underline{\hat{U}} \text{ m.v. de } \mathcal{S}' \,, \\ \displaystyle\int_{\Omega'_t} \big(-\underline{\operatorname{grad}}\, p(\underline{x},t) + \rho(\underline{x},t)(\underline{F}(\underline{x},t) - \underline{a}(\underline{x},t))\big) \,.\, \underline{\hat{U}}(\underline{x})\, \mathrm{d}\Omega_t \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\partial\Omega'_t} \big(\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t) + p(\underline{x},t)\underline{n}(\underline{x})\big) \,.\, \underline{\hat{U}}(\underline{x})\, \mathrm{d}a = 0 \,. \end{array}\right.$$

Cette dernière formule est d'exploitation commode selon la démarche de ***dualisation*** exposée au chapitre IV. Elle se compose d'une intégrale de volume et d'une intégrale au contour où chacun des intégrandes apparaît comme le produit scalaire d'un cofacteur vectoriel par $\underline{\hat{U}}(\underline{x})$. Le champ $\underline{\hat{U}}$ y est arbitraire continu et continûment différentiable sur Ω_t.

Considérant l'équation (2.20) écrite pour le système $\mathcal{S}$ on s'appuie sur le caractère arbitraire du champ $\underline{\hat{U}}$ continu et continûment différentiable. On démontre d'abord que sur Ω_t on a :

(2.21)
$$\boxed{\begin{array}{c} \forall \underline{x} \in \Omega_t \\ -\underline{\operatorname{grad}}\, p(\underline{x},t) + \rho(\underline{x},t)\big(\underline{F}(\underline{x},t) - \underline{a}(\underline{x},t)\big) = 0 \end{array}}$$

puis, compte tenu de (2.21), on a sur $\partial\Omega_t$:

(2.22)
$$\boxed{\begin{array}{c} \forall \underline{x} \in \partial\Omega_t \\ p(\underline{x},t)\underline{n}(\underline{x}) = -\underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t) \end{array}}$$

en supposant ici et dans toute la suite la ***régularité*** des frontières $\partial\Omega_t$ et $\partial\Omega'_t$ (la régularité par morceaux est également acceptable).

Considérant ensuite (2.20) pour $\mathcal{S}'$ sous-système quelconque de $\mathcal{S}$ on obtient, par les mêmes arguments, sur $\partial\Omega'_t$:

(2.23)
$$\boxed{\begin{array}{c} \forall \Omega'_t \,,\ \forall \underline{x} \in \partial\Omega'_t \\ \underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t) = -p(\underline{x},t)\, \underline{n}(\underline{x}) \end{array}}$$

Ce sont les ***équations de la dynamique*** pour un système dont les efforts intérieurs sont modélisés par un champ scalaire p selon la formule (2.15).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Cohérence du modèle et interprétation physique

♦ ***Équations de champ***

L'équation (2.21) représente ***trois équations de champ***, équations aux dérivées partielles du premier ordre, pour le champ scalaire p sur Ω_t.

Elle montre que la modélisation des efforts intérieurs par un champ scalaire selon (2.15) est mécaniquement cohérente avec les efforts extérieurs donnés dans $\mathcal{S}$ sous la forme de densité massique (ou volumique), à la condition que le champ $\rho(\underline{F} - \underline{a})$ soit irrotationnel :

$$\underline{\mathrm{rot}}\,(\rho(\underline{F} - \underline{a})) = 0 \text{ sur } \Omega_t \ . \tag{2.24}$$

♦ ***Condition aux limites***

L'équation au contour (2.22) fournit la condition aux limites pour le champ scalaire p sur le bord $\partial\Omega_t$ du système $\mathcal{S}$.

Elle montre que la modélisation des efforts intérieurs par le champ scalaire p selon (2.15) est mécaniquement cohérente avec des efforts extérieurs donnés sur la frontière de $\mathcal{S}$ par une densité surfacique de forces, à la condition que cette densité soit normale au contour $\partial\Omega_t$: la force extérieure élémentaire exercée sur l'élément de surface da de normale (sortante) $\underline{n}(\underline{x})$ au point M de $\partial\Omega_t$ doit donc être de la forme

$$\underline{\mathrm{d}f}_{\Omega} = T_{\Omega}(\underline{x}, t)\, \underline{n}(\underline{x})\, \mathrm{d}a = T_{\Omega}(\underline{x}, t)\, \underline{\mathrm{d}a} \tag{2.25}$$

qui fixe la condition aux limites pour le champ p sur $\partial\Omega_t$:

$$p(\underline{x}, t) = -T_{\Omega}(\underline{x}, t) \quad \text{sur } \partial\Omega_t \ . \tag{2.26}$$

On remarque de plus que les équations (2.21) et (2.26) impliquent que, sur $\partial\Omega_t$, l'équation (2.27) de compatibilité des données au contour avec les équations de champ soit satisfaite :

$$\forall P \in \partial\Omega_t \ , \ \forall Q \in \partial\Omega_t \ , \ T_{\Omega}(Q) - T_{\Omega}(P) + \int_{\widehat{PQ}} \rho(\underline{F} - \underline{a}) \,.\, \underline{\mathrm{d}M} = 0 \tag{2.27}$$

où $\widehat{PQ}$ est un arc quelconque joignant P à Q, tracé dans Ω_t ou sur $\partial\Omega_t$.

♦ ***Efforts extérieurs surfaciques sur un sous-système***

La signification de l'équation au contour (2.23) est différente. Cette équation détermine, sur le bord $\partial\Omega'_t$ d'un sous-système $\mathcal{S}'$ quelconque, la densité surfacique de forces extérieures $\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x}, t)$: celle-ci est obtenue à partir du champ des efforts intérieurs dans $\mathcal{S}$ (et elle s'identifie évidemment à $\underline{T}_{\Omega}(\underline{x}, t)$ sur les éventuelles parties de $\partial\Omega'_t$ en coïncidence avec $\partial\Omega_t$).

Elle révèle la cohérence entre les formes choisies a priori [4] pour les efforts extérieurs à $\mathcal{S}'$ et les efforts intérieurs à $\mathcal{S}$, mais elle a, en outre, des conséquences physiques importantes.

[4] Il faut se garder d'une fausse naïveté. Comme on l'a dit, la structuration stricte du tableau du chapitre IV (section 4) a un objectif didactique : les choix des formes des puissances virtuelles des efforts extérieurs et intérieurs ne sont pas effectués en aveugle.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Elle montre que $\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)$ est normal à $\partial\Omega'_t$ au point $\underline{x}$.

Elle montre surtout que $\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)$ ne dépend que du point $\underline{x}$ sur $\partial\Omega'_t$ et de la normale $\underline{n}(\underline{x})$ en ce point à $\partial\Omega'_t$. Cela signifie que $\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)$ ne dépend de Ω'_t qu'à travers sa normale $\underline{n}(\underline{x})$ et l'on écrira ainsi :

$$\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t) = \underline{T}(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x})) \quad \text{sur } \partial\Omega'_t \,. \tag{2.28}$$

En conséquence la force extérieure élémentaire exercée sur l'élément de surface da de normale $\underline{n}(\underline{x})$ au point $\underline{x}$ de $\partial\Omega'_t$, qui est $\underline{\mathrm{d}f}_{\Omega'}$ donnée par (2.8), se révèle ***indépendante*** du sous-système $\mathcal{S}'$ considéré tangent à da avec $\underline{n}(\underline{x})$ normale extérieure :

$$\underline{\mathrm{d}f}_{\Omega'} = \underline{\mathrm{d}f} = \underline{T}(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x}))\,\mathrm{d}a = -p(\underline{x},t)\,\underline{\mathrm{d}a} \,. \tag{2.29}$$

L'interprétation physique de ce résultat est que la force de surface élémentaire $\underline{\mathrm{d}f}$ ne dépend de $\mathcal{S}'$ et de $(\mathcal{S}-\mathcal{S}')$ que localement à travers $\underline{x}$, da et $\underline{n}(\underline{x})$. Elle correspond à la modélisation d'actions exercées ***localement*** par l'extérieur sur $\mathcal{S}'$, c'est-à-dire ***d'actions de contact exercées par*** $(\mathcal{S}-\mathcal{S}')$ ***sur*** $\mathcal{S}'$.

En conclusion, les particules du système $\mathcal{S}$ n'exercent les unes sur les autres que des actions de contact : ce sont les efforts intérieurs au système $\mathcal{S}$. Les efforts extérieurs surfaciques au contour d'un sous-système $\mathcal{S}'$ quelconque sont le résultat de ces actions de contact exercées, sur $\partial\Omega'_t$, par les particules de $(\mathcal{S}-\mathcal{S}')$ sur les particules de $\mathcal{S}'$.

Ceci conduit à l'interprétation physique du champ p lui-même : le champ p qui modélise les efforts intérieurs traduit les actions de contact entre les particules de $\mathcal{S}$.

2.5 Pertinence du modèle : champ de pression

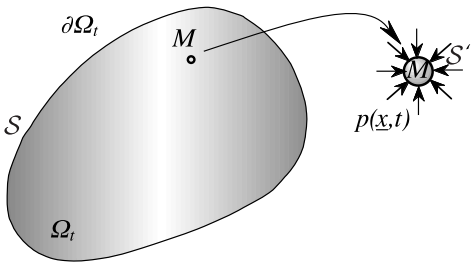


Figure 3 – Efforts extérieurs au contour d'un sous-système infinitésimal

On peut poursuivre l'identification physique du modèle en s'appuyant sur la formule (2.23). On y voit que tout sous-système $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ est, dans le cadre de ce modèle, soumis à son contour à une densité surfacique d'efforts extérieurs purement ***normale***. Si l'on imagine que $\mathcal{S}'$ correspond à un volume infinitésimal entourant un point M, la valeur algébrique de cette densité est, en première approximation constante sur le contour $\partial\Omega'_t$ et égale à $-p(\underline{x},t)$ (figure 3).

On reconnaît là la notion de ***pression*** dont la présentation classique part de la formule (2.23) posée comme principe.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La figure 4 rappelle schématiquement la démonstration des équations de la dynamique (2.21) dans cette présentation : en utilisant des coordonnées cartésiennes orthonormées par exemple, on écrit la loi fondamentale de la dynamique (1.2) pour un volume parallélépipédique infinitésimal orienté suivant les axes. Ceci correspond au raisonnement analytique fondé sur la continuité, appliqué à la première intégrale de (2.20) pour obtenir (2.21) par la méthode des puissances virtuelles.

Du point de vue physique, cette modélisation des efforts intérieurs par un ***champ de pression*** se révèle pertinente pour l'étude des ***fluides parfaits***, c'est-à-dire dépourvus de viscosité.

Pour les ***fluides visqueux***, elle est valable pour l'étude des problèmes d'équilibre : les équations (2.21 avec $\underline{a}(\underline{x},t) \equiv 0$), (2.22) et (2.23) sont ainsi les équations de la ***statique des fluides***.

Par contre elle ne permet pas l'étude générale des milieux continus (cf. § 3.1).

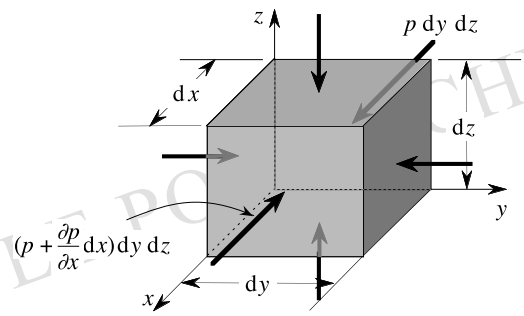


Figure 4 – Schéma de la démonstration classique des équations de la dynamique

2.6 Loi fondamentale de la dynamique

La modélisation mécaniquement cohérente construite ici vérifie évidemment la loi fondamentale de la dynamique (1.2) comme on l'a établi au chapitre IV (§ 6.3). On peut d'ailleurs s'en assurer directement à partir des expressions (2.3) et (2.11) des éléments de réduction de $[\mathcal{M}\mathfrak{C}']$ et $[\mathcal{F}'_e]$; en procédant aux intégrations compte tenu de (2.21), (2.22) ou (2.23) et en remarquant que

$$\int_{\Omega'_t} -\underline{\mathrm{grad}}\, p(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega'_t} -\mathrm{div}\,\left(p(\underline{x},t)\underline{\underline{\mathbb{1}}}\right)\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\partial\Omega'_t} -p(\underline{x},t)\underline{n}(\underline{x})\,\mathrm{d}a \tag{2.30}$$

on retrouve bien : $\underline{F}'_e = \underline{A}'$ et $\underline{C}'_0 = \underline{\delta}'_0$.

2.7 Champ de vitesse virtuel discontinu

L'application de la méthode des puissances virtuelles au système $\mathcal{S}$ et à tout sous-système $\mathcal{S}'$, en considérant les mouvements virtuels définis par des champs de vitesse virtuels continus et continûment différentiables, a permis d'établir les équations (2.21) à (2.23) à partir de

l'écriture (2.18) pour la formule fondamentale (2.17) :

$$\begin{cases} \text{pour } \mathcal{S}\ , \\ \forall \hat{\underline{U}} \text{ m.v.}\ ,\ \mathcal{P}_{(e)}(\hat{\underline{U}}) + \mathcal{P}_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = \mathcal{A}(\hat{\underline{U}})\ . \\ \\ \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\ , \\ \forall \hat{\underline{U}} \text{ m.v.}\ ,\ \mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\underline{U}}) + \mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = \mathcal{A}'(\hat{\underline{U}})\ . \end{cases}$$

À partir des résultats ainsi acquis concernant la modélisation des efforts intérieurs par un champ scalaire p, on se propose d'étendre l'écriture du principe des puissances virtuelles au cas où l'on considère des mouvements virtuels définis par des champs de vitesse virtuels continus et continûment différentiables ***par morceaux*** en supposant la ***continuité***, et la continue dérivabilité par morceaux, du champ p.

Soit, à titre d'exemple, un champ de vitesse virtuel $\hat{\underline{U}}$, continu et continûment différentiable sur deux volumes Ω'_1 et Ω'_2 complémentaires dans Ω_t, et discontinu au franchissement de la surface $\Sigma_{\hat{\underline{U}}}$ frontière entre Ω'_1 et Ω'_2 (figure 5).

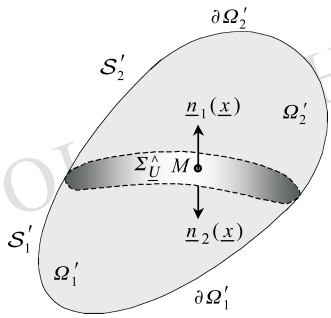


Figure 5 – Champ de vitesse virtuel discontinu au franchissement de $\Sigma_{\hat{\underline{U}}}$

Le principe des puissances virtuelles peut être appliqué séparément sur chacun des deux sous-systèmes $\mathcal{S}'_1$ et $\mathcal{S}'_2$ de volumes respectifs Ω'_1 et Ω'_2.

• Ainsi pour $\mathcal{S}'_1$, on décompose la frontière, $\partial\Omega'_1$ de Ω'_1 en deux parties complémentaires : d'une part, Σ'_1, identique à la surface $\Sigma_{\hat{\underline{U}}}$, et orientée transversalement par la normale sortante $\underline{n}_1$ à Ω'_1 ;
d'autre part, $\partial\Omega'_{t_1}$ partie commune aux frontières $\partial\Omega'_1$ de Ω'_1 et $\partial\Omega_t$ de Ω_t.
La formule (2.17) s'explicite alors en :

(2.31)
$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega'_1} \rho(\underline{x},t)\underline{F}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_{t_1}} \underline{T}_{\Omega'_1}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}a + \int_{\Sigma_{\hat{\underline{U}}}} \underline{T}_{\Omega'_1}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}_1(\underline{x})\,\mathrm{d}a \\ \quad + \displaystyle\int_{\Omega'_1} p(\underline{x},t)\,\mathrm{div}\ \hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega'_1} \rho(\underline{x},t)\underline{a}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t \end{cases}$$

où $\hat{\underline{U}}_1(\underline{x})$ désigne la vitesse virtuelle au point M de $\Sigma_{\hat{\underline{U}}}$ considéré comme appartenant à $\mathcal{S}'_1$.

• On procède de la même manière pour $\mathcal{S}'_2$, en remarquant que, en un même point M de $\Sigma_{\hat{\underline{U}}}$, on a :

$$\underline{n}_2(\underline{x}) = -\underline{n}_1(\underline{x})$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

on obtient :
(2.32)
$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\Omega'_2} \rho(\underline{x},t)\underline{F}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_{t_2}} \underline{T}_{\Omega'_2}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\mathrm{d}a + \int_{\Sigma_{\hat{\underline{U}}}} \underline{T}_{\Omega'_2}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}_2(\underline{x})\,\mathrm{d}a \\ \quad + \displaystyle\int_{\Omega'_2} p(\underline{x},t)\,\mathrm{div}\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega'_2} \rho(\underline{x},t)\underline{a}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t\,. \end{array}\right.$$

• En appliquant l'équation (2.23) sur $\Sigma_{\hat{\underline{U}}}$ on a :

$$\underline{T}_{\Omega'_1}(\underline{x},t) = -\underline{T}_{\Omega'_2}(\underline{x},t) = -p(\underline{x},t)\underline{n}_1(\underline{x})\,.$$

La même équation (2.23) montre que sur $\partial\Omega'_{t_1}$ on a $\underline{T}_{\Omega'_1}(\underline{x},t) = \underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t)$ et sur $\partial\Omega'_{t_2}$ on a $\underline{T}_{\Omega'_2}(\underline{x},t) = \underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t)$.

• On obtient alors, en additionnant (2.31) et (2.32), la formule :
(2.33)
$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)\underline{F}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}a \\ \quad + \displaystyle\int_{\Omega_t} p(\underline{x},t)\,\mathrm{div}\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_{\hat{\underline{U}}}} p(\underline{x},t)[\![\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,]\!]\,.\,\underline{n}(\underline{x})\,\mathrm{d}a = \displaystyle\int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)\underline{a}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t \end{array}\right.$$

dans laquelle, pour l'intégrale sur $\Sigma_{\hat{\underline{U}}}$, on désigne par $\underline{n}(\underline{x})$ une normale à $\Sigma_{\hat{\underline{U}}}$ en M et par $[\![\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,]\!]$ la discontinuité de $\hat{\underline{U}}(\underline{x})$ en M, au franchissement de $\Sigma_{\hat{\underline{U}}}$ dans le sens de $\underline{n}(\underline{x})$:

$$[\![\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,]\!] = \hat{\underline{U}}_2(\underline{x}) - \hat{\underline{U}}_1(\underline{x})\,. \tag{2.34}$$

Cette démonstration, qui a évidemment une portée générale pour un champ $\hat{\underline{U}}$ continu et continûment différentiable ***par morceaux*** quelconque, a ainsi permis d'établir le résultat suivant.

Pour un milieu continu dont les efforts intérieurs sont modélisés par un champ scalaire p (pression), dans le cas d'un mouvement virtuel défini par un champ de vitesse virtuel $\hat{\underline{U}}$ continu et continûment différentiable par morceaux les deux énoncés du principe des puissances virtuelles sont conservés mais le calcul de la puissance virtuelle des efforts intérieurs doit prendre en compte les discontinuités éventuelles de $\hat{\underline{U}}$: la puissance virtuelle des efforts intérieurs est obtenue par intégration, sur le volume du système (ou d'un sous-système), de la densité volumique $p(\underline{x},t)\,\mathrm{div}\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})$ et par intégration, sur les surfaces de discontinuité $\Sigma_{\hat{\underline{U}}}$ de $\hat{\underline{U}}$ intérieures au volume du système (ou d'un sous-système), de la ***densité surfacique*** égale à :

$$p(\underline{x},t)[\![\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,]\!]\,.\,\underline{n}(\underline{x}) \tag{2.35}$$

c'est-à-dire que l'on a pour $\mathcal{S}$, et pour tout sous-système $\mathcal{S}'$:

$$\boxed{\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega'_t} p(\underline{x},t)\,\mathrm{div}\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_{\hat{\underline{U}}}\cap\Omega'_t} p(\underline{x},t)[\![\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,]\!]\,.\,\underline{n}(\underline{x})\,\mathrm{d}a} \tag{2.36}$$

On remarquera que la formule (2.36) s'interprète dans le cadre de la ***théorie des distributions***, comme l'intégrale de la densité volumique (2.15) où la divergence du champ $\hat{\underline{U}}$ est prise au sens des distributions (cf. chapitre III, formule (4.35)).

On rappelle que la démonstration ci-dessus et le résultat correspondant exprimé par (2.36) supposent la continuité du champ de pression p sur les surfaces $\Sigma_{\hat{\underline{U}}}$ (cf. § 3.9).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

3 Modélisation des efforts intérieurs par un champ tensoriel : les contraintes

3.1 Mouvements virtuels. Puissances virtuelles des quantités d'accélération et des efforts extérieurs

La modélisation des efforts intérieurs construite dans la section précédente se révèle, on l'a dit, insuffisante pour l'étude de la dynamique des milieux continus hormis les fluides parfaits ou la statique des fluides. Un exemple simple suffit à illustrer ce propos : celui de l'équilibre d'un solide de forme cylindrique, reposant par sa base sur une surface plane horizontale, soumis à la seule action de la pesanteur et de la pression atmosphérique, et aux réactions de son appui (figure 6). En effet, l'intégration de l'équation de champ (2.21) à partir de la condition aux limites (2.22) écrite sur la face supérieure ($z = 0$) conduit à la distribution dite « hydrostatique » de p dans le solide, $p = p_a - \rho g z$, qui est évidemment incompatible avec la condition aux limites (2.22) écrite sur la surface latérale du cylindre ; ceci illustre le fait que la condition (2.27) n'est pas vérifiée par les données.

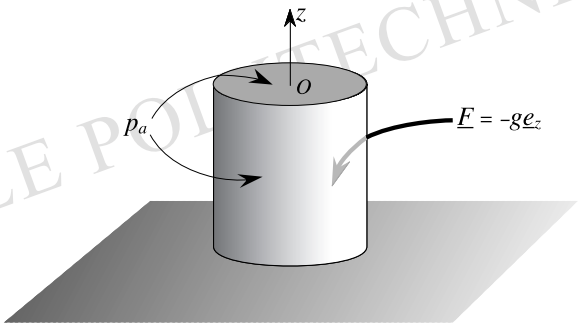


Figure 6 – Équilibre d'un solide pesant

L'objet de la présente section est, considérant le même espace de mouvements virtuels et la même modélisation des efforts extérieurs à travers leur puissance virtuelle que ceux utilisés aux paragraphes 2.1 et 2.2, par le choix d'une forme plus élaborée pour la puissance virtuelle des efforts intérieurs, d'aboutir à une modélisation de ceux-ci qui présente plus de degrés de liberté pour permettre l'étude générale des milieux continus « classiques ». Cette modélisation devra inclure, comme cas particulier, celle présentée dans la section 2, dont la pertinence est avérée dans certains cas.

L'espace vectoriel des mouvements virtuels est donc encore défini par les champs de vitesse virtuels $\underline{\hat{U}}$ continus et continûment différentiables.

L'expression (2.2) de la puissance virtuelle des quantités d'accélération est conservée.

Les efforts extérieurs sont encore modélisés par la densité massique de forces $\underline{F}(\underline{x}, t)$, supposée indépendante de la partition de $\mathcal{S}$ selon (2.7), et par les densités

surfaciques de forces $\underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t)$ sur $\partial\Omega_t$ pour $\mathcal{S}$ et $\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)$ sur $\partial\Omega'_t$ pour $\mathcal{S}'$. La puissance virtuelle des efforts extérieurs conserve les expressions (2.6) pour $\mathcal{P}_{(e)}(\hat{\underline{U}})$ et (2.9) pour $\mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\underline{U}})$.

3.2 Puissance virtuelle des efforts intérieurs

Poursuivant l'idée mise en œuvre au paragraphe 2.3 on fait l'hypothèse que la forme linéaire continue, fonctionnelle de $\hat{\underline{U}}$, qui exprime la puissance virtuelle des efforts intérieurs pour un sous-système quelconque $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ se met sous la forme (2.12), intégrale d'une ***densité volumique*** $p_{(i)}(\hat{\underline{U}})$ ***indépendante de*** $\mathcal{S}'$. Comme annoncé alors on écrit maintenant $p_{(i)}(\hat{\underline{U}})$, sous forme linéaire en $\hat{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{\text{grad}}}\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})$, de la façon la plus générale soit :

$$p_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = \underline{A}(x,t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x}) - \underline{\underline{t}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{\text{grad}}}\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\ . \tag{3.1}$$

En adoptant les notations du chapitre III (formules (3.9) et (3.21)), et la terminologie correspondante pour le champ de vitesse virtuel $\hat{\underline{U}}$, on introduit les parties symétrique et antisymétrique de $\underline{\underline{\text{grad}}}\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})$:

$$\underline{\underline{\hat{d}}}(\underline{x}) = \frac{1}{2}\big(\underline{\underline{\text{grad}}}\,\hat{\underline{U}}(\underline{x}) + {}^t\underline{\underline{\text{grad}}}\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\big) \tag{3.2}$$

$$\underline{\underline{\hat{\Omega}}}(\underline{x}) = \frac{1}{2}\big(\underline{\underline{\text{grad}}}\,\hat{\underline{U}}(\underline{x}) - {}^t\underline{\underline{\text{grad}}}\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\big) \tag{3.3}$$

que l'on appellera respectivement ***taux de déformation*** et ***taux de rotation virtuels*** au point M dans le champ $\hat{\underline{U}}$. La densité $p_{(i)}(\hat{\underline{U}})$ s'explicite alors sous la forme :

$$p_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = \underline{A}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x}) - \underline{\underline{\alpha}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{\hat{\Omega}}}(\underline{x}) - \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{\hat{d}}}(\underline{x}) \tag{3.4}$$

où $\underline{\underline{\alpha}}(\underline{x},t)$ et $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$ désignent respectivement les parties antisymétrique et symétrique de $\underline{\underline{t}}(\underline{x},t)$.

La ***loi des actions mutuelles*** (1.1) impose de préciser cette expression. Pour cela il convient d'identifier, pour un sous-système $\mathcal{S}'$ quelconque de $\mathcal{S}$, le torseur des efforts intérieurs $[\mathcal{F}'_i]$ qui correspond à la densité $p_{(i)}(\hat{\underline{U}})$ donnée par (3.1) ou (3.4). On procède, comme on l'a indiqué au chapitre IV (§ 6.2), en considérant l'espace vectoriel des mouvements rigidifiants définis par les distributeurs $\{\hat{\mathcal{D}}\} = \{\, O\,,\, \hat{\underline{U}}_0\,,\, \underline{\underline{\hat{\omega}}}_0\,\}$ arbitraires.

Dans un tel mouvement on a, sur Ω_t : $\underline{\underline{\hat{d}}}(\underline{x}) = 0$, $\underline{\underline{\hat{\Omega}}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\hat{\omega}}}_0$, $\forall \underline{x} \in \Omega_t$, où $\underline{\underline{\hat{\omega}}}_0$ est le tenseur antisymétrique associé au vecteur $\hat{\underline{\omega}}_0$ [5]. Il en résulte, par (2.12) et (3.4), pour identifier $[\mathcal{F}'_i]$, l'équation :

$$\begin{aligned} &\forall \Omega'_t \subseteq\ \Omega_t\ ,\ \forall\{\hat{\mathcal{D}}\} \\ &[\mathcal{F}'_i]\,.\,\{\hat{\mathcal{D}}\} = \hat{\underline{U}}_0\,.\int_{\Omega_t} \underline{A}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t + \underline{\underline{\hat{\omega}}}_0\ :\ \int_{\Omega_t} \big(\underline{x}\otimes\underline{A}\,(\underline{x},t) - \underline{\underline{\alpha}}\,(\underline{x},t)\big)\,\mathrm{d}\Omega_t\ . \end{aligned} \tag{3.5}$$

[5] Cf. chapitre III, § 3.5.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La loi des actions mutuelles impose alors que :

$$\forall \Omega'_t \subseteq \Omega_t \ , \ \int_{\Omega'_t} \underline{A}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t = 0 \ , \tag{3.6}$$

d'où la nullité du champ $\underline{A}$ sur Ω_t puis, $\underline{\underline{\alpha}}(\underline{x},t)$ étant antisymétrique,

$$\forall \Omega'_t \subseteq \Omega_t \ , \ \int_{\Omega'_t} \underline{\underline{\alpha}}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t = 0 \tag{3.7}$$

c'est-à-dire la nullité du champ $\underline{\underline{\alpha}}$ sur Ω_t. Le tenseur $\underline{\underline{t}}(\underline{x},t)$ est donc nécessairement ***symétrique***.

L'expression la plus générale de $p_{(i)}(\hat{\underline{U}})$ comme forme linéaire de $\hat{\underline{U}}(\underline{x})$ et $\underline{\underline{\text{grad}}}\ \hat{\underline{U}}(\underline{x})$ respectant le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{\text{grad}}}\ \hat{\underline{U}}(\underline{x}) \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) \text{ symétrique} \end{array} \right. \tag{3.8}$$

égale aussi à :

$$p_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \hat{\underline{\underline{d}}}(\underline{x}) \ . \tag{3.9}$$

> ***Les efforts intérieurs sont modélisés par un champ de tenseurs euclidiens du deuxième ordre, symétriques***[(6)].

3.3 Équations de la dynamique

La forme (3.8) ayant été adoptée pour la densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs, on se propose maintenant d'exploiter la proposition (2.17) du principe des puissances virtuelles qui devient :

(3.10)

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{\underline{U}} \text{ m.v. ,} \\ \displaystyle\int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)\underline{F}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}a + \int_{\partial\Omega_t} -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{\text{grad}}}\ \hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)\underline{a}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t \ . \\ \\ \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \ , \ \forall \hat{\underline{U}} \text{ m.v. de } \mathcal{S}' \ , \\ \displaystyle\int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x},t)\underline{F}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} \underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}a + \int_{\partial\Omega'_t} -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{\text{grad}}}\ \hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x},t)\underline{a}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t \ . \end{array} \right.$$

(6) Cette représentation contient évidemment celle de la section 2 à laquelle correspond le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ isotrope défini par : $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) = -p(\underline{x},t)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$ sur Ω_t.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Le raisonnement mis en œuvre est analogue à celui du paragraphe 2.4 ; il nécessite d'abord la transformation de la troisième intégrale de (3.10).

Pour cela on remarque que, le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ étant supposé continu, et continûment différentiable par morceaux, on a l'identité [7] :

$$-\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{\text{grad}\,\hat{U}}}(\underline{x}) = \hat{\underline{U}}(\underline{x}).\,\text{div}\,{}^t\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) - \text{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\right), \tag{3.11}$$

que l'on peut substituer dans (3.10) où, par application du théorème de la divergence, il vient :

$$\left\{\begin{array}{l}
\forall \hat{\underline{U}} \text{ m.v. ,} \\
\displaystyle\int_{\Omega_t} \left(\text{div}\,{}^t\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) + \rho(\underline{x},t)(\underline{F}(\underline{x},t) - \underline{a}(\underline{x},t))\right).\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t \\
\qquad\qquad + \displaystyle\int_{\partial\Omega_t} \left(\underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t) - \underline{n}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\right).\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}a = 0\,, \\
\forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\ ,\ \forall \hat{\underline{U}} \text{ m.v. de } \mathcal{S}'\ , \\
\displaystyle\int_{\Omega'_t} \left(\text{div}\,{}^t\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) + \rho(\underline{x},t)(\underline{F}(\underline{x},t) - \underline{a}(\underline{x},t))\right).\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t \\
\qquad\qquad + \displaystyle\int_{\partial\Omega'_t} \left(\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t) - \underline{n}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\right).\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}a = 0\,,
\end{array}\right. \tag{3.12}$$

qui permet de tirer parti du caractère arbitraire du champ $\hat{\underline{U}}$ continu et continûment différentiable sur Ω_t en se plaçant du point de vue de la dualité. On rappelle que $\partial\Omega_t$ et $\partial\Omega'_t$ sont supposées régulières (§ 2.4).

Considérant le système $\mathcal{S}$ on démontre d'abord que sur Ω_t on a, compte tenu de la symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall \underline{x} \in \Omega_t\ , \\ \text{div}\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) + \rho(\underline{x},t)\left(\underline{F}(\underline{x},t) - \underline{a}(\underline{x},t)\right) = 0\end{array}} \tag{3.13}$$

puis, compte tenu de (3.13) et de la symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$, on a sur $\partial\Omega_t$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall \underline{x} \in \partial\Omega_t\ , \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t)\end{array}} \tag{3.14}$$

Considérant ensuite $\mathcal{S}'$, sous-système quelconque de $\mathcal{S}$, on obtient de même, sur $\partial\Omega'_t$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall \Omega'_t\ ,\ \forall \underline{x} \in \partial\Omega'_t\ , \\ \underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{n}(\underline{x})\end{array}} \tag{3.15}$$

[7] On a : $\text{grad}(\underline{\underline{\sigma}}\,.\,\hat{\underline{U}}) = \underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{\underline{\text{grad}\,\hat{U}}} + \hat{\underline{U}}\,.\,\text{grad}\,{}^t\underline{\underline{\sigma}}$ d'où : $\text{div}\,(\underline{\underline{\sigma}}\,.\,\hat{\underline{U}}) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}\,\hat{U}}} + \hat{\underline{U}}\,.\,\text{div}\,{}^t\underline{\underline{\sigma}}$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Ce sont les ***équations de la dynamique*** pour un système dont les efforts intérieurs sont modélisés par un champ tensoriel du deuxième ordre $\underline{\underline{\sigma}}$ selon la formule (3.8).

3.4 Commentaires

Ces équations appellent évidemment des commentaires, dont certains sont proches de ceux déjà faits au paragraphe 2.4 : ils ne seront alors que brièvement repris.

Équations de champ

Les équations de champ pour cette modélisation des efforts intérieurs par un champ tensoriel sont constituées :

- de l'équation (3.8) où est imposée la ***symétrie*** de $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$,
- des trois équations aux dérivées partielles du premier ordre représentées par l'équation (3.13), pour les six fonctions scalaires, composantes indépendantes du champ tensoriel symétrique $\underline{\underline{\sigma}}$.

On remarque que la situation est très différente de celle correspondant à (2.21) où l'on avait obtenu trois équations aux dérivées partielles pour la seule fonction scalaire p.

Il apparaît aussi que la modélisation des efforts intérieurs par le champ tensoriel $\underline{\underline{\sigma}}$ est cohérente avec des efforts extérieurs donnés par une densité massique, sans aucune restriction sur les champs de forces de masse et de forces d'inertie.

Conditions aux limites

L'équation au contour (3.14) fournit les conditions aux limites pour le champ tensoriel symétrique $\underline{\underline{\sigma}}$ sur la frontière $\partial\Omega_t$ du système $\mathcal{S}$.

On y voit la cohérence de la modélisation avec des efforts extérieurs donnés au contour de $\mathcal{S}$ par une densité surfacique de forces, sans aucune restriction sur ces données : $\underline{T}_{\Omega}(\underline{x}, t)$ peut être quelconque sur $\partial\Omega_t$.

La compatibilité des données au contour avec les équations de champ s'exprime par la loi fondamentale de la dynamique pour $\mathcal{S}$ établie au chapitre IV (§ 6.3) : $[\mathcal{F}_e] = [\mathcal{M}\mathfrak{A}]$.

Efforts extérieurs surfaciques sur un sous-système

C'est l'équation au contour (3.15) qui détermine la densité surfacique de forces extérieures $\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x}, t)$ au bord d'un sous-système quelconque $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$, à partir du champ des efforts intérieurs dans $\mathcal{S}$. On y retrouve que $\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x}, t)$ ne dépend de Ω'_t qu'à travers la normale $\underline{n}(\underline{x})$ et l'on écrira ainsi, à nouveau :

$$\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x}, t) = \underline{T}\big(\underline{x}, t, \underline{n}(\underline{x})\big) \; . \tag{3.16}$$

La force extérieure élémentaire sur l'élément de surface da de normale sortante

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

$\underline{n}(\underline{x})$ au point $\underline{x}$ de $\partial\Omega'_t$ est indépendante du sous-système considéré (figure 7) :

$$\underline{\mathrm{d}f}_{\Omega'} = \underline{\mathrm{d}f} = \underline{T}(\underline{x}, t, \underline{n}(\underline{x}))\,\mathrm{d}a = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)\,.\,\underline{n}(\underline{x})\,\mathrm{d}a = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)\,.\,\underline{\mathrm{d}a}\,. \tag{3.17}$$

L'interprétation physique de ce résultat est identique à celle donnée au paragraphe 2.4 : $\underline{\mathrm{d}f}$ correspond à la modélisation d'actions exercées ***localement*** par l'extérieur sur $\mathcal{S}'$, c'est-à-dire à la modélisation des ***actions de contact exercées par*** $(\mathcal{S} - \mathcal{S}')$ ***sur*** $\mathcal{S}'$.

Ainsi, les particules de $\mathcal{S}$ n'exercent les unes sur les autres que des actions de contact : ce sont les efforts intérieurs au système $\mathcal{S}$. Au contour d'un sous-système $\mathcal{S}'$ quelconque, les efforts extérieurs surfaciques sont le résultat de ces actions de contact exercées sur les particules infiniment voisines de $\partial\Omega'_t$ à l'intérieur de $\mathcal{S}'$ par les particules infiniment voisines de $\partial\Omega'_t$ à l'extérieur de $\mathcal{S}'$.

Le champ tensoriel symétrique $\underline{\underline{\sigma}}$ qui modélise les efforts intérieurs, traduit les « actions de contact » entre les particules de $\mathcal{S}$.

Loi fondamentale de la dynamique

La modélisation qui vient ainsi d'être établie en s'appuyant sur le principe des puissances virtuelles vérifie « par construction » la loi fondamentale de la dynamique (1.2), comme cela a été démontré de façon générale au chapitre IV (§ 6.3). La vérification directe de ce résultat peut aussi être faite en calculant les éléments de réduction de $[\mathcal{F}'_e]$ et $[\mathcal{M}\mathfrak{A}']$ à partir des expressions (2.3) et (2.11) : en procédant aux intégrations correspondantes compte tenu de (3.13) et (3.15) on retrouve aisément, en appliquant la formule de la divergence, que $\underline{F}'_e = \underline{A}'$; la vérification de $\underline{C}'_0 = \underline{\delta}'_0$ se révèle plus laborieuse : une méthode élégante, souvent utilisée, consiste à vérifier que $\forall \underline{\hat{\omega}}_0$ on a $\underline{\hat{\omega}}_0 \cdot \underline{C}'_0 = \underline{\hat{\omega}}_0 \cdot \underline{\delta}'_0$ ce qui facilite l'application de la formule de la divergence (on rejoint ainsi, en fait, la démonstration générale donnée au chapitre IV (§ 6.3)).

Un bilan...

Ainsi, dans le même esprit qui avait conduit à la notion de pression, on a construit une modélisation des efforts intérieurs dont les degrés de liberté permettent de lever les restrictions qui rendaient la modélisation « pression » insuffisante pour l'étude générale des milieux continus classiques. Ceci est bien conforme à l'objectif que l'on s'était fixé initialement.

Il est clair que cette « libération » de la modélisation est apportée par le ***caractère tensoriel*** de $\underline{\underline{\sigma}}$ (cf. § 3.5).

... et quelques remarques.

On a vérifié ci-dessus la cohérence de la modélisation avec des efforts extérieurs donnés sous forme de forces volumiques (ou plus couramment, massiques) sur Ω_t et de forces surfaciques sur $\partial\Omega_t$. On verra au paragraphe 3.9 qu'elle permet également d'envisager des densités surfaciques de forces extérieures données à l'intérieur de Ω_t et l'on établira les équations correspondantes. Par contre elle n'est pas directement compatible avec la donnée d'efforts extérieurs sous la forme de densités de forces linéiques ou ponctuelles : il est alors nécessaire d'introduire des singularités du champ $\underline{\underline{\sigma}}$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Ce contrôle (annoncé au chapitre IV, § 4.1 et 4.2) de la cohérence mathématique des écritures proposées pour les formes linéaires $\mathcal{P}_{(e)}(\underline{\hat{U}})$, $\mathcal{P}'_{(e)}(\underline{\hat{U}})$, $\mathcal{P}_{(i)}(\underline{\hat{U}})$ et $P'_{(i)}(\underline{\hat{U}})$, c'est-à-dire, en fait, de la cohérence physique des modélisations proposées pour les efforts extérieurs et intérieurs pour le système et pour ses sous-systèmes, est rendu nécessaire par le mode de présentation adopté ici. On a souhaité en effet mettre en évidence les rôles de l'intuition physique dans la mise en œuvre de la méthode des puissances virtuelles. Cela a conduit à l'introduction d'hypothèses surabondantes du point de vue mathématique, qui doivent se révéler redondantes, c'est-à-dire physiquement cohérentes.

Il est clair, a posteriori, qu'il suffirait par exemple de poser, de façon axiomatique, l'écriture intégrale (2.12) pour la puissance virtuelle des efforts intérieurs, qui postule l'existence d'une densité volumique de puissance virtuelle des efforts intérieurs ***indépendante du sous-système considéré***, avec l'expression (3.4) pour cette densité. Le principe des puissances virtuelles impose d'abord la forme (3.9) qui détermine la modélisation des efforts intérieurs. Ensuite, par les raisonnements du paragraphe 3.3, il permet de montrer que la seule modélisation des efforts extérieurs, compatible avec la modélisation posée pour les efforts intérieurs, est constituée d'une densité de forces volumiques indépendante du sous-système considéré (il n'y a donc pas d'interaction à distance entre les particules du système : conséquence directe de (2.12)), et d'une densité de forces surfaciques sur la frontière de $\mathcal{S}$. Pour un sous-système $\mathcal{S}'$ quelconque, le principe des puissances virtuelles fait enfin apparaître, outre les forces volumiques, des forces surfaciques au contour qui résultent des seules actions locales de contact de $(\mathcal{S} - \mathcal{S}')$ sur $\mathcal{S}'$ et qui ne dépendent que des éléments différentiels du premier ordre de la frontière de $\mathcal{S}'$ c'est-à-dire de $\underline{\mathrm{d}a} = \underline{n}(\underline{x})\,\mathrm{d}a$ (en particulier, elles ne dépendent pas de la courbure, § 3.5).

3.5 Tenseur des contraintes de Cauchy. Vecteur-contrainte

Tenseur des contraintes

Le champ tensoriel du deuxième ordre, nécessairement symétrique, introduit ici pour modéliser les efforts intérieurs, est appelé champ des ***tenseurs des contraintes de Cauchy***. Il est, comme tout ce qui a été mis en œuvre jusqu'ici dans l'application du principe des puissances virtuelles, défini sur la ***configuration actuelle*** κ_t. La section 4 examinera les possibilités de représentations lagrangiennes.

On voit que cette modélisation tensorielle est celle qui est « naturellement » associée à la description qui a été donnée au chapitre III pour la cinématique des déformations réelles du milieu continu tridimensionnel, à partir du gradient du champ de vitesse : le principe des puissances virtuelles, qui impose la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy, met en évidence que seul le tenseur « taux de déformation virtuel », doit intervenir dans l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs.

On peut revenir sur l'interprétation physique du modèle à partir de la formule (3.15) déjà abordée au paragraphe précédent.

Vecteur-contrainte

En chaque point M intérieur au domaine Ω_t , la formule (3.17) détermine la force élémentaire $\underline{\mathrm{d}f}$ qui s'exerce sur l'élément d'aire da orienté transversalement par la normale $\underline{n}(\underline{x})$: $\underline{\mathrm{d}f} = \underline{\sigma}(\underline{x}, t)\,.\,\underline{n}(\underline{x})\,\mathrm{d}a$. Cette force $\underline{\mathrm{d}f}$, qui représente les actions locales de contact en M sur n'importe quel sous-système $\mathcal{S}'$ qui y admet $\underline{n}(\underline{x})$ pour normale sortante, est exercée sur les particules de $\mathcal{S}$ infiniment voisines de da du côté « intérieur » par les particules de $\mathcal{S}$ infiniment voisines de da du côté « extérieur ».

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

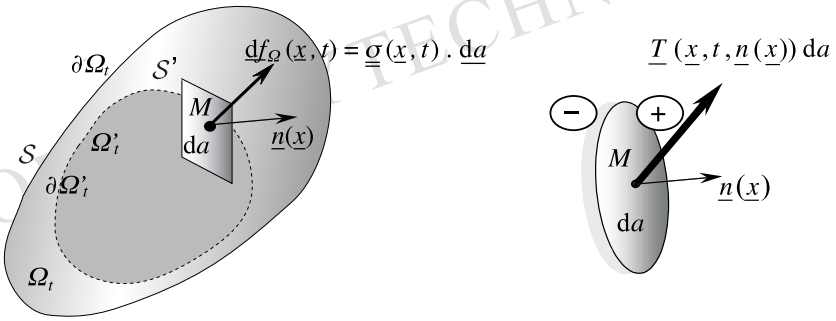


Figure 7 – Efforts extérieurs au contour d'un sous-système. Définition du vecteur-contrainte

Ainsi, du point de vue des efforts extérieurs surfaciques le concept de sous-système n'a plus qu'un caractère local et il est pertinent de ne se référer qu'à l'élément d'aire orienté transversalement, qui reçoit le nom de ***facette orientée par la normale*** $\underline{n}(\underline{x})$ en M (figure 7).

Sur cette facette, la densité surfacique d'efforts extérieurs est donnée par le vecteur

$$\underline{T}(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x})) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{n}(\underline{x}) \tag{3.18}$$

qui est appelé ***vecteur-contrainte*** en M sur la facette de normale $\underline{n}(\underline{x})$.

L'équation (3.18) exprime que le ***vecteur-contrainte en*** M ***sur une facette dépend linéairement de l'orientation de celle-ci*** : ***le tenseur des contraintes de Cauchy explicite cette dépendance***.

Interprétation physique de la modélisation

Comme on l'a expliqué plus haut (§ 3.4), les efforts extérieurs surfaciques sur $\mathcal{S}'$ sont le résultat sur $\partial\Omega'_t$ des efforts intérieurs au système $\mathcal{S}$. Ainsi, le vecteur-contrainte (de Cauchy) $\underline{T}(\underline{x},t\,,\,\underline{n}(\underline{x}))$ apparaît comme la vision physique « concrète » de la modélisation construite pour les efforts intérieurs.

En chaque point M de $\mathcal{S}$ les efforts intérieurs ne résultent que d'actions de contact entre les particules. Ils y sont décrits par l'ensemble des vecteurs-contraintes $\underline{T}(\underline{x},t\,,\,\underline{n}(\underline{x}))$ agissant sur toutes les facettes passant par M. En raison de la linéarité manifestée par (3.18), ils sont décrits en M par le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$ symétrique, c'est-à-dire par six composantes scalaires.

Vecteur-contrainte au contour de $\mathcal{S}$

La définition (3.18) du vecteur-contrainte en un point M intérieur à Ω_t s'applique aussi sur la frontière $\partial\Omega_t$: à partir de la connaissance de $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$ au point M de $\partial\Omega_t$ on définit, pour toute orientation $\underline{n}(\underline{x})$, le vecteur $\underline{T}(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x}))$ par cette même formule (3.18).

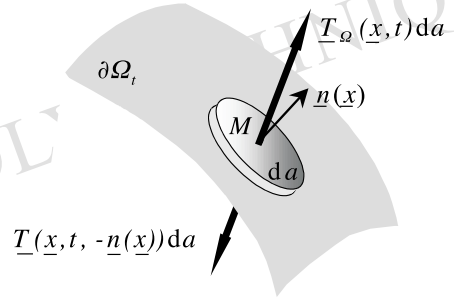


Figure 8 – Vecteur-contrainte au contour de $\mathcal{S}$

La condition aux limites fournie par l'équation au contour (3.14) s'écrit alors

$$\underline{T}(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x})) = \underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t) \quad \text{sur } \partial\Omega_t \ , \tag{3.19}$$

c'est-à-dire que, sur $\partial\Omega_t$, le vecteur-contrainte est égal à la densité de forces surfaciques extérieures exercées sur le système.

À titre d'interprétation physique de ce résultat (figure 8), on peut remarquer que (3.19) s'écrit aussi : $\underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t)+\underline{T}(\underline{x},t\,,-\underline{n}(\underline{x}))=0$. L'élément d'aire da est en équilibre sous l'action d'une part de la densité de forces surfaciques extérieures et d'autre part de la densité surfacique des efforts intérieurs de contact exercés sur la facette de normale $-\underline{n}(\underline{x})$.

Interprétation des composantes du tenseur des contraintes

Poursuivant l'interprétation physique de la modélisation des efforts intérieurs au moyen du champ de tenseur des contraintes de Cauchy, on recherche maintenant la signification des composantes de $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$. Celle-ci apparaît à partir de la définition du vecteur-contrainte (3.18).

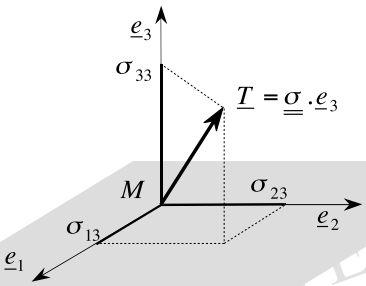


Figure 9 – Interprétation des composantes du tenseur des contraintes en repère orthonormé

Si l'on choisit (figure 9) pour représenter $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$ et $\underline{n}(\underline{x})$ en M une ***base ortho-***

normée, la formule (3.18) donne :

$$\underline{T}(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x})) = \sigma_{ij}(\underline{x},t)n_j(\underline{x})\,\underline{e}_i = T_i(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x}))\,\underline{e}_i \tag{3.20}$$

et l'on retiendra :

$$T_i = \sigma_{ij}n_j \tag{3.21}$$

On en déduit que dans ce cas :

> ***la composante*** $\sigma_{ij}(=\sigma_{ji})$ ***du tenseur des contraintes de Cauchy représente la composante selon la direction*** $\underline{e}_i$ ***du vecteur-contrainte sur la facette de normale*** $\underline{e}_j$***.***

Ce résultat illustre l'apport de la modélisation tensorielle des efforts intérieurs par rapport à la modélisation scalaire de la pression dans la section 2 : le tenseur des contraintes [8] $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$ donne à $\underline{T}((\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x}))$ les degrés de liberté qui lui faisaient défaut dans la modélisation pression (cf. § 3.1). C'est ce que schématise la comparaison représentée sur la figure 10 qui met en évidence les six degrés de liberté de $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$ symétrique vis-à-vis de l'unique degré de liberté $p\,(\underline{x},t)$.

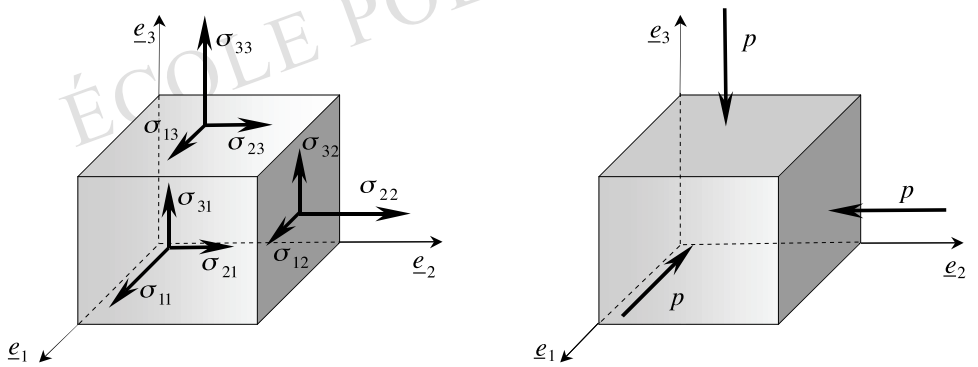


Figure 10 – Composantes des vecteurs-contraintes agissant sur trois plans mutuellement orthogonaux quelconques : champ de contrainte et champ de pression

3.6 Modélisation des efforts intérieurs à un milieu continu à partir du concept de vecteur-contrainte

On trouve dans le livre célèbre de A.E.H. Love [9] ***A treatise on the mathematical theory of elasticity*** une remarquable introduction historique dont sont extraits les passages suivants.

[8] Les contraintes étaient autrefois appelées « tensions » : c'est l'origine du mot « tenseur ».
[9] A.E.H. Love (1863-1940).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

By the Autumn of 1822 Cauchy had discovered most of the elements of the pure theory of elasticity. He had introduced the notion of stress at a point determined by the tractions per unit of area across all plane elements through the point. For this purpose he had generalized the notion of hydrostatic pressure, and he had shown that the stress is expressible by means of six component stresses, and also by means of three purely normal tractions across a certain triad of planes which cut each other at right angles – the « principal planes of stress ».

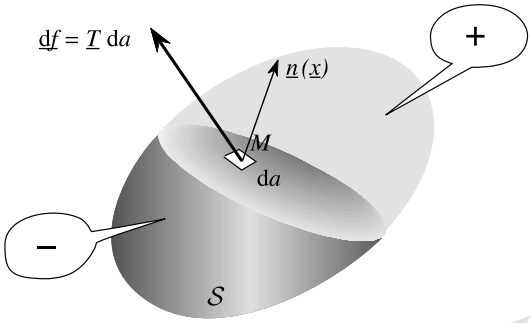


Figure 11 – Efforts intérieurs de contact modélisés par le vecteur-contrainte

On se propose ici de dégager les grandes lignes de la construction de la modélisation des efforts intérieurs à partir du concept de ***vecteur-contrainte*** dans l'esprit développé par Cauchy.

La figure 11 fixe le point de départ de la méthode : on postule qu'en un point M quelconque intérieur au volume Ω_t de $\mathcal{S}$, à travers une surface élémentaire da de normale $\underline{n}(\underline{x})$, les seuls efforts intérieurs entre les particules du système sont des efforts de contact ; les efforts exercés par les particules infiniment voisines de da du côté $\oplus$ sur les particules infiniment voisines de da du côté $\ominus$ sont supposés modélisables par une ***force élémentaire*** $\underline{T}\,\mathrm{d}a$ appliquée en M (en première approximation).

On démontre alors la dépendance linéaire de $\underline{T}$ en fonction de $\underline{n}(\underline{x})$ par le raisonnement dit « ***du petit tétraèdre*** » (figure 12).

- En base orthonormée on écrit la loi fondamentale (1.2) pour un tétraèdre infinitésimal d'arêtes MA_1, MA_2, MA_3 dirigées suivant les vecteurs de base, et de longueurs $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3$ quelconques. Au deuxième ordre en $\mathrm{d}x_i$, les forces de volume et les quantités d'accélérations n'interviennent pas [(10)] et l'on doit seulement écrire l'équilibre, du point de vue de la résultante globale, des efforts au contour c'est-à-dire sur les facettes $MA_1A_2, MA_2A_3, MA_3A_1$ et $A_1A_2A_3$.

- Pour cela on introduit les 9 composantes σ_{ij} des densités surfaciques sur les facettes de normales respectives $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ (opposées aux normales sortant du tétraèdre)

$$\begin{array}{ll} MA_2A_3 & \sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31} \\ MA_3A_1 & \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32} \\ MA_1A_2 & \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}\ . \end{array}$$

  En appliquant la loi des actions mutuelles (« action-réaction ») et en écrivant l'équilibre de la résultante en projection sur chacun des axes, on obtient, pour les composantes de la densité surfacique sur $A_1A_2A_3$, la formule :

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \qquad i, j = 1, 2, 3$$

  où les n_j désignent les composantes du vecteur normal à $A_1A_2A_3$ (sortant du tétraèdre).

(10) Elles sont du troisième ordre en $\mathrm{d}x_i$.

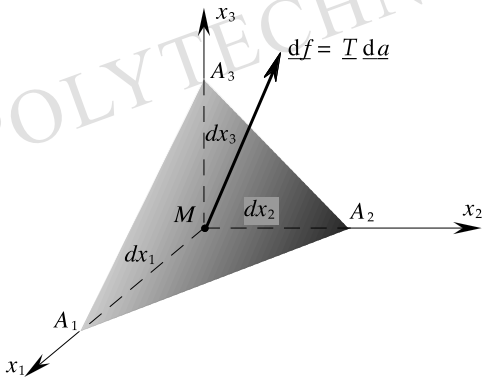


Figure 12 – Raisonnement « du petit tétraèdre »

On démontre ensuite la symétrie des composantes σ_{ij}, et les équations de la dynamique (3.13) par le raisonnement dit « ***du petit parallélépipède*** » (figure 13).

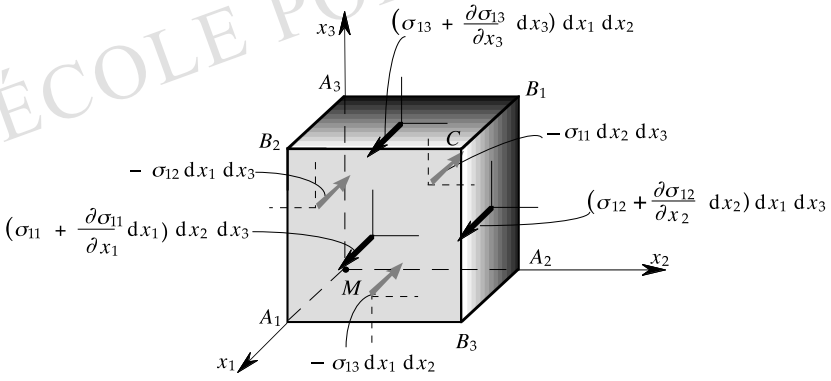


Figure 13 – Raisonnement « du petit parallélépipède »

- On considère un parallélépipède infinitésimal, dont les côtés sont parallèles aux vecteurs d'un repère orthonormé, et de longueurs respectives $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3$; on écrit la loi fondamentale (1.2).

- Dans l'équilibre des moments autour des axes, les premiers termes à prendre en compte sont du troisième ordre en $\mathrm{d}x_j$ et ne concernent que les efforts sur les faces du parallélépipède non adjacentes à M ; on en déduit les relations de symétrie

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad i, j = 1, 2, 3\ .$$

- Du point de vue de la résultante globale des efforts et des quantités d'accélération, le raisonnement est analogue à celui du paragraphe 2.5 (figure 4), et les premiers termes

significatifs sont du troisième ordre en $\mathrm{d}x_i$; à titre d'exemple, selon l'axe Ox_1 on écrit :

$$(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 - \sigma_{11}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + (\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3 - \sigma_{12}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3$$
$$+ (\sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 - \sigma_{13}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + \rho(\underline{x}, t)(F_1 - a_1)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = 0$$

d'où la formule :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho(\underline{x}, t)(F_1 - a_1) = 0$$

qui exprime, en coordonnées cartésiennes orthonormées, la composante d'indice 1 de (3.13). Le même raisonnement, appliqué à un volume infinitésimal délimité par des surfaces-coordonnées, permet de retrouver commodément l'écriture explicite des formules (3.13) pour les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques par exemple. Ces formules sont données au paragraphe suivant.

On ne donnera pas plus de détails sur cette approche ; le lecteur intéressé pourra notamment se reporter aux ouvrages cités en bibliographie. On remarquera que le raisonnement « du petit tétraèdre » correspond au raisonnement analytique de continuité sur l'intégrale de surface dans (3.12), ce qui apparaît notamment par le fait qu'y interviennent les termes d'ordre 2 en $\mathrm{d}x_i$; le raisonnement « du petit parallélépipède » est, lui, associé au raisonnement analytique de continuité sur l'intégrale de volume dans (3.12) (terme d'ordre 3 en $\mathrm{d}x_i$).

3.7 Expressions explicites des équations de la dynamique

On trouvera ci-dessous, en raison de leur utilité fréquente, les formules explicitant les équations (3.13) dans les cas suivants : coordonnées cartésiennes orthonormées, coordonnées cylindriques, coordonnées sphériques ; ces trois cas correspondent à des ***bases locales orthonormées***.

Coordonnées cartésiennes orthonormées

(3.22)
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho(F_x - a_x) = 0\\
&\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho(F_y - a_y) = 0\\
&\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho(F_z - a_z) = 0
\end{aligned}$$

Coordonnées cylindriques

(3.23)
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho(F_r - a_r) = 0\\
&\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \rho(F_\theta - a_\theta) = 0\\
&\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho(F_z - a_z) = 0
\end{aligned}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

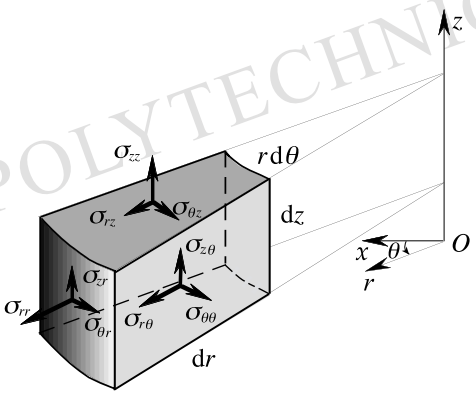


Figure 14 – Élément de volume en coordonnées cylindriques

Coordonnées sphériques

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}(2\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{r\theta}\cot\,\theta)+\rho(F_r-a_r)=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\big((\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\varphi\varphi})\cot\,\theta+3\sigma_{r\theta}\big)+\rho(F_\theta-a_\theta)=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{\varphi r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}(3\sigma_{\varphi r}+2\sigma_{\varphi\theta}\cot\,\theta)+\rho(F_\varphi-a_\varphi)=0$$

3.8 Champ de vitesse virtuel discontinu

On a considéré, pour la construction de la modélisation par la méthode des puissances virtuelles, l'espace vectoriel des mouvements virtuels définis par des champs de vitesse continus et continûment différentiables. La puissance virtuelle des efforts intérieurs étant alors définie par la densité volumique (3.8) on a obtenu les formules (3.13) à (3.15) qui établissent la modélisation des efforts intérieurs dans un milieu continu tridimensionnel au moyen du champ de tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$.

Ces résultats étant acquis, on se propose, comme au paragraphe 2.7, d'examiner l'écriture à donner à la puissance virtuelle des efforts intérieurs dans le cas d'un mouvement virtuel défini par un champ de vitesse virtuel continu et continûment différentiable ***par morceaux***, en supposant que le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ est ***continu***, et continûment différentiable par morceaux.

Le raisonnement est analogue à celui du paragraphe 2.7 ; les notations et la figure 15 sont identiques. On considère encore à titre d'exemple un champ de vitesse virtuel $\underline{\hat{U}}$, continu et continûment différentiable sur deux volumes Ω'_1 et Ω'_2 complémentaires dans Ω_t, et discontinu au franchissement de la surface $\Sigma_{\underline{\hat{U}}}$ frontière entre Ω'_1 et Ω'_2.

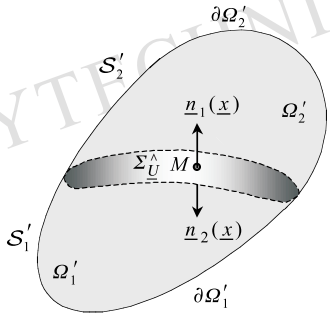


Figure 15 – Champ de vitesse virtuel discontinu au franchissement de $\Sigma_{\underline{\hat{U}}}$

En appliquant le principe des puissances virtuelles sous sa forme (3.10) séparément aux deux sous-systèmes $\mathcal{S}_1'$ et $\mathcal{S}_2'$ de volumes respectifs Ω_1' et Ω_2' on obtient les équations :

$$\int_{\Omega_1'} \rho(\underline{x},t)\underline{F}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_{1_t}'} \underline{T}_{\Omega_1'}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}a + \int_{\Sigma_{\underline{\hat{U}}}} \underline{T}_{\Omega_1'}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}_1(\underline{x})\,\mathrm{d}a + \int_{\Omega_1'} -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{\hat{d}}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_1'} \rho(\underline{x},t)\underline{a}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t\ , \tag{3.24}$$

(3.25) identique à (3.24) en changeant l'indice 1 en 2.

Le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ étant supposé continu sur $\Sigma_{\underline{\hat{U}}}$ on a, par la formule (3.15) :

$$\underline{T}_{\Omega_1'}(\underline{x},t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{n}_1(\underline{x}) \tag{3.26}$$

$$\underline{T}_{\Omega_2'}(\underline{x},t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{n}_2(\underline{x})\ , \tag{3.27}$$

et compte tenu de ce que $\underline{n}_1(\underline{x}) = -\underline{n}_2(\underline{x})$, on obtient immédiatement, par addition de (3.24) et (3.25) l'expression valable pour le système $\mathcal{S}$ globalement :

$$\int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)\underline{F}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}a + \int_{\Omega_t} -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{\hat{d}}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_{\underline{\hat{U}}}} -[\![\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\,]\!]\,.\,\underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x},t)\,.\,\underline{n}(\underline{x})\mathrm{d}a = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)\underline{a}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t\ , \tag{3.28}$$

dans laquelle, pour l'intégrale sur $\Sigma_{\underline{\hat{U}}}$, on désigne par $\underline{n}(\underline{x})$ une normale à $\Sigma_{\underline{\hat{U}}}$ en M et par $[\![\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\,]\!]$ la discontinuité de $\underline{\hat{U}}(\underline{x})$ en M, au franchissement de $\Sigma_{\underline{\hat{U}}}$ dans le sens de $\underline{n}(\underline{x}) = \underline{n}_1(\underline{x})$:

$$[\![\,\underline{\hat{U}}(\underline{x})\,]\!] = \underline{\hat{U}}_2(\underline{x}) - \underline{\hat{U}}_1(\underline{x})\ .$$

La démonstration ci-dessus, qui a évidemment une portée générale pour un champ $\underline{\hat{U}}$ continu et continûment différentiable ***par morceaux*** quelconque, établit ainsi le résultat suivant.

Pour un milieu continu dont les efforts intérieurs sont modélisés par le champ tensoriel du deuxième ordre $\underline{\underline{\sigma}}$ des contraintes de Cauchy, dans le cas d'un mouvement virtuel défini par un champ de vitesse virtuel $\underline{\hat{U}}$ continu et continûment différentiable ***par morceaux***, les deux énoncés du principe des puissances virtuelles sont conservés

mais le calcul de la puissance virtuelle des efforts intérieurs doit prendre en compte les discontinuités éventuelles de $\underline{\hat{U}}$.

La puissance virtuelle des efforts intérieurs est obtenue par intégration, sur le volume du système (ou d'un sous-système), de la densité volumique :

$$-\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{\hat{d}}}(\underline{x}) = -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{\text{grad}\ \hat{U}}}(\underline{x}) \tag{3.29}$$

et par intégration, sur les surfaces de discontinuité $\Sigma_{\underline{\hat{U}}}$ de $\underline{\hat{U}}$ intérieures au volume du système (ou d'un sous-système) d'une densité surfacique égale à :

$$-[\![\, \underline{\hat{U}}(\underline{x}) \,]\!] \cdot \underline{\sigma}(\underline{x},t) \cdot \underline{n}(\underline{x})$$

c'est-à-dire que l'on a pour $\mathcal{S}$ et pour tout sous-système $\mathcal{S}'$

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\underline{\hat{U}}) = \int_{\Omega'_t} -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{\hat{d}}}(\underline{x})\, \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_{\underline{\hat{U}}} \cap \Omega'_t} -[\![\, \underline{\hat{U}}(\underline{x}) \,]\!] \cdot \underline{\sigma}(\underline{x},t) \cdot \underline{n}(\underline{x})\, \mathrm{d}\Sigma_{\underline{\hat{U}}} \tag{3.30}$$

où le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ est supposé continu, et continûment différentiable par morceaux. On verra au paragraphe 3.9 que la validité de cette formule s'étend au cas où $\underline{\underline{\sigma}}$ est continu et continûment différentiable, par morceaux, en l'absence d'onde de choc sur $\Sigma_{\underline{\hat{U}}}$ ce qui assure la ***continuité du vecteur-contrainte*** $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ ***au franchissement de*** $\Sigma_{\underline{\hat{U}}}$.

La formule (3.30) peut être interprétée dans le cadre de la théorie des distributions. L'expression de $\mathcal{P}'_{(i)}(\underline{\hat{U}})$ n'est autre que l'intégrale $\displaystyle\int_{\Omega_t} -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}\ \hat{U}}}$ prise au sens des distributions, où la distribution $\underline{\underline{\text{grad}\ \hat{U}}}$ s'explicite en $\underline{\underline{\text{grad}\ \hat{U}}} = \{\underline{\underline{\text{grad}\ \hat{U}}}\} + [\![\, \underline{\hat{U}} \,]\!] \otimes \underline{n}\, \delta_{\Sigma_{\underline{\hat{U}}}}$ avec $\{\underline{\underline{\text{grad}\ \hat{U}}}\}$ la distribution définie par la ***fonction*** $\underline{\underline{\text{grad}\ \hat{U}}}$ et $\delta_{\Sigma_{\underline{\hat{U}}}}$ la distribution de Dirac sur $\Sigma_{\underline{\hat{U}}}$ (cf. aussi les formules (4.35) du chapitre III et (3.33) du présent chapitre).

3.9 Discontinuités du champ de contrainte

Les équations de la dynamique des milieux continus, (3.13) à (3.15) ont été établies en supposant le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ continu, et continûment différentiable par morceaux. On se propose maintenant d'affaiblir cette hypothèse en supposant $\underline{\underline{\sigma}}$ continu et continûment différentiable ***par morceaux***.

La question posée est de savoir si des discontinuités de $\underline{\underline{\sigma}}$ sont possibles dans le cadre de la modélisation et, dans l'affirmative, quelles équations elles doivent vérifier.

À titre d'exemple on suppose que $\underline{\underline{\sigma}}$ est ***discontinu*** au franchissement d'une surface $\Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}}$. On désigne par Ω'_1 et Ω'_2 les deux volumes complémentaires délimités par $\Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}}$ dans le volume Ω_t du système $\mathcal{S}$, ou dans le volume Ω'_t d'un sous-système $\mathcal{S}'$ quelconque de $\mathcal{S}$ (figure 16).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

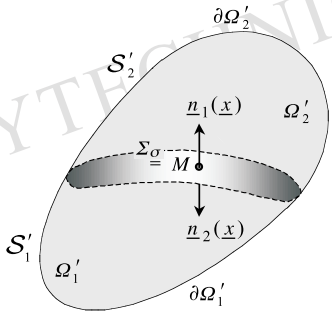


Figure 16 – Champ de contrainte discontinu sur Ω_t au franchissement de $\Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}}$

Champ de vitesse réel continu et continûment différentiable sur Ω_t

La formule initiale (3.10) à partir de laquelle ont été établies les équations de la dynamique est inchangée. En revanche la suite du raisonnement du paragraphe 3.3 ne peut être menée qu'en considérant séparément les volumes Ω'_1 et Ω'_2 sur lesquels l'équation (3.11) et le théorème de la divergence sont applicables sous leurs formes classiques qui concernent les fonctions continues et continûment différentiables. On obtient ainsi, sans difficulté, sur le volume Ω_t de $\mathcal{S}$, ou sur le volume Ω'_t d'un sous-système $\mathcal{S}'$, l'équation :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\ ,\ \forall \underline{\hat{U}}\ \text{m.v.}\ , \\
\displaystyle\int_{\Omega'_t} \left(\operatorname{div}\, {}^t\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) + \rho(\underline{x},t)(\underline{F}(\underline{x},t) - \underline{a}(\underline{x},t)) \right) . \underline{\hat{U}}(\underline{x})\, \mathrm{d}\Omega_t \\
\displaystyle + \int_{\partial\Omega'_t} \left(\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t) - \underline{n}(\underline{x}) . \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) \right) . \underline{\hat{U}}(\underline{x})\, \mathrm{d}a \\
\displaystyle + \int_{\Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}} \cap \Omega'_t} -\left(\underline{n}_1(\underline{x}) . \underline{\underline{\sigma}}_1(\underline{x},t) + \underline{n}_2(\underline{x}) . \underline{\underline{\sigma}}_2(\underline{x},t) \right) . \underline{\hat{U}}(\underline{x})\, \mathrm{d}\Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}} = 0\ .
\end{array}
\right. \tag{3.31}
$$

Cette équation, qui remplace l'équation (3.12), est valable quel que soit $\underline{\hat{U}}$ continu et continûment différentiable sur Ω'_t. Son exploitation compte tenu de la symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$, en considérant d'abord le système $\mathcal{S}$, puis un sous-système $\mathcal{S}'$ quelconque, et en s'appuyant sur le caractère arbitraire du champ $\underline{\hat{U}}$, conduit aux mêmes équations (3.13) à (3.15) qui correspondent à l'annulation des cofacteurs de $\underline{\hat{U}}(\underline{x})$ dans la première et la deuxième intégrale.

Mais, de plus, on obtient par le même raisonnement la nullité du cofacteur de $\underline{\hat{U}}(\underline{x})$ dans la troisième intégrale, c'est-à-dire, sur $\Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}}$:

$$
\underline{\underline{\sigma}}_1(\underline{x},t) . \underline{n}_1(\underline{x}) + \underline{\underline{\sigma}}_2(\underline{x},t) . \underline{n}_2(\underline{x}) = 0\ .
$$

Compte tenu de ce que les vecteurs normaux extérieurs à Ω'_1 et Ω'_2 en M sont opposés, et en posant :

$$
[\![\, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) \,]\!] = \underline{\underline{\sigma}}_2(\underline{x},t) - \underline{\underline{\sigma}}_1(\underline{x},t) \tag{3.32}
$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

on écrira :

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall M \in \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}} \\ [\![\, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) \,]\!] \,.\, \underline{n}(\underline{x}) = 0\end{array}} \tag{3.33}$$

où $\underline{n}(\underline{x})$ désigne la normale à la surface de discontinuité du champ de contrainte en un point M de celle-ci, et $[\![\, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) \,]\!]$ la discontinuité de ce champ lorsque l'on franchit la surface $\Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}}$ en M dans le sens de $\underline{n}(\underline{x})$.

Le résultat qui vient d'être obtenu est aussi important que l'équation (3.13) qu'il complète dans le cas, fréquemment rencontré, d'un champ de contrainte continu et continûment différentiable par morceaux (par exemple : système constitué de matériaux à comportements différents).

En rappelant la définition (3.18) du vecteur-contrainte sur une facette on voit que (3.33) peut aussi s'énoncer :

> ***au franchissement d'une surface de discontinuité du champ de contrainte, il y a continuité du vecteur-contrainte sur la facette tangente à cette surface.***

La continuité ainsi démontrée du vecteur-contrainte au franchissement de $\Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}}$ montre que la validité de la formule (3.30) établie au paragraphe précédent s'étend au cas où le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ est ***discontinu*** au franchissement de $\Sigma_{\underline{\hat{U}}}$ ***en l'absence d'onde de choc sur*** $\Sigma_{\underline{\hat{U}}}$.

On peut remarquer que la condition (3.33) implique dans le cas de la modélisation des efforts par un champ de pression où $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) = -p(\underline{x},t)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$, que ce dernier est nécessairement continu :

$$[\![\, p(\underline{x},t) \,]\!] = 0 \,. \tag{3.34}$$

- Il est utile de donner une démonstration « imagée » de l'équation (3.33), schématisée sur la figure 17, dans l'esprit des démonstrations « du petit tétraèdre » et « du petit parallélépipède » représentées sur les figures 12 et 13.
  La surface de discontinuité $\Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}}$ est « dédoublée » en deux surfaces parallèles Σ_1 et Σ_2 infiniment voisines (distance λ), situées de part et d'autre dans les volumes Ω'_1 et Ω'_2 respectivement. On considère un petit volume parallélépipédique, infiniment plat selon Σ_σ, limité par ces deux surfaces. La loi fondamentale (1.2) appliquée à ce volume implique, à l'ordre zéro en λ, l'équilibre des efforts exercés sur ses faces Σ_2 et Σ_1 respectivement par les sous-systèmes Ω'_2 et Ω'_1. Il en résulte, à partir de la formule (3.17) qui exprime la force élémentaire sur un élément de surface, et compte tenu des orientations opposées des normales à considérer sur Σ_2 et Σ_1, l'équation :

  $$\underline{\underline{\sigma}}_2(\underline{x},t) \,.\, \underline{n}(\underline{x})\,\mathrm{d}a - \underline{\underline{\sigma}}_1(\underline{x},t) \,.\, \underline{n}(\underline{x})\,\mathrm{d}a = 0 \tag{3.35}$$

  (les forces de masse et les forces d'inertie sont du premier ordre en λ).
  Ce raisonnement est formellement identique à celui donné au paragraphe 3.5 (figure 8) à propos du vecteur-contrainte au contour de $\mathcal{S}$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

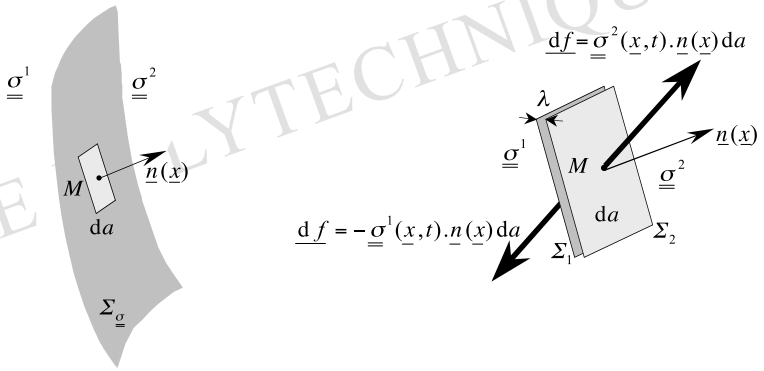


Figure 17 – Discontinuité du champ de contrainte

- Du point de vue mathématique on peut aussi obtenir l'équation (3.33) en reprenant le raisonnement du paragraphe 3.3 directement sur $\mathcal{S}$ (ou sur $\mathcal{S}'$), sans se référer à la partition (Ω'_1, Ω'_2), en se plaçant dans le cadre de la théorie des distributions. Les distributions $\mathrm{div}\,({}^t\underline{\underline{\sigma}})$ et $\mathrm{div}\,(\underline{\underline{\sigma}}\,.\,\hat{\underline{U}})$ sont définies, et la formule de la divergence est appliquée, comme indiqué au chapitre III, formule (4.35) [(11)].

Ondes de choc

Le raisonnement décrit sur la figure 13 permet de pressentir que l'équation (3.33) n'est pas valable si $\Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}}$ est une surface de discontinuité Σ_t du champ de vitesse telle que déjà rencontrée au chapitre III (§ 4.4 et 5.1) et au chapitre IV (§ 7.6). On a vu alors que la puissance virtuelle des quantités d'accélération $\mathcal{A}(\hat{\underline{U}})$ comporte dans ce cas un terme intégré sur Σ_t qui manifeste la contribution de la discontinuité $[\![\,\underline{U}\,]\!]$, et est ***non nul dans le cas des ondes de choc*** :

$$\mathcal{A}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega_t} \rho\underline{a}\,.\,\hat{\underline{U}}\;\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_t} \rho\,[\![\,\underline{U}\,]\!]\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{U}-\underline{W})\,.\,\underline{n}\;\mathrm{d}\Sigma_t \tag{3.36}$$

où le champ $\hat{\underline{U}}$ est supposé continu au franchissement de Σ_t (formule homologue pour $\mathcal{A}'(\hat{\underline{U}})$).

- Physiquement ce terme s'interprète comme une ***densité surfacique de quantité d'accélération sur*** Σ_t, qui fournit donc un terme d'ordre zéro en λ (figure 17), pour l'équation (3.35). On obtient ainsi, au lieu de (3.33) :

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall M \in \Sigma_t \\ [\![\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,]\!]\,.\,\underline{n}(\underline{x}) = \rho(\underline{x},t)[\![\,\underline{U}(\underline{x},t)\,]\!]\,\big(\underline{U}(\underline{x},t) - \underline{W}(\underline{x},t)\big)\,.\,\underline{n}(\underline{x})\end{array}} \tag{3.37}$$

On rappelle qu'il n'y a pas d'ambiguïté dans le calcul des intégrales de (3.36) et (3.37) en raison de l'équation de conservation de la masse au franchissement de Σ_t (chapitre III, § 5.1) :

$$[\![\,\rho(\underline{x},t)\big(\underline{U}(\underline{x},t) - \underline{W}(\underline{x},t)\big)\,]\!]\,.\,\underline{n}(\underline{x}) = 0\,.$$

- La démonstration par le principe des puissances virtuelles confirme évidemment ce résultat. Avec l'expression (3.36) pour $\mathcal{A}(\hat{\underline{U}})$ ou $\mathcal{A}'(\hat{\underline{U}})$ la formule (3.31) est modifiée dans son dernier terme qui devient :

(11) D'une façon générale on a, avec les notations déjà explicitées, les distributions :
$\mathrm{grad}\,(\quad) = \{\mathrm{grad}\,(\quad)\} + [\![\quad]\!] \otimes \underline{n}\,\delta_{\Sigma}$ et $\mathrm{div}\,(\quad) = \{\mathrm{div}\,(\quad)\} + [\![\quad]\!]\,.\,\underline{n}\,\delta_{\Sigma}$ (qui en résulte),
d'où la formule de la divergence : $\displaystyle\int_{\Omega} \mathrm{div}\,(\quad) = \int_{\partial\Omega} (\quad)\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}a.$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

$$(3.38) \qquad \ldots + \int_{\Sigma_t} ((\llbracket \underline{\underline{\sigma}} \rrbracket - \rho \llbracket \underline{U} \rrbracket \otimes (\underline{U} - \underline{W})) \,.\, \underline{n}) \,.\, \underline{\hat{U}} \, \mathrm{d}\Sigma_t = 0 \,.$$

On en déduit, à la place de (3.33), l'équation (3.37) sur Σ_t par le raisonnement maintenant habituel.
Le résultat ainsi établi s'énonce alors :

> ***le passage d'une onde de choc*** (discontinuité de vitesse non stationnaire) ***implique une discontinuité du vecteur-contrainte.***

En particulier, dans le cas de la modélisation des efforts intérieurs par le champ de pression où $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = -p(\underline{x}, t)\, \underline{\underline{\mathbb{1}}}$, on a :

$$-\llbracket p(\underline{x}, t) \rrbracket \, \underline{n}(\underline{x}) = \rho(\underline{x}, t) \llbracket \underline{U}(\underline{x}, t) \rrbracket \, (\underline{U}(\underline{x}, t) - \underline{W}(\underline{x}, t)) \,.\, \underline{n}(\underline{x}) \,,$$

qui implique que le saut de vitesse est normal à Σ_t.

Densité surfacique de forces extérieures à l'intérieur du système

Les raisonnements ci-dessus, aussi bien sur la figure 17 que par la méthode des puissances virtuelles, sont immédiatement transposables au cas où les efforts extérieurs appliqués au système $\mathcal{S}$ et à ses sous-systèmes comportent, en plus des forces volumiques et surfaciques décrites par les équations (2.5) à (2.9), des forces extérieures exercées à l'intérieur de $\mathcal{S}$, définies par une densité surfacique $\underline{F}_\Sigma(\underline{x}, t)$ sur une surface Σ intérieure à Ω_t. La puissance virtuelle des efforts extérieurs comporte alors, pour $\mathcal{S}$, le terme complémentaire :

$$\int_\Sigma \underline{F}_\Sigma(\underline{x}, t) \,.\, \underline{\hat{U}}(\underline{x}) \, \mathrm{d}\Sigma \,,$$

et l'on obtient, par l'un ou l'autre raisonnement, l'équation pour la discontinuité du champ $\underline{\underline{\sigma}}$ au franchissement de Σ [12] :

$$(3.39) \qquad \begin{cases} \forall M \in \Sigma \\ \llbracket \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \rrbracket \,.\, \underline{n}(\underline{x}) + \underline{F}_\Sigma(\underline{x}, t) = 0 \,. \end{cases}$$

3.10 Théorème d'Euler

Conservation de la quantité de mouvement

Le théorème de la conservation de la quantité de mouvement a été énoncé au chapitre IV (§ 7.3) :

$$(3.40) \qquad \begin{cases} \text{en référentiel galiléen } \mathcal{R} \,, \\ \text{pour } \mathcal{S} \qquad [\mathcal{F}_e] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathcal{MU}] \\ \forall \mathcal{S}' \qquad [\mathcal{F}'_e] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathcal{MU}'] \,. \end{cases}$$

Il est maintenant précisé par la connaissance de la modélisation des efforts extérieurs qui permet notamment d'expliciter les torseurs $[\mathcal{F}_e]$ et $[\mathcal{F}'_e]$ par la formule (2.11).

[12] Cf. chapitre VIII (§ 4.2).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

De plus les équations (3.14) et (3.15) expriment $\underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t)$ et $\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)$ en fonction du champ des efforts intérieurs $\underline{\underline{\sigma}}$. On obtient alors le théorème de la conservation de la quantité de mouvement dans le cadre de cette modélisation sous la forme (notations simplifiées) :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{en référentiel galiléen } \mathcal{R}\ , \\
\forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\ , \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathcal{MU}'] = [\,O\ ,\ \displaystyle\int_{\Omega'_t} \rho \underline{F}\,\mathrm{d}\Omega_t\ ,\ \int_{\Omega'_t} \underline{OM} \wedge \rho \underline{F}\,\mathrm{d}\Omega_t\,] \\
\qquad\qquad\qquad + [\,O\ ,\ \displaystyle\int_{\partial\Omega'_t} \underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{\mathrm{d}a}\ ,\ \int_{\partial\Omega'_t} \underline{OM} \wedge \underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{\mathrm{d}a}\,]\ .
\end{array}
\right. \tag{3.41}
$$

Théorème d'Euler

De même le théorème d'Euler (chapitre IV, § 7.4), dans le cas où le champ de vitesse réel $\underline{U}$ est continu et continûment différentiable sur Ω_t, s'explicite maintenant sous la forme :

> ***en référentiel galiléen*** $\mathcal{R}$,
> $\forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$,
> ***le torseur des forces***
> $(\rho \underline{F} - \dfrac{\partial(\rho \underline{U})}{\partial t})\,\mathrm{d}\Omega_t$ ***réparties dans le volume*** Ω'_t ,
> $(\underline{\underline{\sigma}} - \rho(\underline{U} \otimes \underline{U}))\,.\,\underline{\mathrm{d}a}$ ***réparties au contour*** $\partial\Omega'_t$,
> ***est nul.***

Dans le cas où le champ de vitesse $\underline{U}$ est discontinu (onde de choc) et/ou en présence de forces extérieures surfaciques à l'intérieur de Ω_t, on se réfère aux formules (7.37) à (7.39) du chapitre IV et le théorème s'énonce :

> ***en référentiel galiléen*** $\mathcal{R}$,
> $\forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$,
> ***le torseur des forces***
> $(\rho \underline{F} - \dfrac{\partial(\rho \underline{U})}{\partial t})\,\mathrm{d}\Omega_t$ ***réparties dans le volume*** Ω'_t ,
> $(\underline{\underline{\sigma}} - \rho(\underline{U} \otimes \underline{U}))\,.\,\underline{\mathrm{d}a}$ ***réparties au contour*** $\partial\Omega'_t$,
> $[\![\,\rho \underline{U}\,]\!] W\,\mathrm{d}\Sigma_t$ ***réparties sur*** Σ_t, $\underline{F}_{\Sigma}\,\mathrm{d}\Sigma$ ***réparties sur*** Σ ,
> ***est nul.***

Remarque sur la terminologie « loi de conservation »

Le terme « loi de conservation » appliqué à l'équation (3.41) s'entend de la façon suivante. Cette équation exprime que le taux de variation (dérivée particulaire) du torseur des quantités de mouvement relatif au système $\mathcal{S}$ (ou à un sous-système quelconque $\mathcal{S}'$) est égal au

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

torseur des efforts extérieurs. Celui-ci représente la source de variation de la quantité de mouvement : il est constitué de deux termes, volumique et surfacique, dus respectivement aux forces de masse et aux vecteurs-contraintes $\underline{T}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ définis par (3.18).

Il convient de signaler que la ***conservation de la quantité de mouvement*** sert de point de départ à une méthode alternative pour la construction de la modélisation des efforts. On pose a priori que les efforts exercés sur un sous-système $\mathcal{S}'$ par $(\mathcal{S} - \mathcal{S}')$ traduisent des actions de contact sous la forme de forces surfaciques qui ne dépendent que de l'orientation de l'élément de surface concerné ; l'exploitation de (3.40) posée comme principe permet alors de construire la modélisation par le tenseur des contraintes de Cauchy.

3.11 Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique a été énoncé au chapitre IV (7.5). Il est maintenant précisé par la connaissance de la modélisation des efforts extérieurs et intérieurs.

Si le champ de vitesse réel est continu et continûment différentiable les expressions de $\mathcal{A}(\underline{U})$, $\mathcal{P}_{(e)}(\underline{U})$ et $\mathcal{P}_{(i)}(\underline{U})$ s'obtiennent immédiatement à partir des équations (2.2), (2.6) et (3.8) respectivement en y substituant $\underline{U}$ à $\underline{\hat{U}}$. On a ainsi l'énoncé, pour $\mathcal{S}$:

$$\text{(3.42)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{en référentiel galiléen ,} \\ \displaystyle\int_{\Omega_t} \rho \underline{F} \cdot \underline{U} \, \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{T}_\Omega \cdot \underline{U} \, \mathrm{d}a - \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}\, U}} \, \mathrm{d}\Omega_t \\ \displaystyle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_t} \rho \frac{U^2}{2} \mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{a} \cdot \underline{U} \, \mathrm{d}\Omega_t \ , \end{array} \right.$$

(énoncé homologue pour $\mathcal{S}'$, quelconque).

Lorsque le champ de vitesse réel est discontinu (onde de choc au franchissement de Σ_t dont la vitesse de propagation est $\underline{W}$), on a vu que la puissance des quantités d'accélération dans le champ de vitesse réel s'écrit (formule (7.41) du chapitre IV) :

$$\text{(3.43)} \qquad \mathcal{A}(\underline{U}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_t} \rho \frac{U^2}{2} \mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{a} \cdot \underline{U} \, \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_t} \rho \frac{[\![\underline{U}^2]\!]}{2} (\underline{U} - \underline{W}) \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}\Sigma_t \ .$$

Il apparaît maintenant que la définition de la puissance des efforts extérieurs dans le champ de vitesse réel s'obtient sans difficulté particulière à partir de (2.6) en y substituant $\underline{U}$ à $\underline{\hat{U}}$ puisqu'il n'y a pas de densité surfacique de forces extérieures répartie sur Σ_t.

Par contre, l'expression de la puissance des efforts intérieurs dans le champ de vitesse réel ne peut être obtenue à partir de (3.8) puisque le champ $\underline{U}$ est discontinu. Elle ne peut l'être non plus à partir de (3.30) car cette formule suppose la continuité du vecteur-contrainte sur la surface de discontinuité du champ de vitesse virtuel considéré, alors que l'on a établi l'équation de saut (3.37) pour le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ au franchissement de l'onde de choc Σ_t. Dans ce cas, c'est l'écriture du théorème de l'énergie cinétique qui permet d'obtenir l'expression de la puissance des efforts intérieurs dans le champ de vitesse réel.

Pour cela on écrit le théorème de l'énergie cinétique sous la forme (3.42) applicable séparément à chacun des sous-systèmes $\mathcal{S}'_1$ et $\mathcal{S}'_2$ de volumes Ω'_1 et Ω'_2 séparés dans Ω_t par Σ_t (comme sur la figure 16) ; en additionnant les deux équations correspondantes il vient :

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

en référentiel galiléen,

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\Omega_t} \rho \underline{F} \cdot \underline{U} \, \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{T}_\Omega \cdot \underline{U} \, \mathrm{d}a \\ \displaystyle + \int_{\Sigma_t} \underline{n} \cdot (\underline{\underline{\sigma}}_1 \cdot \underline{U}_1 - \underline{\underline{\sigma}}_2 \cdot \underline{U}_2) \, \mathrm{d}\Sigma_t - \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}\, U}} \, \mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{a} \cdot \underline{U} \, \mathrm{d}\Omega_t \ . \end{array} \right. \tag{3.44}$$

Par ailleurs le théorème de l'énergie cinétique pour le système $\mathcal{S}$ avec l'expression de $\mathcal{P}_{(i)}(U)$ cherchée, et $\mathcal{A}(\underline{U})$ donnée par (3.43), s'écrit :

en référentiel galiléen,

$$\int_{\Omega_t} \rho \underline{F} \cdot \underline{U} \, \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{T}_\Omega \cdot \underline{U} \, \mathrm{d}a + \mathcal{P}_{(i)}(\underline{U}) = \int_{\Omega_t} \rho \underline{a} \cdot \underline{U} \, \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_t} \rho \frac{[\![\underline{U}^2]\!]}{2} (\underline{U} - \underline{W}) \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}\Sigma_t \ . \tag{3.45}$$

En rappelant que, par (3.37),

$$[\![\underline{\underline{\sigma}}]\!] \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}}_2 \cdot \underline{n} - \underline{\underline{\sigma}}_1 \cdot \underline{n} = \rho \, [\![\underline{U}]\!] \, (\underline{U} - \underline{W}) \cdot \underline{n} \ ,$$

et en rapprochant les équations (3.44) et (3.45), on obtient l'expression de $\mathcal{P}_{(i)}(\underline{U})$:

$$\mathcal{P}_{(i)}(\underline{U}) = - \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}\, U}} \, \mathrm{d}\Omega_t - \int_{\Sigma_t} [\![\underline{U}]\!] \cdot \frac{\underline{\underline{\sigma}}_1 + \underline{\underline{\sigma}}_2}{2} \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}\Sigma_t \ . \tag{3.46}$$

On peut remarquer que, formellement, cette expression de $\mathcal{P}_{(i)}(\underline{U})$ s'obtient à partir de (3.30) pour $\mathcal{P}_{(i)}(\underline{\hat{U}})$ en y remplaçant, sur Σ_t , $\underline{\underline{\sigma}}$ par la moyenne $(\underline{\underline{\sigma}}_1 + \underline{\underline{\sigma}}_2)/2$ de ses valeurs de part et d'autre de Σ_t.

On retrouve là une nouvelle manifestation du « particularisme » des mouvements réels annoncé au chapitre IV (section 4).

3.12 Puissance de déformation

On désigne souvent sous le nom de ***puissance de déformation*** d'un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ dans un champ de vitesse virtuel $\underline{\hat{U}}$, l'opposée de la puissance virtuelle des efforts intérieurs correspondant à ces deux champs.

3.13 Retour sur la compatibilité géométrique : formulation faible

On a vu au chapitre III (§ 3.9) que la condition de compatibilité géométrique d'un champ de « taux de déformation » s'exprime par la ***formulation faible*** suivante.

Soit $\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)$ un champ de tenseurs symétriques, défini à l'instant t sur Ω_t. Ce champ est la partie symétrique du gradient d'un champ de vecteurs défini sur Ω_t, si et seulement si

$$\forall \underline{\underline{\sigma}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{symétrique,} \\ \text{à support compact sur } \mathbb{R}^3 \ , \\ \mathrm{div}\, \underline{\underline{\sigma}} = 0 \text{ sur } \Omega_t \ , \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega_t \ , \end{array} \right. \tag{3.47}$$

on a :

$$\int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) \, \mathrm{d}\Omega_t = 0 \ . \tag{3.48}$$

Il est maintenant possible d'interpréter « mécaniquement » cet énoncé (et de justifier, ***a posteriori***, la notation adoptée). On remarque que (3.47) et (3.48) font intervenir, sur Ω_t,

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

les champs de contrainte de Cauchy qui sont en équilibre – c'est-à-dire que le champ $\underline{a}$ est nul dans (3.13) – avec des efforts extérieurs nuls sur Ω_t et $\partial\Omega_t$: ces champs sont appelés ***champs d'autocontrainte*** sur Ω_t. La condition (3.48) exprime donc que la puissance de tout champ d'autocontrainte sur Ω_t dans le champ $\underline{\underline{d}}$ donné est nulle. Ce résultat est évidemment l'homologue de celui énoncé au chapitre IV (§ 3.4) à propos des systèmes de points matériels.

3.14 Formulation faible des équations de la dynamique

Dans le même ordre d'idées que ci-dessus, en se plaçant cette fois du point de vue des contraintes, on peut remarquer que l'écriture même du principe des puissances virtuelles fournit la formulation faible, dualisée, des équations de la dynamique. En rassemblant les arguments et les résultats développés jusqu'ici on peut énoncer la formulation suivante.

Soit $\underline{\underline{\sigma}}$ un champ de tenseurs symétriques, continu et continûment différentiable par morceaux, défini sur Ω_t. Ce champ satisfait les équations de la dynamique avec [13] des champs $\underline{F}, \underline{a}$ sur Ω_t, $\underline{T}_\Omega$ sur $\partial\Omega_t$; c'est-à-dire satisfait les équations locales :

$$\text{(3.49)}\qquad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) + \rho(\underline{x},t)\big(\underline{F}(\underline{x},t) - \underline{a}(\underline{x},t)\big) = 0 \text{ dans } \Omega_t \\ [\![\, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,]\!] \,.\, \underline{n}(\underline{x}) = 0 \text{ sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}} \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) \,.\, \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}_\Omega(\underline{x},t) \text{ sur } \partial\Omega_t \end{array}\right.$$

si et seulement si, $\forall \hat{\underline{U}}$ continu et continûment différentiable, on a :

$$\text{(3.50)}\qquad \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \hat{\underline{\underline{d}}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)\big(\underline{F}(\underline{x},t) - \underline{a}(\underline{x},t)\big) \,.\, \hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{T}_\Omega(\underline{x},t) \,.\, \hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}a \,.$$

Le caractère nécessaire de (3.50) se démontre à partir de (3.49), le caractère suffisant résulte de la construction même à laquelle il a été procédé dans la présente section.

En présence d'onde de choc on adjoint (3.37) sur Σ_t (surface d'onde) à la deuxième équation de (3.49) ; la formulation faible comporte, au deuxième membre de (3.50), le terme additionnel (cf. (3.36)) :

$$-\int_{\Sigma_t} \rho(\underline{x},t)[\![\, \underline{U}(\underline{x},t)\,]\!] \,.\, \hat{\underline{U}}(\underline{x})\big(\underline{U}(\underline{x},t) - \underline{W}(\underline{x},t)\big) \,.\, \underline{n}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Sigma_t \,.$$

Il faut remarquer que l'existence d'un tel champ $\underline{\underline{\sigma}}$ en équilibre avec les champs $\underline{F}, \underline{a}$ sur Ω_t, $\underline{T}_\Omega$ sur $\partial\Omega_t$, ($[\![\, \underline{U}\,]\!]$ sur Σ_t s'il y a lieu) implique que ces données satisfont l'égalité de la loi fondamentale ou de la conservation de la quantité de mouvement :

$$[\mathcal{F}_e] = [\mathcal{M}\mathfrak{A}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathcal{M}\mathcal{U}]$$

(cf. le paragraphe 3.10 ci-dessus pour l'explicitation du torseur du troisième membre).

3.15 Objectivité du tenseur des contraintes de Cauchy

On se réfère ici à l'extension du concept d'objectivité aux mouvements virtuels qui a été expliquée au chapitre IV (§ 4.4). On a alors démontré la propriété générale d'objectivité de la puissance virtuelle des efforts intérieurs. Ceci implique, dans le cas présent, l'objectivité de la densité volumique de puissance virtuelle des efforts intérieurs : $p_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \hat{\underline{\underline{d}}}(\underline{x})$ est objective. Il en résulte, compte tenu de l'objectivité du taux de déformation virtuel $\hat{\underline{\underline{d}}}(\underline{x})$, ***l'objectivité du tenseur des contraintes de Cauchy*** $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$.

[13] On dira aussi : « est en équilibre avec... ».

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

4 Les contraintes en description lagrangienne

4.1 Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff

Toutes les analyses présentées dans les sections précédentes, fondées sur la méthode des puissances virtuelles se placent du point de vue eulérien : la modélisation des efforts intérieurs par le champ des tenseurs des contraintes de Cauchy est définie sur la configuration actuelle κ_t.

On se propose maintenant d'examiner la description des efforts intérieurs sur la configuration initiale de référence.

Puissance des efforts intérieurs dans le mouvement réel

Dans ce but on considère l'expression de la puissance des efforts intérieurs décrits par le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ sur κ_t, pour le système $\mathcal{S}$ ou pour un sous-système $\mathcal{S}'$ quelconque, dans le ***mouvement réel*** à l'instant t défini par le champ de vitesse $\underline{U}$ supposé continu et continûment différentiable :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \\ \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U}) = \displaystyle\int_{\Omega'_t} -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t \ , \end{array} \right. \tag{4.1}$$

qu'il est commode d'écrire en introduisant l'élément d'intégration $\mathrm{d}m = \rho(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t$:

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U}) = \int_{\Omega'_t} -\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)}{\rho(\underline{x},t)} : \underline{\underline{d}}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}m \ . \tag{4.2}$$

Il est aisé alors de transporter cette intégration sur la configuration initiale de référence κ_0 en utilisant le transport convectif défini par :

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t) \ , \tag{4.3}$$

où la conservation de la masse s'écrit (chapitre III, § 5.1)

$$\mathrm{d}m = \rho_0(\underline{X})\,\mathrm{d}\Omega_0 = \rho(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t \ . \tag{4.4}$$

En rappelant la correspondance établie au chapitre III (§ 3.3) entre les taux de déformation eulérien et lagrangien en des points homologues par (4.3) :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t) \,.\, \underline{\underline{\dot{e}}}(\underline{X},t) \,.\, \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t) \ , \tag{4.5}$$

on obtient $\mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U})$ sous la forme d'une intégrale sur le volume Ω'_0 du sous-système $\mathcal{S}'$ dans κ_0 :

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U}) = \int_{\Omega'_0} -\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)}{\rho(\underline{x},t)} : \left({}^t\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t) \,.\, \underline{\underline{\dot{e}}}(\underline{X},t) \,.\, \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)\right) \mathrm{d}m \tag{4.6}$$

où $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t)$. Le résultat, établi dans l'annexe I (§ 5.7),

$$(\underline{\underline{A}} \,.\, \underline{\underline{B}}) : \underline{\underline{C}} = (\underline{\underline{C}} \,.\, \underline{\underline{A}}) : \underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{B}} \,.\, \underline{\underline{C}}) : \underline{\underline{A}} \tag{4.7}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

permet de modifier l'écriture des produits contractés qui apparaissent dans (4.6) :

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U}) = \int_{\Omega'_0} -\Big(\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)\,.\,\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)}{\rho(\underline{x},t)}\,.\,{}^t\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)\Big) : \underline{\dot{e}}(\underline{X},t)\,\mathrm{d}m\ , \tag{4.8}$$

ou encore

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U}) = \int_{\Omega'_0} -\Big(\frac{\rho_0(\underline{X})}{\rho(\underline{x},t)}\,\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,.\,{}^t\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)\Big) : \underline{\dot{e}}(\underline{X},t)\,\mathrm{d}\Omega_0\ . \tag{4.9}$$

Cette équation met en évidence comme cofacteur du taux de déformation lagrangien $\underline{\dot{e}}(\underline{X},t)$, homologue de $\underline{\sigma}(\underline{x},t)$ cofacteur de $\underline{d}(\underline{x},t)$ dans (4.1), le tenseur noté $\underline{\pi}(\underline{X},t)$ défini par :

$$\begin{cases} \underline{\pi}(\underline{X},t) = \dfrac{\rho_0(\underline{X})}{\rho(\underline{x},t)}\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\sigma}(\underline{x},t)\,.\,{}^t\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t) \\ \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t) \end{cases} \tag{4.10}$$

(on rappelle que $\rho_0(X)/\rho(\underline{x},t) = J(\underline{X},t) = \det \underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$).

Il est commode de retenir la définition de $\underline{\underline{\pi}}$ sous la forme (notations simplifiées) :

$$\frac{\underline{\underline{\pi}}}{\rho_0} = \underline{\underline{F}}^{-1}\,.\,\frac{\underline{\underline{\sigma}}}{\rho}\,.\,{}^t\underline{\underline{F}}^{-1}\ . \tag{4.11}$$

On démontre immédiatement, compte tenu de la symétrie de $\underline{\sigma}$, que ce tenseur $\underline{\pi}$ est ***symétrique***.

Le champ tensoriel $\underline{\pi}$ est appelé champ des ***tenseurs des contraintes de Piola-Kirchhoff***[14] et l'on a :

$$\begin{cases} \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\ , \text{ pour le mouvement réel } \underline{U}\ , \\ \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U}) = \displaystyle\int_{\Omega'_0} -\underline{\pi}(\underline{X},t) : \underline{\dot{e}}(\underline{X},t)\,\mathrm{d}\Omega_0 = \int_{\Omega'_0} -\frac{\underline{\underline{\pi}}(\underline{X},t)}{\rho_0(\underline{X})} : \underline{\dot{e}}(\underline{X},t)\,\mathrm{d}m\ . \end{cases} \tag{4.12}$$

Les formules (4.5) et (4.11) expriment respectivement le transport convectif pour les taux de déformation et pour les contraintes. On constate qu'elles ont la même structure sans être semblables. Ceci s'explique en rapprochant les expressions (4.2) et (4.12) de $\mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U})$:

$$\int_{\Omega'_t} \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)}{\rho(\underline{x},t)} : \underline{\underline{d}}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}m = \int_{\Omega'_0} \frac{\underline{\underline{\pi}}(\underline{X},t)}{\rho_0(\underline{X})} : \underline{\dot{e}}(\underline{X},t)\mathrm{d}m\ .$$

$\underline{\pi}(\underline{X},t)$ est ainsi, comme $\underline{\dot{e}}(\underline{X},t)$ un tenseur ***purement lagrangien***.

On dit que (4.5) exprime le transport convectif 2 fois covariant de $\underline{\underline{d}}$ et (4.11) le transport convectif 2 fois contravariant de $\dfrac{\underline{\underline{\pi}}}{\rho_0}$ (cf. chapitre VI, § 5.2).

[14] G. Piola (1791-1850) ; G. Kirchhoff (1824-1887).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Expression lagrangienne de la puissance virtuelle des efforts intérieurs

Pour un mouvement virtuel quelconque $\underline{\hat{U}}$ la puissance virtuelle des efforts intérieurs s'écrit sur la configuration actuelle

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\underline{\hat{U}}) = \int_{\Omega'_t} -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{\hat{d}}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t \ . \tag{4.13}$$

Cette intégration peut être transportée sur la configuration initiale, comme on l'a fait pour obtenir (4.6) à partir de (4.1), en tenant compte de la définition (4.10) du tenseur $\underline{\underline{\pi}}(\underline{X},t)$. Il vient ainsi, en permutant à nouveau l'ordre des produits contractés par application de (4.7) :

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\underline{\hat{U}}) = \int_{\Omega'_0} -\underline{\underline{\pi}}(\underline{X},t) : \left({}^t\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{\hat{d}}}(\underline{x})\,.\,\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\right)\mathrm{d}\Omega_0 \ . \tag{4.14}$$

Il apparaît alors naturel d'adopter, pour la ***définition*** du taux de déformation virtuel lagrangien $\underline{\underline{\hat{e}}}(\underline{X},t)$ la formule (4.5) où $\underline{\underline{\hat{d}}}(\underline{x})$ est substitué à $\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)$ d'où :

$$\underline{\underline{\hat{e}}}(\underline{X},t) = {}^t\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{\hat{d}}}(\underline{x})\,.\,\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\,,\ \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t) \tag{4.15}$$

Avec cette définition de $\underline{\underline{\hat{e}}}(\underline{X},t)$ l'expression lagrangienne de la puissance virtuelle des efforts intérieurs est le prolongement sur les mouvements virtuels de la formule (4.12) établie pour les mouvements réels :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\ ,\ \forall \underline{\hat{U}}\ \text{m.v.}\ , \\ \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{\hat{U}}) = \displaystyle\int_{\Omega'_0} -\underline{\underline{\pi}}(\underline{X},t) : \underline{\underline{\hat{e}}}(\underline{X},t)\,\mathrm{d}\Omega_0 \ . \end{array}\right. \tag{4.16}$$

Interprétation du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff

Il est naturel d'essayer d'interpréter le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, comme on l'a fait pour le tenseur des contraintes de Cauchy, en se référant au concept de vecteur-contrainte qui a été défini sur la configuration actuelle (§ 3.5).

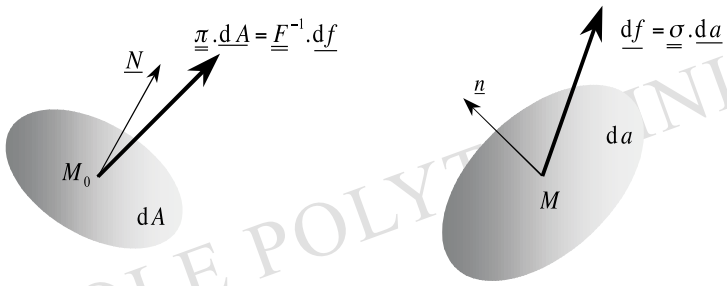


Figure 18 – Vecteur-contrainte de Piola-Kirchhoff et transport convectif des forces élémentaires

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Sur l'élément de surface orienté transversalement $\underline{\mathrm{d}a}$, la force exercée est d'après (3.17) :

$$\underline{\mathrm{d}f} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}a}\ .$$

Soit alors $\underline{\mathrm{d}A}$ l'élément de surface orienté dans la configuration κ_0 transporté sur $\underline{\mathrm{d}a}$ dans κ_t (chapitre II, § 4.2) :

$$\underline{\mathrm{d}a} = J(\underline{X},t)\,{}^t\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}A}\ . \tag{4.17}$$

En explicitant le produit $\underline{\underline{\pi}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}A}$ compte tenu de (4.10) et (4.17) on obtient :

$$\underline{\underline{\pi}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}A} = \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}a}$$

ou encore

$$\underline{\underline{\pi}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}A} = \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}f}\ . \tag{4.18}$$

On voit ainsi que le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff correspond au ***transport convectif de la force sur un élément de surface orienté comme si cette force était un vecteur matériel*** (figure 18).

4.2 Tenseur des contraintes de Piola-Lagrange. Équations de la dynamique

La formule (4.18) montre que, si l'on introduit le tenseur $\underline{\underline{B}}(\underline{X},t)$ défini par

$$\underline{\underline{B}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{\pi}}(\underline{X},t) \tag{4.19}$$

on a évidemment

$$\underline{\underline{B}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}A} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}a} = \underline{\mathrm{d}f}\ . \tag{4.20}$$

Le tenseur $\underline{\underline{B}}(\underline{X},t)$ est appelé tenseur des contraintes de ***Piola-Lagrange*** ou tenseur des contraintes de ***Boussinesq***[15]. Il s'écrit aussi, en simplifiant les notations :

$$\underline{\underline{B}} = \frac{\rho_0}{\rho}\,\underline{\underline{\sigma}}\,.\,{}^t\underline{\underline{F}}^{-1} \quad \text{ou encore :} \quad \frac{\underline{\underline{B}}}{\rho_0} = \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{\rho}\,.\,{}^t\underline{\underline{F}}^{-1}\ . \tag{4.21}$$

Le tenseur des contraintes de Piola-Lagrange correspond au ***transport parallèle*** de la force sur un élément de surface orienté. ***Il n'est pas symétrique***. L'introduction du tenseur des contraintes de Piola-Lagrange permet aussi d'écrire les équations de la dynamique en description lagrangienne (équations de champ). En effet la transformation effectuée au paragraphe 4.1 sur l'expression de $\mathcal{P}'_{(i)}(\underline{\hat{U}})$ a permis d'obtenir une forme purement lagrangienne de la puissance virtuelle des efforts intérieurs dans laquelle $\underline{\underline{\hat{e}}}(\underline{X},t)$ correspond au transport parallèle du champ $\underline{\hat{U}}$ sur la configuration κ_0 :

$$\text{sur } \kappa_0 \qquad \underline{\hat{U}}(\underline{X},t) = \underline{\hat{U}}(\underline{\phi}(\underline{X},t)) \quad \text{sur } \kappa_t\ .$$

Cette forme (4.16) ne permet pas l'application du théorème de la divergence comme au paragraphe 3.3. Aussi, compte tenu de ce que la définition de $\underline{\hat{U}}(\underline{X},t)$ implique (chapitre II, § 5.3) que :

$$\underline{\underline{\mathrm{grad}\ \hat{U}}}(\underline{x},t) = \underline{\underline{\nabla\hat{U}}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t) \tag{4.22}$$

[15] J. Boussinesq (1842-1929).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

on effectue sur l'expression de $\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}})$ les transformations suivantes :

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega'_t} -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{\text{grad}\,\hat{U}}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega'_0} -J(\underline{X},t)\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \big(\underline{\underline{\nabla\hat{U}}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)\big)\,\mathrm{d}\Omega_0$$

$$= \int_{\Omega'_0} -J(\underline{X},t)\,\big(\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\big) : \underline{\underline{\nabla\hat{U}}}(\underline{X},t)\,\mathrm{d}\Omega_0$$

soit :

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega'_0} -{}^t\underline{\underline{B}}(\underline{X},t) : \underline{\underline{\nabla\hat{U}}}(\underline{X},t)\,\mathrm{d}\Omega_0 \tag{4.23}$$

On en déduit (cf. § 3.3) :

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega'_0} \big((\text{div}\,\underline{\underline{B}})\,.\,\hat{\underline{U}} - \text{div}\,({}^t\underline{\underline{B}}\,.\,\hat{\underline{U}})\big)\,\mathrm{d}\Omega_0 \tag{4.24}$$

où les divergences sont prises dans la configuration κ_0.

La puissance virtuelle des quantités d'accélération (2.2) se met sous la forme :

$$\mathcal{A}'(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega'_0} \rho_0(\underline{X})\,\underline{a}\big(\underline{\phi}(\underline{X},t)\big)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{X},t)\,\mathrm{d}\Omega_0 \tag{4.25}$$

et la puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit, avec des notations évidentes :

$$\mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega'_0} \rho_0(\underline{X})\,\underline{F}\big(\underline{\phi}(\underline{X},t)\big)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{X},t)\,\mathrm{d}\Omega_0 + \int_{\partial\Omega'_0} \hat{\underline{U}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}f}\big(\underline{\phi}(\underline{X},t)\big)\,. \tag{4.26}$$

On obtient alors, par application du théorème de la divergence à $\text{div}\,({}^t\underline{\underline{B}}\,.\,\hat{\underline{U}})$ dans (4.24) et par le même raisonnement qu'au paragraphe 3.3, les équations de champ en description lagrangienne :

$$\text{div}\,\underline{\underline{B}}(\underline{X},t) + \rho_0(\underline{X})\big(\underline{F}\big(\underline{\phi}(\underline{X},t)\big) - \underline{a}\big(\underline{\phi}(\underline{X},t)\big)\big) = 0 \tag{4.27}$$

tandis que l'on retrouve que :

$$\underline{\mathrm{d}f}\big(\underline{\phi}(\underline{X},t)\big) = \underline{\underline{B}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}A}$$

c'est-à-dire (4.20).

Ainsi, en description lagrangienne, les équations de la dynamique, homologues de (3.13) et (3.15) font intervenir le tenseur des contraintes de Piola-Lagrange.

On peut ici encore revenir sur la condition de compatibilité géométrique d'un champ de tenseurs $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$ défini à l'instant t sur Ω_0 dans κ_0 (cf. chapitre III, § 3.9). On rappelle que l'on a la formulation faible suivante. Le champ $\underline{\underline{F}}$ est le gradient d'un champ de vecteur défini sur Ω_0, si et seulement si :

$$\forall \underline{\underline{B}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{à support compact sur } \mathbb{R}^3\,, \\ \text{div}\,\underline{\underline{B}} = 0 \text{ sur } \Omega_0\,, \\ \underline{\underline{B}}(\underline{X})\,.\,\underline{N}(\underline{X}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega_0\,, \end{array} \right. \tag{4.28}$$

on a :

$$\int_{\Omega_0} {}^t\underline{\underline{B}}(\underline{X}) : \underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\mathrm{d}\Omega_0 = 0\,. \tag{4.29}$$

On remarque que (4.28) et (4.29) font intervenir les champs de contrainte de Piola-Lagrange qui sont en équilibre avec des efforts extérieurs nuls selon les formules (4.20) et (4.27) : ces champs sont les ***champs d'autocontrainte*** sur Ω_0 en description lagrangienne. La condition (4.29) exprime donc que la puissance de tout champ d'autocontrainte en description lagrangienne dans le champ $\underline{\underline{F}}$ donné est nulle.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

5 Bilan et perspectives

5.1 Mécaniciens et Physiciens...

Trois applications de la méthode des puissances virtuelles à l'étude de la dynamique du milieu continu tridimensionnel ont jusqu'ici été présentées : chapitre IV sections 6 et 7, et ci-dessus sections 2 et 3. Le tableau du paragraphe 5.2 récapitule les résultats correspondants.

Le caractère systématique des démarches qui ont conduit aux modélisations successivement présentées, fondées sur la méthode des puissances virtuelles, est séduisant et sécurisant. La mise en œuvre de la méthode nécessite, comme on l'a vu, de partir d'idées a priori, issues de l'expérience dans tous ses aspects, sur la forme de la modélisation que l'on veut construire en adéquation avec la nature des problèmes qui sont à traiter. La méthode des puissances virtuelles est ainsi, en quelque sorte, essentiellement un instrument de mise en forme. Par sa clarté, elle peut conduire à une meilleure compréhension finale des modélisations construites et donc en permettre une exploitation plus profonde. (On en fera à nouveau usage au chapitre XI lors de l'étude de la statique des milieux curvilignes.)

La modélisation développée dans la section 3, qui aboutit à la notion de contrainte, est la base de la mécanique des milieux continus classique adaptée à l'étude d'une vaste classe de problèmes tant pour les solides que pour les fluides. On ne doit toutefois pas perdre de vue que les efforts intérieurs ainsi représentés traduisent, au niveau microscopique de la physique, des interactions entre les particules constitutives du milieu continu ; l'unicité du formalisme, l'unicité de la procédure mathématique qui a permis de construire cette modélisation, n'impliquent en rien l'identité des phénomènes physiques sous-jacents. C'est ainsi que la contrainte, concept macroscopique du mécanicien, recouvre des phénomènes physiques bien différents au niveau microscopique selon que le milieu continu considéré modélise un solide cristallin, un polymère ou un fluide, et selon les sollicitations qu'il subit. La vision du mécanicien se révèle complémentaire de celle du physicien, et féconde, en dégageant les structures communes qui permettent le traitement mathématique des problèmes au niveau macroscopique.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

5.2 Tableau récapitulatif

$\hat{U}$	$\mathcal{A}'(\hat{U})$	$\mathcal{P}'_{(e)}(\hat{U})$	$\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{U})$	Équations de la dynamique	Commentaires
m.v.r. $\{\hat{\mathcal{D}}\}$	$[\mathcal{M}\mathcal{A}'] \cdot \{\hat{\mathcal{D}}\}$	$[\mathcal{F}'_e] \cdot \{\hat{\mathcal{D}}\}$	0	$\forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ (1) $[\mathcal{F}'_e] = [\mathcal{M}\mathcal{A}']$ (2) $[\mathcal{F}'_i] = 0$	(1) $\Rightarrow$ Théorème d'Euler
$\underline{\hat{U}}\ C^1$	$\int_{\Omega'_t} \rho \underline{a} \cdot \underline{\hat{U}} \, \mathrm{d}\Omega_t$	$\int_{\Omega'_t} \rho \underline{F} \cdot \underline{\hat{U}} \, \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} \underline{T}_{\Omega'} \cdot \underline{\hat{U}} \, \mathrm{d}a$	$\int_{\Omega'_t} p \operatorname{div} \underline{\hat{U}} \, \mathrm{d}\Omega_t$	(3) $\begin{cases} \forall M \in \Omega_t \\ -\underline{\operatorname{grad}}\, p + \rho(\underline{F} - \underline{a}) = 0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} \forall M \in \partial\Omega_t \\ p\, \underline{n} = -\underline{T}_\Omega \end{cases}$ (5) $\begin{cases} \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\ ,\ \forall M \in \partial\Omega'_t \\ \underline{T}_{\Omega'} = -p\, \underline{n} \end{cases}$	(3) + (4) ou (5) $\Rightarrow$ (1) et (2)
			$\int_{\Omega'_t} -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\hat{d}}} \, \mathrm{d}\Omega_t$	(6) $\begin{cases} \forall M \in \Omega_t \\ \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho(\underline{F} - \underline{a}) = 0 \end{cases}$ (7) $\begin{cases} \forall M \in \partial\Omega_t \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}_\Omega \end{cases}$ (8) $\begin{cases} \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\ ,\ \forall M \in \partial\Omega'_t \\ \underline{T}_{\Omega'} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \end{cases}$	(6) + (7) ou (8) $\Rightarrow$ (1) + (2)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

5.3 Milieux micropolaires

À titre « d'ouverture » sur les théories de milieux continus non classiques on donnera ci-après une présentation succincte de la statique des ***milieux micropolaires***, milieux continus tridimensionnels pour lesquels chaque particule ou point matériel du système considéré représente en fait une microstructure (cf. chapitre I, section 5). L'esprit de cette présentation et l'articulation des raisonnements sont identiques à ceux que l'on retrouvera au chapitre XI (section 3) pour les milieux curvilignes, milieux continus unidimensionnels pour lesquels la notion de microstructure est par ailleurs plus facile à appréhender physiquement et qui peuvent, de ce fait, fournir un support plus concret à la notion de milieux micropolaires tridimensionnels.

Description géométrique. Mouvements réels

La description du système demeure tridimensionnelle : le système $\mathcal{S}$ est défini par l'ensemble des particules qui occupent le volume Ω_t de contour $\partial\Omega_t$ dans la configuration κ_t. (De même pour $\mathcal{S}'$: volume Ω'_t, contour $\partial\Omega'_t$.)

L'évolution du système est décrite par l'évolution de la position géométrique de chaque particule du système, et par l'évolution de l'orientation d'une microstructure associée à cette particule. Les mouvements réels du système sont définis sur Ω_t par deux champs vectoriels : $\underline{U}$, vitesse de la particule, et $\underline{r}$, vitesse de rotation de la microstructure associée.

Mouvements virtuels

Les mouvements virtuels sont définis sur Ω_t par deux champs vectoriels $\underline{\hat{U}}$ et $\underline{\hat{r}}$ continus et continûment différentiables, ou encore par le champ de distributeur $\{\hat{\mathbb{U}}\}$:

$$\forall M \in \Omega_t \ , \ \{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\} = \{M \ , \ \underline{\hat{U}}(\underline{x}) \ , \ \underline{\hat{r}}(\underline{x})\} \ . \tag{5.1}$$

Un mouvement virtuel sera noté $\hat{\mathbb{U}}$.

Puissance virtuelle des efforts extérieurs

D'une manière générale on pose :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \hat{\mathbb{U}} \text{ m.v. ,} \\ \mathcal{P}_{(e)}(\hat{\mathbb{U}}) = \displaystyle\int_{\Omega_t} \left(\rho(\underline{x},t)\underline{F}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x}) + \rho(\underline{x},t)\underline{G}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{r}}(\underline{x})\right) \mathrm{d}\Omega_t \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\partial\Omega_t} \left(\underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x}) + \underline{C}_{\Omega}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{r}}(\underline{x})\right) \mathrm{d}a \ . \\ \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \ , \ \forall \hat{\mathbb{U}} \text{ m.v. de } \mathcal{S}' \ , \\ \mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\mathbb{U}}) = \displaystyle\int_{\Omega'_t} \left(\rho(\underline{x},t)\underline{F}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x}) + \rho(\underline{x},t)\underline{G}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{r}}(\underline{x})\right) \mathrm{d}\Omega_t \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\partial\Omega'_t} \left(\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{U}}(\underline{x}) + \underline{C}_{\Omega'}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\hat{r}}(\underline{x})\right) \mathrm{d}a \ . \end{array}\right. \tag{5.2}$$

On introduit ainsi des forces de masse $\underline{F}(\underline{x},t)$ et des ***couples de masse*** $\underline{G}(\underline{x},t)$ identiques pour le système et ses sous-systèmes, des forces surfaciques $\underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t)$ resp. $\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)$ et des ***couples surfaciques*** $\underline{C}_{\Omega}(\underline{x},t)$ resp. $\underline{C}_{\Omega'}(\underline{x},t)$ pour les efforts extérieurs donnés au contour du système $\mathcal{S}$ et les efforts au contour de $\mathcal{S}'$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On écrira aussi :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \hat{\mathbb{U}} \text{ m.v. ,} \\ \mathcal{P}_{(e)}(\hat{\mathbb{U}}) = \displaystyle\int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)[\mathbb{F}(\underline{x},t)] \,.\, \{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\} \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} [\mathbb{T}_{\Omega}(\underline{x},t)] \,.\, \{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\} \mathrm{d}a \ , \\ \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \ , \ \forall \hat{\mathbb{U}} \text{ m.v. de } \mathcal{S}' \ , \\ \mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\mathbb{U}}) = \displaystyle\int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x},t)[\mathbb{F}(\underline{x},t)] \,.\, \{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\} \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} [\mathbb{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)] \,.\, \{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\} \mathrm{d}a \ , \end{array}\right. \tag{5.3}$$

où $[\mathbb{F}(\underline{x},t)]$ désigne le torseur des efforts de masse :

$$\forall M \in \Omega_t \ , \ [\mathbb{F}(\underline{x},t)] = [M \ , \ \underline{F}(\underline{x},t) \ , \ \underline{G}(\underline{x},t)] \ , \tag{5.4}$$

et $[\mathbb{T}_{\Omega}(\underline{x},t)]$ resp. $[\mathbb{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)]$ les torseurs des efforts surfaciques sur $\mathcal{S}$ resp. $\mathcal{S}'$:

$$\left\{\begin{array}{l} \forall M \in \partial\Omega_t \ , \ [\mathbb{T}_{\Omega}(\underline{x},t)] = [M \ , \ \underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t) \ , \ \underline{C}_{\Omega}(\underline{x},t)] \ , \\ \forall M \in \partial\Omega'_t \ , \ [\mathbb{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)] = [M \ , \ \underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t) \ , \ \underline{C}_{\Omega'}(\underline{x},t)] \ . \end{array}\right. \tag{5.5}$$

Puissance virtuelle des efforts intérieurs

La densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs, $p_{(i)}(\hat{\mathbb{U}})$, supposée indépendante du sous-système considéré est postulée comme une forme linéaire des valeurs locales des champs $\underline{\hat{U}}$ et $\underline{\hat{r}}$ et de leurs gradients. De façon équivalente, en se référant à la formule (5.19) du chapitre IV qui définit le gradient du champ de distributeur $\{\hat{\mathbb{U}}\}$ au point M, distributeur tensoriel égal à :

$$\mathrm{grad}\,\{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\} = \{M \ , \ \underline{\underline{\mathrm{grad}\ \hat{U}}}(\underline{x}) - \underline{\hat{r}}(\underline{x}) \ , \ \underline{\underline{\mathrm{grad}\ \hat{r}}}(\underline{x})\} \tag{5.6}$$

où $\underline{\hat{r}}(\underline{x})$ est le tenseur antisymétrique associé à $\underline{\hat{r}}(\underline{x})$, on peut dire que $p_{(i)}(\hat{\mathbb{U}})$ est postulée comme une forme linéaire des distributeurs $\{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\}$ et $\mathrm{grad}\,\{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\}$.

En se reportant aux expressions des produits de dualité sur les espaces vectoriels de distributeurs et de distributeurs tensoriels données au chapitre IV, $p_{(i)}(\hat{\mathbb{U}})$ se met sous la forme

$$p_{(i)}(\hat{\mathbb{U}}) = -[\mathbf{a}(\underline{x},t)] \,.\, \{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\} - {}^t[\mathbb{t}(\underline{x},t)] : \mathrm{grad}\,\{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\} \tag{5.7}$$

où $[\mathbf{a}]$ désigne un champ de torseurs, et $[\mathbb{t}]$ un champ de torseurs tensoriels :

$$[\mathbb{t}(\underline{x},t)] = [M \ , \ \underline{t}(\underline{x},t) \ , \ \underline{c}(\underline{x},t)] \tag{5.8}$$

$$^t[\mathbb{t}(\underline{x},t)] : \mathrm{grad}\{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\} = {}^t\underline{t}(\underline{x},t) : \big(\underline{\underline{\mathrm{grad}\ \hat{U}}}(\underline{x}) - \underline{\hat{r}}(\underline{x})\big) + {}^t\underline{c}(\underline{x},t) : \underline{\underline{\mathrm{grad}\ \hat{r}}}(\underline{x}) \tag{5.9}$$

La ***loi des actions mutuelles*** (1.1) impose la nullité du champ de torseur $[\mathbf{a}]$, et la forme la plus générale permise pour $p_{(i)}(\hat{\mathbb{U}})$ à partir de (5.7) s'écrit :

$$p_{(i)}(\hat{\mathbb{U}}) = -{}^t[\mathbb{t}(\underline{x},t)] : \mathrm{grad}\,\{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\} \tag{5.10}$$

que l'on peut expliciter en décomposant $\underline{t}(\underline{x},t)$ et $\underline{\underline{\mathrm{grad}\ \hat{U}}}(\underline{x})$ en leurs parties symétriques et antisymétriques :

$$\begin{array}{l} \underline{t}(\underline{x},t) = \underline{\sigma}(\underline{x},t) + \underline{\alpha}(\underline{x},t) \ , \ \underline{\underline{\mathrm{grad}\ \hat{U}}}(\underline{x}) = \underline{\hat{d}}(\underline{x}) + \underline{\hat{\Omega}}(\underline{x}) \ , \\ p_{(i)}(\hat{\mathbb{U}}) = -\underline{\sigma}(\underline{x},t) : \underline{\hat{d}}(\underline{x}) - \underline{\alpha}(\underline{x},t) : \big(\underline{\hat{r}}(\underline{x}) - \underline{\hat{\Omega}}(\underline{x})\big) - {}^t\underline{c}(\underline{x},t) : \underline{\underline{\mathrm{grad}\ \hat{r}}}(\underline{x}) \ . \end{array} \tag{5.11}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Équations d'équilibre

Les équations d'équilibre (puissance virtuelle des forces d'inertie nulle) s'obtiennent en exploitant l'énoncé du principe des puissances virtuelles :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\forall \hat{\mathbb{U}} \text{ m.v. ,} \\
\displaystyle\int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)[\mathbb{F}(\underline{x},t)] \,.\, \{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\} \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} [\mathbb{T}_{\Omega}(\underline{x},t)] \,.\, \{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\} \mathrm{d}a \\
\qquad\qquad - \displaystyle\int_{\Omega_t} {}^t[\mathbb{t}(\underline{x},t)] : \mathrm{grad}\{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\} \mathrm{d}\Omega_t = 0 \\
\forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \ , \ \forall \hat{\mathbb{U}} \text{ m.v. de } \mathcal{S}' \ , \\
\displaystyle\int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x},t)[\mathbb{F}(\underline{x},t)] \,.\, \{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\} \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} [\mathbb{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)] \,.\, \{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\} \mathrm{d}a \\
\qquad\qquad - \displaystyle\int_{\Omega'_t} {}^t[\mathbb{t}(\underline{x},t)] : \mathrm{grad}\{\hat{\mathbb{U}}(\underline{x})\} \mathrm{d}\Omega_t = 0 \ .
\end{array}
\right. \tag{5.12}
$$

L'écriture compacte de cette équation en termes de distributeurs et torseurs vectoriels et tensoriels montre que sa structure est identique à celle de l'équation (3.10) du paragraphe (3.3). On en déduit par application du théorème de la divergence :

les équations de champ pour $[\mathbf{t}]$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\forall M \in \Omega_t \ , \\
\mathrm{div}\,[\mathbf{t}(\underline{x},t)] + \rho[\mathbb{F}(\underline{x},t)] = 0 \ ,
\end{array}
\right. \tag{5.13}
$$

les équations au contour de $\mathcal{S}$ (conditions aux limites)

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\forall M \in \partial\Omega_t \ , \\
[\mathbf{t}(\underline{x},t)] \,.\, \underline{n}(\underline{x}) = [\mathbb{T}_{\Omega}(\underline{x},t)] \ ,
\end{array}
\right. \tag{5.14}
$$

les équations au contour de $\mathcal{S}'$, sous-système quelconque :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \ , \ \forall M \in \partial\Omega_t \ , \\
[\mathbb{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)] = [\mathbf{t}(\underline{x},t)] \,.\, \underline{n}(\underline{x}) \ .
\end{array}
\right. \tag{5.15}
$$

Ces équations présentent évidemment la même structure que les formules (3.13) à (3.15) établies pour la modélisation classique (cf. aussi, au chapitre XI, section 3, les équations de la statique des milieux curvilignes).

L'explicitation des équations (5.13) à (5.15), ou leur établissement direct à partir de (5.2) et (5.3), donne :

pour les ***équations de champ***

$$
\forall M \in \Omega_t \ ,
$$

$$
\mathrm{div}\ \underline{\underline{t}}(\underline{x},t) + \rho(\underline{x},t)\underline{F}(\underline{x},t) = 0 \tag{5.16}
$$

$$
\mathrm{div}\ \underline{\underline{c}}(\underline{x},t) + 2\,\underline{\alpha}(\underline{x},t) + \rho(\underline{x},t)\underline{G}(\underline{x},t) = 0 \tag{5.17}
$$

où $\underline{\alpha}(\underline{x},t)$ désigne le vecteur associé au tenseur antisymétrique $\underline{\underline{\alpha}}(\underline{x},t)$;

pour les ***conditions aux limites*** à la frontière de $\mathcal{S}$

$$
\forall M \in \partial\Omega_t \ ,
$$

$$
\underline{\underline{t}}(\underline{x},t) \,.\, \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t) \tag{5.18}
$$

$$
\underline{\underline{c}}(\underline{x},t) \,.\, \underline{n}(\underline{x}) = \underline{C}_{\Omega}(\underline{x},t) \ ; \tag{5.19}
$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

pour les ***efforts extérieurs*** au contour de $\mathcal{S}'$

$$\forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \ , \ \forall M \in \partial\Omega'_t \ ,$$

$$\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t) = \underline{\underline{t}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{n}(\underline{x}) \tag{5.20}$$

$$\underline{C}_{\Omega'}(\underline{x},t) = \underline{\underline{c}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{n}(\underline{x})\ . \tag{5.21}$$

Interprétation du modèle. Pertinence

- On observe sur (5.15) l'indépendance du torseur des efforts surfaciques $[\mathbb{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)]$ vis-à-vis du sous-système $\mathcal{S}'$ considéré : il s'agit d'actions de contact entre les particules du système, purement locales.
  D'où les notations uniques : $\underline{T}(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x}))$, $\underline{C}(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x}))$, $[\mathbb{T}(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x}))]$.

- La représentation des efforts intérieurs dans cette modélisation est constituée des deux champs de tenseurs $\underline{\underline{t}}$ et $\underline{\underline{c}}$.

  Les formules (5.20) et (5.21) en donnent l'interprétation physique : $\underline{T}(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x}))$ étant le vecteur-contrainte sur la facette de normale sortante $\underline{n}(\underline{x})$ et $\underline{C}(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x}))$ le ***couple-contrainte*** sur cette même facette, on obtient pour $\underline{\underline{t}}(\underline{x},t)$ et $\underline{\underline{c}}(\underline{x},t)$ l'homologue de la présentation « à la Cauchy » pour le milieu continu tridimensionnel classique. $\underline{\underline{t}}(\underline{x},t)$ est le tenseur des contraintes et $\underline{\underline{c}}(\underline{x},t)$ le ***tenseur des couples-contraintes***.

  On peut aussi dire que les efforts intérieurs sont représentés par le champ de « torseur tensoriel » [**t**].

- Du point de vue physique cette modélisation recouvre trois cas typiques selon les chargements imposés (présence ou non de couples de masse) et les caractéristiques du matériau modélisé (tolérance ou non de couples surfaciques).

  a) Le milieu continu tridimensionnel classique, pour lequel il n'y a ni couples de masse ni couples surfaciques. Les champs $\underline{c}$ et $\underline{\alpha}$ sont nuls et $\underline{\underline{t}}$ est symétrique.

  b) Les milieux soumis à des couples de masse (d'origine électrostatique ou magnétique par exemple), sans couples surfaciques. Le champ $\underline{\underline{c}}$ est nul et l'on a :

  $$\underline{\alpha}(\underline{x},t) = -\frac{\rho(\underline{x},t)}{2}\underline{G}(\underline{x},t) \tag{5.22}$$

  d'où

  $$\underline{\underline{t}}(\underline{x},t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) - \frac{\rho(\underline{x},t)}{2}\underline{\underline{G}}(\underline{x},t) \tag{5.23}$$

  $\underline{\underline{G}}(\underline{x},t)$ étant le tenseur antisymétrique associé à $\underline{G}(\underline{x},t)$. Le tenseur des contraintes n'est pas symétrique. Sa partie antisymétrique est déterminée. La partie symétrique $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$ est régie par les équations (5.16) à (5.21) qui se ramènent au cas du milieu continu tridimensionnel classique en y modifiant les forces de masse et les forces surfaciques. C'est le modèle à employer pour l'étude des phénomènes d'électrostriction ou de magnétostriction par exemple.

  c) Les milieux micropolaires proprement dits ou « continus de Cosserat » [16], dans lesquels il y a des couples surfaciques avec ou sans couples de masse. Ce cas est entièrement distinct du milieu continu classique. Parmi les applications de ce modèle on cite l'étude des cristaux liquides ; on peut aussi penser à la modélisation, à travers la méthode d'homogénéisation, de certains matériaux composites renforcés par des inclusions « raides ».

[16] E. Cosserat (1866-1931), F. Cosserat (1852-1914).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Récapitulatif des formules essentielles

$$\mathcal{A}'(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x},t)\underline{a}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t$$

$$\mathcal{P}'_{(e)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x},t)\underline{F}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} \underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t)\,.\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}a$$

- ***Champ scalaire*** p ***(pression)***

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega'_t} p(\underline{x},t)\,\mathrm{div}\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_{\hat{\underline{U}}}\cap\Omega'_t} p(\underline{x},t)[\![\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,]\!]\,.\,\underline{n}(\underline{x})\,\mathrm{d}a$$

$$-\underline{\mathrm{grad}}\,p(\underline{x},t) + \rho(\underline{x},t)\big(\underline{F}(\underline{x},t) - \underline{a}(\underline{x},t)\big) = 0 \quad \text{sur } \Omega_t$$

$$-p(\underline{x},t)\,\underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t) \quad \text{sur } \Omega_t$$

$$\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t) = -p(\underline{x},t)\underline{n}(\underline{x}) \quad \text{sur } \partial\Omega'_t$$

- ***Champ tensoriel*** $\underline{\underline{\sigma}}$ ***(contrainte de Cauchy)***

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega'_t} -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \hat{\underline{\underline{d}}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\Sigma_{\hat{\underline{U}}}\cap\Omega'_t} -[\![\,\hat{\underline{U}}(\underline{x})\,]\!]\,.\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{n}(\underline{x})\,\mathrm{d}a$$

$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$ symétrique

$$\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) + \rho(\underline{x},t)\big(\underline{F}(\underline{x},t) - \underline{a}(\underline{x},t)\big) = 0 \quad \text{sur } \Omega_t$$

$$[\![\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,]\!]\,.\,\underline{n}(\underline{x}) = 0 \quad \text{(sauf onde de choc)}$$

$$[\![\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,]\!]\,.\,\underline{n}(\underline{x}) = \rho(\underline{x},t)\,[\![\,\underline{U}(\underline{x},t)\,]\!]\,\big(\underline{U}(\underline{x},t) - \underline{W}(\underline{x},t)\big)\,.\,\underline{n}(\underline{x})$$

(si onde de choc)

vecteur-contrainte :

$$\underline{T}\big(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x})\big) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{n}(\underline{x})$$

$$\underline{\mathrm{d}f} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{\mathrm{d}a}$$

$$T_i = \sigma_{ij}n_j$$

$$\underline{T}\big(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x})\big) = \underline{T}_{\Omega}(\underline{x},t) \quad \text{sur } \partial\Omega_t\,,$$

$$\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x},t) = \underline{T}\big(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x})\big) \quad \text{sur } \partial\Omega'_t\,.$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- ***Champ tensoriel*** $\underline{\underline{\pi}}$ (contrainte de Piola-Kirchhoff)

$$\mathcal{P}'_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega'_0} -\underline{\underline{\pi}}(\underline{X},t) : \underline{\underline{\hat{e}}}(\underline{X},t)\mathrm{d}\Omega_0$$

$$\frac{\underline{\underline{\pi}}}{\rho_0} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{\rho} \cdot {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}$$

$\underline{\underline{\pi}}(\underline{X},t)$ est symétrique

- ***Équations de la dynamique (expressions explicites)***

coordonnées cartésiennes orthonormées

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} + \rho(F_x - a_x) = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} + \rho(F_y - a_y) = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \rho(F_z - a_z) = 0$$

coordonnées cylindriques

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho(F_r - a_r) = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \rho(F_\theta - a_\theta) = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho(F_z - a_z) = 0$$

coordonnées sphériques

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta}\cot\theta) + \rho(F_r - a_r) = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\big((\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})\cot\theta + 3\sigma_{r\theta}\big) + \rho(F_\theta - a_\theta) = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}(3\sigma_{\varphi r} + 2\sigma_{\varphi\theta}\cot\theta) + \rho(F_\varphi - a_\varphi) = 0$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Exercices

V.1 - Un fluide incompressible homogène (c'est-à-dire que ρ est constant) est supposé en équilibre ($\underline{U} = 0$, $\underline{a} = 0$) sous l'action d'un champ de force de masse $\underline{F}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$. Déterminer les surfaces isobares (surfaces d'égale pression).

Étudier le cas où, $\mathcal{R}$ étant galiléen, les forces de masse se réduisent aux forces de pesanteur dont l'accélération $\underline{g}$ est supposée constante.

Étudier le cas où le fluide pesant est en équilibre par rapport à un référentiel animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical fixe par rapport au référentiel galiléen (« vase tournant ») avec la vitesse $\underline{\omega} = \omega\,\underline{e}_z$.

Éléments de réponse :

- Le champ $\underline{F}$ doit être irrotationnel : $\underline{F}(\underline{x}) = -\operatorname{grad} \mathcal{V}(\underline{x})$. Les surfaces isobares sont les équipotentielles de $\mathcal{V}$.
- Les surfaces isobares sont des plans horizontaux. p ne dépend que de z : $p = -\rho g\, z + K$ où la constante K est déterminée à partir des conditions aux limites (surface libre par exemple).
- Le référentiel par rapport auquel le fluide est en équilibre n'est plus galiléen : les forces de masse comprennent, outre les forces de pesanteur, les forces d'inertie d'entraînement (les forces d'inertie complémentaires sont nulles puisque le fluide est immobile dans le référentiel « tournant »). On vérifie que ces forces de masse dérivent bien d'un potentiel : le problème est donc possible ; on trouve, en coordonnées polaires autour de l'axe de rotation vertical : $\mathcal{V}(\underline{x}) = g\,z - \omega^2 r^2/2$.
  Les surfaces isobares sont des paraboloïdes de révolution autour de l'axe de rotation ; en particulier la surface libre du fluide est une telle surface, ce qui détermine la constante dans la formule exprimant la distribution de la pression dans le fluide :
  $p(\underline{x}) = \rho\omega^2 r^2/2 - \rho\, g\, z + c$.

Commentaire.

L'exemple final est typiquement celui de la centrifugeuse. On traiterait tout aussi facilement le cas de l'équilibre relatif d'un fluide incompressible dans un référentiel en mouvement de translation uniformément accéléré par rapport au référentiel galiléen.

V.2 - On considère un fluide incompressible homogène pesant en équilibre dans un référentiel galiléen. On suppose que ce fluide baigne une face d'une paroi plane inclinée à l'angle i sur la verticale. Déterminer les efforts ainsi exercés par le fluide sur une surface S de cette paroi.

Éléments de réponse :

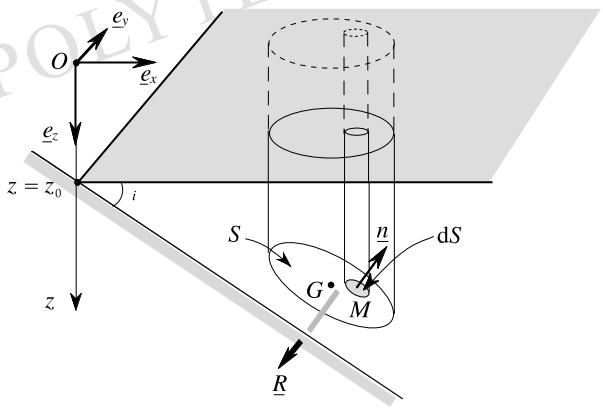
$\underline{e}_z$ dirigé vers le bas ; z_0 cote de la surface libre $p = p_a$; origine choisie telle que $p_a = \rho g\, z_0$. Distribution de pression : $p = \rho g\, z$.

Effort sur la surface élémentaire $\mathrm{d}S$ en un point M de S : $\mathrm{d}\underline{f} = -\rho\, g\, z\, \underline{n}\, \mathrm{d}S$ dont la composante verticale $\mathrm{d}\underline{f} \cdot \underline{e}_z = \rho\, g\, z \cos i\, \mathrm{d}S$ est égale au poids du cylindre (fictif) de fluide situé au-dessus de l'élément de surface $\mathrm{d}S$ ***jusqu'à la cote*** $z = 0$.

Le torseur des efforts exercés sur la surface S a pour résultante $\underline{R} = -\rho\, g\, z_G S\, \underline{n}$ où z_G est la cote du centre de gravité de la surface S, dirigée selon $-\underline{n}$ et dont la composante verticale est égale au poids du cylindre fluide surmontant S jusqu'à $z = 0$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Le point d'application de $\underline{R}$ sur S est la projection verticale du centre de gravité de ce cylindre de fluide.



Commentaire.
Le résultat concernant la composante verticale de $\underline{R}$ et sa ligne d'action s'obtient immédiatement en appliquant la loi fondamentale de la dynamique (1.2), avec $[\mathcal{M}\mathfrak{A}'] = 0$, au cylindre de fluide introduit ci-dessus.

V.3 - Théorème d'Archimède. Soit un fluide incompressible homogène en équilibre dans un référentiel $\mathcal{R}$, soumis à un champ de force de masse $\underline{F}$ irrotationnel. On considère un corps C de volume V et de surface S immergé dans le fluide et maintenu immobile par rapport à celui-ci. Déterminer le torseur des actions exercées par le fluide sur ce corps.

Éléments de réponse :
Action exercée en M de S de normale extérieure $\underline{n}_v$ sur l'élément $\mathrm{d}S$ de S : $\underline{\mathrm{d}f} = -p\,\underline{n}_v\,\mathrm{d}S$.
Le champ de pression satisfait l'équation de champ $\underline{\mathrm{grad}}\,p(\underline{x}) = \rho\underline{F}(\underline{x})$ dans le domaine occupé par le fluide. Ce champ, déterminé à partir des conditions au bord, est identique à celui qui s'établirait si le fluide, en équilibre, occupait aussi le domaine V du corps C.
On démontre alors en appliquant la loi fondamentale (1.2) au sous-domaine $\Omega'_t \equiv V$, avec $[\mathcal{M}\mathfrak{A}'] = 0$, que :
le torseur des efforts $\underline{\mathrm{d}f} = -p\,\underline{n}_v\,\mathrm{d}S$ exercés sur S est l'opposé du torseur des forces de volume $\rho\underline{F}$ exercées dans V.

V.4 - Équilibre d'un fluide compressible dans un champ de force de masse dérivant du potentiel $\mathcal{V}$: rechercher les surfaces isobares et les surfaces d'égale valeur de la masse volumique $\rho(\underline{x})$. Cas particulier du fluide pesant en équilibre dans un repère galiléen.

Éléments de réponse :
- À l'équilibre : $\underline{\mathrm{grad}}\,p(\underline{x}) = \rho(\underline{x})\underline{F}(\underline{x}) = -\rho(\underline{x})\,\underline{\mathrm{grad}}\,\mathcal{V}(\underline{x})$.
  Les surfaces isobares sont les équipotentielles de $\mathcal{V}$: p ne dépend de $\underline{x}$ qu'à travers $\mathcal{V}$; donc ρ ne dépend de $\underline{x}$ qu'à travers $\mathcal{V}$ et les surfaces d'égale valeur de $\rho(\underline{x})$ sont les équipotentielles de $\mathcal{V}$.
  De façon plus détaillée : à l'équilibre on a $\underline{\mathrm{rot}}\,(\rho\underline{F}) = \rho\,\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{F} + \underline{\mathrm{grad}}\,\rho \wedge \underline{F} = 0$. Il en résulte, puisque $\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{F} = 0$, que $\underline{\mathrm{grad}}\,\rho(\underline{x})$ est colinéaire à $\underline{F}(\underline{x}) = -\underline{\mathrm{grad}}\,\mathcal{V}(\underline{x})$.

- p et ρ ne sont fonctions que de z, mais $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho(z)g$ ne permet pas de déterminer les fonctions $p(z)$ et $\rho(z)$ à partir des conditions aux limites ; il faut introduire une équation de « comportement » du fluide.

V.5 - On étudie l'équilibre d'un fluide compressible pesant dans un référentiel galiléen. On suppose que l'équation d'état du fluide est celle du gaz idéal, $p/\rho = rT$ où $r = R/M$ (R constante universelle des gaz parfaits $= 8,314$ J/K ; M masse molaire), et que la répartition de température est connue, fonction uniquement de la cote z, $T(z)$. Déterminer la loi de répartition de la pression. Cas particulier de l'équilibre isotherme.

Éléments de réponse :

- À partir de Ex.V.4 : $\dfrac{\mathrm{d}p}{p} = -\dfrac{g}{r}\dfrac{\mathrm{d}z}{T(z)}$,
  d'où : $\ln\left(\dfrac{p}{p_0}\right) = -\dfrac{g}{r}\displaystyle\int_0^z \dfrac{\mathrm{d}z}{T(z)}$ $\qquad (p = p_0 \text{ pour } z = 0).$
- $\ln(p/p_0) = -g\,z/rT_0$.

Commentaire.

Ces formules sont appliquées au nivellement barométrique.

V.6 - On étudie l'équilibre d'un fluide compressible pesant dans un référentiel galiléen. On suppose que l'équilibre est établi en respectant la relation $p = k\rho^\gamma (\gamma = 1,4)$. Déterminer les distributions de ρ, p et T en fonction de z ; on introduira en particulier la « hauteur de l'atmosphère » définie dans ce modèle par $p(H) = 0$.

Éléments de réponse :

À partir de Ex.V.4 et compte tenu de $p = k\rho^\gamma$ on a : $k\,\gamma\rho^{\gamma-2}\mathrm{d}\rho = -g\,\mathrm{d}z$,

d'où : $\rho = \rho_0\left(1 - \dfrac{z}{H}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$, $p = p_0\left(1 - \dfrac{z}{H}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

avec $p = p_0$, $\rho = \rho_0$, pour $z = 0$, et $H = \dfrac{p_0}{\rho_0 g}\,\dfrac{\gamma}{\gamma-1}$.

L'équation d'état du gaz idéal donne : $T/T_0 = 1 - z/H$.

Commentaire.

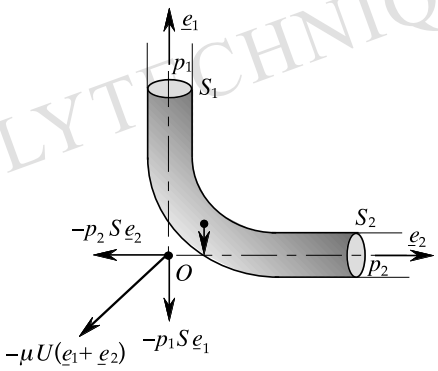
Cette analyse, appliquée à l'atmosphère terrestre, conduirait à une hauteur approximative de 27 km et à un gradient de température de $-0,01$ K/m.

V.7 - On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible homogène, non visqueux, dans une conduite de section constante S. On désigne par μ le débit-masse dans cet écoulement et par U le module de la vitesse du fluide supposée constante dans chaque section : $\mu = \rho S U$. La conduite présente un coude à angle droit dont les sections amont et aval sont respectivement notées S_1 et S_2, et où la pression du fluide est égale à p_1 (resp. p_2). Déterminer le torseur des efforts exercés par le fluide sur le coude.

Éléments de réponse :

On applique le théorème d'Euler au volume limité par la paroi du coude et les sections amont et aval de celui-ci. Les efforts extérieurs sur ce sous-système fluide se composent
– des actions du coude sur le fluide (transmises par la paroi),
– des forces de pesanteur,

ÉCOLE POLYTECHNIQUE



– des forces de pression exercées dans S_1 et S_2 par le reste du fluide sur le sous-système.

On trouve ainsi que le torseur des actions du fluide sur le coude est égal au torseur

– de la force $-\mu U(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$ passant par O,
– de la force $-(p_1\,\underline{e}_1 + p_2\,\underline{e}_2)S$ passant par O,
– de la résultante des forces de pesanteur dans ce volume de fluide, exercée au centre de gravité du volume.

V.8 - Un jet horizontal cylindrique de section S d'un fluide incompressible homogène, non visqueux, dont la masse volumique est ρ agit sur une paroi plane inclinée à l'angle α sur la verticale. Le mouvement est stationnaire. On désigne par U le module de la vitesse du fluide dans le jet, supposée uniforme dans la section courante du jet non perturbé par la présence de la paroi. La pression dans le jet est également supposée constante, égale à la pression atmosphérique (hypothèse justifiée en mécanique des fluides). On néglige les forces de pesanteur ; on admet que la vitesse du fluide après écrasement du jet sur la paroi est parallèle à celle-ci. Déterminer le torseur des actions du jet sur la paroi pour un débit-masse égal à $\mu = \rho S\,U$.

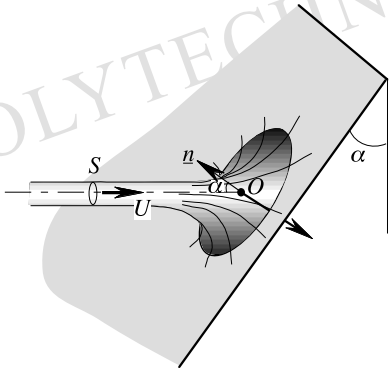
Éléments de réponse :

Les actions du fluide non visqueux sur la paroi sont normales à celle-ci. On applique le théorème d'Euler à un volume limité par une section courante du jet cylindrique non perturbé, la paroi, et une large surface de contrôle cylindrique d'axe normal à la paroi. Les efforts extérieurs à ce sous-système se composent

– des actions de la paroi sur le fluide dirigées selon $\underline{n}$,
– des forces de pression, parallèles à la paroi, exercées sur la surface de contrôle cylindrique,
– de la résultante des forces de pression, dirigée selon l'axe du jet, exercées sur la section courante du jet,
– des forces de pression atmosphérique sur toute la surface libre du fluide dans le volume considéré.

Les vecteurs de débit sortant de quantité de mouvement relatifs à la surface de contrôle cylindrique sont parallèles à la paroi ; pour la section courante du jet, ils sont parallèles à la section de celui-ci. Par projection sur $\underline{n}$ on obtient : le torseur des actions du jet sur la paroi est équivalent à la force $-\mu U \underline{n} \cos\alpha$ appliquée au point de rencontre de l'axe du jet avec la paroi, ajoutée à l'action de la pression atmosphérique sur la face amont de la paroi.

V.9 - Théorème de Bernoulli. Dans un référentiel $\mathcal{R}$, on considère un fluide non-visqueux qui évolue dans un champ de force de masse dérivant d'un potentiel indépendant du temps : $\mathcal{V}(\underline{x})$. L'écoulement du fluide est supposé stationnaire : p, ρ et



$\underline{U}$ sont indépendants du temps en représentation eulérienne. Démontrer la relation : $\dfrac{\dot{p}}{\rho} + \dot{\mathcal{V}} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underline{U}^2/2) = 0$.

Éléments de réponse :

En application de la formule de dérivation particulaire (4.14) du chapitre III on a :

$$\frac{\dot{p}}{\rho} + \dot{\mathcal{V}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underline{U}^2/2) = \frac{1}{\rho}(\frac{\partial p}{\partial t} + \underline{\mathrm{grad}}\, p \,.\, \underline{U}) + (\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \underline{\mathrm{grad}}\, \mathcal{V} \,.\, \underline{U}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underline{U}^2/2)$$

Puisque l'écoulement est stationnaire, il vient :

$$\frac{\dot{p}}{\rho} + \dot{\mathcal{V}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underline{U}^2/2) = (\frac{1}{\rho}\underline{\mathrm{grad}}\, p + \underline{\mathrm{grad}}\, \mathcal{V} + \underline{a}) \,.\, \underline{U}$$

qui est nul en application de (2.21).

Commentaire.

Dans le cas d'un fluide incompressible (ρ constant) ou, plus généralement, d'un fluide en évolution ***barotrope*** ($\rho = h(p)$) on obtient en introduisant une primitive de $1/h(p)$:

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}p}{h(p)} + \mathcal{V} + \frac{U^2}{2} =$ ***Constante*** le long de toute ligne de courant.

C'est le théorème de (Daniel) Bernoulli (1700–1782).

V.10 - Un tube cylindrique de rayons intérieur et extérieur a et b et de hauteur h est soumis aux conditions au contour en contraintes suivantes (coordonnées cylindriques) :

$z = 0 : T_r = T_\theta = 0\ ,\ T_z = -\sigma\ ;\ \ z = h : T_r = T_\theta = 0\ ,\ T_z = \sigma\ ;$
$r = a : T_r = p\ ,\ T_\theta = T_z = 0\quad ;\ \ r = b : T_r = -p\ ,\ T_\theta = T_z = 0\ .$

Il n'y a pas de force de masse. Déterminer le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ en équilibre avec ces données, dont l'expression dans la base orthonormée des coordonnées cylindriques est identique en tout point.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Éléments de réponse :
À partir des conditions au contour et des équations (3.23) :
$\underline{\underline{\sigma}} = -p\,(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta) + \sigma\, \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$.
Ce champ est homogène dans le cylindre :
$\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + (\sigma + p)\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$.

V.11 - Équations de la dynamique en coordonnées cartésiennes quelconques. Expliciter les équations de la dynamique (3.13) et la formule (3.18) définissant le vecteur-contrainte dans un système de coordonnées cartésiennes quelconques. Interpréter σ^{ij}.

Éléments de réponse :

- $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ trièdre cartésien.
  $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma^{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$, grad $\underline{\underline{\sigma}} = \dfrac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^k}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}^k$, div $\underline{\underline{\sigma}} = \dfrac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j}\,\underline{e}_i$.
  $\underline{F} = F^i \underline{e}_i$, $\underline{a} = a^i \underline{e}_i$.
- Équations de la dynamique (3.13) : $\dfrac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + \rho(F^i - a^i) = 0$.
- Vecteur-contrainte : $\underline{n} = n_j \underline{e}^j$, $\underline{T}(\underline{n}) = T^i \underline{e}_i = \sigma^{ij} n_j \underline{e}_i$.
- Interprétation de σ^{ij} : $\dfrac{1}{|\underline{e}^j|}\sigma^{ij}$ est la composante, selon la direction $\underline{e}_i$, du vecteur-contrainte sur la facette définie par les deux vecteurs de base complémentaires de $\underline{e}_j$.

V.12 - On étudie l'équilibre d'un demi-espace tridimensionnel, constitué d'un matériau homogène pesant, limité par une surface libre plane inclinée à l'angle β sur l'horizontale. On utilise le repère cartésien $Oxyz$ défini comme suit : Ox horizontal dans la surface libre, Oy ligne de pente de la surface libre, Oz verticale ascendante. Compte tenu des données de ce problème on cherche à déterminer le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ dans le massif de milieu continu comme une fonction continûment différentiable de la seule coordonnée z. Quelle est la forme d'un tel champ $\underline{\underline{\sigma}}$? Déterminer alors le vecteur-contrainte sur une facette parallèle à la surface libre à la cote $z = -h < 0$.

Éléments de réponse :

- $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma^{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$.
  Les équations d'équilibre (3.13) se réduisent à (cf. Ex.V.11) :
  $\dfrac{\mathrm{d}\sigma^{xz}}{\mathrm{d}z} = 0 \quad \dfrac{\mathrm{d}\sigma^{yz}}{\mathrm{d}z} = 0 \quad \dfrac{\mathrm{d}\sigma^{zz}}{\mathrm{d}z} = \rho\, g$.
  Les équations au contour (3.14) permettent d'écrire les conditions à la surface libre :
  $\underline{n} = \underline{e}^z \cos\beta$, $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n} = 0$ pour $z = 0$ d'où : $\sigma^{xz} = \sigma^{yz} = \sigma^{zz} = 0$ pour $z = 0$.
  Cela détermine, dans tout le massif :
  $\sigma^{xz} = \sigma^{zx} \equiv 0$, $\sigma^{yz} = \sigma^{zy} \equiv 0$, $\sigma^{zz} \equiv \rho\, g\, z$ pour $z < 0$;
  les autres composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ demeurent des fonctions indéterminées de $z < 0$.

- Pour la facette parallèle à la surface libre à la cote $z = -h < 0$ on a :
  $\underline{n} = \underline{e}^z \cos\beta$, $\sigma^{zz} = -\rho\, g\, h$ d'où $\underline{T} = -\rho\, g\, h \underline{e}_z \cos\beta$ et $\underline{\mathrm{d}f} = -\rho\, g\, h\, \underline{e}_z \cos\beta\, \mathrm{d}a$.

Commentaire.
Le problème étudié est en particulier celui de l'équilibre d'un massif de sol (mécanique des sols). Il est compréhensible (cf. § 3.4) que les équations de la dynamique ne permettent pas, à elles seules, de déterminer le champ $\underline{\underline{\sigma}}$, même avec l'hypothèse ***a priori*** sur la dépendance en z uniquement ; mais on remarque que, cette hypothèse une fois admise, le vecteur contrainte sur toute facette ***parallèle à la surface libre*** est déterminé : l'effort élémentaire $\underline{\mathrm{d}f}$ est vertical, « compressif », égal au poids de la colonne de matériau située au-dessus de cette

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

facette. Le calcul des composantes du champ $\underline{\underline{\sigma}}$ laissées indéterminées par la statique nécessite la connaissance de la loi de comportement du matériau et, en général, de l'histoire du chargement subi.

V.13 - Le tenseur de contrainte de Cauchy en un point étant supposé être un tenseur de pression isotrope, déterminer le tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff ; examiner en particulier le cas où la transformation du milieu est une dilatation isotrope composée avec une rotation, et celui où c'est une extension simple.

Éléments de réponse :

- $\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$ $\qquad \underline{\underline{\pi}} = -p\,\dfrac{\rho_0}{\rho}\,\underline{\underline{C}}^{-1}$ $\qquad (\underline{\underline{C}} = {}^t\underline{\underline{F}}\,.\,\underline{\underline{F}})$.
- $\underline{\underline{F}} = \lambda\,\underline{\underline{\alpha}}$ $\quad$ avec ${}^t\underline{\underline{\alpha}}\,.\,\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}}$, $\det\underline{\underline{\alpha}} = +1$, $\lambda > 1$:
  $\underline{\underline{\pi}} = -\lambda\,p\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$.
- $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ orthonormé
  $\underline{\underline{F}} = \lambda\,\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$, $\lambda > 1$ $\qquad$ (cf. Ex.II.1) :
  $\underline{\underline{\pi}} = -p\,(\lambda^{-1}\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \lambda\,\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \lambda\,\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)$.

V.14 - $Oxyz$ est un repère orthonormé. Soit, dans la configuration initiale, un échantillon cylindrique de révolution d'axe Oz, de longueur ℓ_0 et de rayon r_0. Dans la configuration actuelle cet échantillon est un cylindre de révolution d'axe Oz de longueur ℓ et de rayon r ; on suppose que la transformation entre les deux configurations est homogène, et que les vecteurs matériels colinéaires à $\underline{e}_x$ ou $\underline{e}_y$ le restent dans la transformation. Le champ de contrainte de Cauchy y est également supposé homogène, induit par les seuls efforts suivants appliqués au contour :

– deux forces axiales (selon Oz), opposées, d'intensité Q (en traction) appliquées sur les bases,

– une pression normale uniforme d'intensité p appliquée sur la surface latérale.

Déterminer les tenseurs de contrainte de Cauchy et de Piola-Kirchhoff.

Éléments de réponse :

- $\underline{\underline{\sigma}} = -p\,(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) + \dfrac{Q}{\pi r^2}\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$

  $\underline{\underline{F}} = \dfrac{r}{r_0}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) + \dfrac{\ell}{\ell_0}\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$

  $\det\underline{\underline{F}} = \left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2 \dfrac{\ell}{\ell_0}$

  $\underline{\underline{\pi}} = -p\,\dfrac{\ell}{\ell_0}\,(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) + \dfrac{Q}{\pi r_0^2}\,\dfrac{\ell_0}{\ell}\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$

Commentaire.

Le résultat peut aussi s'obtenir de façon plus « artisanale » en s'appuyant sur la formule :

$$\underline{\underline{\pi}}\,.\,\underline{\underline{\mathrm{d}A}} = \underline{\underline{F}}^{-1}\,.\,\underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{\underline{\mathrm{d}a}}\ .$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Chapitre VI

Étude des contraintes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MOTS CLÉS

Contrainte normale. Contrainte tangentielle.
Réciprocité des contraintes.
Contraintes principales. Invariants.
Contrainte moyenne. Déviateur.
Plan de Mohr. Cercles de Mohr.
Domaine d'élasticité. Fonction de charge.
Symétries de la matière. Isotropie.
Critère de Tresca. Critère de von Mises.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En bref...

Le tenseur des contraintes de Cauchy en un point définit l'application linéaire qui détermine le vecteur-contrainte pour toute facette passant par ce point. Il permet notamment de calculer la contrainte normale et la contrainte tangentielle sur cette facette (section 2).

Dans le cas général, pour un état de contrainte donné, il existe trois facettes sur lesquelles le vecteur-contrainte est normal. Ces facettes sont orthogonales aux *directions principales* des contraintes ; les contraintes correspondantes sont les *contraintes principales* (section 2).

Pour un état de contrainte donné, défini par le tenseur des contraintes de Cauchy, il se révèle utile du point de vue des applications pratiques de suivre la variation du vecteur-contrainte agissant sur une facette lorsque celle-ci pivote autour du point considéré. La représentation géométrique de *Mohr* repère cette évolution par rapport à la normale à la facette, dans un diagramme où sont reportées la contrainte normale et la contrainte tangentielle. On y met en évidence le domaine parcouru par l'extrémité du vecteur-contrainte : il est délimité par *trois cercles* (section 3).

Du point de vue du comportement des matériaux, le tenseur des contraintes apparaît comme le chargement de l'élément de matière. La *fonction de charge* fournit une mesure scalaire de ce chargement pour délimiter le domaine de pertinence du modèle de comportement élastique avant l'apparition des déformations irréversibles de la plasticité : *critère de limite d'élasticité*, ou de *plasticité* (section 4).

La dérivation temporelle du tenseur des contraintes pose le problème du choix d'un référentiel pertinent pour l'étude du comportement d'un matériau (section 5).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Principales notations

Notation	Signification	1ère formule
σ	contrainte normale	(2.5)
$\underline{\tau}$	contrainte tangentielle	(2.7)
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	contraintes principales	(2.15)
I_1, I_2, I_3	invariants de $\underline{\underline{\sigma}}$	(2.16 à 2.18)
σ_{m}	contrainte moyenne	(2.22)
$\underline{\underline{s}}$	déviateur de $\underline{\underline{\sigma}}$	(2.23)
J_2, J_3	invariants de $\underline{\underline{s}}$	(2.26)
σ_{eq}	contrainte équivalente (de von Mises)	(4.11)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 La mise en œuvre du concept 257
2 Notions pratiques 257
2.1 Dimensions, unités 257
2.2 Contrainte normale et contrainte tangentielle 258
2.3 Signe des contraintes 260
2.4 Réciprocité des contraintes 260
2.5 Changement de base 262
2.6 Directions principales, contraintes principales 263
2.7 Invariants du tenseur des contraintes. Théorème de représentation 264
2.8 Tenseur déviateur des contraintes 266
3 Représentation de Mohr 267
3.1 Représentation de Mohr 267
3.2 Cercles de Mohr 268
3.3 Description des cercles principaux 270
3.4 Quelques conséquences pratiques 271
3.5 États de contrainte remarquables 271
4 Critères de limite d'élasticité pour les matériaux isotropes 274
4.1 Présentation 274
4.2 Principes généraux 275
4.3 Critère de Tresca 276
4.4 Critère de von Mises 278
5 Dérivation temporelle du tenseur des contraintes 279
5.1 Dérivée particulaire 279
5.2 Dérivée intrinsèque (dérivée de Truesdell) 280
5.3 Dérivée corotationnelle (dérivée de Jaumann) 281
Récapitulatif des formules essentielles 282
Exercices 283

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Étude des contraintes

1 La mise en œuvre du concept

L'objet du chapitre V était, par la méthode des puissances virtuelles, de mettre en place la représentation des efforts intérieurs pour le milieu continu tridimensionnel classique. On a ainsi abouti à une représentation par un champ de tenseurs du deuxième ordre symétriques, défini sur la configuration actuelle κ_t : ***le champ des tenseurs de contrainte de Cauchy***.

Le présent chapitre se veut essentiellement pratique. Il est consacré à la mise en œuvre de ce concept, notamment par l'étude du tenseur des contraintes en un point, pour acclimater sa manipulation, examiner et commenter ses propriétés.

Aucune confusion n'étant possible puisque seules les propriétés en un point seront examinées, on allégera les notations en supprimant dans toutes les formules la variable $\underline{x}$ qui indiquait jusqu'ici la valeur locale d'un champ et l'instant t, autrement dit, le tenseur des contraintes de Cauchy sera désigné par $\underline{\underline{\sigma}}$, le vecteur contrainte par $\underline{T}(\underline{n})$ etc.

2 Notions pratiques

2.1 Dimensions, unités

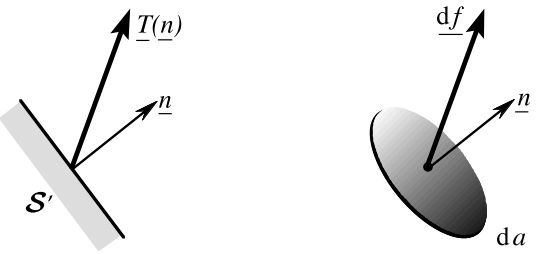


Figure 1 – Vecteur-contrainte sur une facette et force élémentaire sur une surface

On rappelle la formule essentielle liant le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ au vecteur-contrainte $\underline{T}(\underline{n})$ sur la facette de normale sortante $\underline{n}$ (cf. chapitre V, § 3.5) :

$$\underline{T}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \tag{2.1}$$

d'où la force élémentaire $\underline{\mathrm{d}f}$ s'exerçant sur une surface da de normale $\underline{n}$ (figure 1) :

$$\underline{\mathrm{d}f} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\,\mathrm{d}a = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathrm{d}\underline{a}\,. \tag{2.2}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Pour les composantes dans une base ***orthonormée*** la formule (2.1) conduit au résultat déjà énoncé

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \tag{2.3}$$

et à l'interprétation des composantes σ_{ij} du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ dont l'utilité pratique est constante :

> ***la composante σ_{ij} du tenseur des contraintes de Cauchy représente la composante selon la direction $\underline{e}_i$ du vecteur-contrainte sur la facette de normale $\underline{e}_j$.***

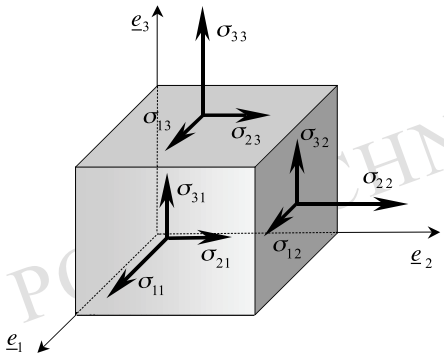


Figure 2 – Interprétation des composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ en base orthonormée

Dans la formule (2.2), $\underline{\mathrm{d}f}$ représente une force et $\underline{\mathrm{d}a}$ une aire. On en déduit que le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ (en fait ses composantes) a les dimensions d'une force par unité de surface c'est-à-dire d'***une pression.*** Il en va de même pour le vecteur-contrainte $\underline{T}$.

L'unité de pression S.I. est le Pascal : 1Pa = 1 N/m^2. On devra souvent pour les applications pratiques utiliser des multiples : 1kPa = 10^3Pa , 1MPa = 10^6Pa , 1GPa = 10^9Pa.

2.2 Contrainte normale et contrainte tangentielle

Considérant une facette telle que celle représentée sur la figure 1 on définit de façon naturelle la contrainte normale sur cette facette comme la composante de $\underline{T}(\underline{n})$ selon la direction de la normale $\underline{n}$ soit :

$$\underline{T}(\underline{n}) \cdot \underline{n} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \tag{2.4}$$

Diverses notations sont adoptées pour désigner cette contrainte normale. La plus courante, notamment pour les applications dans la théorie des cercles de Mohr (cf.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

section 3), choisit σ comme terme générique de la contrainte normale sur une facette quelconque mais on trouvera aussi : $T_n, n, \ldots$. On écrira :

$$\sigma = \underline{n} \,.\, \underline{\underline{\sigma}} \,.\, \underline{n} \tag{2.5}$$

d'où, en base orthonormée,

$$\sigma = \sigma_{ij} n_i n_j \ . \tag{2.6}$$

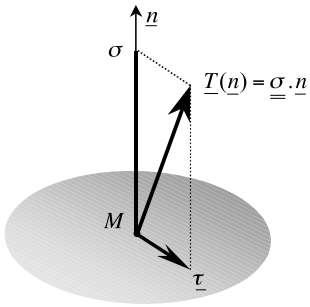


Figure 3 – Contrainte normale, contrainte tangentielle

On définit la ***contrainte tangentielle*** $\underline{\tau}$ comme la composante vectorielle de $\underline{T}(\underline{n})$ dans le plan de la facette, de sorte que :

$$\underline{T}(\underline{n}) = \sigma \, \underline{n} + \underline{\tau} \ . \tag{2.7}$$

La contrainte tangentielle est également appelée ***contrainte de cisaillement*** [1] (ou cission). Dans le cas général elle est simplement mesurée par son module [2] :

$$|\,\underline{\tau}\,| = \left((\underline{\underline{\sigma}} \,.\, \underline{n})^2 - (\underline{n} \,.\, \underline{\underline{\sigma}} \,.\, \underline{n})^2 \right)^{1/2} \ . \tag{2.8}$$

On peut enfin remarquer que, si l'on choisit une base orthonormée constituée de la normale $\underline{n}$ à la facette considérée et de deux vecteurs $\underline{t}_1$ et $\underline{t}_2$ situés dans la facette (figure 4), la contrainte normale sur la facette n'est autre que :

$$\sigma = \sigma_{nn} \ [3] \tag{2.9}$$

et l'on dispose des deux composantes tangentielles ***algébriques*** :

$$\tau_1 = \sigma_{t_1 n} \ , \ \tau_2 = \sigma_{t_2 n} \tag{2.10}$$

avec évidemment $|\,\underline{\tau}\,|^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2$. L'utilisation de ces composantes algébriques s'impose lorsque l'on étudie des matériaux anisotropes.

[1] Parfois encore « cisaillement » : cette terminologie plus concise peut prêter confusion entre les concepts d'effort et déformation.

[2] On verra dans la section 3 qu'il est possible de définir une mesure algébrique de la contrainte tangentielle dans le cas de certaines facettes en adoptant une convention d'orientation continue, cohérente avec la théorie des cercles de Mohr.

[3] Cette notation est souvent la plus claire.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

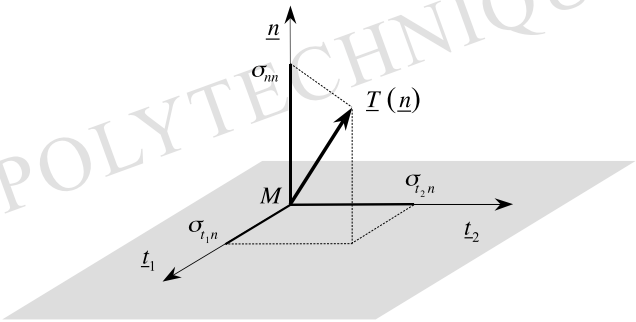


Figure 4 – Contrainte normale et composantes tangentielles

2.3 Signe des contraintes

D'après la définition (2.4), la contrainte normale σ sur une facette est positive lorsque la projection orthogonale de $\underline{T}(\underline{n})$ sur $\underline{n}$ est dirigée suivant $\underline{n}$. En se référant à l'interprétation physique du modèle (chapitre V, § 3.5, figure 7) rappelée sur la figure 1 on voit que, $\underline{n}$ étant la normale ***sortante*** à la facette c'est-à-dire la normale sortante au sous-système $\mathcal{S}'$ sur lequel la force élémentaire $\underline{\mathrm{d}f}$ est exercée, la contrainte normale σ est ***positive*** lorsque la composante normale de $\underline{\mathrm{d}f}$ est une ***traction***.

On dira que σ est ***positive en traction***[(4)]. Les contraintes σ négatives sont dites ***de compression***.

Cette convention « des tractions positives » pour les contraintes normales est aussi appelée convention de signe « des mécaniciens » pour les contraintes.

Dans certaines applications ***pratiques*** (mécanique des sols, calcul des structures en béton,...) afin de ne pas manipuler en permanence des quantités négatives, les ingénieurs préfèrent parfois adopter la convention de la normale rentrante à la facette : les contraintes normales sont alors positives en compression. On doit prendre garde que dans ce cas, si l'on conserve la même définition des taux de déformations $\underline{\underline{d}}$ et $\hat{\underline{\underline{d}}}$, l'expression de la densité de puissance virtuelle des efforts intérieurs devra être changée de signe par rapport à celle utilisée dans le chapitre précédent. En tout état de cause il est conseillé, lorsqu'une ambiguïté sur ce sujet est susceptible de se présenter, compte tenu du public des lecteurs, de préciser dès le départ la convention adoptée ; lors de l'utilisation d'un logiciel de calcul, on s'assurera de la convention choisie par les auteurs (de plus en plus souvent on rencontrera celle « des mécaniciens »).

2.4 Réciprocité des contraintes

L'interprétation des composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ en base orthonormée rappelée au paragraphe 2.1 (figure 2) et la symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$, permettent d'énoncer la propriété connue sous le nom de ***réciprocité des contraintes tangentielles***.

On considère deux facettes ***orthogonales*** quelconques de normales respectives $\underline{n}$

(4) On rappelle la terminologie de « tensions » utilisée autrefois pour les contraintes.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

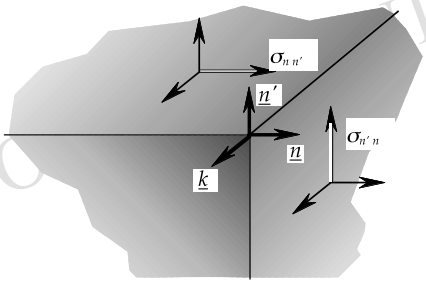


Figure 5 – Réciprocité des contraintes

et $\underline{n}'$; ces normales et la direction de l'intersection de ces facettes définissent un trièdre trirectangle sur lequel on peut construire une base orthonormée $(\underline{n}, \underline{n}', \underline{k})$ comme représentée sur la figure 5. La symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$ implique notamment pour les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ dans cette base de relation :

$$\sigma_{nn'} = \sigma_{n'n} \ . \tag{2.11}$$

Ainsi : la composante selon $\underline{n}'$ de la contrainte tangentielle sur la facette de normale $\underline{n}$ est égale à la composante selon $\underline{n}$ de la contrainte tangentielle sur la facette de normale $\underline{n}'$.

On retiendra la figure 5 en remarquant que (2.11) exprime une égalité entre des composantes algébriques des contraintes tangentielles sur les deux facettes, et que les vecteurs associés à ces composantes qui sont portés par $\underline{n}$ et $\underline{n}'$ sont, soit tous deux convergents vers l'intersection des facettes, soit tous deux divergents à partir de cette intersection.

Plus généralement, on peut énoncer le théorème de ***réciprocité des contraintes*** pour deux facettes non nécessairement orthogonales entre elles, de normales respectives $\underline{n}$ et $\underline{n}'$. En application de (2.1) on a en effet $\underline{T}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \,.\, \underline{n}$ et $\underline{T}(\underline{n}') = \underline{\underline{\sigma}} \,.\, \underline{n}'$ d'où, en raison de la symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$,

$$\underline{T}(\underline{n}) \,.\, \underline{n}' = \underline{n}' \,.\, \underline{\underline{\sigma}} \,.\, \underline{n} = \underline{T}(\underline{n}') \,.\, \underline{n} \tag{2.12}$$

qui signifie que : ***la projection sur $\underline{n}'$ du vecteur-contrainte s'exerçant sur la facette de normale $\underline{n}$, est égale à la projection sur $\underline{n}$ du vecteur-contrainte s'exerçant sur la facette de normale $\underline{n}'$.***

Il en résulte en particulier que si le vecteur-contrainte sur la facette de normale $\underline{n}$ est contenu dans la facette de normale $\underline{n}'$, alors le vecteur-contrainte sur la facette de normale $\underline{n}'$ est contenu dans la facette de normale $\underline{n}$: les deux facettes sont alors dites conjuguées [5].

[5] Ces résultats de « réciprocité » doivent être rapprochés du raisonnement « du petit parallélépipède » donné au chapitre V (§ 3.6) : ils traduisent, sur un parallélépipède rectangle pour (2.11), et sur un parallélépipède quelconque pour (2.12), l'équilibre des moments dans la loi fondamentale de la dynamique.

2.5 Changement de base

Le caractère tensoriel de $\underline{\underline{\sigma}}$ permet, par simple application des formules données dans l'annexe I, de procéder à des changements de base et de connaître les nouvelles composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction des anciennes.

Dans la circonstance, très fréquente, d'un changement de base orthonormée (par exemple : passage des coordonnées cartésiennes orthonormées aux coordonnées cylindriques) les formules systématiques font appel aux cosinus directeurs α_{ik} de la nouvelle base $\{\underline{e}'_i\}$ par rapport à l'ancienne $\{\underline{e}_k\}$ et s'écrivent (figure 6) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{e}'_i = \alpha_{ik}\, \underline{e}_k \ , \ \alpha_{ik} = \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_k \\ \sigma'_{ij} = \alpha_{i\ell}\alpha_{jm}\sigma_{\ell m} \end{array} \right. \tag{2.13}$$

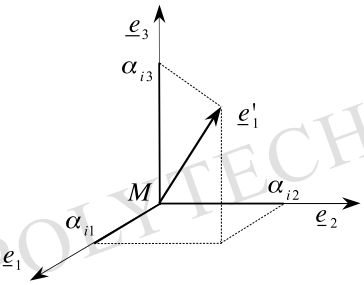


Figure 6 – Cosinus directeurs

En fait et bien que cette démarche soit évidemment strictement équivalente à l'application de (2.13), il est souvent plus commode dans la pratique de substituer les expressions des vecteurs de base $\underline{e}_k$ en fonction des vecteurs $\underline{e}'_i$ dans l'écriture explicite de $\underline{\underline{\sigma}}$ et d'identifier les composantes :

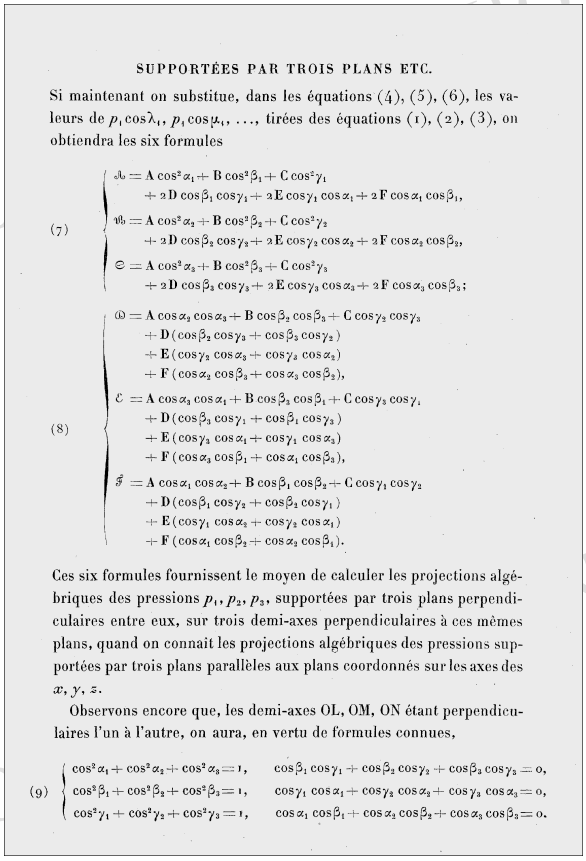
$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{k\ell}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_\ell = \sigma'_{ij}\, \underline{e}'_i \otimes \underline{e}'_j \ . \tag{2.14}$$

Cette méthode, qui évite tout effort de mémoire, permet de tenir compte de la forme particulière du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ en cause dans chaque cas. C'est aussi la méthode la plus simple dans le cas de changement de bases non orthonormées (on rappelle qu'il est alors nécessaire de préciser les représentations choisies pour le tenseur euclidien $\underline{\underline{\sigma}}$).

La figure 7 présente les formules de changement de base orthonormée telles qu'elles furent établies par Cauchy [6].

[6] D'après ***Exercices de Mathématiques*** (1829), Œuvres complètes d'Augustin Cauchy, 2ème édition, II[e] série, tome IX, Gauthier-Villars, Paris 1891.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE



SUPPORTÉES PAR TROIS PLANS ETC.

Si maintenant on substitue, dans les équations (4), (5), (6), les valeurs de $p_1\cos\lambda_1$, $p_1\cos\mu_1$, ..., tirées des équations (1), (2), (3), on obtiendra les six formules

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = A\cos^2\alpha_1 + B\cos^2\beta_1 + C\cos^2\gamma_1 \\ \qquad + 2D\cos\beta_1\cos\gamma_1 + 2E\cos\gamma_1\cos\alpha_1 + 2F\cos\alpha_1\cos\beta_1, \\ \mathfrak{B} = A\cos^2\alpha_2 + B\cos^2\beta_2 + C\cos^2\gamma_2 \\ \qquad + 2D\cos\beta_2\cos\gamma_2 + 2E\cos\gamma_2\cos\alpha_2 + 2F\cos\alpha_2\cos\beta_2, \\ \mathfrak{C} = A\cos^2\alpha_3 + B\cos^2\beta_3 + C\cos^2\gamma_3 \\ \qquad + 2D\cos\beta_3\cos\gamma_3 + 2E\cos\gamma_3\cos\alpha_3 + 2F\cos\alpha_3\cos\beta_3; \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = A\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + B\cos\beta_2\cos\beta_3 + C\cos\gamma_2\cos\gamma_3 \\ \qquad + D(\cos\beta_2\cos\gamma_3 + \cos\beta_3\cos\gamma_2) \\ \qquad + E(\cos\gamma_2\cos\alpha_3 + \cos\gamma_3\cos\alpha_2) \\ \qquad + F(\cos\alpha_2\cos\beta_3 + \cos\alpha_3\cos\beta_2), \\ \mathfrak{B} = A\cos\alpha_3\cos\alpha_1 + B\cos\beta_3\cos\beta_1 + C\cos\gamma_3\cos\gamma_1 \\ \qquad + D(\cos\beta_3\cos\gamma_1 + \cos\beta_1\cos\gamma_3) \\ \qquad + E(\cos\gamma_3\cos\alpha_1 + \cos\gamma_1\cos\alpha_3) \\ \qquad + F(\cos\alpha_3\cos\beta_1 + \cos\alpha_1\cos\beta_3), \\ \mathfrak{C} = A\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + B\cos\beta_1\cos\beta_2 + C\cos\gamma_1\cos\gamma_2 \\ \qquad + D(\cos\beta_1\cos\gamma_2 + \cos\beta_2\cos\gamma_1) \\ \qquad + E(\cos\gamma_1\cos\alpha_2 + \cos\gamma_2\cos\alpha_1) \\ \qquad + F(\cos\alpha_1\cos\beta_2 + \cos\alpha_2\cos\beta_1). \end{cases}$$

Ces six formules fournissent le moyen de calculer les projections algébriques des pressions p_1, p_2, p_3, supportées par trois plans perpendiculaires entre eux, sur trois demi-axes perpendiculaires à ces mêmes plans, quand on connait les projections algébriques des pressions supportées par trois plans parallèles aux plans coordonnés sur les axes des x, y, z.

Observons encore que, les demi-axes OL, OM, ON étant perpendiculaires l'un à l'autre, on aura, en vertu de formules connues,

$$(9)\quad \begin{cases} \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1, & \cos\beta_1\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\cos\gamma_2 + \cos\beta_3\cos\gamma_3 = 0, \\ \cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 1, & \cos\gamma_1\cos\alpha_1 + \cos\gamma_2\cos\alpha_2 + \cos\gamma_3\cos\alpha_3 = 0, \\ \cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 1, & \cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Figure 7 – Formules de Cauchy pour les contraintes

2.6 Directions principales, contraintes principales

Les directions principales de $\underline{\underline{\sigma}}$, tenseur euclidien symétrique réel, sont définies comme indiqué dans l'annexe I (§ 5.10). Ce sont les directions propres de l'application linéaire associée à $\underline{\underline{\sigma}}$. Elles sont orthogonales entre elles.

Les valeurs principales de $\underline{\underline{\sigma}}$ sont appelées ***contraintes principales*** et notées : $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Dans une base orthonormée dirigée selon les directions principales des contraintes de Cauchy, la matrice $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}$ est diagonale et $\underline{\underline{\sigma}}$ s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_2\, \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_3\, \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \ . \tag{2.15}$$

En se référant à la notion de vecteur-contrainte on énonce la propriété caractéristique des directions principales de $\underline{\underline{\sigma}}$.

Sur une facette orientée perpendiculairement à une direction principale de $\underline{\underline{\sigma}}$, le vecteur-contrainte est purement normal (il n'y a pas de contrainte de cisaillement sur la facette) et sa mesure est égale à la contrainte principale correspondante.

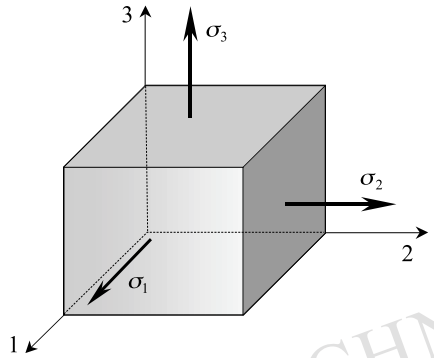


Figure 8 – Vecteurs-contraintes sur les facettes normales aux directions principales de $\underline{\underline{\sigma}}$

La figure 8 reprend la figure 2 lorsque les facettes concernées sont normales aux directions principales des contraintes.

La comparaison avec la figure 10 du chapitre V rappelle que le concept de contrainte pour la modélisation des efforts intérieurs inclut, comme cas particulier, celui de pression : les trois contraintes principales sont alors égales ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$) et toutes les facettes sont principales.

Malgré la simplification apportée par la symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$, la représentation géométrique du tenseur des contraintes au moyen de six composantes, telle que celle donnée sur la figure 2, demeure difficile à appréhender. La représentation de la figure 8 est plus suggestive : elle montre que les six degrés de liberté sur $\underline{\underline{\sigma}}$ correspondent à trois paramètres d'orientation (des directions principales) et trois paramètres d'intensité (des contraintes principales). Ce mode de représentation est souvent adopté pour les champs de contrainte obtenus par calculs numériques (cf. chapitre X) ou par l'expérience (par exemple : photoélasticimétrie).

2.7 Invariants du tenseur des contraintes. Théorème de représentation

$\underline{\underline{\sigma}}$ étant un tenseur euclidien du second ordre sur l'espace tridimensionnel, on sait que les trois polynômes I_1, I_2, I_3, de degré 1 à 3 par rapport aux composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$, définis par contractions totales de produits tensoriels (annexe I, § 5.7) sont des

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

scalaires invariants dans tout changement de base :

$$I_1 = \text{tr } \underline{\underline{\sigma}} \tag{2.16}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\text{tr } (\underline{\underline{\sigma}}.\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\text{tr } (\underline{\underline{\sigma}}^2) \tag{2.17}$$

$$I_3 = \frac{1}{3}\text{tr } (\underline{\underline{\sigma}}.\underline{\underline{\sigma}}.\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{3}\text{tr } (\underline{\underline{\sigma}}^3)\ . \tag{2.18}$$

On rappelle que le calcul de I_1, I_2, I_3, s'effectue sur une représentation mixte du tenseur euclidien $\underline{\underline{\sigma}}$ (cette précision est inutile en base orthonormée) :

$$I_1 = \sigma^i{}_i\ ,\ I_2 = (\sigma^i{}_j\sigma^j{}_i)/2\ ,\ I_3 = (\sigma^i{}_j\sigma^j{}_k\sigma^k{}_i)/3 \tag{2.19}$$

I_1, I_2, I_3 s'expriment évidemment sans difficulté en fonction des contraintes principales. Ce sont des ***fonctions symétriques*** des contraintes principales : elles sont invariantes par permutation circulaire sur $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

$$\left\{\begin{array}{l} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = ((\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_3)^2)/2 \\ I_3 = ((\sigma_1)^3 + (\sigma_2))^3 + (\sigma_3)^3)/3\ . \end{array}\right. \tag{2.20}$$

Les invariants I_1, I_2, I_3 ont été introduits (annexe I, § 4.6 et 5.7) en substitution au jeu d'invariants polynomiaux constitués par les coefficients du polynôme caractéristique en λ, $\det(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda\,\underline{\underline{\mathbb{1}}})$. Ces invariants $I_{\text{I}}, I_{\text{II}}, I_{\text{III}}$ étant aussi utilisés dans certaines formules, on en donne ici les expressions :

$$\left\{\begin{array}{ll} I_{\text{I}} & = \sigma^i{}_i = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (\equiv I_1) \\ I_{\text{II}} & = \dfrac{1}{2}(\sigma^i{}_i\sigma^j{}_j - \sigma^i{}_j\sigma^j{}_i) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \quad (\equiv I_1^2/2 - I_2) \\ I_{\text{III}} & = \det \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ . \end{array}\right. \tag{2.21}$$

L'utilité d'introduire les invariants apparaîtra notamment au paragraphe 4.2 où l'on fera appel au ***théorème de représentation*** (cf. annexe I, § 5.7), que l'on peut énoncer comme suit à propos de $\underline{\underline{\sigma}}$.

Soit f une fonction scalaire ***isotrope*** de $\underline{\underline{\sigma}}$, c'est-à-dire que la valeur de cette fonction, qui est nécessairement calculée en se référant aux composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ dans une base, est invariante si l'on effectue sur cette base une isométrie quelconque ; on dit aussi que cette fonction f est une ***fonction du seul tenseur*** $\underline{\underline{\sigma}}$ pour signifier qu'elle ne dépend d'aucun argument spécifiant des directions privilégiées dans l'espace. Cette définition implique, en choisissant pour base une base orthonormée selon les directions principales, que la fonction f est une fonction symétrique des contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Mais, plus précisément, $\underline{\underline{\sigma}}$ étant ***symétrique***, on dispose du théorème de représentation suivant, qui ***ne suppose pas*** que la fonction considérée soit polynomiale (annexe I, § 5.7).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Toute fonction ***isotrope***, à valeur ***scalaire***, de $\underline{\underline{\sigma}}$ s'exprime comme une fonction ***symétrique des contraintes principales*** $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, ou encore, de façon équivalente, comme une fonction des ***invariants*** I_1, I_2, I_3 ou $I_\mathrm{I}, I_\mathrm{II}, I_\mathrm{III}$. [7]

2.8 Tenseur déviateur des contraintes

Il est courant de décomposer $\underline{\underline{\sigma}}$ en ses parties dites « sphérique » et « déviatorique ».

Pour cela on définit la ***contrainte moyenne*** σ_m :

$$\sigma_\mathrm{m} = (\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}})/3 = I_1/3\ . \tag{2.22}$$

La ***partie sphérique*** de $\underline{\underline{\sigma}}$ est, par définition, le tenseur « isotrope » $\sigma_\mathrm{m}\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$ dont les trois valeurs principales sont égales à σ_m (toutes les directions de l'espace étant principales pour ce tenseur ***isotrope***). On a évidemment : $\mathrm{tr}\ (\sigma_\mathrm{m}\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}) = I_1$.

La partie déviatorique de $\underline{\underline{\sigma}}$, appelée aussi ***déviateur*** de $\underline{\underline{\sigma}}$, est le tenseur $\underline{\underline{s}}$ défini par :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_\mathrm{m}\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} \tag{2.23}$$

qui est de ***trace nulle*** : $\mathrm{tr}\ \underline{\underline{s}} = 0$.

On peut résumer l'ensemble de ces définitions par les formules :

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_\mathrm{m}\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{s}} \\ \\ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{s}} = 0\end{array}} \tag{2.24}$$

Le tenseur déviateur $\underline{\underline{s}}$ a mêmes directions principales que $\underline{\underline{\sigma}}$. Ses valeurs principales s_i sont liées aux valeurs principales de $\underline{\underline{\sigma}}$ par :

$$s_i = \sigma_i - \sigma_\mathrm{m}$$

c'est-à-dire explicitement :

$$s_i = (2\,\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k)/3 \tag{2.25}$$

où (i, j, k) est une permutation quelconque de (1,2,3).

Le premier invariant de $\underline{\underline{s}}$ est, par définition, nul : $J_1 = \mathrm{tr}\ \underline{\underline{s}} = 0$; les deux autres sont désignés par J_2 et J_3 :

$$\left\{\begin{array}{l} J_2 = \mathrm{tr}(\underline{\underline{s}}^2)/2 \\ J_3 = \mathrm{tr}(\underline{\underline{s}}^3)/3\ . \end{array}\right. \tag{2.26}$$

[7] Pour aider à la compréhension de ce théorème : son équivalent dans le cas d'une fonction scalaire isotrope d'un vecteur $\underline{v}$ énonce qu'une telle fonction s'exprime nécessairement en fonction de $|\underline{v}|$ seulement.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Les invariants I_2 et I_3 de $\underline{\underline{\sigma}}$ s'expriment en fonction de I_1, J_2, J_3 par les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_2 = J_2 + I_1^2/6 \\ I_3 = J_3 + 2\,I_1 J_2/3 + I_1^3/27\ ; \end{array} \right. \tag{2.27}$$

ainsi toute fonction scalaire isotrope du (seul) tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ s'écrira comme fonction de I_1 et des invariants J_2 et J_3 de $\underline{\underline{s}}$.

On donne parfois une interprétation des invariants I_1 et J_2. en remarquant que, sur une facette dite « octaédrale » dont la normale a pour composantes $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3,)$ dans le repère des directions principales de $\underline{\underline{\sigma}}$ (figure 9), la contrainte normale et la contrainte tangentielle sont respectivement égales à :

$$\sigma_{\rm oct} = I_1/3 = \sigma_{\rm m}\ ,\ |\underline{\tau}_{\rm oct}| = \sqrt{2J_2/3}\ . \tag{2.28}$$

$\sigma_{\rm m} = \sigma_{\rm oct}$ et $|\underline{\tau}_{\rm oct}|$ sont ainsi appelées respectivement « contrainte octaédrale » et « cission octaédrale ».

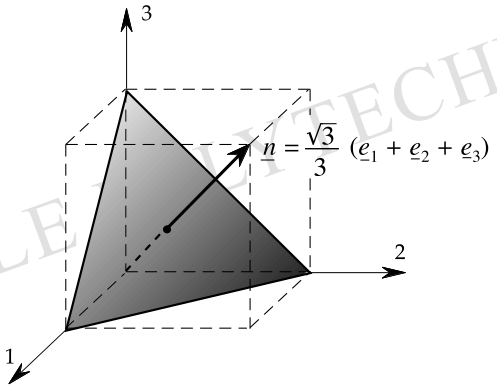


Figure 9 – Facette « octaédrale »

3 Représentation de Mohr

3.1 Représentation de Mohr

La représentation étudiée dans cette section s'intéresse fondamentalement au vecteur-contrainte.

$\underline{T}(\underline{n})$, vecteur-contrainte sur la facette de normale $\underline{n}$, étant défini par (2.1), on va mettre en évidence, à partir de la connaissance de $\underline{\underline{\sigma}}$ au point considéré, certaines propriétés concernant la variation de $\underline{T}(\underline{n})$ en fonction de $\underline{n}$. L'idée essentielle consiste à utiliser une représentation de $\underline{T}(\underline{n})$ ***dans un plan lié à la facette*** que l'on va maintenant préciser.

Soit une facette quelconque de normale $\underline{n}$ et $\underline{T}(\underline{n})$ le vecteur-contrainte correspondant. On considère le plan défini par $\underline{n}$ et $\underline{T}(\underline{n})$, qui contient évidemment la contrainte tangentielle $\underline{\tau}$ (figure 10). On désigne par $\underline{t}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\underline{n}$ dans ce plan : on a ainsi $\underline{\tau} = \tau\,\underline{t}$, avec τ algébrique de module donné par (2.8). On oriente transversalement le plan $(\underline{n}, \underline{T}(\underline{n}))$ de façon à ce que $(\underline{n}, \underline{t}) = +\pi/2$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On introduit alors un plan auxiliaire fixe, défini par des axes $O\sigma$ et $O\tau$ orthogonaux avec $(\underline{O\sigma}, \underline{O\tau}) = +\pi/2$, dans lequel on reporte pour chaque vecteur $\underline{T}(\underline{n})$, ses composantes σ et τ ce qui définit un point T. Ce plan est appelé le ***plan de Mohr*** (figure 10).

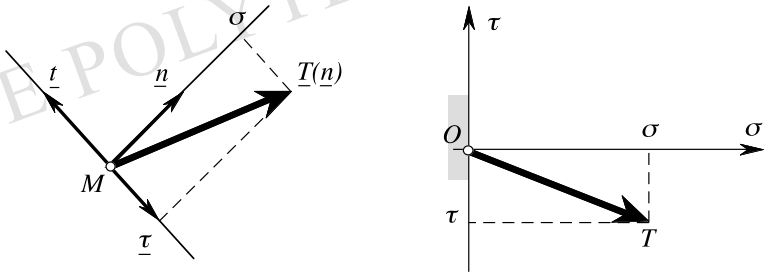


Figure 10 – Représentation de Mohr : facette et plan de Mohr

La construction du point T de coordonnées (σ, τ) dans le plan de Mohr, correspond donc au repérage du vecteur-contrainte $\underline{T}(\underline{n})$ dans la base $(\underline{n}, \underline{t})$ qui tourne autour du point M considéré en suivant $\underline{n}$ dans le plan défini par $\underline{n}$ et $\underline{T}(\underline{n})$. Cette interprétation est rappelée sur la représentation de Mohr (figure 10) par la schématisation d'une facette dont $\underline{O\sigma}$ est la normale sortante, qui sera conservée dans toute la suite.

Le signe de τ dans le plan de Mohr sur la figure 10 dépend naturellement du choix initialement fait pour le vecteur $\underline{t}$: selon l'orientation de ce vecteur unitaire, le vecteur-contrainte sur la facette de normale $\underline{n}$ sera représenté, dans le plan de Mohr, par le vecteur $\underline{OT}$ comme sur la figure 10 ou par son symétrique par rapport à l'axe $O\sigma$. Pour cette raison, la théorie de la représentation de Mohr est souvent présentée en se limitant au demi-plan de Mohr défini par σ en abscisse et $|\tau|$ en ordonnée.

Malgré cette ambiguïté on continuera, pour la représentation de Mohr, à donner un caractère algébrique à τ. En effet, s'il n'est pas possible de définir une règle continue d'orientation du vecteur $\underline{t}$, qui serait valable pour toutes les orientations de la facette autour du point courant et lèverait ainsi, de manière générale, l'indétermination sur le signe de τ, une telle règle se révèle possible lorsque l'on considère les facettes qui pivotent autour des axes principaux qui seront envisagées dans l'étude du paragraphe 3.2 mettant alors en évidence les cercles (et non les demi-cercles) principaux ou cercles de Mohr.

3.2 Cercles de Mohr

Connaissant le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ on se propose de déterminer le domaine engendré par l'extrémité du vecteur-contrainte ***dans le plan de Mohr***, lorsque $\underline{n}$ varie.

Il est commode, pour cette étude, de prendre une base orthonormée $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$, dirigée suivant les directions principales de $\underline{\underline{\sigma}}$. On a alors les relations suivantes :

• pour les composantes de $\underline{n}$,

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \tag{3.1}$$

$$n_1^2 \geq 0, \quad n_2^2 \geq 0, \quad n_3^2 \geq 0\,; \tag{3.2}$$

• pour le vecteur-contrainte,

$$T_1 = \sigma_1 n_1, \quad T_2 = \sigma_2 n_2, \quad T_3 = \sigma_3 n_3\,; \tag{3.3}$$

• pour la contrainte normale,

$$\sigma = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2\,; \tag{3.4}$$

• pour la contrainte tangentielle,

$$\tau^2 + \sigma^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2\,. \tag{3.5}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L'ensemble des équations 3.1, 3.4 et 3.5 constitue un système de trois équations linéaires pour les variables n_1^2, n_2^2, n_3^2, dont les coefficients sont fonctions de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma$ et τ. La résolution de ce système donne :

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \tag{3.6}$$

$$n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \tag{3.7}$$

$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \tag{3.8}$$

dans l'hypothèse où les contraintes principales sont distinctes.

Les formules (3.6) à (3.8) permettent de délimiter le domaine parcouru par l'extrémité du vecteur-contrainte en tenant compte des conditions de positivité (3.2). Pour simplifier la discussion on supposera les trois contraintes principales ordonnées suivant :

$$\sigma_{\rm I} \geq \sigma_{\rm II} \geq \sigma_{\rm III} \quad \text{où} \quad (\sigma_{\rm I}, \sigma_{\rm II}, \sigma_{\rm III}) = (\sigma_i, i = 1, 2, 3)\ . \tag{3.9}$$

La positivité de $n_{\rm I}^2, n_{\rm II}^2, n_{\rm III}^2$ fournit les inégalités :

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_{\rm II})(\sigma - \sigma_{\rm III}) \geq 0 \tag{3.10}$$

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_{\rm I})(\sigma - \sigma_{\rm III}) \leq 0 \tag{3.11}$$

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_{\rm I})(\sigma - \sigma_{\rm II}) \geq 0 \tag{3.12}$$

dont l'interprétation dans le plan de Mohr est aisée.

On remarque, par exemple, que (3.10) s'écrit aussi :

$$\Big(\sigma - \frac{\sigma_{\rm II} + \sigma_{\rm III}}{2}\Big)^2 + \tau^2 \geq \Big(\frac{\sigma_{\rm II} - \sigma_{\rm III}}{2}\Big)^2 \tag{3.13}$$

ce qui montre que le point T est, dans le plan de Mohr, ***extérieur*** au cercle, centré sur $O\sigma$ au point d'abscisse $(\sigma_{\rm II} + \sigma_{\rm III})/2$, et de rayon $(\sigma_{\rm II} - \sigma_{\rm III})/2$. L'inégalité (3.12) conduit à un résultat analogue avec $\sigma_{\rm I}$ et $\sigma_{\rm II}$. L'inégalité (3.11), quant à elle, montre que T est ***intérieur*** au cercle centré sur $O\sigma$ au point d'abscisse $(\sigma_{\rm I} + \sigma_{\rm III})/2$ et de rayon $(\sigma_{\rm I} - \sigma_{\rm III})/2$.

Autrement dit (figure 11), après avoir marqué sur $O\sigma$ les points d'abscisses $\sigma_{\rm III}, \sigma_{\rm II}, \sigma_{\rm I}$, on trace les cercles de diamètres, $\sigma_{\rm I}\sigma_{\rm II}$, $\sigma_{\rm II}\sigma_{\rm III}$ et $\sigma_{\rm I}\sigma_{\rm III}$. Le résultat obtenu ci-dessus montre que : pour toute facette l'extrémité T du vecteur-contrainte se trouve ***à l'extérieur*** des deux plus petits cercles (diamètres $\sigma_{\rm I}\sigma_{\rm II}$ et $\sigma_{\rm II}\sigma_{\rm III}$) et ***à l'intérieur*** du grand (diamètre $\sigma_{\rm I}\sigma_{\rm III}$). Les frontières de ces cercles sont atteintes, respectivement pour $n_{\rm III} = 0, n_{\rm I} = 0, n_{\rm II} = 0$.

Les cercles de la figure 11 sont appelés ***cercles principaux*** ou ***cercles de Mohr***. Plus spécifiquement le grand cercle est appelé ***le*** cercle de Mohr.

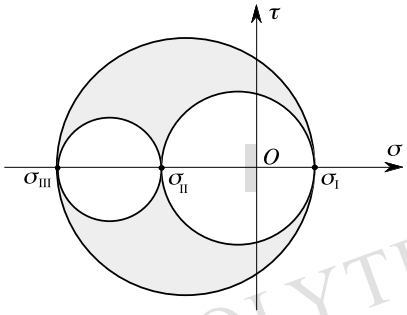


Figure 11 – Cercles principaux ou cercles de Mohr

Il reste à examiner la réciproque : savoir si tout point du domaine délimité par les cercles de Mohr est atteint au cours de la variation de $\underline{n}$. Le résultat découle des équations (3.1, 3.2, 3.4 et 3.5).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En effet σ et τ étant donnés vérifiant (3.10 à 3.12), les formules (3.6 à 3.8) déterminent toujours, par n_1^2, n_2^2 et n_3^2, les vecteurs $\underline{n}$ tels que σ et $|\tau|$ prennent les valeurs prescrites. Ces formules conduisent, dans le cas général où $n_1 n_2 n_3 \neq 0$, à huit orientations distinctes pour le vecteur $\underline{n}$, opposées deux-à-deux, et symétriques deux-à-deux par rapport aux facettes principales [8]. En particulier chaque cercle principal est lui-même entièrement décrit lorsque la facette tourne autour de la direction de la contrainte principale qui ne le concerne pas, à condition que l'on prenne soin de définir de façon continue l'orientation du vecteur $\underline{t}$ au cours de la rotation de la facette. La continuité d'orientation du vecteur $\underline{t}$ ne peut, par contre, être assurée lorsque $\underline{n}$ prend toutes les orientations dans $\mathbb{R}^3$; c'est ce que manifeste l'existence des deux zones symétriques délimitées par les cercles de Mohr qui sont ainsi atteintes.

3.3 Description des cercles principaux

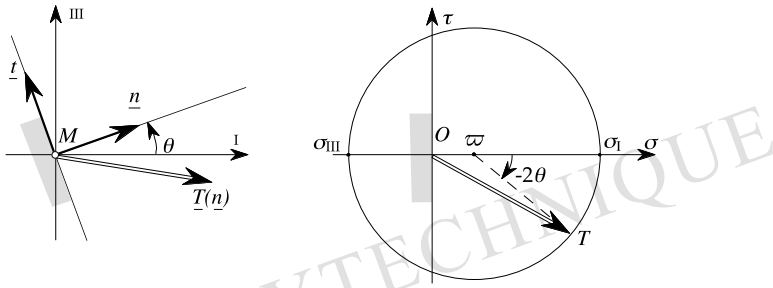


Figure 12 – Description du (grand) cercle de Mohr

À titre d'exemple, compte tenu de son intérêt pratique, on va étudier la description du (grand) cercle de Mohr. (Les résultats obtenus seront transposables aux autres cercles principaux).

Les facettes concernées sont parallèles à la direction de la contrainte principale ***intermédiaire*** $\sigma_{\rm II}$. On constitue avec les directions I,III,II un trièdre direct ; la normale $\underline{n}$ évolue dans le plan (I,III) et on définit l'angle θ (figure 12) :

$$\theta = (\mathrm{I}, \underline{n}) \; ; \tag{3.14}$$

l'expression de $\underline{n}$ dans la base $\underline{e}_{\rm I}, \underline{e}_{\rm III}, \underline{e}_{\rm II}$ est donc : $\underline{n} = \underline{e}_{\rm I} \cos\theta + \underline{e}_{\rm III} \sin\theta$.

Il résulte de (2.3) que le vecteur contrainte $\underline{T}(\underline{n})$ est contenu dans le plan (I,III) où évolue $\underline{n}$ avec pour composantes dans la même base :

$$T_{\rm I} = \sigma_{\rm I} \cos\theta \; , \; T_{\rm III} = \sigma_{\rm III} \sin\theta \; , \; T_{\rm II} = 0 \; . \tag{3.15}$$

Ceci permet de donner une ***règle d'orientation continue*** du vecteur $\underline{t}$ pour les facettes considérées, afin de compter algébriquement les contraintes tangentielles :

$$\underline{t} \text{ est construit de sorte que le trièdre } (\underline{n}, \underline{t}, \mathrm{II}) \text{ soit direct .} \tag{3.16}$$

Le calcul des composantes σ et τ est immédiat par projection de $\underline{T}(\underline{n})$ donné par (3.15) sur les axes $\underline{n}, \underline{t}$. On peut aussi utiliser les formules tensorielles de changement de base (2.13) qui donnent :

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma_{nn} &= \sigma_{\rm I} \cos^2\theta + \sigma_{\rm III} \sin^2\theta \\ \tau = \sigma_{tn} &= -\sigma_{\rm I} \cos\theta \sin\theta + \sigma_{\rm III} \cos\theta \sin\theta \\ \sigma_{tt} &= \sigma_{\rm I} \sin^2\theta + \sigma_{\rm III} \cos^2\theta \end{aligned}$$

[8] Facettes orthogonales aux directions principales.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

soit encore :

$$(3.17)\qquad \begin{cases} \sigma = \quad \sigma_{nn} = \dfrac{\sigma_{\rm I}+\sigma_{\rm III}}{2} + \dfrac{\sigma_{\rm I}-\sigma_{\rm III}}{2}\cos 2\theta \\ \tau = \quad \sigma_{tn} = -\dfrac{\sigma_{\rm I}-\sigma_{\rm III}}{2}\sin 2\theta \\ \qquad\quad \sigma_{tt} = \dfrac{\sigma_{\rm I}+\sigma_{\rm III}}{2} - \dfrac{\sigma_{\rm I}-\sigma_{\rm III}}{2}\cos 2\theta \end{cases}$$

Les deux premières équations de (3.17) montrent que le point T, extrémité du vecteur-contrainte, décrit le cercle de diamètre $\sigma_{\rm III}\sigma_{\rm I}$ comme on l'avait indiqué au paragraphe précédent. On retrouve aussi que pour $\theta = 0$ on a $\sigma = \sigma_{\rm I}$ et $\tau = 0$, et pour $\theta = \pi/2$ on a $\sigma = \sigma_{\rm III}$ et $\tau = 0$, ce qui correspond aux deux facettes principales normales aux directions I et III. Au cours de la variation de $\underline{n}$, le cercle de diamètre $\sigma_{\rm III}\sigma_{\rm I}$ est entièrement décrit.

Géométriquement, en désignant par ϖ le centre du cercle de Mohr, les formules (3.17) montrent que le rayon-vecteur $\underline{\varpi T}$ fait un angle égal à -2θ avec l'axe $O\sigma$. On déduit de cette propriété la règle suivante.

Lorsque la facette tourne autour de la direction de la contrainte principale $\sigma_{\rm II}$ ***d'un angle donné, l'extrémité du vecteur-contrainte*** (point représentatif de la facette) ***tourne sur le cercle de Mohr d'un angle double dans le sens opposé*** (autour du centre du cercle).

En conséquence on voit que, sur deux facettes symétriques par rapport aux directions principales, s'exercent des contraintes normales égales et des contraintes tangentielles opposées.
Comme on l'a dit au début de ce paragraphe, le cas du (grand) cercle de Mohr n'a été choisi ici qu'à titre d'exemple, et les mêmes résultats sont valables pour les deux autres cercles principaux ; on prendra soin dans chaque cas, de définir l'orientation de $\underline{t}$ par :

$$(\underline{n}, \underline{t}) = +\pi/2$$

cet angle étant compté positivement selon la même convention que l'angle de rotation de la facette dans l'espace.

3.4 Quelques conséquences pratiques

On déduit immédiatement de la représentation de Mohr les résultats suivants :
1. La contrainte normale maximale est égale à $\sigma_{\rm I}$. Elle s'exerce sur la facette normale à la direction principale I.
2. La contrainte normale minimale est égale à $\sigma_{\rm III}$. Elle s'exerce sur la facette normale à la direction principale III.
3. La contrainte tangentielle maximale en valeur absolue est égale à $(\sigma_{\rm I}-\sigma_{\rm III})/2$. Elle s'exerce sur les facettes parallèles à la direction principale II et inclinées à $\pm\pi/4$ sur les directions principales I et III.

3.5 États de contrainte remarquables

Sur la figure 11 on a donné la représentation de Mohr de l'état de contrainte en un point dans le cas général. On va maintenant examiner quelques cas particuliers.

Tenseur des contraintes en un point d'une surface libre de contrainte

On suppose que le point M considéré est situé sur la frontière $\partial\Omega_t$ d'un système, et qu'en ce point la surface $\partial\Omega_t$ est libre de contrainte c'est-à-dire que le vecteur-contrainte sur cette surface est imposé nul (figure 13) :

$$(3.18)\qquad \underline{T}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{n} = 0\ .$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

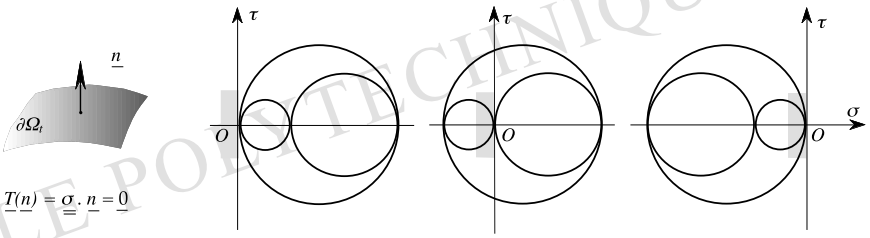


Figure 13 – État de contrainte en un point d'une surface libre

Sur cette facette la contrainte tangentielle est donc nulle, ce qui signifie que la direction normale à la surface libre est direction principale (§ 2.6) ; la contrainte normale sur cette facette étant également nulle, on en déduit que la contrainte principale correspondante est nulle. Dans le plan de Mohr on a donc nécessairement l'un des trois diagrammes de la figure 13 (si les trois contraintes principales sont distinctes).

Traction ou compression simple ; état de contrainte uniaxial

C'est l'état de contrainte que l'on tente de réaliser en tout point d'une éprouvette lors d'une expérience « de traction simple » ou « de compression simple ». Deux contraintes principales sont nulles :

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \tag{3.19}$$

σ_1 est positive ou négative (traction ou compression). Le tenseur des contraintes est dit « uniaxial ». Le vecteur-contrainte, sur ***toute*** facette, est dirigé selon la direction principale 1 ; en effet dans une base orthonormée $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ prise selon des directions principales, on a :

$$T_1 = \sigma_1 n_1 \ , \ T_2 = T_3 = 0 \ . \tag{3.20}$$

De plus on voit que le vecteur-contrainte est nul pour les facettes parallèles à la direction principale 1 ($n_1 = 0$).

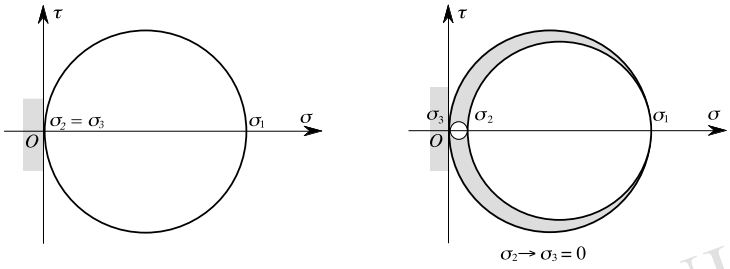


Figure 14 – État de contrainte uniaxial

La théorie des cercles principaux faite au paragraphe 3.2 dans le cas où les contraintes principales sont distinctes, est ici complétée. On a par (3.4) et (3.5) :

$$\sigma = \sigma_1 n_1^2$$
$$\tau^2 + \sigma^2 = \sigma_1^2 n_1^2$$

d'où :

$$(\sigma - \sigma_1/2)^2 + \tau^2 = (\sigma_1/2)^2 \ . \tag{3.21}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On en déduit que le domaine engendré par l'extrémité du vecteur-contrainte dans le plan de Mohr se réduit au seul cercle de diamètre $O\sigma_1$ (figure 14).

On note que ces resultats procèdent de celui obtenu au paragraphe précédent, si fixant $\sigma_1 \neq 0$ et $\sigma_3 = 0$, on fait tendre σ_2 vers σ_3 : le cercle de diamètre $\sigma_3\sigma_2$ tend vers le cercle point $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, tandis que le cercle $\sigma_2\sigma_1$ tend vers le cercle $\sigma_3\sigma_1$, et le domaine engendré sur la figure 11 se trouve réduit à ce même cercle.

Cission simple

Une contrainte principale est nulle, $\sigma_{II} = 0$, et les deux autres sont opposées : $\sigma_I = -\sigma_{III} > 0$. Dans le plan de Mohr, on a la représentation de la figure 15. On remarque sur cette figure que la contrainte de cisaillement (cission) maximale en valeur absolue s'exerce, comme indiqué au paragraphe 3.4, sur les facettes parallèles à la direction II de la contrainte principale nulle, et inclinées à $\pi/4$ sur les directions des contraintes principales I et III. Sur ces facettes la contrainte normale est nulle (points situés sur l'axe des τ dans la représentation de Mohr) et la cission est égale à :

$\tau = \quad \sigma_I$ pour la facette dont la normale α est inclinée à $-\pi/4$ sur la direction I,

$\tau = -\sigma_I$ pour la facette dont la normale β est inclinée à $+\pi/4$ sur la direction I.

On en déduit que, le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ qui s'écrit dans la base $(\underline{e}_I, \underline{e}_{III}, \underline{e}_{II})$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_I \, (\underline{e}_I \otimes \underline{e}_I - \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III}) \tag{3.22}$$

a, dans la base $(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta, \underline{e}_{II})$ déduite de la précédente par rotation de $-\pi/4$ autour de e_{II}, l'expression :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_I \, (\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta + \underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_\alpha) \, . \tag{3.23}$$

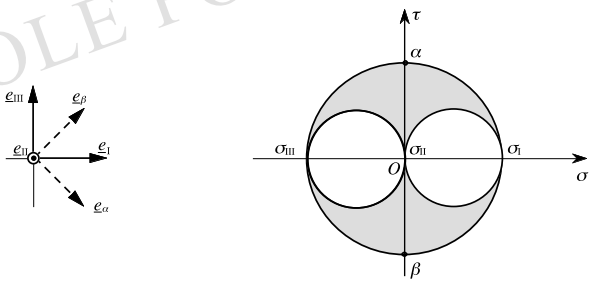


Figure 15 – Cission simple

État de contrainte « triaxial de révolution »

C'est l'état de contrainte que l'on tente de réaliser en tout point d'une éprouvette dans l'essai à l'appareil dit « triaxial » en mécanique des sols par exemple. Il généralise l'essai de traction ou de compression simple : les deux contraintes principales σ_2 et σ_3 sont égales entre elles, mais non nulles : $\sigma_2 = \sigma_3$. On dit souvent que le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ est « cylindrique », toutes les directions orthogonales à la direction 1 étant principales. La représentation de Mohr est semblable à celle de la figure 14 :

- un cercle point $\sigma_2 = \sigma_3$,
- deux cercles principaux confondus de diamètres $\sigma_3\sigma_1$ et $\sigma_2\sigma_1$,
- le domaine engendré par l'extrémité du vecteur-contrainte se réduit au seul cercle de diamètre $\sigma_3\sigma_1$ (figure 16).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

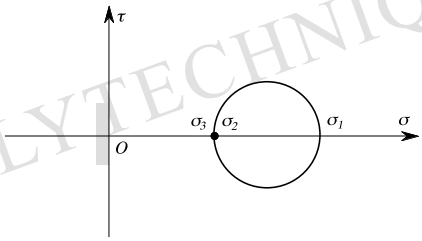


Figure 16 – État de contrainte « triaxial de révolution »

Traction ou compression « triple » ou « isotrope »

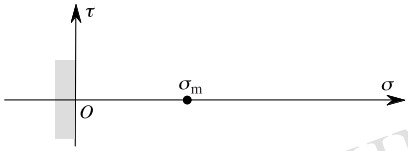


Figure 17 – Traction isotrope

Le tenseur des contraintes est « sphérique ». Les trois contraintes principales sont égales entre elles et toutes les directions sont principales. On a

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{\mathrm{m}}\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}\ ,\ \underline{T}(\underline{n}) = \sigma_{\mathrm{m}}\,\underline{n} \qquad \forall \underline{n}\ . \tag{3.24}$$

La représentation de Mohr correspond à trois cercles points situés à l'abscisse σ_{m} (figure 17).

Commentaires

De même que d'autres notions introduites précédemment, telles que le déviateur au paragraphe 2.8, la représentation de Mohr n'est pas spécifique au tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$: elle peut être utilisée pour tout tenseur euclidien du second ordre, symétrique, par exemple pour les tenseurs $\underline{\underline{d}}$ ou $\underline{\underline{\varepsilon}}$. On retiendra en particulier les formules 3.17, souvent utiles.

4 Critères de limite d'élasticité pour les matériaux isotropes

4.1 Présentation

On étudiera ultérieurement (chapitre VII) le comportement élastique des matériaux. Il s'agit d'une modélisation du comportement réel, dont les limites de validité sont expérimentalement fixées par l'intensité de la sollicitation subie par l'élément de matière. Plus précisément, l'expérience montre que l'on peut déterminer un ***domaine d'élasticité initial*** du matériau tel que, si le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ reste à l'intérieur de ce domaine, le comportement du matériau sous la sollicitation caractérisée par $\underline{\underline{\sigma}}$ demeure élastique.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La définition du domaine d'élasticité initial dans l'espace $\mathbb{R}^9$ (ou $\mathbb{R}^6$ compte tenu de la symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$) se fait au moyen d'une fonction scalaire f du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$, appelée ***fonction de charge***, ou critère de limite d'élasticité : la fonction de charge sert, en quelque sorte, à mesurer l'intensité de la sollicitation subie ; elle est choisie de façon que :

$$(4.1)\qquad \begin{cases} f < 0 & \Leftrightarrow \quad \text{comportement élastique} \\ f = 0 & \Leftrightarrow \quad \text{limite d'élasticité initiale du matériau.} \end{cases}$$

On se propose de présenter ici, en application des résultats énoncés et des notions introduites dans les sections précédentes, quelques critères de limite d'élasticité adoptés pour les ***matériaux isotropes***.

4.2 Principes généraux

Principe d'isotropie de l'espace

La fonction de charge, fonction scalaire de $\underline{\underline{\sigma}}$, est calculée à partir des composantes du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ dans une base. En supposant, pour fixer les idées et simplifier les notations, que cette base est la base orthonormée d'un repère R', l'expression explicite de la fonction de charge sera notée :

$$(4.2)\qquad f_{R'}(\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}') \quad \text{où} \quad \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}' \quad \text{désigne la matrice de } \underline{\underline{\sigma}} \text{ dans } R' \ .$$

La fonction de charge est une caractéristique physique intrinsèque de l'élément de matière ; il est donc naturel de considérer de façon particulière son expression dans un repère R qui possède une signification physique liée à l'élément de matière et permette par exemple d'en fixer l'orientation dans l'espace :

$$(4.3)\qquad f_R(\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}) \quad (\tilde{\underline{\underline{\sigma}}} \text{ matrice de } \underline{\underline{\sigma}} \text{ dans } R) \ .$$

Le principe de « ***l'isotropie de l'espace*** » pose que cette expression 4.3 est indépendante de l'orientation de l'élément de matière dans l'espace et est bien intrinsèque au matériau.

L'expression de $f_{R'}$ dans un repère quelconque R' se déduit de f_R par la relation :

$$(4.4)\qquad f_{R'}(\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}') = f_R(\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}) = f_R({}^t\tilde{\underline{\underline{\alpha}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}' \cdot \tilde{\underline{\underline{\alpha}}})$$

où $\tilde{\underline{\underline{\alpha}}}$ désigne la matrice de changement de repère orthonormé entre R' et R.

Principe de respect des symétries de la matière

Par sa constitution microscopique [9] le matériau possède des symétries qui définissent un groupe d'isométries, appelé groupe des symétries matérielles, soit $\mathcal{G}$. La

[9] Échelle « microscopique » du point de vue de la modélisation réputée « macroscopique ». Les considérations exposées ici ne sont qu'une première approche qui nécessiterait d'être affinée, en particulier les propriétés de symétrie matérielle sont relatives à une configuration qui doit être mieux précisée.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

fonction de charge f, caractéristique physique du matériau, doit rendre compte de ces symétries : c'est le principe du ***respect des symétries de la matière***.

Ainsi, dans le repère physique R précisé ci-dessus, deux sollicitations $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}$ et $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}^*$ liées l'une à l'autre par une isométrie de $\mathcal{G}$ sont équivalentes pour la fonction de charge :

$$\forall \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}\ ,\ \forall \tilde{\underline{\underline{\alpha}}}^* \in \mathcal{G} \quad f_R(\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}) = f_R({}^t\tilde{\underline{\underline{\alpha}}}^* \cdot \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{\alpha}}}^*)\ . \tag{4.5}$$

Matériau isotrope

Le ***matériau isotrope*** correspond au cas où $\mathcal{G}$ est le groupe de toutes les isométries. On a ainsi :

$$\begin{cases} \forall \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}\ ,\ \forall \tilde{\underline{\underline{\alpha}}}^* \quad \text{tel que } {}^t\tilde{\underline{\underline{\alpha}}}^* \cdot \tilde{\underline{\underline{\alpha}}}^* = \tilde{\underline{\underline{\mathbb{1}}}}\ , \\ f_R(\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}) = f_R({}^t\tilde{\underline{\underline{\alpha}}}^* \cdot \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{\alpha}}}^*)\ , \end{cases} \tag{4.6}$$

qui, compte tenu de l'équation (4.4), implique pour $f_{R'}$ la même propriété dans un repère R' quelconque.

Ces formules traduisent bien la perception physique du concept d'isotropie : le matériau étant isotrope la valeur de la fonction de charge f ne dépend pas de l'orientation du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ dans R, et donc, par (4.4) dans R' quelconque.

Du point de vue mathématique on retrouve alors la notion de fonction scalaire (isotrope) du (seul) tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ rappelée au paragraphe 2.7 [10].

Pour le matériau isotrope, en application du théorème de représentation énoncé au paragraphe 2.7, la fonction de charge f s'exprime donc en fonction de $\underline{\underline{\sigma}}$, de façons équivalentes :

- soit comme une fonction symétrique des contraintes principales,
- soit comme une fonction des invariants de $\underline{\underline{\sigma}}$,
- soit, compte tenu des relations (2.27) entre les invariants de $\underline{\underline{\sigma}}$ et ceux de $\underline{\underline{s}}$, comme une fonction de I_1 et des invariants J_2 et J_3 de $\underline{\underline{s}}$.

4.3 Critère de Tresca

Ce critère fut introduit par Tresca [11] en 1864 à la suite d'expériences sur le plomb. La fonction de charge correspondante s'écrit :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sup\{\sigma_i - \sigma_j - \sigma_0 \,|\, i,j = 1,2,3\} \tag{4.7}$$

dans laquelle les σ_i désignant les contraintes principales, et où σ_0 est une constante caractéristique du matériau qui a les dimensions d'une contrainte.

On remarque que cette fonction de charge est bien mise sous la forme d'une fonction symétrique des contraintes principales. Elle pourrait aussi s'exprimer en fonction

[10] L'écriture classique $f(\underline{\underline{\sigma}})$ pour la fonction de charge est, dans ce cas, pleinement justifiée du point de vue mathématique.
[11] H. Tresca (1814-1885).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

des invariants de $\underline{\underline{\sigma}}$ (ou plus précisément ici, de $\underline{\underline{s}}$ seulement), mais cette expression ne saurait être polynomiale [12].

En considérant certains des états de contrainte remarquables examinés au paragraphe 3.5 on voit sans difficulté que :

- la limite d'élasticité en traction simple est égale à σ_0,
- la limite d'élasticité en compression simple est égale à $-\sigma_0$,
- la limite d'élasticité en cission simple est égale à $\sigma_0/2$.

L'étude de l'expression (4.7) met en évidence les propriétés suivantes.

a) Supposant $\underline{\underline{\sigma}}$ décomposé selon (2.24) en sa partie sphérique $\sigma_{\rm m}\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$ et son déviateur $\underline{\underline{s}}$, on voit que la fonction de charge de Tresca prend la même valeur pour tous les états de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ qui correspondent au même déviateur $\underline{\underline{s}}$.

Ainsi f est indépendante de $\sigma_{\rm m}$ (ou de I_1) et ne dépend que de $\underline{\underline{s}}$, déviateur des contraintes.

Cette propriété mathématique rend compte de observations expérimentales effectuées sur de nombreux matériaux (métaux, argile saturée,...) sur une large gamme de sollicitations.

b) Si l'on ordonne les contraintes principales suivant (3.9), $f(\underline{\underline{\sigma}})$ s'écrit :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{\rm I} - \sigma_{\rm III} - \sigma_0 \tag{4.8}$$

sur laquelle on voit que la fonction de charge de Tresca est ***indépendante de la contrainte principale intermédiaire*** ($\sigma_{\rm II}$), et ne fait donc intervenir que les deux contraintes principales extrêmes.

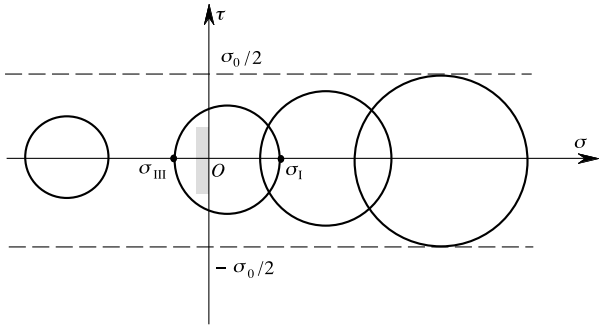


Figure 18 – Critère de Tresca : représentation de Mohr

c) L'interprétation de (4.8) dans la représentation de Mohr est immédiate (figure 18) : le comportement du matériau demeure élastique tant que le (grand) cercle de Mohr a son diamètre inférieur à σ_0, c'est-à-dire demeure compris dans la bande délimitée dans le plan de Mohr par les deux droites d'équations $|\tau| = \sigma_0/2$.

[12] L'expression $(4J_2^3 - 27J_3^2 - 9\sigma_0^2 J_2^2 + 6\sigma_0^4 J_2 - \sigma_0^6)$ proposée par certains auteurs ***n'est pas*** équivalente à (4.7).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Physiquement (cf. § 3.4) cela signifie que le comportement du matériau demeure élastique tant que la contrainte de cisaillement sur ***une facette d'orientation quelconque*** ne dépasse pas la valeur $\sigma_0/2$.

Ceci explique le nom de « critère de cission maximale » donné au critère de Tresca.

4.4 Critère de von Mises

Ce critère fut proposé indépendamment par Beltrami (1903), Huber (1904), von Mises (1913) et Hencky (1924).

La fonction de charge correspondante rend compte de la même propriété a) énoncée pour le critère de Tresca : f ne dépend que du déviateur des contraintes $\underline{\underline{s}}$. Exprimé en termes d'invariants ceci implique que f ne dépend que des invariants de $\underline{\underline{s}}$ c'est-à-dire J_2 et J_3 définis par (2.26), à l'exclusion de I_1.

La fonction de charge de von Mises est une expression très simple satisfaisant cette propriété :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{J_2} - k \tag{4.9}$$

où k est une constante caractéristique du matériau, qui a les dimensions d'une contrainte.

f peut évidemment s'écrire sous la forme d'une fonction symétrique des contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \left\{\frac{1}{6}[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2]\right\}^{1/2} - k. \tag{4.10}$$

En considérant les mêmes états de contrainte qu'au paragraphe précédent, on voit que :

- la limite d'élasticité en traction simple est égale à $k\sqrt{3}$,
- la limite d'élasticité en compression simple est égale à $-k\sqrt{3}$,
- la limite d'élasticité en cission simple est égale à k .

Les résultats d'expériences effectuées sur les métaux, par exemple en traction-compression et torsion, indiquent que le critère de limite d'élasticité initiale pour ces matériaux est plus proche du critère de von Mises que de celui de Tresca : en particulier le rapport des limites d'élasticité en traction simple et en cission simple est plus proche de $\sqrt{3}$ que de 2.

La fonction de charge de von Mises est aussi le fondement de la notion de ***contrainte équivalente*** (de von Mises) à un état de contrainte quelconque donné. Il s'agit de la quantité

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{3J_2}\,, \tag{4.11}$$

qui correspond à la contrainte de traction simple qui donne la même valeur à la fonction de charge $f(\underline{\underline{\sigma}})$ du critère de von Mises que l'état de contrainte complexe considéré. La contrainte équivalente est très utilisée dans les applications pratiques,

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

notamment pour visualiser les résultats de calculs (ou de mesures) de contraintes et repérer les zones les plus sollicitées dans une pièce ou dans une structure [13].

5 Dérivation temporelle du tenseur des contraintes

5.1 Dérivée particulaire

Le tenseur des contraintes de Cauchy étant naturellement défini sur la configuration actuelle κ_t on se retrouve en ce qui le concerne, en présence d'une description eulérienne. Le calcul de sa ***dérivée particulaire*** $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}$ relève donc de l'application de la formule (4.14) du chapitre III. Il vient ainsi (en simplifiant les notations par la suppression des arguments $\underline{x}$ et t) :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\mathrm{d}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} + \underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}\,\sigma}}} \,.\, \underline{U} \tag{5.1}$$

dans laquelle le dernier terme $\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}\,\sigma}}} \,.\, \underline{U}$ est le ***terme de convection***.

Il est intéressant d'effectuer ce même calcul en passant en description lagrangienne, à partir de la définition du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) = \dfrac{1}{J(\underline{X},t)}\, \underline{\underline{F}}(\underline{X},t) \,.\, \underline{\underline{\pi}}(\underline{X},t) \,.\, {}^t\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) \\ \text{avec } \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t) \quad \text{et} \quad J(\underline{X},t) = \rho_0(\underline{X})/\rho(\underline{x},t) \,. \end{array} \right. \tag{5.2}$$

On en déduit (en sous-entendant à nouveau les arguments) :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = -\dot{J}J^{-2}\underline{\underline{F}} \,.\, \underline{\underline{\pi}} \,.\, {}^t\underline{\underline{F}} + J^{-1}(\dot{\underline{\underline{F}}} \,.\, \underline{\underline{\pi}} \,.\, {}^t\underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}} \,.\, \underline{\underline{\pi}} \,.\, {}^t\dot{\underline{\underline{F}}}) + J^{-1}\underline{\underline{F}} \,.\, \dot{\underline{\underline{\pi}}} \,.\, {}^t\underline{\underline{F}} \,; \tag{5.3}$$

compte tenu des relations démontrées au chapitre III

$$\dot{\underline{\underline{F}}} \,.\, \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}\, U}}} \quad \text{et} \quad \dot{J}J^{-1} = \mathrm{div}\,\underline{U}$$

cette formule s'écrit aussi :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = -\underline{\underline{\sigma}}\,\mathrm{div}\,\underline{U} + \underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}\, U}}} \,.\, \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \,.\, {}^t\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}\, U}}} + J^{-1}\underline{\underline{F}} \,.\, \dot{\underline{\underline{\pi}}} \,.\, {}^t\underline{\underline{F}} \,. \tag{5.4}$$

Par identification des termes dans les expression (5.1) et (5.4) de $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}$, compte tenu de la relation, issue de l'identité (4.24) du chapitre III

$$\mathrm{div}(\underline{\underline{\sigma}} \otimes \underline{U}) = \underline{\underline{\sigma}}\,\mathrm{div}\,\underline{U} + \underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}\,\sigma}}} \,.\, \underline{U} \,,$$

on obtient notamment l'expression de la dérivée partielle de $\underline{\underline{\sigma}}$ par rapport au temps qui sera reprise dans les paragraphes suivants :

$$\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} = -\,\mathrm{div}(\underline{\underline{\sigma}} \otimes \underline{U}) + \underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}\, U}}} \,.\, \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \,.\, {}^t\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}\, U}}} + J^{-1}\underline{\underline{F}} \,.\, \dot{\underline{\underline{\pi}}} \,.\, {}^t\underline{\underline{F}} \,. \tag{5.5}$$

L'examen de l'expression (5.4) de $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}$ montre que, bien que le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ soit objectif (chapitre V, § 3.15), sa dérivée particulaire $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}$ ***n'est pas une grandeur objective*** en raison du terme $(\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}\, U}}} \,.\, \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \,.\, {}^t\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}\, U}}})$ (cf. chapitre III, § 3.11). On y voit aussi que $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}$ résulte de l'addition de deux contributions : d'une part trois termes linéaires en $\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}\, U}}}$, d'autre part un terme linéaire en $\dot{\underline{\underline{\pi}}}$. Il en résulte en particulier que la nullité de $\dot{\underline{\underline{\pi}}}$ n'implique pas celle de $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}$ si $\underline{\underline{\sigma}} \neq 0$ et $\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}\, U}}} \neq 0$. On reviendra sur les conséquences pratiques de ce résultat au paragraphe suivant.

[13] Compte tenu de l'interprétation de J_2 rapportée à la facette octaédrale par la formule (2.28), le critère de von Mises est aussi appelé « critère de cission octaédrale » et on a $\sigma_{\mathrm{eq}} = 3|\tau_{\mathrm{oct}}|/\sqrt{2}$. Il s'interprète aussi, à partir de résultats établis au chapitre VII (§ 5.4), comme un critère de limitation de l'énergie élastique de distorsion.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

5.2 Dérivée intrinsèque (dérivée de Truesdell)

L'idée directrice dans la définition de cette « dérivée » du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ par rapport au temps est de la construire à partir de la dérivée temporelle $\dot{\underline{\underline{\pi}}}$ du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, par la même correspondance (5.2) qui lie $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\pi}}$. On définit ainsi la ***dérivée intrinsèque***, ici dérivée de Truesdell du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\left(\frac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{T}} = J^{-1}\,\underline{\underline{F}}\,.\,\dot{\underline{\underline{\pi}}}\,.\,{}^{t}\underline{\underline{F}} \tag{5.6}$$

où l'on reconnaît le terme linéaire en $\dot{\underline{\underline{\pi}}}$ de (5.4).

Elle est évidemment ***objective***. Son calcul en description eulérienne est immédiat à partir de (5.5) :

$$\left(\frac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{T}} = \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} + \mathrm{div}(\underline{\underline{\sigma}} \otimes \underline{U}) - \underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}}\,.\,\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}\,.\,{}^{t}\underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}}\ ; \tag{5.7}$$

l'équation (5.4) fournit la correspondance entre dérivée particulaire et dérivée intrinsèque :

$$\left(\frac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{T}} = \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\sigma}}\,\mathrm{div}\ \underline{U} - \underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}}\,.\,\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}\,.\,{}^{t}\underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}}\ . \tag{5.8}$$

On remarque évidemment que, « par construction » :

$$\left(\frac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{T}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\underline{\underline{\pi}}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\pi}} = \mathrm{Cte}\ . \tag{5.9}$$

Il en résulte que, dans ce cas, le tenseur sur κ_t

$$\frac{\rho_0}{\rho}\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{F}}\,.\,\underline{\underline{\pi}}\,.\,{}^{t}\underline{\underline{F}}$$

conserve des composantes constantes dans toute base constituée de ***vecteurs matériels***, c'est-à-dire dans toute base transportée convectivement [14].

L'application de ce résultat au cas particulier où le mouvement en M à l'instant t est rigidifiant met en valeur l'intérêt de l'introduction de cette dérivée. On a alors :

$$\underline{\underline{\mathrm{grad}\ U}} = \underline{\underline{\omega}}\ \text{antisymétrique}\ ,$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{T}} = \dot{\underline{\underline{\sigma}}} - \underline{\underline{\omega}}\,.\,\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}\,.\,{}^{t}\underline{\underline{\omega}}\,, \tag{5.10}$$

et $\left(\frac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{T}} = 0$ signifie que le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ subit à l'instant t la même rotation que l'élément de matière en M c'est-à-dire que les contraintes principales demeurent constantes tandis que le trièdre des directions principales de $\underline{\underline{\sigma}}$ tourne comme l'élément de matière.

À titre d'illustration physique de cette propriété on peut considérer l'exemple d'une éprouvette soumise à un effort de traction (cf. chapitre VII, § 2.2). Une modification de l'orientation de cette éprouvette et de son chargement dans la configuration actuelle modifie évidemment l'orientation de $\underline{\underline{\sigma}}$ de la même façon, mais correspond à $\left(\frac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{T}} = 0$. Du point de vue du comportement du matériau on conçoit aisément que cette modification d'orientation dans le référentiel de l'observateur extérieur n'a aucune importance : c'est le principe « de l'isotropie de l'espace », déjà évoqué au paragraphe 4.2. En conséquence, l'intervention de la dérivée intrinsèque $\left(\frac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{T}}$ dans une loi de comportement apparaît alors « naturelle ».

[14] On vérifie en effet, par exemple en décomposant $\underline{\underline{F}}$, que : $\forall \underline{a}$, $\forall \underline{b}$ on a $\underline{\underline{F}}\,.\,(\underline{a}\otimes\underline{b})\,.\,{}^{t}\underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{F}}\,.\,\underline{a})\otimes(\underline{\underline{F}}\,.\,\underline{b})$. Soit alors $\{\underline{e}_K\}$, $(K=1,2,3)$ une base dans κ_0, on a : $\underline{\underline{\pi}} = \pi^{IJ}\underline{e}_I\otimes\underline{e}_J$ et $\frac{\rho_0}{\rho}\underline{\underline{\sigma}} = \pi^{IJ}\underline{\underline{F}}\,.\,(\underline{e}_I\otimes\underline{e}_J)\,.\,{}^{t}\underline{\underline{F}} = \pi^{IJ}(\underline{\underline{F}}\,.\,\underline{e}_I)\otimes(\underline{\underline{F}}\,.\,\underline{e}_J)$, ce qui démontre le résultat annoncé. (Cf. aussi la terminologie de « transport convectif 2-contravariant » évoquée au chapitre V, § 4.1).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

5.3 Dérivée corotationnelle (dérivée de Jaumann)

L'idée qui préside à la construction de cette « dérivée » du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ par rapport au temps procède de la remarque précédente à propos de la dérivée intrinsèque, et de la formule (5.10). On se propose, à partir de $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}$, de définir et de calculer une dérivée de $\underline{\underline{\sigma}}$ par rapport au temps, dont la nullité caractérise le fait que le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ suit un mouvement rigidifiant significatif pour la matière en M, défini même lorsque le mouvement réel en M n'est pas lui-même rigidifiant.

Comme tel mouvement il est naturel de choisir le mouvement rigidifiant du trièdre des directions principales du tenseur taux de déformation $\underline{\underline{d}}$, matérialisé dans κ_t comme expliqué au chapitre III (§ 3.5). On rappelle que ce mouvement, dont le taux de rotation est déterminé par le vecteur tourbillon $\underline{\Omega}$ ou par le tenseur antisymétrique $\underline{\underline{\Omega}}$, taux de rotation en M, est aussi le mouvement rigidifiant moyen de la matière M : ceci justifie son caractère « significatif ». On définit alors la ***dérivée corotationnelle*** ou dérivée de Jaumann par la formule :

$$\left(\frac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{J}} = \dot{\underline{\underline{\sigma}}} - \underline{\underline{\Omega}}\cdot\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}\cdot{}^{t}\underline{\underline{\Omega}}\,. \tag{5.11}$$

Cette définition correspond bien à l'objectif poursuivi. En effet

$$\left(\frac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{J}} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\Omega}}\cdot\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}}\cdot{}^{t}\underline{\underline{\Omega}} \tag{5.12}$$

et cette dernière équation implique que $\underline{\underline{\sigma}}$ conserve des composantes constantes dans tout repère animé du mouvement rigidifiant de vitesse de rotation $\underline{\underline{\Omega}}$ autour de M [15]. On remarque évidemment que si le mouvement réel est rigidifiant les dérivées intrinsèque (de Truesdell) et corotationnelle (de Jaumann) sont identiques (formules 5.10 et 5.11) et que, dans le cas général, elles sont liées par :

$$\left(\frac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{T}} = \left(\frac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{J}} - \underline{\underline{d}}\cdot\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\sigma}}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{d}}) \tag{5.13}$$

où le gradient du champ de vitesse n'intervient que par le taux de déformation $\underline{\underline{d}}$ et qui met bien en évidence l'***objectivité*** de la dérivée corotationnelle.

Les dérivées intrinsèque et corotationnelle sont l'une et l'autre utilisées dans l'écriture des lois de comportement, ainsi que d'autres dérivées objectives du tenseur des contraintes (dérivées d'Oldroyd, de Cotter-Rivlin).

[15] Par exemple dans le repère ***orthonormé*** des directions principales de $\underline{\underline{d}}$ on a $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$, dont la dérivation par rapport au temps donne : $\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\sigma}_{ij}\,\underline{e}_i\otimes\underline{e}_j + \sigma_{ij}\,(\dot{\underline{e}}_i\otimes\underline{e}_j + \underline{e}_i\otimes\dot{\underline{e}}_j)$ où $\dot{\underline{e}}_k = \underline{\underline{\Omega}}\cdot\underline{e}_k$; d'où $\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\sigma}_{ij}\,\underline{e}_i\otimes\underline{e}_j + \underline{\underline{\Omega}}\cdot\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}}\cdot{}^{t}\underline{\underline{\Omega}}$. L'équation (5.12) implique donc $\dot{\sigma}_{ij} = 0\,(i\,,\ j = 1,2,3)$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Récapitulatif des formules essentielles

Vecteur-contrainte

$\underline{T}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \,.\, \underline{n}$
$T_i = \sigma_{ij} n_j$

Contrainte normale :
$\sigma = \underline{n} \,.\, \underline{\underline{\sigma}} \,.\, \underline{n} = \sigma_{ij} n_i n_j$

Contrainte tangentielle :
$\underline{\tau} = \underline{T}(\underline{n}) - \sigma\, \underline{n}$
$|\,\underline{\tau}\,| = \big((\underline{\underline{\sigma}} \,.\, \underline{n})^2 - (\underline{n} \,.\, \underline{\underline{\sigma}} \,.\, \underline{n})^2\big)^{\frac{1}{2}}$

Invariants :

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\sigma}}^2)/2 = \big((\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_3)^2\big)/2 \\ I_3 &= \mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\sigma}}^3)/3 = \big((\sigma_1)^3 + (\sigma_2)^3 + (\sigma_3)^3\big)/3 \end{aligned}$$

Déviateur :

$$\sigma_{\mathrm{m}} = I_1/3 \qquad \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_{\mathrm{m}}\, \underline{\underline{\mathbb{1}}}$$
$$J_1 = 0\ ,\ J_2 = \mathrm{tr}(\underline{\underline{s}}^2)/2\ ,\quad J_3 = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^3)/3$$

Critère de Tresca :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sup\{\sigma_i - \sigma_j - \sigma_0 \,|\, i,j = 1,2,3\} \leq 0$$

Critère de von Mises :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{J_2} - k \leq 0$$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \left\{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]\right\}^{\frac{1}{2}} - k \leq 0$$

$\sigma_{\mathrm{eq}} = \sqrt{3J_2}$ (contrainte équivalente)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Exercices

VI.1 - Exprimer la densité volumique de puissance virtuelle des efforts intérieurs pour un milieu continu en séparant les contributions déviatorique et sphérique.

Éléments de réponse.

Déviateur du taux de déformation virtuel : $\hat{\underline{\underline{d}}}' = \hat{\underline{\underline{d}}} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\ \hat{\underline{\underline{d}}})\underline{\underline{\mathbb{1}}}$

$p_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = -\underline{\underline{s}} : \hat{\underline{\underline{d}}}' - \sigma_{\mathrm{m}}(\mathrm{tr}\ \hat{\underline{\underline{d}}}) = -\underline{\underline{s}} : \hat{\underline{\underline{d}}}' - \sigma_{\mathrm{m}}\,\mathrm{div}\,\hat{\underline{U}}.$

VI.2 - On considère une enveloppe sphérique de rayons intérieur et extérieur r_i et r_e respectivement, soumise à une pression extérieure p_e fixée et à une pression intérieure variable $p_i \geq p_e$. Il n'y a pas de force de masse. Cette enveloppe est constituée d'un matériau homogène dont la « résistance » est définie par le critère de Tresca. Déterminer la forme générale des champs virtuels de vitesse radiale fonctions uniquement de r (coordonnées sphériques), $\hat{\underline{U}} = \hat{U}_r(r)\,\underline{e}_r$, pour que le taux de dilatation volumique virtuel correspondant soit nul. En déduire que l'équilibre de l'enveloppe sphérique sous les pressions p_e et p_i ne peut être réalisé sans violer en aucun point le critère de Tresca, lorsque p_i dépasse une certaine valeur. Déterminer pour $p_i = p_e + 2\sigma_0 \ln(r_e/r_i)$ un champ de contrainte en équilibre avec ces données et qui ne viole pas le critère de Tresca. Démontrer l'unicité de ce champ.

Éléments de réponse.

- $\hat{U}_r = \alpha/r^2, \alpha$ constante arbitraire.
- Le principe des puissances virtuelles appliqué à la sphère montre que tout champ d'efforts intérieurs en équilibre avec les efforts extérieurs doit vérifier :
  $\forall \hat{\underline{U}}$ m.v . $\mathcal{P}_{(e)}(\hat{\underline{U}}) + \mathcal{P}_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = 0.$

  D'où, avec $\hat{\underline{U}} = (\alpha/r^2)\,\underline{e}_r$, $p_i - p_e = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r.$

  La condition de résistance de Tresca doit être respectée en tout point par les efforts intérieurs. La représentation de Mohr permet de voir que cette condition impose que :

  $-2\sigma_0 \leq 2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} \leq 2\sigma_0.$

  Les bornes sont atteintes pour $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \sigma_0$ (borne inférieure) ou $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -\sigma_0$ (borne supérieure), autres σ_{ij} nulles.

  Ainsi, si $p_i > p_e + 2\sigma_0 \ln(r_e/r_i)$, il n'est pas possible d'assurer l'équilibre de l'enveloppe en respectant le critère de Tresca.
- Le champ cherché doit admettre $\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi$ pour directions principales, vérifier $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$ et $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \sigma_0$ ou $-\sigma_0$ en tout point, autres σ_{ij} nulles, (conséquences de l'analyse précédente). Les équations d'équilibre montrent que ce champ ne dépend que de r, et se réduisent à :

  $$\frac{\mathrm{d}\sigma_{rr}}{\mathrm{d}r} + 2\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0\ .$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La solution satisfaisant les conditions aux limites avec $p_i > p_e$ est unique, correspond à $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -\sigma_0$ et s'écrit :

$$\sigma_{rr} = -p_e + 2\sigma_0 \ln \frac{r}{r_e} \ , \ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} + \sigma_0 \ , \text{ autres } \sigma_{ij} = 0.$$

Commentaire.

Le résultat est à rapprocher de celui donné au chapitre IX (§ 6.4) pour la limite d'élasticité de l'enveloppe sphérique. La valeur trouvée ici est la pression limite applicable à l'enveloppe lorsque celle-ci est constituée d'un matériau élastique-parfaitement plastique : elle correspond à la plastification totale de l'enveloppe.

VI.3 - Pour un matériau dont le critère de limite d'élasticité est le critère de Tresca déterminer le domaine d'élasticité pour une sollicitation définie, dans un repère orthonormé $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$, par : $\underline{\underline{\sigma}} = \tau\,(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \sigma\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$, τ et σ étant des paramètres. Même question pour : $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \tau\,(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x)$.

Éléments de réponse.

- Contraintes principales : $\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = -\tau, \quad \sigma_3 = \sigma$; domaine d'élasticité défini par : $\sup\{|2\tau|\,,\,|\sigma - \tau|\,,\,|\sigma + \tau|\} \leq \sigma_0$ (domaine hexagonal dans le plan σ, τ).
- Contraintes principales :
  σ_1 (resp. σ_2) $= \dfrac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$, $\sigma_3 = 0$ toujours intermédiaire ; domaine d'élasticité défini par :
  $\sigma^2 + 4\tau^2 \leq \sigma_0^2$ (domaine elliptique dans le plan σ, τ).

Commentaire.

Les frontières des deux domaines construits ci-dessus passent évidemment par les points $(\sigma = \pm\sigma_0, \tau = 0)$ et $(\sigma = 0, |\tau| = \sigma_0/2)$ qui correspondent aux limites d'élasticité en traction et compression simples et en cission simple. Les états de contrainte complexes envisagés sont réalisés expérimentalement de façon plus ou moins pure dans des éprouvettes soumises à certains essais pour la détermination et l'étude du comportement des matériaux en mécanique des solides.

VI.4 - Mêmes questions que dans Ex.VI.3 pour un matériau dont le critère de limite d'élasticité est le critère de von Mises.

Éléments de réponse.

À partir des éléments donnés pour Ex.VI.3 on trouve dans les deux cas que le domaine d'élasticité est défini par : $\sigma^2 + 3\tau^2 \leq 3k^2$.

Commentaire.

La frontière passe par les points $(\sigma = \pm k\sqrt{3}, \tau = 0)$ et $(\sigma = 0, |\tau| = k)$ correspondant aux limites d'élasticité en traction et compression simples et en cission simple. On remarque que, si l'on se réfère à la limite d'élasticité en traction simple prise comme donnée expérimentale, le domaine d'élasticité défini pour le deuxième état de contrainte à partir du critère de von Mises est plus grand que celui défini à partir du critère de Tresca.

VI.5 - $\sigma_i\,(i = 1, 2, 3)$ désignant les contraintes principales de $\underline{\underline{\sigma}}$ quelconque, on convient de représenter cet état de contrainte par le point Σ dont les coordonnées sont $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ dans un repère orthonormé fixe. Déterminer le domaine d'élasticité délimité dans cet espace par le critère de Tresca.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Éléments de réponse.

Prisme parallèle à l'axe $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ et dont la section est un hexagone régulier.

VI.6 - L'état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ quelconque étant représenté par le point Σ défini en Ex.VI.5, on appelle plan déviateur passant par Σ le plan normal à l'axe $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ et on désigne par P le point d'intersection de ce plan avec l'axe ci-dessus. Interpréter OP et $P\Sigma$, et en déduire la forme du domaine délimité dans cet espace par le critère de von Mises.

Éléments de réponse.

- $OP = \sigma_{\mathrm{m}}\sqrt{3}$;
  en désignant par S le point représentatif de $\underline{\underline{s}}$ déviateur de $\underline{\underline{\sigma}}$: $\underline{P\Sigma} = \underline{OS}$ et $P\Sigma = \sqrt{2J_2}$.
- cylindre circulaire d'axe $(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ et de rayon $k\sqrt{2}$.

Commentaire.

Le plan déviatorique passant par O est aussi appelé « plan π »

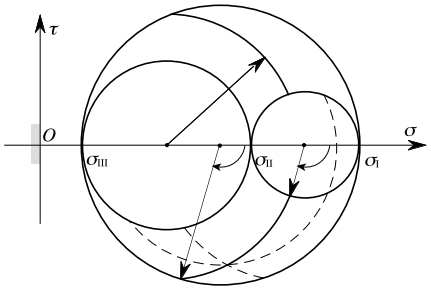
VI.7 - Déterminer, dans la représentation de Mohr, le lieu des extrémités des vecteurs-contraintes sur les facettes dont le cosinus directeur n_{I} a une valeur donnée α.

Éléments de réponse.

On s'appuie sur la formule (3.6) qui se transforme en

$$\tau^2 + (\sigma - \frac{\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}}}{2})^2 = (\sigma - \frac{\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}}}{2})^2 + \alpha^2(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}}),$$

équation d'un cercle, de même centre que le cercle de Mohr relatif à $n_{\mathrm{I}} = 0$, et dont il convient de ne retenir que les arcs délimités par les autres cercles de Mohr.



Commentaire.

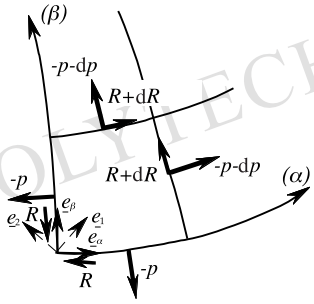
Il n'est pas possible de rendre compatibles l'orientation continue de $\underline{t}$ lorsque l'on décrit complètement le grand cercle de Mohr et une orientation continue de $\underline{t}$ lorsque $\underline{n}$ tourne autour de l'axe I en respectant $n_{\mathrm{I}} = \alpha$; conserver la première continuité conduit à introduire une discontinuité dans le deuxième cas : deux points correspondent à $(n_{\mathrm{I}} = \alpha, n_{\mathrm{III}} = 0)$ permettant de « sauter » d'un arc sur l'autre.

Les arcs de cercles se construisent aisément car ils sont limités sur les deux cercles de Mohr par les rayons-vecteurs correspondant à $n_{\mathrm{I}} = \alpha$, n_{II} ou $n_{\mathrm{III}} = 0$, n_{III} ou $n_{\mathrm{II}} = \pm(1 - \alpha^2)^{1/2}$. Le résultat appliqué aussi à n_{II} fixé ou à n_{III} fixé permet de construire le vecteur-contrainte correspondant à un vecteur $\underline{n}$ quelconque sur le diagramme de Mohr (on a représenté, comme exemple, le cas de la facette octaédrale).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

VI.8 - Équations de Hencky. $Oxyz$ est un repère orthonormé. On considère un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ continu et continûment différentiable, indépendant de z, et pour lequel $\underline{e}_z$ est direction principale en tout point. σ_1 et σ_2 sont les contraintes principales dans le plan Oxy. Au point courant, $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ sont les vecteurs unitaires des directions principales du plan Oxy tels que $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ soit un trièdre direct, et l'on introduit les vecteurs $\underline{e}_\alpha = (\underline{e}_1 - \underline{e}_2)/\sqrt{2}$ et $\underline{e}_\beta = (\underline{e}_1 + \underline{e}_2)/\sqrt{2}$; les lignes (α) et (β) sont, dans le plan Oxy, les lignes enveloppes de $\underline{e}_\alpha$ et $\underline{e}_\beta$. On pose : $p = -(\sigma_1 + \sigma_2)/2, R = (\sigma_1 - \sigma_2)/2, \omega = (\underline{e}_x, \underline{e}_1)$.

Déterminer les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ dans la base $\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta, \underline{e}_z$. Expliciter les équations différentielles de la dynamique dans le système de coordonnées curvilignes définies par les lignes (α) et (β) en substituant aux composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ les inconnues p, R et ω. Étudier en particulier l'équilibre d'un matériau homogène, incompressible (ρ constant), dans un champ de force de masse dérivant d'un potentiel $\rho\mathcal{V}$, en supposant que le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ atteint en tout point la limite d'élasticité du matériau définie par le critère de Tresca et que σ_z est contrainte principale intermédiaire.



Éléments de réponse.

- par les formules (3.17) :
  $\underline{\underline{\sigma}} = -p\,(\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha + \underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_\beta) + R\,(\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta + \underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_\alpha) + \sigma_3\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$.

- On calcule $\operatorname{grad}\underline{\underline{\sigma}}$ à partir de $\mathrm{D}_{\underline{w}}\underline{\underline{\sigma}} = \operatorname{grad}\underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{w}$ appliquée pour $\underline{w} = \underline{e}_\alpha$, $\underline{e}_\beta$ et $\underline{e}_z$ avec $\mathrm{D}_{\underline{e}_z}\underline{\underline{\sigma}} = 0$.
  On remarque que : $\operatorname{grad}\underline{e}_\alpha = \underline{e}_\beta \otimes \underline{\operatorname{grad}}\,\omega$ et $\operatorname{grad}\underline{e}_\beta = -\underline{e}_\alpha \otimes \underline{\operatorname{grad}}\,\omega$.
  D'où :
  $\operatorname{grad}\underline{\underline{\sigma}} = -(\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha + \underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_\beta) \otimes \underline{\operatorname{grad}}\,p + (\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta + \underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_\alpha) \otimes \underline{\operatorname{grad}}\,R$
  $\quad + 2R\,(-\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha + \underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_\beta) \otimes \underline{\operatorname{grad}}\,\omega$.

- Équations de la dynamique :
  $-\underline{\operatorname{grad}}\,p + \underline{e}_\alpha \mathrm{D}_{\underline{e}_\beta} R + \underline{e}_\beta \mathrm{D}_{\underline{e}_\alpha} R - 2R\,\underline{e}_\alpha \mathrm{D}_{\underline{e}_\alpha}\omega + 2R\,\underline{e}_\beta \mathrm{D}_{\underline{e}_\beta}\omega + \rho(\underline{F} - \underline{a}) = 0$.

- $R = \sigma_0/2$ constant , $\underline{a} = 0$, $\underline{F} = -\operatorname{grad}\mathcal{V}$, ρ constant.
  Équations d'équilibre :
  $-\underline{\operatorname{grad}}\,(p + \rho\mathcal{V}) - \sigma_0\,\underline{e}_\alpha \mathrm{D}_{\underline{e}_\alpha}\omega + \sigma_0\,\underline{e}_\beta \mathrm{D}_{\underline{e}_\beta}\omega = 0$;
  avec les notations courantes
  $\dfrac{\partial}{\partial s_\alpha}(p + \rho\mathcal{V} + \sigma_0\omega) = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial s_\beta}(p + \rho\mathcal{V} - \sigma_0\omega) = 0$.
  ou encore
  $p + \rho\mathcal{V} + \sigma_0\,\omega = \text{cte}$ le long de la ligne (α) , $p + \rho\mathcal{V} - \sigma_0\,\omega = \text{cte}$ le long de la ligne (β) .

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Commentaire.

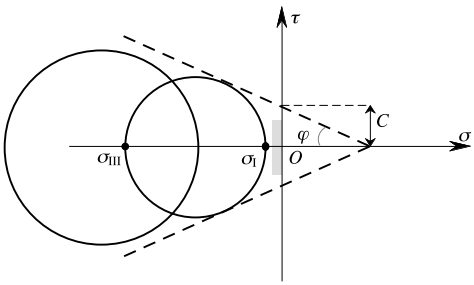
Les équations de la dynamique peuvent être obtenues de façon « artisanale » en considérant, dans le plan Oxy, un petit élément limité par des arcs de lignes (α) et (β) infiniment voisines.

Les dernières équations établies interviennent dans la théorie des équilibres limites plans pour les matériaux régis par les critères de Tresca ou de von Mises. Ce sont les équations de Hencky ; elles impliquent notamment des propriétés angulaires pour le réseau des lignes (α) et (β). Elles permettent la détermination du champ de contrainte, par intégration, à partir des conditions au contour (problème hyperbolique, méthode des caractéristiques). La même méthode s'applique dans le cas de matériau non homogène si la variation de σ_0 en fonction de x et y est connue ; enfin la méthode peut aussi être utilisée pour le dépouillement d'essais en photoélasticité dans lesquels $R = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ est déterminé expérimentalement.

VI.9 - Critère de Coulomb. Le critère de résistance de certains matériaux est défini par la condition suivante : au point courant les contraintes normale et tangentielle sur une facette quelconque doivent respecter la limitation $|\tau| \leq -\sigma \tan\varphi + C$ où $C \geq 0$ et $0 \leq \varphi < \pi/2$ sont des constantes caractéristiques du matériau. Interpréter cette condition en utilisant la représentation de Mohr pour les contraintes, et donner son expression en fonction des contraintes principales σ_i $(i = 1, 2, 3)$. Dans le cas où l'état de contrainte atteint la limite de résistance, déterminer les facettes sur lesquelles la condition $|\tau| = -\sigma \tan\varphi + C$ est vérifiée.

Éléments de réponse

- Le (grand) cercle de Mohr doit être intérieur ou tangent au domaine délimité par les deux demi-droites $|\tau| = -\sigma \tan\varphi + C$.
- $\sup\limits_{\substack{i=1,2,3\\ j=1,2,3}} \{\sigma_i(1+\sin\varphi) - \sigma_j(1-\sin\varphi) - 2C\cos\varphi\} \leq 0$
  ou $\sigma_{\mathrm{I}}(1+\sin\varphi) - \sigma_{\mathrm{III}}(1+\sin\varphi) - 2C\cos\varphi \leq 0$.
- Facettes parallèles à la direction principale II et inclinées à $\pm(\pi/4 + \varphi/2)$ sur la direction I. Le vecteur-contrainte sur une telle facette est alors parallèle à l'autre (cf. Ex.VI.10).



Commentaire.

Le critère de résistance considéré ici est appelé critère de Coulomb ; C et φ sont respectivement la « cohésion » et l'« angle de frottement » du matériau. Pour $\varphi = 0$ on retrouve le critère de Tresca. Le critère de Coulomb est indépendant de la contrainte principale intermédiaire σ_{II} mais il est sensible à la contrainte moyenne σ_{m}.

VI.10 - Soient $\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta, \underline{e}_3$ trois vecteurs normés tels que $\underline{e}_3$ soit normal à $\underline{e}_\alpha$ et $\underline{e}_\beta$ et que $(\underline{e}_\alpha\,,\,\underline{e}_\beta) = \pi/2 + \varphi\,, (0 \leq |\varphi| < \pi/2)$. Déterminer le tenseur des contraintes de

Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ défini par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} &\text{sur une facette de normale } \underline{e}^\alpha/|\underline{e}^\alpha| : && \underline{T} = S^\alpha \underline{e}_\alpha \\ &\text{sur une facette de normale } \underline{e}^\beta/|\underline{e}^\beta| : && \underline{T} = S^\beta \underline{e}_\beta \\ &\text{sur une facette de normale } \underline{e}_3 : && \underline{T} = S^3 \underline{e}_3 \ . \end{aligned}$$

Déterminer les directions principales de $\underline{\underline{\sigma}}$ et les contraintes principales correspondantes dans le cas où $S^\alpha = S^\beta = -p\cos\varphi$, et étudier la représentation de Mohr de $\underline{\underline{\sigma}}$ (on examinera en particulier les points représentatifs des facettes de normales unitaires $\underline{e}^\alpha/|\underline{e}^\alpha|$ et $\underline{e}^\beta/|\underline{e}^\beta|$ dans l'hypothèse $p > 0$).

Éléments de réponse

- $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$, $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$, $(i, j = \alpha, \beta, 3)$.

  Les conditions données imposent les relations :
  $\cos\varphi(\sigma^{\alpha\alpha}\underline{e}_\alpha + \sigma^{\beta\alpha}\underline{e}_\beta + \sigma^{3\alpha}\underline{e}_3) = S^\alpha \underline{e}_\alpha$
  $\cos\varphi(\sigma^{\alpha\beta}\underline{e}_\alpha + \sigma^{\beta\beta}\underline{e}_\beta + \sigma^{3\beta}\underline{e}_3) = S^\beta \underline{e}_\beta$
  $\sigma^{\alpha 3}\underline{e}_\alpha + \sigma^{\beta 3}\underline{e}_\beta + \sigma^{33}\underline{e}_3 = S^3 \underline{e}_3$

  d'où : $\underline{\underline{\sigma}} = (S^\alpha/\cos\varphi)\, \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha + (S^\beta/\cos\varphi)\, \underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_\beta + S^3\, \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$.

- La représentation mixte de $\underline{\underline{\sigma}}$ s'obtient aisément à partir de :
  $\underline{e}_\alpha = \underline{e}^\alpha - \underline{e}^\beta \sin\varphi$, $\underline{e}_\beta = \underline{e}^\beta - \underline{e}^\alpha \sin\varphi$, $\underline{e}_3 = \underline{e}^3$.

  $$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{S^\alpha}{\cos\varphi}\, \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}^\alpha - S^\alpha \tan\varphi\, \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}^\beta - S^\beta \tan\varphi\, \underline{e}_\beta \otimes \underline{e}^\alpha + \frac{S^\beta}{\cos\varphi}\, \underline{e}_\beta \otimes \underline{e}^\beta + S^3\, \underline{e}_3 \otimes \underline{e}^3.$$

  Les directions principales de $\underline{\underline{\sigma}}$ sont les directions propres de l'application linéaire associée à la représentation mixte. Avec $S^\alpha = S^\beta = -p\cos\varphi$ on trouve pour directions principales :
  $\underline{e}_1 = (\underline{e}_\alpha + \underline{e}_\beta)/2\cos(\pi/4 + \varphi/2)$, $\sigma_1 = -p(1 - \sin\varphi)$
  $\underline{e}_2 = (\underline{e}_\beta + \underline{e}_\alpha)/2\sin(\pi/4 + \varphi/2)$, $\sigma_2 = -p(1 + \sin\varphi)$
  $\underline{e}_3$, $\sigma_3 = S^3$.

- Cercle de Mohr pour les facettes parallèles à $\underline{e}_3$: abscisse du centre $= -p$, rayon $= p\sin\varphi$.

Commentaire.

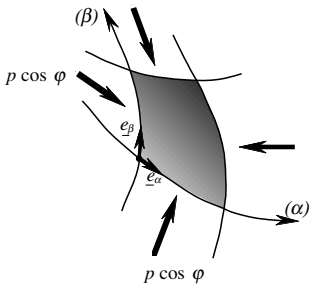
Ce type d'état de contrainte avec $S^\alpha = S^\beta = -p\cos\varphi < 0$ et $-p(1 + \sin\varphi) < S^3 < -p(1 - \sin\varphi)$ se rencontre en mécanique des sols, dans l'étude des équilibres limites des sols pulvérulents « en déformation plane ». Les facettes conjuguées de normales unitaires $\underline{e}^\alpha/|\underline{e}^\alpha|$ et $\underline{e}^\beta/|\underline{e}^\beta|$ sont alors les facettes sur lesquelles le vecteur-contrainte est à l'obliquité maximale sur la normale, égale à φ (condition de résistance de Coulomb pour le sol).

VI.11 - Équations de Kötter. $Oxyz$ est un repère orthonormé. On considère un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ continu et continûment différentiable, indépendant de z, et pour lequel $\underline{e}_z$ est direction principale en tout point. σ_1 et σ_2 sont les contraintes principales dans le plan Oxy et $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ sont les vecteurs unitaires des directions correspondantes au point courant ; en ce point on définit les vecteurs unitaires $\underline{e}_\alpha$ et $\underline{e}_\beta$ dans Oxy tels que $\underline{e}_1$ soit bissectrice intérieure de l'angle $(\underline{e}_\alpha, \underline{e}_\beta) = \pi/2 + \varphi$ (φ constant) et l'on désigne par (α) et (β) les lignes enveloppes de $\underline{e}_\alpha$ et $\underline{e}_\beta$. ω est l'angle $(\underline{e}_x\, , \underline{e}_1)$. On

suppose que le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ est tel que, en tout point, on ait :

$$\text{sur une facette de normale } \underline{e}^\alpha/|\underline{e}^\alpha| : \quad \underline{T} = -p\,\underline{e}_\alpha \cos\varphi$$
$$\text{sur une facette de normale } \underline{e}^\beta/|\underline{e}^\beta| : \quad \underline{T} = -p\,\underline{e}_\beta \cos\varphi\ .$$

Expliciter les équations différentielles de la dynamique dans le système de coordonnées curvilignes définies par les lignes (α) et (β).



Éléments de réponse

- D'après Ex.VI.10, $\underline{\underline{\sigma}}$ s'écrit en tout point :

  $\underline{\underline{\sigma}} = -p\,(\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha + \underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_\beta) + \sigma_3\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$;

  Le calcul de grad $\underline{\underline{\sigma}}$ s'appuie sur :

  $\text{grad}\,\underline{e}_\alpha = \dfrac{1}{\cos\varphi}\,(\underline{e}_\beta + \underline{e}_\alpha \sin\varphi) \otimes \underline{\text{grad}}\,\omega$, $\text{grad}\,\underline{e}_\beta = \dfrac{1}{\cos\varphi}\,(\underline{e}_\alpha + \underline{e}_\beta \sin\varphi) \otimes \underline{\text{grad}}\,\omega$

  d'où, puisque $\underline{\underline{\sigma}}$ est indépendant de z :

  $\text{grad}\,\underline{\underline{\sigma}} = -(\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha + \underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_\beta) \otimes \underline{\text{grad}}\,p - 2p\tan\varphi\,(\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha - \underline{e}_\beta \otimes \underline{e}_\beta) \otimes \underline{\text{grad}}\,\omega$.

- Équations de la dynamique

  $-\underline{e}_\alpha \mathrm{D}_{\underline{e}_\alpha} p - \underline{e}_\beta \mathrm{D}_{\underline{e}_\beta} p - 2p\tan\varphi\,(\underline{e}_\alpha \mathrm{D}_{\underline{\alpha}}\omega - \underline{e}_\beta \mathrm{D}_{\underline{e}_\beta}\omega) + \rho(\underline{F} - \underline{a}) = 0$

  soit, avec les notations courantes où $\dfrac{\partial}{\partial s^\alpha}$ et $\dfrac{\partial}{\partial s^\beta}$ désignent les dérivées le long des lignes (α) et (β) par rapport à l'abscisse curviligne :

  $$\frac{\partial p}{\partial s^\alpha} + 2p\tan\varphi\,\frac{\partial \omega}{\partial s^\alpha} - \rho(F^\alpha - a^\alpha) = 0\ ,\ \frac{\partial p}{\partial s^\beta} - 2p\,\tan\varphi\,\frac{\partial \omega}{\partial s^\beta} - \rho(F^\beta - a^\beta) = 0\ .$$

Commentaire.

On notera que ces équations, dans lesquelles les positions des indices pourraient surprendre, sont relatives aux lignes (α) et (β) particulières introduites, qui correspondent en chaque point à la base dans laquelle la matrice des composantes 2-contravariantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ est diagonale « isotrope en α , β ». Connues sous le nom d'équations de Kötter, elles interviennent dans la théorie des équilibres limites plans des matériaux régis par le critère de résistance de Coulomb (avec l'hypothèse $\sigma_2 \le \sigma_3 \le \sigma_1$) : sols, matériaux grenus,... Elles permettent, comme celle établies dans Ex.VI.8, de déterminer le champ de contrainte par intégration à partir des conditions au contour (problème hyperbolique, méthode des caractéristiques). Elles peuvent être établies de façon « artisanale » en considérant un petit élément plan limité par des arcs de lignes (α) et (β) infiniment voisines.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Les problèmes pratiques abordés dans le cadre de la théorie des équilibres limites plans (avec les équations de Hencky ou de Kötter, ou par d'autres méthodes) concernent notamment le formage des métaux (extrusion, poinçonnement,...), la mécanique des sols (capacité portante de fondations, stabilités d'ouvrages,...).

VI.12 - Champ d'autocontrainte. Pour un système $\mathcal{S}$ donné on considère les champs de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ en équilibre ($\underline{a}(\underline{x}) = 0$ sur Ω) avec des forces de masse nulles sur Ω et des forces surfaciques nulles sur $\partial\Omega$. Montrer que pour un tel champ de contrainte on a : $\displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega = 0$.

Montrer que, sauf pour le champ $\underline{\underline{\sigma}} = 0$, il existe toujours pour un tel champ de contrainte, en certains points du système, des facettes soumises à des contraintes normales de traction (resp. compression).

Éléments de réponse

- On applique le principe des puissances virtuelles avec le champ $\underline{\hat{v}}$ défini par :

  $\underline{\hat{v}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\alpha}}\,.\,\underline{x}$ où $\underline{\underline{\alpha}}$ est un tenseur symétrique arbitraire.

  Il vient : $\forall \underline{\underline{\alpha}}$ symétrique, $\underline{\underline{\alpha}} : \displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega = 0$;

  d'où, puisque $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique $\displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega = 0$.

- Avec le champ $\underline{\hat{v}}$ défini par : $\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}}$, soit $\underline{\hat{v}}(\underline{x}) = \underline{x}$,

  on obtient par le principe des puissances virtuelles : $\displaystyle\int_\Omega \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})\,\mathrm{d}\Omega = 0$.

  D'où, si $\underline{\underline{\sigma}} \neq 0$: $\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \sigma_1(\underline{x}) + \sigma_2(\underline{x}) + \sigma_3(\underline{x})$ (contraintes principales) ne conserve pas un signe constant sur Ω ; en particulier une des contraintes principales au moins doit être strictement positive en certains points de Ω ce qui permet de démontrer le résultat annoncé du point de vue de la traction (et raisonnement homologue pour la compression).

Commentaire.

Les champs étudiés sont des champs d'***autocontrainte***. Le résultat démontré indique que tout tel champ d'autocontrainte, à part le champ nul, induit nécessairement des tractions dans le système (en particulier les champs d'autocontrainte engendrés par une incompatibilité de déformations thermiques (cf. chapitre II, § 6.4)). Il prouve aussi que pour un système constitué en chacun de ses points d'un matériau sans résistance à la traction le seul champ d'autocontrainte possible est le champ nul (de même pour un matériau sans résistance à la compression).

VI.13 - Limite de résistance d'un anneau en rotation. On considère dans sa configuration actuelle κ_t , un solide qui a la forme d'un anneau cylindrique d'axe Oz, de rayons intérieur a et extérieur b, d'épaisseur h selon Oz. Cet anneau est animé, dans le référentiel galiléen de l'observateur, d'une vitesse de rotation uniforme autour de son axe Oz, $\underline{\omega} = \omega\,\underline{e}_z$. Les bords intérieur ($r = a$) et extérieur ($r = b$) de l'anneau sont libres de tout effort extérieur de même que les surfaces inférieure ($z = 0$) et supérieure ($z = h$). On convient de négliger les forces de pesanteur. Le matériau constitutif de l'anneau est supposé homogène dans la configuration κ_t. On désigne par ρ sa masse volumique et on suppose que sa résistance est définie par la condition de Tresca.

$$\max\{\,|\,\sigma_1 - \sigma_2\,|\,,\,|\,\sigma_2 - \sigma_3\,|\,,\,|\,\sigma_3 - \sigma_1\,|\,\} \leq \sigma_0$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

où σ_1, σ_2 et σ_3 désignent les contraintes principales et σ_0 est la caractéristique de résistance du matériau.

On considère le champ de vitesse virtuel $\hat{\underline{U}}$ défini par : $\hat{\underline{U}}(r,\theta,z) = \dfrac{\hat{\alpha}}{r}\,\underline{e}_r$, $\hat{\alpha} > 0$, constant. En appliquant le principe des puissances virtuelles à un champ de contrainte quelconque satisfaisant les équations de la dynamique pour le problème et au champ de vitesse virtuel $\hat{\underline{U}}$ ci-dessus, montrer que pour que la condition de résistance du matériau soit respectée en tout point du disque, la vitesse ω doit demeurer inférieure à une valeur maximale $\omega_{\rm d}$ que l'on déterminera.

On se propose de déterminer le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ qui satisfait les équations de la dynamique dans l'anneau, en faisant les hypothèses suivantes : $\underline{\underline{\sigma}}$ est continu et continûment différentiable, les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,z)$ en coordonnées cylindriques sont indépendantes de θ et de z, $\sigma_{\theta\theta}(r) \equiv \sigma_0$ dans tout l'anneau. Montrer qu'un tel champ existe pour une valeur particulière $\omega_{\rm c}$ de vitesse de la rotation ω que l'on déterminera et expliciter complètement ce champ $\underline{\underline{\sigma}}_{\rm c}$. Vérifier que le champ $\underline{\underline{\sigma}}_{\rm c}$ respecte la condition de résistance de Tresca en tout point de l'anneau.

Déduire de ce qui précède que, si $\omega < \omega_{\rm c}$, on peut construire d'une façon simple à partir de $\underline{\underline{\sigma}}_{\rm c}$ un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ satisfaisant les équations de la dynamique et respectant la condition de résistance de Tresca en tout point de l'anneau et expliciter ce champ.

Comparer les résultats obtenus pour $\omega_{\rm d}$ et $\omega_{\rm c}$.

Éléments de réponse

- Toutes les forces extérieures sont données nulles.
  Le champ d'accélération est $\underline{a}(r,\theta,z) = -\omega^2 r\,\underline{e}_r$.
  On a, pour le champ $\hat{\underline{U}}$ considéré :
  $\hat{\underline{\underline{d}}}(r,\theta,z) = \dfrac{\hat{\alpha}}{r^2}\,(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta - \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r)$; on remarque que $\mathrm{tr}\ \hat{\underline{\underline{d}}} = \mathrm{div}\,\hat{\underline{U}} = 0$.
  Pour les champs indiqués le principe des puissances virtuelles s'écrit $\mathcal{P}_{(i)}(\hat{\underline{U}}) = \mathcal{A}(\hat{\underline{U}})$ avec :

$$\mathcal{A}(\hat{\underline{U}}) \quad = -\int_\Omega \hat{\alpha}\,\rho\,\omega^2\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = -2\pi\,h\,\hat{\alpha}\,\rho\,\omega^2\,\frac{b^2-a^2}{2}$$

$$\mathcal{P}_{(i)}(\hat{\underline{U}}) \quad = -\int_\Omega \frac{\hat{\alpha}}{r^2}\Big(\sigma_{\theta\theta}(r,\theta,z) - \sigma_{rr}(r,\theta,z)\Big)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z\ ,$$

  d'où : $\rho\,\omega^2 = \dfrac{2}{2\,\pi\,h\,(b^2-a^2)}\displaystyle\int_\Omega \Big(\sigma_{\theta\theta}(r,\theta,z) - \sigma_{rr}(r,\theta,z)\Big)\,\frac{\mathrm{d}r}{r}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.
  La condition de résistance de Tresca implique, en tout point du disque, la majoration : $\sigma_{\theta\theta}(r,\theta,z) - \sigma_{rr}(r,\theta,z) \le \sigma_0$. D'où, tous calculs faits, la condition sur ω :
  $\omega^2 \le \dfrac{2\,\sigma_0/\rho}{b^2-a^2}\,\ln\dfrac{b}{a} = (\omega_{\rm d})^2$.
  En posant $\lambda = b/a$ on a $(\omega_{\rm d})^2 = \dfrac{2\,\sigma_0}{\rho a^2}\,\dfrac{\ln\lambda}{\lambda^2-1}$, $\lambda > 1$. La méthode des équations aux dimensions montre que le second membre ci-dessus a pour dimensions : $(ML^{-1}T^{-2})/(ML^{-3}) \times L^2 = T^{-2}$ qui est bien la dimension de $(\omega_{\rm d})^2$. La croissance de la borne supérieure $(\omega_{\rm d})$ proportionnellement à $\sqrt{\sigma_0}$ lorsque les paramètres géométriques a et λ sont fixés est conforme à l'intuition. Il en va de même de la décroissance de $\omega_{\rm d}$ en fonction du rayon intérieur a lorsque $\lambda = b/a$ est constant, et en fonction de λ (c'est-à-dire de b) lorsque a est constant.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- Les équations de la dynamique s'écrivent

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}+\rho\,\omega^2\,r=0$$
$$\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z}+2\,\frac{\sigma_{r\theta}}{r}=0$$
$$\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{zr}}{r}=0$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{array}{llll}\sigma_{rr}=0\,, & \sigma_{r\theta}=0\,, & \sigma_{rz}=0 & r=a\,, \quad 0\le z\le h\,,\\ \sigma_{rr}=0\,, & \sigma_{r\theta}=0\,, & \sigma_{rz}=0 & r=b\,, \quad 0\le z\le h\,,\\ \sigma_{zr}=0\,, & \sigma_{z\theta}=0\,, & \sigma_{zz}=0 & a\le r\le b\,, \quad z=0\,,\\ \sigma_{zr}=0\,, & \sigma_{z\theta}=0\,, & \sigma_{zz}=0 & a\le r\le b\,, \quad z=h\,.\end{array}$$

Les conditions aux limites sur les surfaces intérieure et extérieure ($r=a$ et $r=b$), qui portent sur les composantes $\sigma_{rr},\sigma_{r\theta},\sigma_{rz}$, sont indépendantes de z et de θ. Les conditions aux limites sur les surfaces inférieure et supérieure ($z=0$ et $z=h$), qui portent sur les composantes $\sigma_{zr},\sigma_{z\theta},\sigma_{zz}$, sont indépendantes de θ et identiques pour la même valeur de r ($a<r<b$). L'ensemble des conditions aux limites est donc compatible avec l'hypothèse faite d'indépendance des composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ en coordonnées cylindriques vis-à-vis de θ et z.

Il en résulte que $\sigma_{zr}(r)=0$, $\sigma_{z\theta}(r)=0$, $\sigma_{zz}(r)=0$, $(a\le r\le b)$: Oz est direction principale de $\underline{\underline{\sigma}}$ en tout point de l'anneau et correspond à une contrainte principale nulle.
$\underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,z)$ se réduit à
$\underline{\underline{\sigma}}(r,\theta)=\sigma_{rr}(r)\,\underline{e}_r\otimes\underline{e}_r+\sigma_{r\theta}(r)\,(\underline{e}_r\otimes\underline{e}_\theta+\underline{e}_\theta\otimes\underline{e}_r)+\sigma_{\theta\theta}(r)\,\underline{e}_\theta\otimes\underline{e}_\theta$,
auquel les conditions aux limites imposent
$\sigma_{rr}(a)=0$, $\sigma_{r\theta}(a)=0$, $\sigma_{rr}(b)=0$, $\sigma_{r\theta}(b)=0$.
La troisième équation de champ est automatiquement satisfaite. La seconde se réduit à $\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{\theta r}}{\mathrm{d}r}+2\,\dfrac{\sigma_{r\theta}}{r}=0$ dont l'intégration, compte tenu des conditions aux limites ci-dessus sur $\sigma_{r\theta}$, donne :
$\sigma_{r\theta}(r)=0\quad(a\le r\le b)$.
La première équation de champ se réduit à
$\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{rr}}{\mathrm{d}r}+\dfrac{\sigma_{rr}(r)-\sigma_{\theta\theta}}{r}+\rho\,\omega^2 r=0$.
En tenant compte de la dernière hypothèse sur le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ cherché,
$\sigma_{\theta\theta}(r)=\sigma_0\quad(a\le r\le b)$,
on obtient σ_{rr} sous la forme générale :
$\sigma_{rr}=\dfrac{A}{r}-\dfrac{\rho\,\omega^2}{3}\,r^2+\sigma_0$, (A constante à déterminer)
qui doit satisfaire les conditions aux limites pour $r=a$ et $r=b$:
$\sigma_{rr}(a)=\dfrac{A}{a}-\dfrac{\rho\,\omega^2}{3}\,a^2+\sigma_0=0\,,\quad \sigma_{rr}(b)=\dfrac{A}{b}-\rho\dfrac{\omega^2}{3}\,b^2+\sigma_0=0$.
On en déduit la valeur particulière ω_{c} de ω pour laquelle ces équations sont compatibles et la valeur de la constante A. D'où l'expression de σ_{rr} :
$\dfrac{\sigma_{rr}(r)}{\sigma_0}=1-\dfrac{1}{r}\,\dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$ pour $(\omega_{\mathrm{c}})^2=\dfrac{3\,\sigma_0}{\rho}\,\dfrac{1}{a^2+ab+b^2}$,
et le champ de contrainte s'écrit :
$\underline{\underline{\sigma}}_{\mathrm{c}}(r,\theta)=\sigma_0\,\underline{e}_r\otimes\underline{e}_r\Big(1-\dfrac{1}{r}\,\dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}-\dfrac{r^2}{a^2+ab+b^2}\Big)+\sigma_0\,\underline{e}_\theta\otimes\underline{e}_\theta$.

- Puisque $\sigma_{\theta\theta}=\sigma_0$ et $\sigma_{zz}=0$, le respect de la condition de résistance de Tresca impose de vérifier que $0\le\sigma_{rr}(r)\le\sigma_0$, $a\le r\le b$.
On constate que σ_{rr}, nulle pour $r=a$ et $r=b$, est maximale pour $r^3=ab(a+b)/2$ et vaut $\dfrac{\sigma_{rr}}{\sigma_0}=1-3\Big(ab(a+b)/2\Big)^{2/3}/(b^2+ab+a^2)$ qui satisfait bien la condition de résistance.

- Le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}_{\mathrm{c}}$ qui satisfait les équations de la dynamique avec ω_{c} respecte la condition de résistance de Tresca en tout point de l'anneau. Cette condition est d'ailleurs partout « saturée » c'est-à-dire que l'on a $\sigma_{\theta\theta}(r)-\sigma_{zz}=\sigma_0$ en tout point de l'anneau.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Pour $\omega < \omega_c$ il suffit alors de considérer le champ de contrainte déduit de $\underline{\underline{\sigma}}_c$ « par homothétie » : $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_c \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2$.

On vérifie que ce champ satisfait les équations de la dynamique avec ω. Il respecte la condition de résistance de Tresca en tout point de l'anneau sous la forme $\sigma_{\theta\theta}(r) - \sigma_{zz} = \sigma_0 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 < \sigma_0$, puisque $\omega < \omega_c$.

- On a déterminé ω_d qui définit une condition nécessaire $\omega^2 \leq (\omega_d)^2$ pour l'existence d'un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ satisfaisant les équations de la dynamique et respectant la condition de résistance de Tresca. On vient de démontrer que la valeur ω_c définit une condition suffisante $\omega^2 \leq (\omega_c)^2$ pour l'existence d'un tel champ. Ces résultats sont cohérents. On a, avec le paramétrage indiqué

$$(\omega_c)^2 = \frac{3\sigma_0}{\rho\, a^2} \frac{1}{\lambda^2 + \lambda + 1} \leq \frac{2\sigma_0}{\rho\, a^2} \frac{\ln \lambda}{\lambda^2 - 1} = (\omega_d)^2$$

Cette formule fournit un encadrement de la vitesse de rotation maximale permise pour l'anneau par le respect de la condition de résistance de Tresca en tout point.

Commentaire

La borne supérieure pourrait être améliorée en considérant des champs de vitesse $\underline{\hat{U}}$ plus raffinés du point de vue de la dépendance vis-à-vis des coordonnées r et z, qui doivent toujours être choisis à divergence nulle. De même on améliorera la borne inférieure en construisant des champs de contrainte plus élaborés. Le choix optimal de ces champs, qui permettrait de déterminer exactement la valeur limite cherchée, dépend notamment du paramètre géométrique h/a caractérisant l'épaisseur de l'anneau.

Ainsi pour $h/\sqrt{ab} \to 0$, (anneau d'épaisseur très faible), la valeur limite de ω tend vers ω_c comme on peut le démontrer en reprenant le raisonnement initial avec le champ de vitesse virtuel $\underline{\hat{U}}(r, \theta, z) = \hat{\alpha}\, (\underline{e}_r - \frac{z - h/2}{r} \underline{e}_z)$, $\hat{\alpha} > 0$ constant. On aboutit alors en effet à la condition nécessaire :

$$\omega^2 < \omega_c^2 \left(1 + \frac{h^2}{48ab}\right).$$

On doit ajouter que la signification mécanique complète de la vitesse de rotation limite ainsi déterminée nécessite, pour être précisée, que l'on connaisse complètement le comportement du matériau (ductilité,...).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Annexe I

Éléments de calcul tensoriel

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MOTS CLÉS

Forme multilinéaire. Tenseur. Variance.
Produit tensoriel. Décomposition.
Contraction. Produit contracté.
Invariants.
Tenseurs euclidiens.
Champ de tenseurs. Gradient. Divergence.
Coordonnées curvilignes.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En bref...

Étant donné un espace vectoriel E et son espace dual E^*, la notion de tenseur est liée à l'étude des formes multilinéaires sur un espace F produit de E et de E^* de degré n quelconque (section 1).

Une méthode évidente pour produire de telles formes consiste à considérer les formes dont la valeur est donnée par le produit des valeurs prises par n formes linéaires sur E ou sur E^*. Une forme n-linéaire sur F ainsi obtenue est appelée *tenseur décomposé* d'ordre n, et on la note par le symbole $\otimes$ entre chacune des formes sur E ou sur E^*, qui sont elles-mêmes des éléments de E^* ou de E respectivement, qui la constituent (section 2).

Ce mode de construction ne suffit pas pour engendrer tout l'espace des formes n-linéaires sur F. Par contre il permet, par exemple à partir d'une base de E et de la base duale dans E^*, de produire une base de l'espace vectoriel des formes n-linéaires sur F. Toutes les formes cherchées, appelées *tenseurs* (d'ordre n) sur F, sont engendrées à partir d'une telle base (section 3). **L'espace vectoriel correspondant est identifié à un produit tensoriel d'ordre n de E et de E^*.**

On définit sur les tenseurs deux opérations fondamentales.

D'une part le *produit tensoriel*, noté $\otimes$, qui permet, à partir de deux tenseurs d'ordres p et q définis sur des espaces F_p et F_q, de constituer un tenseur d'ordre $(p+q)$ sur l'espace F produit de F_p par F_q (ou inversement) en généralisant la procédure de construction des tenseurs décomposés à partir des éléments de E^* et de E (section 2).

D'autre part la *contraction* qui permet, sous certaines conditions, à partir d'un tenseur d'ordre n sur F, d'obtenir des tenseurs d'ordre $(n-2)$, $(n-4)$,... sur des espaces $F_{n-2}, \ldots$ (section 3).

Ces opérations peuvent être combinées : on obtient le *produit contracté* de deux tenseurs, dont la mécanique fait grand usage (section 4).

On sait que pour un espace E muni d'une structure euclidienne, on met en évidence un isomorphisme dit « canonique » qui permet d'identifier E et son dual E^* en substituant au produit de dualité le produit scalaire dans E. Cet isomorphisme permet aussi de montrer que les espaces produits de

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

E et de E^* de degré n quelconque sont isomorphes entre eux. Il en résulte l'isomorphisme des espaces de tenseurs sur ces espaces. De la même façon que l'on identifie une forme linéaire sur E, élément de E^*, à son vecteur associé, élément de E, par l'isomorphisme canonique, introduisant ainsi la notion de vecteur euclidien, on identifiera les 2^n tenseurs d'ordre n qui se correspondent par l'isomorphisme à celui d'entre eux qui est élément du produit tensoriel d'ordre n de E par lui-même : c'est le *tenseur euclidien* correspondant. Les deux opérations fondamentales introduites auparavant sont transportées de façon cohérente sur les tenseurs euclidiens. La contraction est alors toujours possible ; les règles opératoires en sont simplifiées et s'expriment toutes au moyen du produit scalaire dans E (section 5).

Une application importante du calcul tensoriel apparaît dans la possibilité de généraliser à des ordres supérieurs les notions de gradient et de divergence. Pour un champ de tenseurs d'ordre n, défini sur un espace affine dont E est l'espace vectoriel associé, le *gradient* en un point est le tenseur d'ordre $(n+1)$ dont le produit contracté par un vecteur élémentaire de E (élément différentiel) donne la variation différentielle correspondante du champ de tenseurs en ce point. La *divergence* est obtenue par contraction du tenseur gradient : c'est un tenseur d'ordre $(n-1)$. La *formule de la divergence* transformant une intégrale de surface de type « flux » en intégrale de volume est étendue aux tenseurs d'ordre quelconque (section 6).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Principales notations

Notation	Signification	1ère formule
$< , >$	produit de dualité	(1.2)
$\otimes$	produit tensoriel	(2.1)
δ_i^j	symbole de Kronecker	(2.6)
$\mathcal{T} \equiv T^i{}_j{}^k \underline{e}_i \otimes e^{*j} \otimes \underline{e}_k$	tenseur	(3.3)
det	déterminant	(3.16)
tr	trace	(3.17)
^{t}	symbole de la transposition	(3.18)
$\odot$	produit contracté sur le dernier indice du tenseur qui précède $\odot$ et le premier indice du tenseur qui le suit	(4.3)
$\vdots$	produit doublement contracté sur les deux indices adjacents à $\vdots$, et sur les deux indices adjacents à ceux-ci	(4.14)
G	tenseur métrique	(5.1)
.	produit scalaire	(5.2)
.	produit contracté pour les tenseurs euclidiens : même règle d'indices que pour $\odot$	(5.32)
:	produit doublement contracté pour les tenseurs euclidiens : même règle d'indices que pour $\vdots$	(5.36)
$\underline{\underline{\underline{T}}}$	tenseur euclidien	§ 5.8
$\tilde{\underline{\underline{T}}}$	matrice de $\underline{\underline{\underline{T}}}$ dans une base **orthonormée**	§ 5.9
$\mathrm{D}_{\underline{w}}$	dérivée selon le vecteur $\underline{w}$	(6.3)
∇	gradient	(6.4)
div	divergence	(6.8)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Tenseurs sur un espace vectoriel 303
1.1 Définition 303
1.2 Tenseurs du 1er ordre 304
1.3 Tenseurs du 2ème ordre 304
2 Produit tensoriel de tenseurs 305
2.1 Définition 305
2.2 Exemples 305
2.3 Tenseurs décomposés 306
3 Décomposition d'un tenseur 307
3.1 Définition 307
3.2 Changement de base 308
3.3 Tenseurs mixtes du 2ème ordre 309
3.4 Tenseurs du 2ème ordre 2 fois contravariants ou 2 fois covariants 311
3.5 Composantes d'un produit tensoriel 311
4 Contraction 312
4.1 Définition de la contraction d'un tenseur 312
4.2 Multiplication contractée 313
4.3 Produit doublement contracté de deux tenseurs 315
4.4 Contraction totale d'un produit tensoriel 316
4.5 Définition d'un tenseur par dualité 316
4.6 Invariants d'un tenseur mixte du 2ème ordre 317
5 Tenseurs sur un espace vectoriel euclidien 317
5.1 Définition d'un espace euclidien 317
5.2 Tenseur des dilatations dans une application linéaire . . . 318
5.3 Isomorphisme entre E et E^* 318
5.4 Repérage covariant d'un vecteur de E 320
5.5 Tenseurs euclidiens du 1er ordre ; produit contracté 321
5.6 Tenseurs euclidiens du 2ème ordre décomposés ; produits contractés 322
5.7 Tenseurs euclidiens du 2ème ordre 324
5.8 Tenseurs euclidiens d'ordre n 328
5.9 Choix d'une base orthonormée dans E 329
5.10 Directions principales et valeurs principales d'un tenseur euclidien du 2ème ordre symétrique, réel 330
6 Champs de tenseurs 331
6.1 Définition 331
6.2 Dérivation d'un champ de tenseurs ; gradient d'un champ de tenseurs 332
6.3 Divergence d'un champ de tenseurs 333
6.4 Calculs en coordonnées curvilignes 335
Récapitulatif des formules essentielles 340
Schéma sur les tenseurs euclidiens en bases orthonormées . 343
1 Préambule 343

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

2 Tenseurs euclidiens d'ordre un 344
3 Tenseurs euclidiens d'ordre deux 344
3.1 Produit tensoriel de deux vecteurs 344
3.2 Tenseur euclidien d'ordre deux 344
3.3 Tenseur métrique 345
3.4 Tenseur euclidien d'ordre deux associé à une application linéaire 345
3.5 Tenseur inverse 346
3.6 Transposition 346
3.7 Tenseurs symétriques et antisymétriques 346
3.8 Changement de base orthonormée 347
3.9 Contraction d'un tenseur du deuxième ordre 347
3.10 Déterminant d'un tenseur du deuxième ordre 348
4 Produit contracté de deux tenseurs 348
4.1 Produit contracté de deux vecteurs 348
4.2 Produits contractés d'un produit tensoriel de deux vecteurs et d'un vecteur 348
4.3 Produit contracté d'un tenseur du deuxième ordre et d'un vecteur 349
4.4 Produit contracté de deux tenseurs du deuxième ordre . . 350
4.5 Produit doublement contracté de deux tenseurs du deuxième ordre 350
5 Dérivation d'un champ de tenseurs 351
5.1 Gradient d'un champ de vecteurs 351
5.2 Divergence d'un champ de vecteurs 352
5.3 Gradient et divergence d'un champ de tenseurs du deuxième d'ordre 352
5.4 Formule de la divergence 353

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Éléments de calcul tensoriel

L'objectif poursuivi dans ce texte est, sans souci de formalisme mathématique disponible dans d'autres ouvrages, de donner au lecteur les connaissances élémentaires suffisantes pour l'utilisation du calcul tensoriel dans la présentation proposée de la mécanique des milieux continus tridimensionnels. Cette introduction au calcul tensoriel est articulée en trois parties. La première est consacrée à la définition des tenseurs sur un espace vectoriel et à la présentation de leurs propriétés et des opérations essentielles du calcul tensoriel ; elle occupe les sections 1 à 4. La deuxième partie traite des tenseurs euclidiens : c'est la section 5. La troisième aborde la question des champs de tenseurs et de la dérivation de ces champs.

Du point de vue des applications immédiates dans l'ouvrage, ce sont les deuxième et troisième parties (en ce qui y concerne les tenseurs euclidiens) auxquelles il sera fait essentiellement appel : c'est d'ailleurs pour cette raison que le récapitulatif des formules essentielles disponible à la fin de cette annexe ne concerne que les résultats relatifs aux tenseurs euclidiens. Il a pourtant semblé préférable d'adopter une présentation initiale indépendante de la structure euclidienne de l'espace dans le but de mieux dégager l'intervention de la dualité.

1 Tenseurs sur un espace vectoriel

1.1 Définition

E désignant un espace vectoriel de dimension finie n (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E^* le dual de E, on appelle ***tenseur*** p ***fois contravariant et*** q ***fois covariant*** toute ***forme multilinéaire*** $\mathcal{T}$ définie sur $(E^*)^p \times (E)^q$.

En notant	$u^{*(i)}$	p vecteurs quelconques de E^*	$i = 1, \ldots, p$
	$\underline{v}_{(j)}$	q vecteurs quelconques de E	$j = 1, \ldots, q$

une telle forme associe aux vecteurs arguments $u^{*(i)}$ et $\underline{v}_{(j)}$ pris dans cet ordre, le scalaire :

$$\mathcal{T}(u^{*(1)}, \ldots, u^{*(p)}, \underline{v}_{(1)}, \ldots, \underline{v}_{(q)}) . \tag{1.1}$$

La somme $(p + q)$ est appelée ***ordre du tenseur***. Les nombres p et q sont les ***variances***. L'ordre dans lequel les vecteurs arguments apparaissent dans $\mathcal{T}$ doit être spécifié dans la définition de la forme : ici on a choisi, pour simplifier, d'ordonner les arguments en prenant d'abord les vecteurs de E^* puis ceux de E.

Il est clair que l'ensemble des tenseurs de variances p et q déterminées, et correspondant au même ordre des vecteurs arguments, admet une structure d'espace vectoriel.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On peut examiner, à titre d'exemples, les cas des tenseurs du 1er ordre et du 2ème ordre dont l'usage est très fréquent en mécanique des milieux continus.

Notation :

On convient de noter par :

$$< u^* , \underline{v} >=< \underline{v} , u^* > \tag{1.2}$$

le produit de dualité entre un vecteur u^* de E^* et un vecteur $\underline{v}$ de E.

1.2 Tenseurs du 1er ordre

Tenseur contravariant du 1er ordre

C'est, par définition, une forme linéaire $\mathcal{T}$ sur E^* que l'on identifie classiquement par le produit de dualité à un vecteur $\underline{T}$ de E. On écrit :

$$\forall\, u^* \in E^* \,,\ \mathcal{T}(u^*) =< \underline{T} , u^* > \,. \tag{1.3}$$

Les tenseurs du 1er ordre contravariants sont les vecteurs de E.

Tenseur covariant du 1er ordre

C'est, par définition, une forme linéaire sur E qui est donc identifiée à un vecteur de E^*.

Les tenseurs du 1er ordre covariants sont les vecteurs de E^*.

1.3 Tenseurs du 2ème ordre

Tenseur covariant du 2ème ordre

C'est une forme bilinéaire sur $E \times E$.

En mécanique des milieux continus, les tenseurs de déformation et de taux de déformation sont des tenseurs 2 fois covariants (cf. chapitres II et III).

Tenseur contravariant du 2ème ordre

C'est une forme bilinéaire sur $E^* \times E^*$.

En mécanique des milieux continus, les tenseurs de contrainte sont des tenseurs 2 fois contravariants (cf. chapitre V).

Tenseur mixte contravariant-covariant du 2ème ordre

C'est une forme bilinéaire $\mathcal{T}$ sur $E^* \times E$ associant à deux vecteurs quelconques u^* de E^* et $\underline{v}$ de E le scalaire $\mathcal{T}(u^* , \underline{v})$.

Elle permet de définir, par dualité, une ***application linéaire de E dans E***, soit φ, en écrivant :

$$\forall\, u^* \in E^* \,,\ \forall\, \underline{v} \in E \,,\ \mathcal{T}(u^* , \underline{v}) =< u^* , \varphi(\underline{v}) > \,. \tag{1.4}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Réciproquement, la donnée d'une application linéaire φ de E dans E permet de définir un tenseur mixte $\mathcal{T}$ du deuxième ordre contravariant-covariant par la formule (1.4). Ce type de définition se rencontre fréquemment en mécanique des milieux continus.

En particulier on définira le tenseur inverse du tenseur $\mathcal{T}$, noté $\mathcal{T}^{-1}$ comme le tenseur associé à l'application linéaire réciproque de φ si elle existe, soit φ^{-1} ; c'est encore un tenseur mixte contravariant-covariant :

$$\forall\, u^* \in E^*\ ,\ \forall\, \underline{v} \in E\ ,\ \mathcal{T}^{-1}(u^*\ ,\ \underline{v}) =< u^*\ ,\ \varphi^{-1}(\underline{v}) > \ . \tag{1.5}$$

Une démarche analogue peut être suivie en se plaçant du point de vue des applications linéaires de E^* dans E^*.

2 Produit tensoriel de tenseurs

2.1 Définition

Soient, à titre d'exemple, les deux tenseurs :

$\mathcal{T}'$, forme trilinéaire sur $E \times E^* \times E$,
$\mathcal{T}''$, forme bilinéaire sur $E^* \times E$,

on définit le tenseur $\mathcal{T}$, produit tensoriel de $\mathcal{T}'$ par $\mathcal{T}''$, noté $\mathcal{T} = \mathcal{T}' \otimes \mathcal{T}''$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\, \underline{v}_{(1)}\ ,\ \underline{v}_{(2)}\ ,\ \underline{v}_{(3)} \in E\ ,\ \forall\, u^{*(1)}\ ,\ u^{*(2)} \in E^* \\ \mathcal{T}(\underline{v}_{(1)}\ ,\ u^{*(1)}\ ,\ \underline{v}_{(2)}\ ,\ u^{*(2)}\ ,\ \underline{v}_{(3)}) = \mathcal{T}'(\underline{v}_{(1)}\ ,\ u^{*(1)}\ ,\ \underline{v}_{(2)})\mathcal{T}''(u^{*(2)}\ ,\ \underline{v}_{(3)})\ . \end{array} \right. \tag{2.1}$$

L'opération « produit tensoriel » est distributive (à gauche et à droite) par rapport à l'addition, et associative. ***Elle n'est pas commutative.***

2.2 Exemples

Produit tensoriel de 2 vecteurs de E

Soient $\underline{a}\ ,\ \underline{b} \in E$ $\quad \mathcal{T} = \underline{a} \otimes \underline{b}$ est défini par (2.1) ; il vient :

$$\forall\, u^{*(1)}\ ,\ u^{*(2)} \in E^*\ ,\ (\underline{a} \otimes \underline{b})(u^{*(1)}\ ,\ u^{*(2)}) =< \underline{a}\ ,\ u^{*(1)} >< \underline{b}\ ,\ u^{*(2)} > \ . \tag{2.2}$$

Ainsi $\mathcal{T} = \underline{a} \otimes \underline{b}$ est une forme bilinéaire sur $(E^*)^2$.

Produit tensoriel d'un vecteur de E par un vecteur de E^*

Soient $\underline{a} \in E$ et $b^* \in E^*$, $\mathcal{T} = \underline{a} \otimes b^*$ est défini par (2.1) ; il vient :

$$\forall\, u^* \in E^*\ ,\ \forall\, \underline{v} \in E\ ,\ (\underline{a} \otimes \underline{b}^*)(u^*\ ,\ \underline{v}) =< \underline{a}\ ,\ u^* >< \underline{v}\ ,\ b^* > \tag{2.3}$$

et l'on voit que $\mathcal{T} = \underline{a} \otimes b^*$ est un tenseur mixte contravariant-covariant.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L'application linéaire φ de E dans E correspondante, définie par (1.4), peut ici être explicitée ; d'après (2.3), $\mathcal{T}(u^*\,,\,\underline{v})$ s'écrit aussi :

$$\mathcal{T}(u^*\,,\,\underline{v}) =< u^*\,,\,\underline{a} < \underline{v}\,,\,b^* >>$$

d'où :

$$\forall \underline{v} \in E\,,\ \varphi\,(\underline{v}) =< \underline{v}\,,\,b^* > \underline{a} \tag{2.4}$$

2.3 Tenseurs décomposés

Soit $\mathcal{T}$ un tenseur d'ordre $n = p + q$, p-contravariant et q-covariant. On dit que $\mathcal{T}$ est ***décomposé*** s'il peut être mis sous la forme du produit tensoriel, ***dans l'ordre voulu***, de p vecteurs de E par q vecteurs de E^*.

Désignant par $\{\underline{e}_k\}$ une base de E, on définit $\{e^{*k}\}$ la base duale de celle-ci dans E^* c'est-à-dire telle que

$$< \underline{e}_i\,,\,e^{*j} >= \delta_i^j \tag{2.5}$$

où δ_i^j, symbole de Kronecker, prend les valeurs :

$$\delta_i^j = 1 \quad \text{si} \quad i = j\,,\ \delta_i^j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j\,. \tag{2.6}$$

On peut alors décomposer les vecteurs de E et E^* sur ces bases suivant les formules :

$$\underline{v} = v^\ell\,\underline{e}_\ell \tag{2.7}$$

$$u^* = u_\ell\,e^{*\ell} \tag{2.8}$$

dans lesquelles on adopte la ***convention dite des indices « muets » (ou répétés) c'est-à-dire qu'il y a sommation par rapport aux couples d'indices répétés placés l'un en haut et l'autre en bas*** [(1)].

Considérant alors, à titre d'exemple, le tenseur décomposé :

$$\mathcal{T} = \underline{e}_i \otimes e^{*j} \otimes \underline{e}_k \tag{2.9}$$

on a :

$$\forall\, u^{*(1)}\,,\ u^{*(2)} \in E^*\,,\ \forall \underline{v} \in E\,,\ (\underline{e}_i \otimes e^{*j} \otimes \underline{e}_k)(u^{*(1)}\,,\,\underline{v}\,,\,u^{*(2)}) = u_i^{(1)} v^j u_k^{(2)}\,. \tag{2.10}$$

[(1)] La convention sur la position des indices est d'usage général. Elle présente l'intérêt, comme on le verra dans la suite, par son caractère systématique de faciliter la lecture et l'écriture des formules (cf. par exemple § 3.2).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

3 Décomposition d'un tenseur

3.1 Définition

Soit, à titre d'exemple, $\mathcal{T}$ un tenseur d'ordre 3, 1-contravariant, 1-covariant et 1-contravariant.

Avec les bases $\{\underline{e}_k\}$ et $\{e^{*k}\}$ introduites ci-dessus, on pose

$$\mathcal{T}(e^{*i}\,,\,\underline{e}_j\,,\,e^{*k}) = T^i{}_j{}^k\;,\;\; i,j,k = 1,\ldots,n\;. \tag{3.1}$$

On en déduit, $\mathcal{T}$ étant linéaire, que :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, u^{*(1)}\,,\,u^{*(2)} \in E^*\,,\,\forall\,\underline{v} \in E \\ \mathcal{T}(u^{*(1)}\,,\,\underline{v}\,,\,u^{*(2)}) = u_i^{(1)}\,v^j\,u_k^{(2)}\mathcal{T}(e^{*i}\,,\,\underline{e}_j\,,\,e^{*k}) \\ \text{ou encore} \\ \mathcal{T}(u^{*(1)}\,,\,\underline{v}\,,\,u^{*(2)}) = u_i^{(1)}\,v^j\,u_k^{(2)}T^i{}_j{}^k \end{array}\right. \tag{3.2}$$

avec la convention de sommation sur les indices répétés qui sera sous-entendue dans toute la suite sauf mention explicite du contraire.

Par comparaison de (3.2) avec (2.10) on obtient les formules essentielles :

$$\boxed{\mathcal{T} \equiv T^i{}_j{}^k\,\underline{e}_i \otimes e^{*j} \otimes \underline{e}_k} \tag{3.3}$$

$$\boxed{T^i{}_j{}^k = \mathcal{T}(e^{*i}\,,\,\underline{e}_j\,,\,e^{*k})} \tag{3.4}$$

La formule (3.3) donne la décomposition du tenseur $\mathcal{T}$ 1-contravariant, 1-covariant, 1-contravariant quelconque sur les n^3 tenseurs décomposés $\underline{e}_i \otimes e^{*j} \otimes \underline{e}_k\,(i\,,\,j\,,\,k = 1,\ldots,n)$.

De plus la formule (2.10) assure l'indépendance de ces n^3 tenseurs décomposés. En effet on remarque que l'on peut écrire compte tenu de (2.5) :

$$\forall\, i\,,\,j\,,\,k\,,\,p\,,\,q\,,\,r = 1,\ldots,n\;,\;(\underline{e}_i \otimes e^{*j} \otimes \underline{e}_k)(e^{*p}\,,\,\underline{e}_q\,,\,e^{*r}) = \delta_i^p\,\delta_q^j\,\delta_k^r\,. \tag{3.5}$$

Ainsi les tenseurs décomposés $\underline{e}_i \otimes e^{*j} \otimes \underline{e}_k\,(i\,,\,j\,,\,k = 1,\ldots,n)$ constituent une ***base de l'espace vectoriel*** des tenseurs $\mathcal{T}$ dont la variance a été indiquée plus haut. Les $T^i{}_j{}^k$ sont les ***composantes*** de $\mathcal{T}$ dans cette base.

Désignant alors par $u^{*(1)}\,,\,u^{*(2)}\,,\,\underline{v}$, des vecteurs arguments quelconques de $\mathcal{T}$, décomposés selon (2.7) et (2.8), on obtient immédiatement, par application de (2.10) et (3.3) la valeur de $\mathcal{T}(u^{*(1)}\,,\,\underline{v}\,,\,u^{*(2)})$:

$$\mathcal{T}(u^{*(1)}\,,\,\underline{v}\,,\,u^{*(2)}) = T^i{}_j{}^k\,u_i^{(1)}\,v^j\,u_k^{(2)}\;. \tag{3.6}$$

Les résultats énoncés dans ce cas particulier de tenseurs $\mathcal{T}$ sont évidemment de portée générale.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Remarque

La notion de produit tensoriel de tenseurs a été introduite au paragraphe 2.1.

Une présentation mathématique plus générale définit la notion de produit tensoriel d'espaces. On peut alors montrer que l'espace vectoriel des tenseurs $\mathcal{T}$ choisis comme exemples pour la démonstration qui précède de la décomposition d'un tenseur est isomorphe au produit tensoriel d'espaces vectoriels E et E^* noté $E \otimes E^* \otimes E$. Il est commode d'identifier ces deux espaces, écrivant ainsi pour les tenseurs $\mathcal{T}$ ci-dessus :

$$\mathcal{T} \in E \otimes E^* \otimes E \,,$$

notation cohérente avec la formule de décomposition (3.3). Cette écriture sera adoptée de manière générale dans toute la suite.

3.2 Changement de base

On considère encore, à titre d'exemples, les mêmes tenseurs $\mathcal{T}$ de l'espace $E \otimes E^* \otimes E$.

On suppose connus, outre les bases duales $\{\underline{e}_k\}$ et $\{e^{*k}\}$ de E et de E^* utilisées au paragraphe précédent, un autre couple de bases duales de ces mêmes espaces, soit $\{\underline{e}'_k\}$ et $\{e^{*\prime k}\}$, et l'on définit la nouvelle base $\{\underline{e}'_k\}$ de vecteurs de E dans l'ancienne base $\{\underline{e}_k\}$ par la formule :

$$\underline{e}'_i = \alpha_i^k \, \underline{e}_k \tag{3.7}$$

(α_i^k : composantes de la nouvelle base de E dans l'ancienne base). L'inversion de cette formule exprime l'ancienne base dans la nouvelle :

$$\underline{e}_k = \beta_k^j \, \underline{e}'_j \tag{3.8}$$

avec la relation

$$\alpha_i^k \beta_k^j = \delta_i^j \tag{3.9}$$

(qui rappelle que les matrices de coefficients α_i^k et β_k^j sont évidemment inverses).

Les relations entre la nouvelle et l'ancienne base duale dans E^* s'obtiennent par identification à partir des formules précédentes dans l'expression même du produit de dualité :

$$< e^{*\prime j} \,,\, \underline{e}'_\ell > = \delta_\ell^j \,,$$

d'où l'expression de la nouvelle base duale dans l'ancienne :

$$e^{*\prime j} = \beta_k^j \, e^{*k} \tag{3.10}$$

et la formule inverse :

$$e^{*k} = \alpha_i^k \, e^{*\prime i} \,. \tag{3.11}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Toutes ces formules de passage étant établies, on s'intéresse maintenant à la décomposition de $\mathcal{T}$ dans la base $\{\underline{e}'_i \otimes e^{*\prime j} \otimes \underline{e}'_k\}$:

$$\mathcal{T} = T'^{i}{}_{j}{}^{k}\, \underline{e}'_i \otimes e^{*\prime j} \otimes \underline{e}'_k \,.$$

Les nouvelles composantes s'obtiennent sans difficulté en exploitant, dans (3.3), les formules (3.8) et (3.11) compte tenu de la distributivité du produit tensoriel de tenseurs. Il vient :

$$\boxed{T'^{i}{}_{j}{}^{k} = \beta^i_\ell\, \alpha^m_j\, \beta^k_n\, T^{\ell}{}_{m}{}^{n}} \tag{3.12}$$

et les formules inverses :

$$T^{i}{}_{j}{}^{k} = \alpha^i_\ell\, \beta^m_j\, \alpha^k_n\, T'^{\ell}{}_{m}{}^{n} \,. \tag{3.13}$$

L'application de ces formules au cas d'un tenseur du 1er ordre $\mathcal{T} = T_i\, e^{*i}$ élément de E^* forme linéaire sur E, c'est-à-dire 1-covariant (§ 1.2), fournit la relation :

$$T'_i = \alpha^\ell_i\, T_\ell$$

qui explique la terminologie : le tenseur est dit ***covariant*** parce que ses composantes, dont les indices sont ***inférieurs***, se transforment, dans le changement de base, comme la base primale elle-même, dont les vecteurs ont eux aussi des indices inférieurs.

Pour un tenseur du 1er ordre de E, soit $\mathcal{T} = T^j\, \underline{e}_j$, on obtient :

$$T'^j = \beta^j_k\, T^k$$

qui explique, de la même manière, la terminologie de ***contravariance***.

On peut alors retenir la formule générale pour un tenseur $\mathcal{T}$ quelconque sous la forme : chaque covariance, indice inférieur, introduit un facteur « α » et chaque contravariance, indice supérieur, introduit un facteur « β » [(2)].

3.3 Tenseurs mixtes du 2ème ordre

Soit $\mathcal{T}$ un élément de $E \otimes E^*$ et φ l'application linéaire de E dans E qui lui est associée par (1.4). On désigne par $\varphi^i{}_j$ les ***coefficients de la matrice*** [(3)] de φ dans la base $\{\underline{e}_k\}$ de E, c'est-à-dire que :

$$\forall\, \underline{v} = v^j\, \underline{e}_j \;,\; \varphi(\underline{v}) = \varphi^i{}_j\, v^j\, \underline{e}_i \,. \tag{3.14}$$

Soient d'autre part $T^i{}_j$ les composantes de $\mathcal{T}$ dans la base $\{\underline{e}_m \otimes e^{*n}\}$ de $E \otimes E^*$. On a alors en appliquant (3.4) et (1.4) :

$$T^i{}_j = \mathcal{T}(e^{*i}, \underline{e}_j) =< e^{*i}\,,\, \varphi\,(\underline{e}_j) >$$

[(2)] Dans la pratique, lorsque l'on procède à de tels changements de bases, il est souvent plus commode, plutôt que d'appliquer la formule générale (3.12), de reproduire sur le cas particulier considéré le raisonnement qui permet de l'obtenir par identification.

[(3)] 1er indice : ligne ; 2ème indice : colonne.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

d'où, avec (3.14) :

$$T^i{}_j = \varphi^i{}_j \qquad \forall\, i\,,\, j = 1, \ldots, n\,. \tag{3.15}$$

Ainsi, les ***composantes de*** $\mathcal{T}$ dans la base $\{\underline{e}_m \otimes e^{*n}\}$ sont identiques aux coefficients de la matrice de l'application linéaire de E dans E associée à $\mathcal{T}$ dans la base $\{\underline{e}_k\}$.

Il s'ensuit que les composantes $T^i{}_j$ de $\mathcal{T}$ possèdent vis-à-vis des ***changements quelconques de bases*** $\{\underline{e}_k\}$ dans E, les bases $\{e^{*k}\}$ dans E^* étant toujours les bases duales, les propriétés connues pour les coefficients de la matrice d'une application linéaire.

En particulier on sait que dans ces changements de base certaines expressions polynomiales sont ***invariantes***. On rappelle que $\det[\,\varphi^i{}_j\,]$ est un invariant, donc :

$$\det[\,T^i{}_j\,] = \det \mathcal{T} \text{ est un invariant}\,. \tag{3.16}$$

Il en va de même de tous les coefficients du polynôme caractéristique en λ obtenu en écrivant l'invariance du déterminant de la matrice de l'application linéaire de E dans E définie par :

$$\forall\, \underline{v} \in E \quad \rightarrow \quad \varphi(\underline{v}) - \lambda \underline{v} \in E \quad (\lambda \text{ scalaire quelconque})\,.$$

Ces coefficients constituent une base de n invariants polynomiaux indépendants de degrés 1 à n en $\varphi^i{}_j$. Parmi ceux-ci, outre $\det[\,\varphi^i{}_j\,]$ de degré n, on trouve $\mathrm{tr}\,[\,\varphi^i{}_j\,]$ de degré 1 :

$$T'^i{}_i = \mathrm{tr}\ \mathcal{T} \text{ est un invariant} \tag{3.17}$$

(on le vérifie d'ailleurs directement sans difficulté puisque par (3.12) on a : $T'^i{}_i = \beta^i_j\, \alpha^k_i\, T^j{}_k = \delta^k_j\, T^j{}_k = T^k{}_k$). Cette opération « trace » est un cas particulier de la contraction étudiée dans la suite. De même on utilisera souvent en mécanique une base de n invariants polynomiaux indépendants de degrés 1 à n, autre que celle évoquée ci-dessus, obtenue par contraction (cf. § 4.6).

On introduit aussi le tenseur ${}^t\mathcal{T}$ ***transposé*** de $\mathcal{T}$; c'est l'***élément de*** $E^* \otimes E$ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\, u^* \in E^*\,,\, \forall \underline{v} \in E \\ {}^t\mathcal{T}(\underline{v}\,,\, u^*) = \mathcal{T}(u^*\,,\, \underline{v}) \end{array} \right. \tag{3.18}$$

${}^t\mathcal{T}$ se met sous la forme :

$${}^t\mathcal{T} = ({}^tT)_i{}^j\, e^{*i} \otimes \underline{e}_j$$

et l'on a, par (3.4) et (3.18), la relation :

$$({}^tT)_i{}^j = T^j{}_i\,. \tag{3.19}$$

Si $\mathcal{T}$ est un tenseur décomposé $\mathcal{T} = a^* \otimes \underline{b}$, on a évidemment : ${}^t\mathcal{T} = \underline{b} \otimes a^*$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

3.4 Tenseurs du 2ème ordre 2 fois contravariants ou 2 fois covariants

On considère à titre d'exemple les tenseurs du 2ème ordre 2 fois covariants.

• Tenseurs symétriques.

Par définition, $\mathcal{T} \in E^* \otimes E^*$ est symétrique si l'on a :

$$\forall\, \underline{v}'\,,\, \underline{v}'' \in E\,,\ \mathcal{T}(\underline{v}'\,,\, \underline{v}'') = \mathcal{T}(\underline{v}''\,,\, \underline{v}')\,;$$

d'où, pour toute base $\{\underline{e}_i\}$ de E et base duale $\{e^{*j}\}$ de E^*, d'après (3.3) et (3.4) :

$$\mathcal{T} = T_{ij}\, e^{*i} \otimes e^{*j}\ ,\ T_{ij} = T_{ji}\ . \tag{3.20}$$

• Tenseurs antisymétriques.

De même, $\mathcal{T} \in E^* \otimes E^*$ est antisymétrique si l'on a

$$\forall\, \underline{v}'\,,\, \underline{v}'' \in E\,,\ \mathcal{T}(\underline{v}'\,,\, \underline{v}'') = -\mathcal{T}(\underline{v}''\,,\, \underline{v}')$$

d'où, comme ci-dessus :

$$\mathcal{T} = T_{ij}\, e^{*i} \otimes e^{*j}\ ,\ T_{ij} = -T_{ji}\ . \tag{3.21}$$

• Tout tenseur $\mathcal{T} \in E^* \otimes E^*$ peut être mis, de façon unique, sous la forme de la somme d'un tenseur symétrique $\mathcal{T}_{\rm s}$ et d'un tenseur antisymétrique $\mathcal{T}_{\rm a}$ de $E^* \otimes E^*$:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\rm a} + \mathcal{T}_{\rm s}\,. \tag{3.22}$$

Ces tenseurs $\mathcal{T}_{\rm s}$ et $\mathcal{T}_{\rm a}$ sont en effet définis de manière unique par :

$$\begin{cases} \forall\, \underline{v}'\,,\, \underline{v}'' \in E\,,\ \mathcal{T}_{\rm s}(\underline{v}'\,,\, \underline{v}'') = \dfrac{1}{2}\big(\,\mathcal{T}(\underline{v}'\,,\, \underline{v}'') + \mathcal{T}(\underline{v}''\,,\, \underline{v}')\,\big) \\ \forall\, \underline{v}'\,,\, \underline{v}'' \in E\,,\ \mathcal{T}_{\rm a}(\underline{v}'\,,\, \underline{v}'') = \dfrac{1}{2}\big(\,\mathcal{T}(\underline{v}'\,,\, \underline{v}'') - \mathcal{T}(\underline{v}''\,,\, \underline{v}')\,\big)\,, \end{cases} \tag{3.23}$$

qui implique, pour toute base $\{\underline{e}_j\}$ de E et base duale $\{e^{*k}\}$ de E^* :

$$(T_{\rm s})_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \quad (T_{\rm a})_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})\,. \tag{3.24}$$

• Les mêmes résultats, aux positions supérieures des indices près, sont valables pour les tenseurs 2 fois contravariants.

3.5 Composantes d'un produit tensoriel

Soient, à titre d'exemple, $\mathcal{T}' \in E^* \otimes E \otimes E^*$ et $\mathcal{T}'' \in E \otimes E^*$:

$$\mathcal{T}' = T'_{\ i}{}^{j}{}_{k}\, e^{*i} \otimes \underline{e}_j \otimes e^{*k}$$
$$\mathcal{T}'' = T''^{\ell}{}_{m}\, \underline{e}_\ell \otimes e^{*m}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

alors on a évidemment, pour $\mathcal{T} = \mathcal{T}' \otimes \mathcal{T}''$:

$$\mathcal{T} = T_i{}^j{}_k{}^\ell{}_m \, e^{*i} \otimes \underline{e}_j \otimes e^{*k} \otimes \underline{e}_\ell \otimes e^{*m}$$

avec :

$$T_i{}^j{}_k{}^\ell{}_m = T'{}_i{}^j{}_k T''{}^\ell{}_m \, . \tag{3.25}$$

Ainsi, dans le cas particulier d'un tenseur $\mathcal{T}$ ***décomposé*** tel que :

$$\mathcal{T} = \underline{a} \otimes b^* \otimes \underline{c} \otimes \underline{d}$$

on aura :

$$T^i{}_j{}^{k\ell} = a^i \, b_j \, c^k \, d^\ell \, . \tag{3.26}$$

4 Contraction

4.1 Définition de la contraction d'un tenseur

Soit, à titre d'exemple, un tenseur $\mathcal{T}$ élément de $E \otimes E^* \otimes E^* \otimes E$.

Soit $\{\underline{e}_k\}$ une base de E et $\{e^{*j}\}$ la base duale de E^*.

Alors l'élément $\mathcal{T}_c$ défini par :

$$\forall \, \underline{v} \in E \, , \forall \, u^* \in E^* \, , \; \mathcal{T}_c(u^* \, , \, \underline{v}) = \mathcal{T}(u^* \, , \, \underline{e}_i \, , \, \underline{v} \, , \, e^{*i}) \; {}^{(4)} \tag{4.1}$$

est ***indépendant du choix de la base*** $\{\underline{e}_k\}$ et ***est un tenseur*** élément de $E \otimes E^*$.

En effet $\{\underline{e}'_k\}$ désignant une autre base de E, on a avec les notations du paragraphe 3.2 :

$$\mathcal{T}(u^* \, , \, \underline{e}'_i \, , \, \underline{v} \, , \, e^{*\prime i}) = \alpha_i^j \, \beta_k^i \, \mathcal{T}(u^* \, , \, \underline{e}_j \, , \, \underline{v} \, , \, e^{*k})$$

d'où, d'après (3.9) :

$$\mathcal{T}(u^* \, , \, \underline{e}'_i \, , \, \underline{v} \, , \, e^{*\prime i}) = \mathcal{T}(u^* \, , \, \underline{e}_j \, , \, \underline{v} \, , \, e^{*j}) \, .$$

L'élément $\mathcal{T}_c$, défini par (4.1) est donc bien ***intrinsèque*** : c'est une forme bilinéaire sur $E^* \times E$, c'est-à-dire un tenseur 1-contravariant 1-covariant.

Ce tenseur $\mathcal{T}_c$ est dit ***contracté*** de $\mathcal{T}$ sur les vecteurs arguments 2 et 4, ou sur les indices 2 et 4. On remarquera que la ***contraction ne peut se faire que sur des indices correspondant à des vecteurs arguments pris l'un dans E l'autre dans E^*.***

Du point de vue des composantes, on vérifiera sans peine que l'on a :

$$(T_c)^i{}_j = T^i{}_{kj}{}^k \tag{4.2}$$

(sommation sur les indices en position 2 et 4 situés l'un en bas et l'autre en haut).

La définition donnée sur cet exemple est générale. ***La contraction d'un tenseur d'ordre n et de variances p et q conduit à un tenseur d'ordre $(n-2)$ et de variances $(p-1)$ et $(q-1)$.***

(4) Bien remarquer la sommation sur les indices répétés.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

4.2 Multiplication contractée

La multiplication contractée de deux tenseurs $\mathcal{T}''$ et $\mathcal{T}'$ consiste à effectuer le produit tensoriel $\mathcal{T} = \mathcal{T}'' \otimes \mathcal{T}'$ que l'on contracte ensuite suivant un indice de $\mathcal{T}''$ et un indice de $\mathcal{T}'$ de variance contraire.

Le cas le plus courant est celui où le produit tensoriel $\mathcal{T} = \mathcal{T}'' \otimes \mathcal{T}'$ est contracté ***sur le dernier indice de*** $\mathcal{T}''$ ***et le premier indice de*** $\mathcal{T}'$, sous réserve bien entendu que cette opération soit possible c'est-à-dire que les variances correspondantes soient contraires. Le résultat de cette multiplication contractée sera noté :

$$\mathcal{T}_c = \mathcal{T}'' \odot \mathcal{T}' \,. \tag{4.3}$$

L'opération (4.3) se rencontre fréquemment en mécanique et on en examinera dans la suite quelques cas particuliers.

On remarque que la multiplication contractée est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition.

Produit contracté de $\underline{a} \in E$ et $b^* \in E^*$

On a :

$$\mathcal{T} = \underline{a} \otimes b^* = a^i \, b_j \, \underline{e}_i \otimes e^{*j}$$

d'où :

$$\mathcal{T}_c = \underline{a} \odot b^* = a^i \, b_i$$

qui n'est autre que le produit de dualité $< \underline{a}, b^* >$:

$$\underline{a} \odot b^* =< \underline{a}, b^* > \,. \tag{4.4}$$

Produit contracté de $\mathcal{T} \in E \otimes E^*$ et $\underline{v} \in E$

Ici :

$$\mathcal{T} \otimes \underline{v} = T^i{}_j \, v^k \, \underline{e}_i \otimes e^{*j} \otimes \underline{e}_k$$

d'où :

$$\mathcal{T} \odot \underline{v} = T^i{}_j \, v^j \, \underline{e}_i$$

qui n'est autre que le vecteur de E image de $\underline{v}$ par l'application linéaire φ associée au tenseur mixte du deuxième ordre donné :

$$\mathcal{T} \odot \underline{v} = \varphi(\underline{v}) \,. \tag{4.5}$$

On remarquera aussi que si l'on considère le produit tensoriel de $\underline{v}$ et ${}^t\mathcal{T}$ soit $\underline{v} \otimes {}^t\mathcal{T}$, sa contraction conduit au résultat :

$$\underline{v} \odot {}^t\mathcal{T} = \mathcal{T} \odot \underline{v} = \varphi(\underline{v}) \,. \tag{4.6}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Produit contracté de deux tenseurs mixtes du 2ème ordre

Soient $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}'' \in E \otimes E^*$, φ' et φ'' les applications linéaires de E dans E correspondantes. On vérifie sans difficulté que le produit contracté

$$\mathcal{T}_c = \mathcal{T}'' \odot \mathcal{T}'$$

est, lui aussi, un tenseur mixte du deuxième ordre, élément de $E \otimes E^*$ et que, si l'on désigne φ_c l'application linéaire de E dans E associée à $\mathcal{T}_c$, on a :

$$(\varphi_c)^i{}_j = (T_c)^i{}_j = T''^i{}_k \, T'^k{}_j = \varphi''^i{}_k \, \varphi'^k{}_j \, .$$

qui montre que φ_c est le produit des applications linéaires φ' et φ'' :

$$\varphi_c = \varphi'' \circ \varphi' \, . \tag{4.7}$$

On en déduit aussi le résultat :

$$\forall \, \underline{v} \in E \, , \quad (\mathcal{T}'' \odot \mathcal{T}') \odot \underline{v} = \mathcal{T}'' \odot (\mathcal{T}' \odot \underline{v}) \tag{4.8}$$

qui exprime l'associativité de la multiplication contractée dans ce cas et permet d'écrire, sans autre précision, des formules du type :

$$\mathcal{T}''' \odot \mathcal{T}'' \odot \mathcal{T}' \odot \underline{v} \, , \text{ etc} \, .$$

En particulier, soit $\mathcal{T} \in E \otimes E^*$ et $\mathcal{T}^{-1}$ le tenseur inverse défini au paragraphe 1.3. On a, par application immédiate de (4.8) :

$$\mathcal{T}^{-1} \odot \mathcal{T} = \mathcal{T} \odot \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{I} \, , \tag{4.9}$$

où l'on désigne par $\mathcal{I}$ le tenseur de $E \otimes E^*$ associé à l'application identique de E dans E.

Pour les composantes, on a évidemment :

$$T^i{}_j (T^{-1})^j{}_k = \delta^i_k \, . \tag{4.10}$$

Enfin, il est immédiat de vérifier à partir de (4.6) et (4.8) que, si $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}''$ sont deux éléments de $E \otimes E^*$ on a :

$$^t(\mathcal{T}' \odot \mathcal{T}'') = {}^t\mathcal{T}'' \odot {}^t\mathcal{T}' \, . \tag{4.11}$$

Produit doublement contracté de $\mathcal{T} \in E^* \otimes E^*$, $\underline{v}' \in E$ et $\underline{v}'' \in E$

En se référant à la définition du symbole $\odot$ donnée plus haut (formule 4.3), on voit que la notation :

$$\mathcal{T}_c = \underline{v}' \odot \mathcal{T} \odot \underline{v}''$$

s'interprète sans ambiguité et correspond à la double contraction du tenseur $\mathbb{T} = \underline{v}' \otimes \mathcal{T} \otimes \underline{v}''$ sur ses indices 1 et 2 et sur ses indices 3 et 4.

On vérifie que $\mathcal{T}_c$ n'est autre que le scalaire :

$$\mathcal{T}_c = T_{ij} \, v'^i \, v''^j \, , \tag{4.12}$$

c'est-à-dire que, d'après (3.6) :

$$\underline{v}' \odot \mathcal{T} \odot \underline{v}'' = \mathcal{T}(\underline{v}' \, , \, \underline{v}'') \, . \tag{4.13}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

4.3 Produit doublement contracté de deux tenseurs

$\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}''$ désignant deux tenseurs d'ordres supérieurs ou égaux à 2, on considère le produit tensoriel $\mathcal{T} = \mathcal{T}'' \otimes \mathcal{T}'$. Le produit doublement contracté, noté $\vdots$, correspond à la double contraction de $\mathcal{T}$ ***sur le dernier indice de*** $\mathcal{T}''$ ***et le premier indice de*** $\mathcal{T}'$, puis ***sur l'avant dernier indice de*** $\mathcal{T}''$ ***et le second indice de*** $\mathcal{T}'$, si ces deux contractions sont possibles c'est-à-dire si les variances correspondantes sont effectivement contraires [5].

On écrit ainsi :

$$\mathcal{T}_c = \mathcal{T}'' \vdots \mathcal{T}' \,. \tag{4.14}$$

Le produit doublement contracté est évidemment distributif, à gauche et à droite, par rapport à l'addition.

Produit doublement contracté d'un tenseur 2 fois covariant et d'un tenseur 2 fois contravariant du 2ème ordre

Soient deux tenseurs du deuxième ordre :

$$\mathcal{A} = a_{ij}\, e^{*i} \otimes e^{*j} \in E^* \otimes E^* \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = b^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \in E \otimes E \,.$$

Pour ces deux tenseurs, le produit doublement contracté défini par (4.14) s'écrit :

$$\mathcal{T}_c = \mathcal{A} \vdots \mathcal{B} = a_{ij}\, b^{ji} \,, \tag{4.15}$$

scalaire qui s'identifie aussi à :

$$\mathcal{A} \vdots \mathcal{B} = \text{tr}\, (\mathcal{A} \odot \mathcal{B}) \,. \tag{4.16}$$

On remarquera que, dans ce cas, le produit doublement contracté est commutatif :

$$\mathcal{A} \vdots \mathcal{B} = \mathcal{B} \vdots \mathcal{A} \,.$$

En application des résultats du paragraphe 3.4, on peut mettre chacun des tenseurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sous la forme de la somme de sa partie symétrique et de sa partie antisymétrique obtenues par la formule (3.23) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A} & = \mathcal{A}_{\rm s} + \mathcal{A}_{\rm a} \\ \mathcal{B} & = \mathcal{B}_{\rm s} + \mathcal{B}_{\rm a} \,. \end{array} \right. \tag{4.17}$$

On vérifie alors, en explicitant par exemple $\mathcal{A}_{\rm s} \vdots \mathcal{B}_{\rm a}$ par la formule (4.15) compte tenu des propriétés caractéristiques de $\mathcal{A}_{\rm s}$ et $\mathcal{B}_{\rm a}$, que :

$$\mathcal{A}_{\rm s} \vdots \mathcal{B}_{\rm a} = (a_{\rm s})_{ij} (b_{\rm a})^{ji} = (a_{\rm s})_{ij} (-b_{\rm a})^{ij} = -(a_{\rm s})_{ji} (b_{\rm a})^{ij} = -\mathcal{A}_{\rm s} \vdots \mathcal{B}_{\rm a}$$

[5] La convention adoptée ici relativement aux indices concernés par la double contraction symbolisée par $\vdots$ sera conservée aux paragraphes 5.6 et 5.7 pour les tenseurs euclidiens et leur double contraction symbolisée par « : ». Elle n'est pas générale dans la littérature (on peut rencontrer des cas, notamment pour les tenseurs euclidiens, où la double contraction, symbolisée de la même façon, porte d'abord sur l'avant-dernier indice de $\mathcal{T}''$ et le premier indice de $\mathcal{T}'$, puis sur le dernier indice de $\mathcal{T}''$ et le deuxième indice $\mathcal{T}'$) et il sera donc prudent de contrôler la signification des notations employées.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

d'où

$$\mathcal{A}_{\mathrm{s}} \vdots \mathcal{B}_{\mathrm{a}} = 0 \quad \text{et de même} \quad \mathcal{A}_{\mathrm{a}} \vdots \mathcal{B}_{\mathrm{s}} = 0\,. \tag{4.18}$$

Il s'ensuit que :

$$\mathcal{A} \vdots \mathcal{B} = \mathcal{A}_{\mathrm{s}} \vdots \mathcal{B}_{\mathrm{s}} + \mathcal{A}_{\mathrm{a}} \vdots \mathcal{B}_{\mathrm{a}}\,. \tag{4.19}$$

Le produit doublement contracté $\vdots$ apparaît ainsi comme un produit de dualité entre les espaces $E^* \otimes E^*$ et $E \otimes E$. La formule (4.19) en donne l'expression lorsque $E^* \otimes E^*$ sont décomposés sur les tenseurs symétriques et antisymétriques selon (4.17).

4.4 Contraction totale d'un produit tensoriel

D'une façon générale, étant donnés deux tenseurs d'ordre n, dont le premier $\mathcal{A}$ est p fois contravariant et q fois covariant et le second $\mathcal{B}$ est q fois contravariant et p fois covariant, on peut effectuer la ***contraction totale*** du produit tensoriel $\mathcal{T} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$; tous les couples d'indices de variances contraires sur lesquels on effectue la contraction doivent être énoncés ; on obtient ainsi un ***scalaire*** $\mathcal{T}_c$.

Le produit doublement contracté d'un tenseur 2 fois covariant et d'un tenseur 2 fois contravariant examiné au paragraphe précédent est évidemment un cas particulier de cette contraction totale, de même que le produit contracté d'un vecteur de E et d'un vecteur de E^*.

4.5 Définition d'un tenseur par dualité

Soit, à titre d'exemple, $\mathcal{A}$ un tenseur donné de $E \otimes E^* \otimes E$.

Soit $\mathcal{X}$ un tenseur quelconque de $E^* \otimes E \otimes E^*$.

On effectue le produit tensoriel :

$$\mathcal{T} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{X}\,. \tag{4.20}$$

La contraction totale de ce produit tensoriel, sur les couples d'indices 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 donne un scalaire $\mathcal{T}_c$ fonction linéaire de $\mathcal{X}$.

Ainsi, à partir du tenseur $\mathcal{A}$ donné de $E \otimes E^* \otimes E$, on peut définir une ***forme linéaire*** a sur $E^* \otimes E \otimes E^*$, c'est-à-dire un élément de $(E^* \otimes E \otimes E^*)^*$.

$E \otimes E^* \otimes E$ et $(E^* \otimes E \otimes E^*)^*$ sont isomorphes.

En mécanique des milieux continus (cf. par exemple le chapitre V, section 3 pour la représentation des efforts intérieurs) on utilisera la réciproque de cette propriété : la donnée d'une forme linéaire a sur un espace vectoriel de tenseurs $\mathcal{X}$, p fois contravariants et q fois covariants, définit un tenseur $\mathcal{A}$ de variances contraires (on précisera les couples d'indices sur lesquels on effectue la contraction totale du produit tensoriel (4.20)).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En particulier, une forme linéaire a donnée sur $E \otimes E$ définit un tenseur $\mathcal{A}$ de $E^* \otimes E^*$ à travers le produit de dualité $\odot$ par la formule :

$$\forall\, \mathcal{X} \in E \otimes E \qquad \mathcal{A} \odot \mathcal{X} = a(\mathcal{X}) \quad ; \tag{4.21}$$

si la forme linéaire a n'est définie que sur le sous-espace des tenseurs symétriques de $E \otimes E$, soit pour $\mathcal{X} \in (E \otimes E)_{\rm s}$, alors le tenseur $\mathcal{A}$ associé à a par la formule :

$$\forall\, \mathcal{X} \in (E \otimes E)_{\rm s} \qquad \mathcal{A} \odot \mathcal{X} = a(\mathcal{X}) \tag{4.22}$$

n'est connu qu'à un tenseur antisymétrique arbitraire près car, en conséquence de (4.19), la formule (4.22) ne détermine que la partie symétrique de $\mathcal{A}$.

4.6 Invariants d'un tenseur mixte du 2ème ordre

$\mathcal{T}$ désignant un tenseur mixte contravariant-covariant, on a vu au paragraphe 3.3 que les n coefficients du polynôme caractéristique en λ, qui s'écrit $\det[T^i{}_j - \lambda\, \delta^i_j]$, sont des invariants dans ***tout*** changement de base $\{\underline{e}_k\}$ de E , la base $\{e^{*k}\}$ de E^* étant la base duale.

Il est courant en mécanique de substituer à ces n invariants polynomiaux classiques $(\text{tr}\ \mathcal{T}, \ldots, \det \mathcal{T})$ de degrés 1 à n par rapport aux composantes $T^i{}_j$, le jeu de n invariants polynomiaux indépendants de degrés 1 à n, obtenus par les contractions totales suivantes :

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}\ \mathcal{T} = T^i{}_i \\ I_2 = \dfrac{1}{2}\text{tr}\ (\mathcal{T} \odot \mathcal{T}) = \dfrac{1}{2}\, T^i{}_j\, T^j{}_i \\ I_3 = \dfrac{1}{3}\text{tr}\ (\mathcal{T} \odot \mathcal{T} \odot \mathcal{T}) = \dfrac{1}{3}\, T^i{}_j\, T^j{}_k\, T^k{}_i \\ \text{etc.} \\ I_n = \dfrac{1}{n}\text{tr}\ (\mathcal{T} \odot \mathcal{T} \odot \mathcal{T} \odot ... \odot \mathcal{T}) = \dfrac{1}{n}\, T^i{}_j\, T^j{}_k\, \ldots\, T^p{}_i\,. \end{cases} \tag{4.23}$$

5 Tenseurs sur un espace vectoriel euclidien

5.1 Définition d'un espace euclidien

L'espace vectoriel E est muni d'une structure euclidienne par la donnée d'une ***forme bilinéaire symétrique*** fondamentale ***définie positive*** sur $E \times E$, soit G appelée « ***produit scalaire*** ».

Avec la notation (4.13) on écrit :

$$\forall\, \underline{v}'\,, \underline{v}'' \in E\ ,\ G(\underline{v}'\,, \underline{v}'') = \underline{v}' \odot G \odot \underline{v}''\,, \tag{5.1}$$

et en adoptant la notation usuelle pour le produit scalaire :

$$\forall\, \underline{v}'\,, \underline{v}'' \in E\ ,\ G(\underline{v}'\,, \underline{v}'') = \underline{v}'\,.\,\underline{v}''\,, \tag{5.2}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

expression sur laquelle on reviendra au paragraphe 5.5.

G est appelé ***tenseur métrique***. On désigne par g_{ij} ses composantes pour une base $\{\underline{e}_k\}$ de E et la base duale $\{e^{*k}\}$ de E^* ; on a, en conséquence de (3.3) et (3.4) :

$$G = g_{ij}\, e^{*i} \otimes e^{*j}\ ,\ g_{ij} = G(\underline{e}_i\ ,\ \underline{e}_j) = \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j\ . \tag{5.3}$$

5.2 Tenseur des dilatations dans une application linéaire

Soit φ une application linéaire de E dans E, et $\mathcal{F}$ le tenseur mixte de $E \otimes E^*$ associé à celle-ci.

On cherche à évaluer, pour deux vecteurs quelconques $\underline{v}'$, $\underline{v}''$, le produit scalaire de leurs images dans E par φ soit : $\varphi(\underline{v}') \cdot \varphi(\underline{v}'')$. C'est évidemment une forme bilinéaire symétrique de $\underline{v}'$ et $\underline{v}''$, qui est définie positive si φ est inversible. En utilisant les expressions de $\varphi(\underline{v}')$ et $\varphi(\underline{v}'')$ données par (4.6) il vient :

$$\varphi(\underline{v}') \cdot \varphi(\underline{v}'') = (\underline{v}' \odot {}^t\mathcal{F}) \odot G \odot (\mathcal{F} \odot \underline{v}'')\,. \tag{5.4}$$

En introduisant le tenseur $\mathcal{C} = {}^t\mathcal{F} \odot G \odot \mathcal{F}$, élément de $E^* \otimes E^*$, on vérifie que la formule (5.4) possède une propriété d'associativité et que l'on peut écrire :

$$\varphi(\underline{v}') \cdot \varphi(\underline{v}'') = \underline{v}' \odot ({}^t\mathcal{F} \odot G \odot \mathcal{F}) \odot \underline{v}'' = \underline{v}' \odot \mathcal{C} \odot \underline{v}''\,. \tag{5.5}$$

Le tenseur $\mathcal{C} = {}^t\mathcal{F} \odot G \odot \mathcal{F}$ est le tenseur 2 fois covariant sur $E \otimes E$ donnant le produit scalaire des images par φ de deux vecteurs quelconques de E. La comparaison de ce tenseur $\mathcal{C}$ avec le tenseur métrique G permet de caractériser la « déformation» du milieu par l'application linéaire φ (cf. chapitre II, section 3).

5.3 Isomorphisme entre E et E^*

On sait que la structure euclidienne de E permet de mettre en évidence un isomorphisme dit ***canonique*** entre E et son dual E^*. Cet isomorphisme, noté γ, est défini par :

$$\forall\, \underline{v}' \in E\ ,\ \forall\, \underline{v} \in E\ ,\ \underline{v}' \cdot \underline{v} =< \underline{v}'\ ,\ \gamma(\underline{v}) > \tag{5.6}$$

où $\gamma(\underline{v})$ est l'image dans E^* de $\underline{v}$ par γ [(6)].

En introduisant le produit contracté $G \odot \underline{v}$ on peut expliciter (5.6) dont on déduit alors de façon évidente que :

$$\gamma(\underline{v}) = G \odot \underline{v}\,. \tag{5.7}$$

Avec les bases $\{\underline{e}_i\}$ dans E et $\{\underline{e}^{*k}\}$ duale dans E^*, on désigne par γ_{ij} les coefficients de la matrice de γ définis par :

$$\gamma(\underline{e}_j) = \gamma_{ij}\, e^{*i}\,. \tag{5.8}$$

Par comparaison avec (5.7) il vient :

$$g_{ij} = \gamma_{ij}\,. \tag{5.9}$$

[(6)] En d'autres termes l'isomorphisme γ associe à $\underline{v}$ la forme linéaire $\gamma(\underline{v})$ telle que son produit de dualité avec tout vecteur $\underline{v}'$, de E soit égal au produit scalaire de $\underline{v}$ avec ce même vecteur $\underline{v}'$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Ainsi les ***coefficients de la matrice*** de l'isomorphisme γ dans les bases duales $\{\underline{e}_i\}$ et $\{e^{*k}\}$ de E et E^* sont identiques aux ***composantes*** du tenseur métrique dans la base $\{e^{*i} \otimes e^{*j}\}$.

L'isomorphisme γ induit naturellement dans E^* une structure euclidienne. La forme bilinéaire fondamentale G^* sur $E^* \times E^*$ est définie comme l'image de la forme bilinéaire G sur $E \times E$: pour deux éléments $u^{*(1)}$, $u^{*(2)}$ de E^* , elle a pour valeur le produit scalaire de leurs originaux dans E :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\, u^{*(1)}\,,\, u^{*(2)} \in\, E^*\,, \\ u^{*(1)} \odot G^* \odot u^{*(2)} = \gamma^{-1}(u^{*(1)}) \odot G \odot \gamma^{-1}(u^{*(2)})\,. \end{array} \right. \tag{5.10}$$

On désigne par g^{ij} les composantes de G^* pour les bases $\{\underline{e}_k\}$ et $\{e^{*k}\}$ d'où, d'après (3.3) et (3.4) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} G^* & = g^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \\ g^{ij} & = G^*(e^{*i}\,,\, e^{*j})\,. \end{array} \right. \tag{5.11}$$

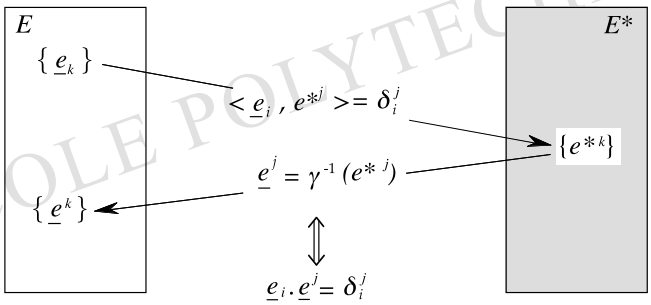


Figure 1 – Bases primale et duales dans E^* et E

Il est commode d'introduire les vecteurs de E, notés $\underline{e}^k$, images par γ^{-1}, isomorphisme réciproque de γ , des vecteurs e^{*k} de la base duale de $\{\underline{e}_k\}$ dans E^* :

$$\underline{e}^k = \gamma^{-1}(e^{*k})\,. \tag{5.12}$$

On a alors, de façon évidente, en conséquence de (5.11) et (5.10) :

$$g^{ij} = \underline{e}^i \,.\, \underline{e}^j \tag{5.13}$$

tandis que $\underline{e}_i \,.\, \underline{e}^j =< \underline{e}_i\,,\, e^{*j} >$ d'après (5.6) et (5.12), d'où :

$$\underline{e}_i \,.\, \underline{e}^j = \delta_i^j\,. \tag{5.14}$$

Les vecteurs $\underline{e}^i$ constituent une base $\{\underline{e}^k\}$ de E qui est appelée ***duale dans*** E de la base $\{\underline{e}_k\}$: chaque vecteur $\underline{e}^i$ de la base $\{\underline{e}^k\}$ est ainsi « orthogonal » à $(n-1)$ vecteurs de la base primale $\{\underline{e}_k\}$ et tel que son produit scalaire avec le n-ième vecteur de cette base soit égal à 1 (cf. figures 1 et 2).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Les composantes γ^{ij} de l'isomorphisme réciproque γ^{-1} sont données par :

$$\gamma^{-1}(e^{*j}) = \gamma^{ij}\,\underline{e}_i = \underline{e}^j$$

et l'on déduit de (5.13) et (5.14) que :

$$g^{ij} = \gamma^{kj}\,\underline{e}^i \cdot \underline{e}_k = \gamma^{ij} \tag{5.15}$$

d'où :

$$\underline{e}^j = g^{ij}\,\underline{e}_i \tag{5.16}$$

et aussi, en rapprochant (5.9) et (5.15) :

$$g_{ik}\,g^{kj} = \delta_i^j \tag{5.17}$$

et

$$\underline{e}_i = g_{ij}\,\underline{e}^j \tag{5.18}$$

(on rappelle que G et G^* sont symétriques).

On retiendra les formules

$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{e}_i \cdot \underline{e}^j = \delta_i^j \\ g_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j \ , \ g^{ij} = \underline{e}^i \cdot \underline{e}^j \\ g_{ik}\,g^{kj} = \delta_i^j \\ \underline{e}^i = g^{ij}\,\underline{e}_j \ , \ \underline{e}_i = g_{ij}\,\underline{e}^j \end{array}} \tag{5.19}$$

On remarque que ***si la base primale*** $\{\underline{e}_k\}$ ***est orthonormée, sa base duale*** $\{\underline{e}^k\}$ ***dans*** E ***lui est identique***.

5.4 Repérage covariant d'un vecteur de E

La construction de la base duale dans E à laquelle on a procédé ci-dessus permet maintenant de définir, pour tout vecteur de E, ce que l'on appelle son repérage covariant sous la forme :

$$\forall\, \underline{u} \in E \ , \ \underline{u} = u_\ell\,\underline{e}^\ell \ , \tag{5.20}$$

dans laquelle les u_ℓ sont désignées comme les ***composantes covariantes*** du vecteur $\underline{u}$.

La justification de cette terminologie tient au fait que les composantes u_ℓ définies par (5.20) sont aussi les composantes de la forme linéaire $\gamma(\underline{u})$ dans la base duale $\{e^{*k}\}$ de E^* :

$$\gamma(\underline{u}) = u_\ell\,\gamma(\underline{e}^\ell) = u_\ell\,e^{*\ell} \quad ;$$

ces composantes se transforment selon la règle de covariance exposée au paragraphe 3.2.

La figure 2 illustre les résultats (5.19) et (5.20) sur le cas « concret » où $E = \mathbb{R}^2$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

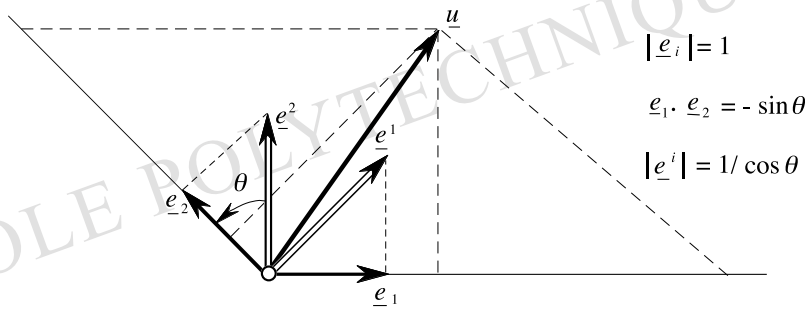


Figure 2 – $E = \mathbb{R}^2$, base $\{\underline{e}_i\}$ normée ; les composantes contravariantes sont les coordonnées obliques suivant $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$; les composantes covariantes sont les mesures des projections orthogonales de $\underline{u}$ sur les directions de $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$; par exemple : $u_1 = \underline{u} \,.\, \underline{e}_1$

5.5 Tenseurs euclidiens du 1er ordre ; produit contracté

L'isomorphisme entre E et E^* signifie que tout élément $\underline{u}$ de E peut recevoir indifféremment deux interprétations :

- interprétation primale, vecteur de E
- interprétation duale, forme sur E, à travers le produit scalaire.

L'introduction de la représentation covariante des éléments de E illustre cette dualité d'interprétation comme on l'a vu précédemment :

(5.21) $\underline{u} = u^\ell \, \underline{e}_\ell$ traduit l'aspect primal

(5.22) $\underline{u} = u_\ell \, \underline{e}^\ell$ traduit l'aspect dual .

Définition

Pour rendre compte de cela on introduit la notion de ***tenseur euclidien du 1er ordre***.

Tout vecteur $\underline{u}$ de E (tenseur contravariant du 1er ordre) et son tenseur covariant associé par l'isomorphisme canonique, $u^* = \gamma(\underline{u})$, seront désormais considérés comme un unique tenseur appelé ***tenseur euclidien du 1er ordre***, identifié au vecteur $\underline{u}$ de E, sur lequel on verra qu'il est possible d'effectuer ***toutes*** les opérations précédemment définies pour les tenseurs du 1er ordre. Le tenseur euclidien $\underline{u}$ pourra être décomposé selon (5.21) et (5.22) qui sont respectivement appelées ses ***représentations contravariante et covariante***.

Produit contracté

Considérant deux tenseurs euclidiens du 1er ordre, soient $\underline{u}$ et $\underline{v}$ on définit le produit contracté en remarquant que :

(5.23) $$\underline{u} \odot v^* = u^i \, v_i = u^i \, g_{ij} \, v^j = u_j \, v^j = u^* \odot \underline{v} \,.$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C'est cette valeur, obtenue en contractant un des vecteurs avec la forme linéaire associée à l'autre, qui est naturellement adoptée pour le ***produit contracté des tenseurs euclidiens*** $\underline{u}$ et $\underline{v}$. L'examen de la formule (5.23) rappelle de plus que $\underline{u} \odot v^* = u^* \odot \underline{v}$ n'est autre que le produit scalaire $\underline{u} \,.\, \underline{v}$ de $\underline{u}$ et $\underline{v}$ vecteurs de E.

Il est ainsi possible d'utiliser désormais le symbole « . » pour noter la contraction de deux tenseurs euclidiens du 1er ordre :

$$\underline{u} \,.\, \underline{v} = u^i \, g_{ij} \, v^j = u^i \, v_i = u_i \, v^i \,. \tag{5.24}$$

L'utilisation du symbole « . » manifeste que le produit contracté de deux tenseurs euclidiens du 1er ordre s'obtient simplement en calculant le produit scalaire des vecteurs $\underline{u}$ ***et*** $\underline{v}$ de E compte tenu des relations (5.19) et (5.20) ; ainsi par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u} \,.\, \underline{v} = (u^i \, \underline{e}_i) \,.\, (v^j \, \underline{e}_j) = u^i \, v^j (\underline{e}_i \,.\, \underline{e}_j) = g_{ij} \, u^i \, v^j \\ \text{ou encore} \\ \underline{u} \,.\, \underline{v} = (u^i \, \underline{e}_i) \,.\, (v_j \, \underline{e}^j) = u^i \, v_j (\underline{e}_i \,.\, \underline{e}^j) = u^i \, v_i = u_i \, v^i \,, \end{array} \right. \tag{5.25}$$

où l'on voit l'intérêt de l'introduction de la représentation covariante.

5.6 Tenseurs euclidiens du 2ème ordre décomposés ; produits contractés

L'isomorphisme γ établi entre E et E^*, entraîne naturellement que les espaces produits $E \times E$, $E \times E^*$, $E^* \times E$ et $E^* \times E^*$ sont isomorphes. Il en résulte alors que les espaces de tenseurs du 2ème ordre, $E^* \otimes E^*$, $E^* \otimes E$, $E \otimes E^*$ et $E \otimes E$ sont, eux aussi, isomorphes. On se propose, pour examiner les conséquences de ces isomorphismes, de considérer d'abord le cas des tenseurs décomposés.

$\underline{a}$ et $\underline{b}$ désignant deux vecteurs de E les isomorphismes entre les espaces de tenseurs ci-dessus mettent en correspondance les tenseurs décomposés

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{a} \otimes \underline{b} \,,\, \underline{a} \otimes b^* \,,\, a^* \otimes \underline{b} \text{ et } a^* \otimes b^* \,, \\ \text{où } a^* = \gamma(\underline{a}) \quad \text{et } b^* = \gamma(\underline{b}) \end{array} \right. \tag{5.26}$$

en sorte que, considérant par exemple $\mathcal{T} = \underline{a} \otimes \underline{b}$ et $\mathcal{T}' = a^* \otimes b^*$ on a :

$$\forall \, \underline{u} \,,\, \underline{v} \in E \quad \mathcal{T}'(\underline{u} \,,\, \underline{v}) = \mathcal{T}(u^* \,,\, v^*) \tag{5.27}$$

$$\text{où } u^* = \gamma(\underline{u}) \quad \text{et} \quad v^* = \gamma(\underline{v}) \,.$$

En explicitant $\mathcal{T}(u^* \,,\, v^*)$ et $\mathcal{T}'(\underline{u} \,,\, \underline{v})$ selon (2.2), (4.4) et (4.13) il vient :

$$\mathcal{T}(u^* \,,\, v^*) = u^* \odot \mathcal{T} \odot v^* = (\underline{a} \odot u^*)(\underline{b} \odot v^*) \tag{5.28}$$

et

$$\mathcal{T}'(\underline{u} \,,\, \underline{v}) = \underline{u} \odot \mathcal{T}' \odot \underline{v} = (a^* \odot \underline{u})(b^* \odot \underline{v}) \,. \tag{5.29}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Définition

La comparaison de ces formules avec (5.23) et (5.24) qui définissent le produit contracté de deux tenseurs euclidiens du 1er ordre, montre que, de façon cohérente,

- on définira le ***tenseur euclidien*** du 2ème ordre décomposé, noté $\underline{\underline{T}}$, identifié au tenseur $\underline{a} \otimes \underline{b}$ de $E \otimes E$, dont (5.26) fournit les quatre formes associées :

$$\underline{\underline{T}} = \underline{a} \otimes \underline{b} \quad ;$$

- on notera par le symbole « . » la contraction de ce tenseur avec un tenseur euclidien du 1er ordre (en conservant les conventions antérieures – cf. (4.3) et (4.13) au paragraphe 4.2 – sur les indices concernés) :

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot (\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot \underline{v} \quad ; \tag{5.30}$$

- cette expression s'explicite en :

$$\underline{u} \cdot (\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot \underline{v} = (\underline{a} \cdot \underline{u})(\underline{b} \cdot \underline{v}) \tag{5.31}$$

- qui fait intervenir les produits contractés des tenseurs euclidiens du 1er ordre $\underline{a}$ et $\underline{u}$, $\underline{b}$ et $\underline{v}$, calculables comme indiqué plus haut par (5.25).

Produit contracté d'un tenseur euclidien du 2ème ordre décomposé et d'un tenseur euclidien du 1er ordre

De même on vérifie la cohérence de la notation

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = (\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot \underline{v} \tag{5.32}$$

pour le produit contracté d'un tenseur euclidien du 2ème ordre décomposé et d'un tenseur euclidien du 1er ordre défini comme le produit contracté selon (4.5) de la forme mixte associée à $\underline{\underline{T}}$ dans $E \otimes E^*$ et du vecteur $\underline{v}$ de E. Cette formule s'explicite en :

$$(\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot \underline{v} = \underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{v}) \tag{5.33}$$

qui en permet le calcul selon (5.24) et (5.25) .

Produit contracté de deux tenseurs euclidiens du 2ème ordre décomposés

On définit aussi le produit contracté de deux tenseurs euclidiens du 2ème ordre décomposés, $\underline{\underline{T}}'' = \underline{a}'' \otimes \underline{b}''$ et $\underline{\underline{T}}' = \underline{a}' \otimes \underline{b}'$, par la contraction du produit des formes mixtes associées à $\underline{\underline{T}}''$ et $\underline{\underline{T}}'$ dans $E \otimes E^*$. On vérifie à partir de (5.32) et (5.33), que la notation

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}'' \cdot \underline{\underline{T}}' = (\underline{a}'' \otimes \underline{b}'') \cdot (\underline{a}' \otimes \underline{b}') \tag{5.34}$$

est bien cohérente pour ce produit qui s'explicite en :

$$\underline{\underline{T}} = (\underline{b}'' \cdot \underline{a}')\underline{a}'' \otimes \underline{b}' \tag{5.35}$$

dont le calcul est aisé en termes de tenseurs euclidiens.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Produit doublement contracté de deux tenseurs euclidiens du 2ème ordre décomposés

Le produit doublement contracté des tenseurs euclidiens décomposé $\underline{\underline{T}}''$ et $\underline{\underline{T}}'$ ci-dessus est défini comme le produit doublement contracté selon (4.4) de deux formes associées respectivement à $\underline{\underline{T}}''$ et à $\underline{\underline{T}}'$ dont les variances concernées sont contraires. On adopte pour ce produit la notation

$$\underline{\underline{T}}'' : \underline{\underline{T}}' = (\underline{a}'' \otimes \underline{b}'') : (\underline{a}' \otimes \underline{b}') \quad ; \tag{5.36}$$

sa définition est bien univoque (c'est-à-dire indépendante du choix particulier des formes associées à $\underline{\underline{T}}''$ et à $\underline{\underline{T}}'$) et l'on a :

$$(\underline{a}'' \otimes \underline{b}'') : (\underline{a}' \otimes \underline{b}') = (\underline{a}'' \,.\, \underline{b}')(\underline{b}'' \,.\, \underline{a}') \tag{5.37}$$

qui en permet le calcul aisé.

5.7 Tenseurs euclidiens du 2ème ordre

Les résultats précédents pour les tenseurs du 2ème ordre décomposés ont montré :

- l'introduction de la notion de tenseur euclidien ; celui-ci est identifié à l'élément de $E \otimes E$ et les quatre formes (5.26) lui sont associées par l'isomorphisme canonique γ ;
- que toutes les opérations de contraction définies dans la section 4 sous conditions de variances contraires, sont maintenant ***toujours définies*** sur les tenseurs euclidiens ;
- que ***ces opérations s'expriment toutes au moyen du produit scalaire sur*** E, ce qui conduit à des règles opératoires très simples.

Ces résultats essentiels s'étendent aux tenseurs d'ordre 2 en général en s'appuyant sur la décomposition (section 3) et sur la distributivité du produit tensoriel de tenseurs.

Définition

L'isomorphisme entre $E \otimes E, \ldots, E^* \otimes E^*$ induit par l'isomorphisme γ est établi par des formules telles que (5.27).

Considérant le tenseur

$$\mathcal{T} = T^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad \text{de} \quad E \otimes E \tag{5.38}$$

il lui est associé dans $E \otimes E^*$, dans $E^* \otimes E$, et dans $E^* \otimes E^*$:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{T}' &= T^i{}_k\, \underline{e}_i \otimes e^{*k} & \text{avec} \quad T^i{}_k = T^{ij}\, g_{jk}\,, \\ \mathcal{T}'' &= T_k{}^j\, e^{*k} \otimes \underline{e}_j & \text{avec} \quad T_k{}j = g_{ki}\, T^{ij}\,, \\ \mathcal{T}''' &= T_{k\ell}\, e^{*k} \otimes e^{*\ell} & \text{avec} \quad T_{k\ell} = g_{ki}\, T^{ij}\, g_{j\ell}\,. \end{array} \right. \tag{5.39}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Le ***tenseur euclidien*** correspondant à ces quatre tenseurs associés est $\underline{\underline{T}}$, identifié à l'élément de $E \otimes E$:

$$\underline{\underline{T}} = T^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \tag{5.40}$$

La distributivité du produit tensoriel par rapport à l'addition (§ 2.1) étant évidemment conservée au niveau des tenseurs euclidiens à travers cette définition, on peut dans (5.40) décomposer les vecteurs $\underline{e}_i$ et $\underline{e}_j$ sur la base duale $\{\underline{e}^k\}$ selon (5.19). On obtient alors pour $\underline{\underline{T}}$ de nouvelles expressions ; par exemple :

$$\underline{\underline{T}} = T^{ij} \underline{e}_i \otimes (g_{jk}\, \underline{e}^k) = T^{ij}\, g_{jk}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^k$$

c'est-à-dire, selon (5.39) :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \underline{\underline{T}} & = T^i{}_k\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^k \quad \text{avec} & \quad T^i{}_k = T^{ij}\, g_{jk}\,, \\ \underline{\underline{T}} & = T_k{}^j\, \underline{e}^k \otimes \underline{e}_j \quad \text{avec} & \quad T_k{}^j = g_{ki}\, T^{ij}\,, \\ \underline{\underline{T}} & = T_{k\ell}\, \underline{e}^k \otimes \underline{e}^\ell \quad \text{avec} & \quad T_{k\ell} = g_{ki}\, T^{ij}\, g_{j\ell}\,. \end{array} \right. \tag{5.41}$$

On dit que (5.40) et (5.41) constituent les ***quatre représentations du tenseur euclidien*** $\underline{\underline{T}}$: respectivement représentations 2 fois contravariante, 1-contravariante 1-covariante, 1-covariante l-contravariante, 2 fois covariante. Cette terminologie se justifie, comme au paragraphe 5.4, par la comparaison de ces expressions avec celles des différents tenseurs associés à $\mathcal{T}$. On insistera toutefois sur le fait que (5.40) et (5.41) représentent quatre expressions du même tenseur $\underline{\underline{T}}$ élément de $E \otimes E$.

Produits contractés

La notion de tenseur euclidien du 2ème ordre étant ainsi introduite dans le cas général, toutes les définitions et tous les résultats relatifs aux tenseurs décomposés sont généralisables, en remarquant notamment la distributivité du produit contracté de tenseurs euclidiens par rapport à l'addition qui permet le calcul aisé des produits contractés.

À titre d'exemple :

$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = (T^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot (v^k\, \underline{e}_k) = T^{ij}\, v^k (\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k)\, \underline{e}_i = T^{ij}\, g_{jk}\, v^k\, \underline{e}_i = T^{ij}\, v_j\, \underline{e}_i = T^i{}_k\, v^k\, \underline{e}_i$;

et aussi

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}}'' \cdot \underline{\underline{T}}' &= (T''^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot (T'^{k\ell}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_\ell) \\ &= T''^{ij}\, T'^{k\ell} (\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k)\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_\ell = T''^{ij}\, g_{jk}\, T'^{k\ell} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_\ell) = T''^{ij} T'{}_j{}^\ell\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_\ell = \text{etc.} \end{aligned}$$

ou bien

$\underline{\underline{T}}'' \cdot \underline{\underline{T}}' = (T''^i{}_j\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j) \cdot (T'^k{}_\ell\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}^\ell) = T''^i{}_j\, T'^j{}_\ell\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^\ell$;

et encore, pour le produit doublement contracté

$\underline{\underline{T}}'' : \underline{\underline{T}}' = (T^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) : (T'^{k\ell}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_\ell) = T''^{ij}\, T'^{k\ell} (\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k)(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_\ell) = g_{i\ell}\, T''^{ij}\, g_{jk}\, T'^{k\ell}$

$\underline{\underline{T}}'' : \underline{\underline{T}}' = T''{}^j{}_\ell\, T'{}_j{}^\ell$.

On remarquera aussi l'identité (utilisée notamment au chapitre V) :

$(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) : \underline{\underline{C}} = (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{A}}) : \underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}}) : \underline{\underline{A}}$

(valable aussi pour un nombre plus élevé de tenseurs), qui est évidente dans le cas des tenseurs décomposés $\underline{\underline{A}} = \underline{a} \otimes \underline{a}'$, $\underline{\underline{B}} = \underline{b} \otimes \underline{b}'$, $\underline{\underline{C}} = \underline{c} \otimes \underline{c}'$ car alors $(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) : \underline{\underline{C}} = (\underline{c}' \cdot \underline{a})(\underline{a}' \cdot \underline{b})(\underline{b}' \cdot \underline{c})$, et qui s'étend sans difficulté au cas général.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Les exemples ci-dessus mettent en évidence que les contractions sont ***toujours possibles*** pour les tenseurs euclidiens et qu'elles se calculent en adoptant pour les tenseurs en cause des représentations telles que les indices concernés soient toujours l'un supérieur et l'autre inférieur. On voit aussi qu'une méthode sûre et systématique pour calculer les produits contractés, tant que l'on n'est pas familier avec ce genre d'exercice, consiste simplement à ***expliciter les produits scalaires*** dans E qui correspondent aux diverses contractions.

Transposition

À partir de la définition donnée au paragraphe 3.3 et de la propriété caractéristique (4.6) on définit le transposé du tenseur euclidien $\underline{\underline{T}}$, noté ${}^t\underline{\underline{T}}$, par la formule :

$$\forall\, \underline{v}\ ,\ \underline{\underline{T}}\cdot\underline{v} = \underline{v}\cdot {}^t\underline{\underline{T}} \tag{5.42}$$

équivalente à dire que le tenseur mixte associé à ${}^t\underline{\underline{T}}$ dans $E^*\otimes E$ est le transposé du tenseur mixte associé à $\underline{\underline{T}}$ dans $E\otimes E^*$.

Les représentations de $\underline{\underline{T}}$ étant $\underline{\underline{T}} = T^{ij}\,\underline{e}_i\otimes\underline{e}_j = T_{ij}\,\underline{e}^i\otimes\underline{e}^j = T^i{}_j\underline{e}_i\otimes\underline{e}^j = T_i{}^j\,\underline{e}^i\otimes\underline{e}_j$ on trouve pour les ${}^t\underline{\underline{T}}$ les représentations :

$$\left\{\begin{array}{l} {}^t\underline{\underline{T}} = ({}^tT)^{ij}\,\underline{e}_i\otimes\underline{e}_j = T^{ji}\,\underline{e}_i\otimes\underline{e}_j\ ,\\ {}^t\underline{\underline{T}} = ({}^tT)_{ij}\,\underline{e}^i\otimes\underline{e}^j = T_{ji}\,\underline{e}^i\otimes\underline{e}^j\ ,\\ {}^t\underline{\underline{T}} = ({}^tT)^i{}_j\,\underline{e}_i\otimes\underline{e}^j = T_j{}^i\,\underline{e}_i\otimes\underline{e}^j\ ,\\ {}^t\underline{\underline{T}} = ({}^tT)_i{}^j\,\underline{e}^i\otimes\underline{e}_j = T^j{}_i\,\underline{e}^i\otimes\underline{e}_j\ , \end{array}\right. \tag{5.43}$$

qui montrent que pour les représentations 2 fois contravariante et 2 fois covariante les coefficients de $\underline{\underline{T}}$ et de ${}^t\underline{\underline{T}}$ se correspondent par permutation des deux indices, et que pour les représentations mixtes il y a permutation de l'ordre des deux indices qui conservent leur position (supérieure ou inférieure).

> À ce stade il est intéressant de reprendre l'exemple du calcul du tenseur des dilatations dans une application linéaire de E dans E traité au paragraphe 5.2. Il vient :
> $\varphi(\underline{v}')\cdot\varphi(\underline{v}'') = (\underline{\underline{F}}\cdot\underline{v}')\cdot(\underline{\underline{F}}\cdot\underline{v}'') = \underline{v}'\cdot\underline{\underline{C}}\cdot\underline{v}''$ avec $\underline{\underline{C}} = {}^t\underline{\underline{F}}\cdot\underline{\underline{F}}$.
> On peut expliciter $\underline{\underline{C}}$, par exemple sous la forme $\underline{\underline{C}} = (({}^tF)_i{}^k\,\underline{e}^i\otimes\underline{e}_k)\cdot(F^\ell{}_j\,\underline{e}_\ell\otimes\underline{e}^j)$ d'où $\underline{\underline{C}} = ({}^tF)_i{}^k\,g_{k\ell}\,F^\ell{}_j\,\underline{e}^i\otimes\underline{e}^j$ où l'on retrouve l'écriture de la formule (5.5), et qui devient compte tenu de (5.43) : $\underline{\underline{C}} = F^k{}_i\,g_{k\ell}\,F^\ell{}_j\,\underline{e}^i\otimes\underline{e}^j$.

Tenseurs euclidiens du 2ème ordre symétriques et antisymétriques

On définit ***la symétrie d'un tenseur euclidien*** $\underline{\underline{T}}$ par la symétrie (cf. § 3.4) de ses tenseurs associés dans $E\otimes E$ ou dans $E^*\otimes E^*$ (l'une implique l'autre).

Pour un tel tenseur on a donc les relations de symétrie suivantes pour les représentations 2 fois contravariante, 2 fois covariante et mixtes :

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{\underline{T}} = T^{ij}\,\underline{e}_i\otimes\underline{e}_j \quad\text{avec}\quad T^{ij} = T^{ji}\ ,\\ \underline{\underline{T}} = T_{ij}\,\underline{e}^i\otimes\underline{e}^j \quad\text{avec}\quad T_{ij} = T_{ji}\ ,\\ \underline{\underline{T}} = T^j{}_i\,\underline{e}_j\otimes\underline{e}^i = T_i{}^j\,\underline{e}^i\otimes\underline{e}_j \quad\text{avec } T^j{}_i = T_i{}^j\ . \end{array}\right. \tag{5.44}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La symétrie de $\underline{\underline{T}}$ s'exprime aussi par la ***propriété caractéristique*** :

$$\forall\, \underline{u}\,,\ \underline{v}\,,\ \underline{u}\,.\,\underline{\underline{T}}\,.\,\underline{v} = \underline{v}\,.\,\underline{\underline{T}}\,.\,\underline{u}\,. \tag{5.45}$$

De la même manière on définit les ***tenseurs euclidiens antisymétriques*** pour lesquels les formules ci-dessus (5.44 et 5.45) sont modifiées par adjonction d'un signe « moins » :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall\, \underline{u}\,,\ \underline{v}\,, & \underline{u}\,.\,\underline{\underline{T}}\,.\,\underline{v} = -\underline{v}\,.\,\underline{\underline{T}}\,.\,\underline{u} \\ T^{ij} = -T^{ji}\ , & T_{ij} = -T_{ji}\ ,\ T^{j}{}_{i} = -T_{i}{}^{j}\ . \end{array} \right. \tag{5.46}$$

La comparaison de ces formules avec les résultats donnés plus haut pour la transposition met en évidence les propriétés caractéristiques :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \underline{\underline{T}} \text{ symétrique} & \Leftrightarrow & \underline{\underline{T}} = {}^{t}\underline{\underline{T}} \\ \underline{\underline{T}} \text{ antisymétrique} & \Leftrightarrow & \underline{\underline{T}} = -{}^{t}\underline{\underline{T}}. \end{array} \right. \tag{5.47}$$

Suivant la démarche du paragraphe 3.4, on peut décomposer un tenseur euclidien du $2^{\text{ème}}$ ordre quelconque en ses parties symétrique et antisymétrique ; les formules deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_{\text{s}} + \underline{\underline{T}}_{\text{a}} \\ \underline{\underline{T}}_{\text{s}} = \dfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + {}^{t}\underline{\underline{T}}) \\ \underline{\underline{T}}_{\text{a}} = \dfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - {}^{t}\underline{\underline{T}})\ . \end{array} \right. \tag{5.48}$$

Considérant alors deux tenseurs $\underline{\underline{T}}''$ et $\underline{\underline{T}}'$ décomposés selon (5.48) leur produit doublement contracté s'exprime sous la forme :

$$\underline{\underline{T}}'' : \underline{\underline{T}}' = \underline{\underline{T}}''_{\text{s}} : \underline{\underline{T}}'_{\text{s}} + \underline{\underline{T}}''_{\text{a}} : \underline{\underline{T}}'_{\text{a}} \tag{5.49}$$

car

$$\underline{\underline{T}}''_{\text{s}} : \underline{\underline{T}}'_{\text{a}} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\underline{T}}''_{\text{a}} : \underline{\underline{T}}'_{\text{s}} = 0\,.$$

Convention de notation

La forme bilinéaire G sur $E \times E$, élément de $E^* \otimes E^*$, correspond au tenseur euclidien identifié à l'élément $g^{ij}\ \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ de $E \otimes E$. On conviendra d'adopter pour ce tenseur euclidien la notation $\underline{\underline{\mathbb{1}}}$

$$\underline{\underline{\mathbb{1}}} = g^{ij}\ \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \delta^i_j\ \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j = \delta^j_i\ \underline{e}^i \otimes \underline{e}_j = g_{ij}\ \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j\ . \tag{5.50}$$

On remarquera, à titre de justification de cette notation, que :

$$\forall\, \underline{\underline{T}}\ ,\ \underline{\underline{T}}\,.\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} = \underline{\underline{T}}\,.$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Invariants d'un tenseur euclidien du 2ème ordre

Les invariants définis par (4.23) des tenseurs mixtes associés à un tenseur euclidien $\underline{\underline{T}}$ dans $E \otimes E^*$ et dans $E^* \otimes E$ sont égaux et s'expriment en termes de tenseurs euclidiens de la façon suivante :

$$\text{(5.51)} \qquad \begin{cases} I_1 = \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{\mathbb{1}}} = \ \text{tr}\ \underline{\underline{T}}\ ^{(7)} \\ I_2 = \dfrac{1}{2}\,\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}} = \dfrac{1}{2}\ \text{tr}\ (\underline{\underline{T}}^2) \\ I_3 = \dfrac{1}{3}\,(\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}) : \underline{\underline{T}} = \dfrac{1}{3}\ \text{tr}\ (\underline{\underline{T}}^3) \\ \text{etc.} \\ I_n = \dfrac{1}{n}(\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}\ldots) : \underline{\underline{T}} = \dfrac{1}{n}\ \text{tr}\ (\underline{\underline{T}}^n)\,. \end{cases}$$

On a là un jeu d'invariants principaux de $\underline{\underline{T}}$.

On peut également définir $\det \underline{\underline{T}}$ de façon analogue : par (3.16) sur les tenseurs mixtes associés à $\underline{\underline{T}}$ dans $E \otimes E^*$ ou $E^* \otimes E$. Il est invariant par changement de base, et l'on a aussi

$$\det(\underline{\underline{T}}''\,.\,\underline{\underline{T}}') = \det \underline{\underline{T}}'' \times \det \underline{\underline{T}}'\,.$$

L'importance des invariants principaux en mécanique (cf. chapitres VI et VII par exemple) tient au résultat qui suit.

Fonction isotrope d'un tenseur euclidien du 2ème ordre symétrique

Considérons une fonction du ***tenseur*** $\underline{\underline{T}}$ à valeur scalaire. Une telle fonction est invariante par changement de base : cela signifie que la valeur de cette fonction pour un tenseur $\underline{\underline{T}}$ donné, qui résulte évidemment de calculs algébriques effectués sur les composantes de $\underline{\underline{T}}$ après choix d'une base $\{\underline{e}_k\}$ dans E, est indépendante du choix de cette base. Pour insister sur cette caractéristique on dira qu'il s'agit d'une fonction du ***seul*** tenseur $\underline{\underline{T}}$ ou encore d'une fonction ***isotrope*** de $\underline{\underline{T}}$ [(8)].

On a alors l'énoncé suivant appelé « théorème de représentation », pour les tenseurs $\underline{\underline{T}}$ ***symétriques*** :

Toute fonction (isotrope) du (seul) tenseur $\underline{\underline{T}}$ symétrique s'exprime en fonction des seuls invariants principaux de $\underline{\underline{T}}$ (ou d'un jeu équivalent).

Il en va évidemment ainsi pour $\det \underline{\underline{T}}$.

5.8 Tenseurs euclidiens d'ordre n

La construction faite au paragraphe précédent pour les tenseurs euclidiens d'ordre 2 peut être reprise pour les tenseurs euclidiens d'ordre n quelconque.

(7) On remarque qu'avec la convention adoptée ici pour les indices concernés par la double contraction notée « . », explicitée au paragraphe 4.3, on a : $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \ \text{tr}\ (\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{B}})$, $(\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{B}}) : \underline{\underline{C}} = \text{tr}\ (\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{C}})$, etc.

(8) Cf. chapitre VI (§ 2.7 et 4.2) pour une explication de cette terminologie.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On adoptera pour désigner un tenseur euclidien d'ordre n le symbole d'une lettre (le plus souvent capitale) soulignée d'un nombre de traits égal à l'ordre du tenseur.

Cette notation deviendrait évidemment rapidement impraticable si n était grand. Pour les applications qui en seront faites à la mécanique elle se révèle commode malgré une apparente lourdeur car elle permet de distinguer « à vue » la nature scalaire, vectorielle ou tensorielle des « êtres mathématiques » qui interviennent dans les formules et d'en contrôler l'homogénéité de ce point de vue.

5.9 Choix d'une base orthonormée dans E

Comme on l'a remarqué au paragraphe 5.3 le choix d'une base primale $\{\underline{e}_k\}$ orthonormée dans E implique que la base duale correspondante dans E, $\{\underline{e}^k\}$, lui est identique. On a alors, cf. (5.19) :

$$\underline{e}_i \equiv \underline{e}^i$$
$$g_{ij} = \delta_i^j = g^{ij}$$

dont il résulte que pour tout tenseur euclidien les diverses représentations coïncident :

$$T_i{}^j{}_{k\ell} = T_{ijk\ell} = T^{ijk\ell} = \dots$$

Autrement dit, si la base est orthonormée, la position des indices n'a plus d'importance.

On notera aussi que dans le cas de bases orthonormées les formules de changement de base et de transformation des composantes données au paragraphe 3.2 se simplifient considérablement.

On posera désormais (tous indices inférieurs) :

$$\underline{e}'_i = \alpha_{ik}\, \underline{e}_k$$

où, par suite de l'orthonormalité de la base $\{\underline{e}_k\}$,

$$\alpha_{ik} = \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_k \ ;$$

la formule inverse s'écrit alors, la base $\{\underline{e}'_k\}$ étant elle aussi orthonormée :

$$\underline{e}_k = \alpha_{ik}\, \underline{e}'_i \ .$$

La formule de transformation des composantes devient alors, pour un tenseur euclidien quelconque (ici, par exemple, $\underline{\underline{\underline{T}}}$) :

$$\text{(5.52)} \qquad \begin{cases} \alpha_{ik} = \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_k \\ T'_{ijk} = \alpha_{i\ell}\, \alpha_{jm}\, \alpha_{kn}\, T_{\ell mn} \end{cases}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Pour les tenseurs euclidiens du 1er ordre et du 2ème ordre les opérations de contraction peuvent être écrites sous forme matricielle : en base orthonormée on introduira le symbole « ˜ » pour désigner par $\tilde{\underline{\underline{T}}}$ la matrice du tenseur $\underline{\underline{T}}$ (1er indice : ligne ; 2ème indice : colonne) et par $\tilde{\underline{v}}$ la matrice colonne du vecteur $\underline{v}$; (il s'agit des tableaux correspondants dans la base orthonormée donnée). On obtient alors, le point notant ici le produit matriciel :

$\widetilde{(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v})} = \tilde{\underline{\underline{T}}} \cdot \tilde{\underline{v}}$,

$\widetilde{(\underline{\underline{T}}'' \cdot \underline{\underline{T}}' \cdot \underline{v})} = \tilde{\underline{\underline{T}}}'' \cdot \tilde{\underline{\underline{T}}}' \cdot \tilde{\underline{v}}$,

$\underline{v}' \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}'' = {}^t\tilde{\underline{v}}' \cdot \tilde{\underline{\underline{T}}} \cdot \tilde{\underline{v}}''$,

$(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}') \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}'') = {}^t\tilde{\underline{v}}' \cdot {}^t\tilde{\underline{\underline{T}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{T}}} \cdot \tilde{\underline{v}}''$.

5.10 Directions principales et valeurs principales d'un tenseur euclidien du 2ème ordre symétrique, réel

Soit $\underline{\underline{T}}$ un tenseur euclidien du 2ème ordre, ***symétrique***, réel. On se propose de rechercher les vecteurs propres et valeurs propres de l'application linéaire associée à $\underline{\underline{T}}$, c'est-à-dire les vecteurs $\underline{v}_i$ non nuls et les scalaires $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ tels que :

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}_i = \lambda_i \, \underline{v}_i \qquad \text{sans sommation .} \tag{5.53}$$

La détermination des λ_i conduit à la résolution de l'équation polynomiale en λ (§ 4.6) :

$$\det(\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{\mathbb{1}}}) = 0$$

dont les racines sont réelles ou imaginaires conjuguées.

La symétrie de $\underline{\underline{T}}$ permet de démontrer les résultats classiques suivants.

• Les vecteurs propres correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

On a en effet :

$$\underline{v}_1 \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}_2 = \underline{v}_1 \cdot \lambda_2 \, \underline{v}_2 = \lambda_2 \, \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 \tag{5.54}$$

et aussi, par la symétrie de $\underline{\underline{T}}$ (cf. (5.45)) :

$$\underline{v}_1 \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}_2 = \underline{v}_2 \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}_1 = \lambda_1 \, \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 \tag{5.55}$$

d'où $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 0 \quad \text{si} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$.

• Toutes les valeurs propres sont réelles.

Si λ_i est une valeur propre et $\overline{\lambda}_i$ la valeur imaginaire conjuguée, les vecteurs propres correspondants sont aussi imaginaires conjugués :

$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i \Rightarrow \underline{\underline{T}} \cdot \overline{\underline{v}}_i = \overline{\lambda}_i \, \overline{\overline{v}}_i$ car $\underline{\underline{T}}$ est réel, et les formules (5.54) et (5.55) donnent alors :

$\lambda_i \, \underline{v}_i \cdot \overline{\underline{v}}_i = \overline{\lambda}_i \, \underline{v}_i \cdot \overline{\underline{v}}_i$

dont les seules solutions sont : $\lambda_i \neq \overline{\lambda}_i \Rightarrow \underline{v}_i = 0$ et $\underline{v}_i \neq 0 \Rightarrow \lambda_i = \overline{\lambda}_i$.

L'analyse du cas des valeurs propres multiples est classique et l'on démontre que l'on peut toujours ainsi construire une base de vecteurs propres orthogonaux $\underline{e}_1 , \underline{e}_2 , \ldots , \underline{e}_n$ correspondant aux n valeurs propres $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_n$ (éventuellement multiples).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Dans cette base et sa base duale $\{\underline{e}^k\}$, $\underline{\underline{T}}$ s'explicite de façon simple à partir de (5.53) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{T}} = \lambda_1\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}^1 + \lambda_2\, \underline{e}_2 \otimes \underline{e}^2 + \cdots + \lambda_n\, \underline{e}_n \otimes \underline{e}^n \\ \underline{\underline{T}} = \lambda_1\, \underline{e}^1 \otimes \underline{e}_1 + \lambda_2\, \underline{e}^2 \otimes \underline{e}_2 + \cdots + \lambda_n\, \underline{e}^n \otimes \underline{e}_n \ . \end{array} \right. \tag{5.56}$$

On en déduit, pour la forme bilinéaire $\underline{u} \,.\, \underline{\underline{T}} \,.\, \underline{v}$:

$$\underline{u} \,.\, \underline{\underline{T}} \,.\, \underline{v} = \lambda_1\, u_1\, v^1 + \cdots + \lambda_n\, u_n\, v^n = \lambda_1\, u^1\, v_1 + \cdots + \lambda_n\, u^n\, v_n \ . \tag{5.57}$$

Il est commode de choisir la base $\underline{e}_1\,, \underline{e}_1\ \ldots\ , \underline{e}_n$ ***orthonormée*** (cf. § 5.9) ; alors :

$$\underline{\underline{T}} = \lambda_1\, \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \cdots + \lambda_n\, \underline{e}_n \otimes \underline{e}_n$$
$$\underline{u} \,.\, \underline{\underline{T}} \,.\, \underline{v} = \lambda_1\, u_1\, v_1 + \cdots + \lambda_n\, u_n\, v_n$$

et la forme quadratique $\underline{u} \,.\, \underline{\underline{T}} \,.\, \underline{u}$ s'écrit :

$$\underline{u} \,.\, \underline{\underline{T}} \,.\, \underline{u} = \lambda_1 (u_1)^2 + \cdots + \lambda_n (u_n)^2 \ . \tag{5.58}$$

Les directions définies par les vecteurs propres de l'application linéaire associée à $\underline{\underline{T}}$, et les valeurs propres correspondantes, sont appelées ***directions principales*** et ***valeurs principales*** du tenseur euclidien $\underline{\underline{T}}$.

Les invariants de $\underline{\underline{T}}$ s'expriment de façon simple en fonction des valeurs principales, ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \\ I_2 = \dfrac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2) \\ \text{etc.} \\ I_n = \dfrac{1}{n}(\lambda_1^n + \lambda_2^n + \cdots + \lambda_n^n) \ , \end{array} \right. \tag{5.59}$$

et aussi :

$$\det \underline{\underline{T}} = \lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_n \ . \tag{5.60}$$

6 Champs de tenseurs

6.1 Définition

On suppose, comme c'est le cas en mécanique des milieux continus, que l'espace vectoriel E à partir duquel on a défini les tenseurs au paragraphe 1.1, est ***l'espace vectoriel associé d'un espace affine*** : chaque point M de l'espace affine est caractérisé par son vecteur-position $\underline{M}$ ou $\underline{x}$, à partir d'une origine fixée dans cet espace.

On définit un ***champ de tenseurs*** sur cet espace affine en associant à chaque point M un tenseur d'un type déterminé (variances précisées) : la valeur du champ de tenseurs au point courant M, c'est-à-dire le ***tenseur*** correspondant, sera notée

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

$\mathcal{T}(\underline{x})$; on désignera typiquement par H l'espace vectoriel des tenseurs $\mathcal{T}(\underline{x})$ et l'on dira que l'on a affaire à un champ de H-tenseurs.

On désigne par $\{\underline{e}_k\}$ une base de E, par $\{e^{*k}\}$ la base duale dans E^*. Le vecteur position $\underline{x}$ a pour coordonnées x^k dans la base $\{\underline{e}_k\}$.

6.2 Dérivation d'un champ de tenseurs ; gradient d'un champ de tenseurs

On considère un champ de tenseurs $\mathcal{T}(\underline{x})$ et l'on fait l'hypothèse de la dérivabilité de ses composantes par rapport aux coordonnées x^k du vecteur position $\underline{x}$.

Soit alors $\underline{w}$ un vecteur quelconque de E. On sait définir, au point courant M, la dérivée du champ $\mathcal{T}$ suivant le vecteur $\underline{w}$: c'est, le H-tenseur noté $\mathrm{D}_{\underline{w}}\mathcal{T}(\underline{x})$ défini par le passage à la limite :

$$\mathrm{D}_{\underline{w}}\mathcal{T}(\underline{x}) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\mathcal{T}(\underline{x}+\lambda\,\underline{w}) - \mathcal{T}(\underline{x})}{\lambda} \in H\ . \tag{6.1}$$

Les hypothèses de dérivabilité sur les composantes de $\mathcal{T}(\underline{x})$ assurent l'existence de cette limite et permettent de démontrer que $\mathrm{D}_{\underline{w}}\mathcal{T}(\underline{x})$ ***dépend linéairement de*** $\underline{w}$.

En particulier, en choisissant pour $\underline{w}$ chacun des vecteurs de la base $\{\underline{e}_k\}$ on obtient :

$$\mathrm{D}_{\underline{e}_k}\mathcal{T}(\underline{x}) = \frac{\partial\mathcal{T}(\underline{x})}{\partial x^k} \tag{6.2}$$

et par linéarité

$$\mathrm{D}_{\underline{w}}\mathcal{T}(\underline{x}) = \frac{\partial\mathcal{T}(\underline{x})}{\partial x^k}\, w^k = (\mathrm{D}_{\underline{e}_k}\mathcal{T}(\underline{x}) \otimes e^{*k}) \odot \underline{w}\ . \tag{6.3}$$

Cette formule met en évidence le tenseur $\mathrm{D}_{\underline{e}_k}\mathcal{T}(\underline{x}) \otimes e^{*k}$ qui est associé à l'application linéaire de E dans H :

$$\underline{w} \to \mathrm{D}_{\underline{w}}\mathcal{T}(\underline{x})\ ;$$

ce tenseur, élément de $H \otimes E^*$ est appelé ***gradient du champ*** de tenseurs au point M et noté $\nabla\mathcal{T}(\underline{x})$:

$$\nabla\mathcal{T}(\underline{x}) = \mathrm{D}_{\underline{e}_k}\mathcal{T}(\underline{x}) \otimes e^{*k} = \frac{\partial\mathcal{T}(\underline{x})}{\partial x^k} \otimes e^{*k} \tag{6.4}$$

et

$$\mathrm{D}_{\underline{w}}\mathcal{T}(\underline{x}) = \nabla\mathcal{T}(\underline{x}) \odot \underline{w}\ . \tag{6.5}$$

Gradient d'un champ de tenseurs euclidiens

L'espace E étant maintenant supposé muni d'une structure euclidienne on considère le champ de tenseurs euclidiens dont H constitue un espace de tenseurs associés, soit par exemple le champ $\underline{\underline{T}}$ pour fixer les idées.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La définition du gradient donnée ci-dessus est transposable sans ambiguïté, et les formules essentielles s'écrivent (en sous-entendant la dépendance en $\underline{x}$ pour alléger les expressions) :

$$\underline{\underline{\underline{\nabla T}}} = \mathrm{D}_{\underline{e}_k} \underline{\underline{\underline{T}}} \otimes \underline{e}^k = \frac{\partial \underline{\underline{\underline{T}}}}{\partial x^k} \otimes \underline{e}^k \tag{6.6}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{\underline{\underline{\nabla T}}} \cdot \underline{w} = \mathrm{D}_{\underline{w}} \underline{\underline{\underline{T}}} \\ \text{ou encore, sous forme « différentielle » ,} \\ \underline{\underline{\underline{\nabla T}}} \cdot \underline{\mathrm{d}M} = \underline{\underline{\underline{\mathrm{d}T}}} \, . \end{array}} \tag{6.7}$$

6.3 Divergence d'un champ de tenseurs

On suppose que le champ de H-tenseurs concerne des tenseurs ***dont le dernier indice est contravariant***.

On définit alors, en chaque point M la divergence du champ $\mathcal{T}$ par la contraction du tenseur $\nabla\mathcal{T}(\underline{x}) \in H \otimes E^*$ sur ***ses deux derniers indices***.

D'où, à partir de la formule (6.4) :

$$\operatorname{div} \mathcal{T}(\underline{x}) = \frac{\partial \mathcal{T}(\underline{x})}{\partial x^k} \odot e^{*k} = \mathrm{D}_{\underline{e}_k} \mathcal{T}(\underline{x}) \odot e^{*k} \, , \tag{6.8}$$

ce qui correspond à la double contraction de $\nabla\mathcal{T}(\underline{x})$ avec le tenseur $\mathcal{I}$ de $E \otimes E^*$:

$$\mathcal{I} = \delta^i_j \, e_i \otimes e^{*j} = \underline{e}_k \otimes e^{*k} \, ;$$

ainsi

$$\operatorname{div} \mathcal{T}(\underline{x}) = \nabla\mathcal{T}(\underline{x}) \boxdot \mathcal{I} = \nabla\mathcal{T} \boxdot (\underline{e}_k \otimes e^{*k}) \, . \tag{6.9}$$

On obtient donc un nouveau champ de tenseurs qui ne présente plus l'ultime indice contravariant des tenseurs du champ initial.

Dans le cas particulier où $\mathcal{T}(\underline{x}) \in H = E \otimes E$ par exemple, on a :

$$\operatorname{div} \mathcal{T}(\underline{x}) \in E \, ;$$

c'est un vecteur et l'on vérifie que l'on a :

$$\operatorname{div} \mathcal{T}(\underline{x}) = \frac{\partial T^{ij}(\underline{x})}{\partial x^j} \underline{e}_i \, . \tag{6.10}$$

Divergence d'un champ de tenseurs euclidiens

L'intérêt essentiel de la notion de divergence apparaît dans le cas où E est muni d'une structure euclidienne. En se plaçant désormais dans cette hypothèse, on ne s'intéressera plus, pour simplifier l'exposé, qu'aux tenseurs euclidiens.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Pour un champ de tenseurs euclidiens $\underline{\underline{\underline{T}}}$ l'opération « divergence » est toujours possible. On la définit par la formule :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\underline{T}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\nabla T}}}} : \underline{\underline{\mathbb{1}}} \,, \tag{6.11}$$

homologue évidente de (6.9), et qui revient à appliquer la définition (6.9) à l'un quelconque des champs de tenseurs associés à $\underline{\underline{\underline{T}}}$ pour lesquels cela est possible.

Cette définition permet la généralisation de la « formule de la divergence », bien connue pour les champs de vecteurs (tenseurs euclidiens du 1er ordre) aux champs de tenseurs euclidiens d'ordre quelconque.

Considérant par exemple :

$$\underline{\underline{\underline{T}}} = T^{ijk}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k$$

on a :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\underline{T}}} = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \frac{\partial T^{ijk}}{\partial x^k} = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \operatorname{div}(T^{ijk}\, \underline{e}_k) \,.$$

On voit alors que, pour un volume Ω, dans les conditions classiques d'application du théorème de la divergence à chacun des vecteurs $T^{ijk}\, \underline{e}_k$ à i et j fixés, c'est-à-dire si les T^{ijk} sont de classe C^1, il vient :

$$\int_\Omega \operatorname{div} \underline{\underline{\underline{T}}} \, \mathrm{d}\Omega = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \int_{\partial\Omega} (T^{ijk}\, \underline{e}_k) \,.\, \underline{n} \, \mathrm{d}a \tag{6.12}$$

où da désigne l'élément d'aire de $\partial\Omega$ et $\underline{n}$ sa normale sortante.

En regroupant les termes de (6.12) on reconnaît au second membre le tenseur $\underline{\underline{\underline{T}}}$ et l'on aboutit à la formule :

$$\int_\Omega \operatorname{div} \underline{\underline{\underline{T}}} \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\underline{T}}} \,.\, \underline{n} \, \mathrm{d}a \tag{6.13}$$

valable quel que soit l'ordre du champ de tenseurs euclidiens concerné.

Lorsque le champ tensoriel $\underline{\underline{\underline{T}}}$ est continu et différentiable ***par morceaux***, en désignant par $\Sigma_{\underline{\underline{\underline{T}}}}$ les surfaces de discontinuités de $\underline{\underline{\underline{T}}}$, orientées transversalement en chaque point M par leur normale $\underline{n}(\underline{x})$, et en notant $[\![\underline{\underline{\underline{T}}}(\underline{x})]\!]$ la discontinuité de $\underline{\underline{\underline{T}}}$ au franchissement de $\Sigma_{\underline{\underline{\underline{T}}}}$ dans le sens de $\underline{n}(\underline{x})$

$$[\![\underline{\underline{\underline{T}}}(\underline{x})]\!] = \underline{\underline{\underline{T}}}^1(\underline{x}) - \underline{\underline{\underline{T}}}^2(\underline{x}) \tag{6.14}$$

la formule de la divergence s'écrit (figure 3) :

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div} \underline{\underline{\underline{T}}}(\underline{x}) \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Sigma_{\underline{\underline{\underline{T}}}}} [\![\underline{\underline{\underline{T}}}(\underline{x})]\!] \,.\, \underline{n}(\underline{x}) \, \mathrm{d}\Sigma_{\underline{\underline{\underline{T}}}} = \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\underline{T}}}(\underline{x}) \,.\, \underline{n}(\underline{x}) \, \mathrm{d}a} \tag{6.15}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

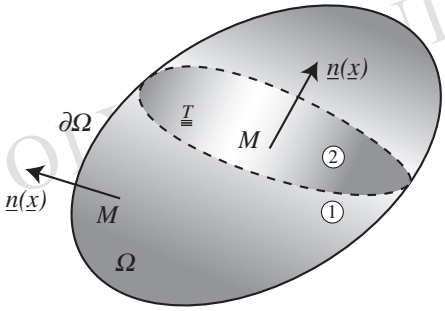


Figure 3 – Champ tensoriel continu et différentiable par morceaux

6.4 Calculs en coordonnées curvilignes

Les formules précédentes relatives au gradient ou à la divergence d'un champ de tenseurs, dans lesquelles interviennent les dérivées par rapport aux variables x^i, concernent le cas où les points de l'espace euclidien sont repérés par les coordonnées x^i de leur vecteur-position dans un repère d'origine fixée et de base $\{\underline{e}_i\}$ fixée (coordonnées cartésiennes).

Il peut se faire aussi que l'on ait à considérer des champs de tenseurs dans lesquels les points M sont repérés par des paramètres η^i définissant dans l'espace euclidien un système de ***coordonnées curvilignes***.

C'est le cas par exemple pour les ***coordonnées cylindriques*** et les ***coordonnées sphériques*** couramment employées.

Les tenseurs $\mathcal{T}(\underline{x})$ sont alors en général définis par leurs composantes dans une ***base locale*** constituée à partir d'une base de E tangente aux lignes coordonnées en M et de sa base duale. Ces composantes sont données en ***fonction des coordonnées curvilignes***.

Il est clair que dans la détermination des composantes de $\nabla\mathcal{T}(\underline{x})$ dans la base locale au point M on rencontrera deux types de termes provenant de contributions différentes

- d'une part des termes dus à la dérivation des composantes de $\mathcal{T}(\underline{x})$ par rapport aux η^i,
- d'autre part des termes provenant de la variation de la base locale elle-même avec les η^i.

Il n'est pas utile de développer ici les formules classiques (coefficients de Christoffel) pour cette opération dite de ***dérivation covariante*** ; les applications dans le cadre de ce cours ne le justifient pas. Le lecteur trouvera dans la suite un formulaire relatif aux principaux types de coordonnées curvilignes utilisés et limité aux expressions des ***gradients et divergences des champs de tenseurs euclidiens*** strictement nécessaires à l'étude du cours. Ces expressions s'établissent par identification à partir de la formule (6.7).

On examinera deux exemples bidimensionnels simples de ce type de calculs.

Calcul du gradient d'une fonction vectorielle en coordonnées polaires

La position du point M de $\mathbb{R}^2$ est repérée par les paramètres :

$$\eta_1 = r \ , \ \eta_2 = \theta \ . \tag{6.16}$$

Les lignes coordonnées sont les cercles de centre O et les rayons vecteurs issus de O (figure 4).

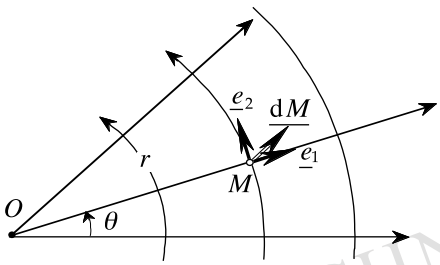


Figure 4 – Coordonnées polaires

On considère en chaque point M la ***base locale orthonormée*** tangente en ce point aux lignes coordonnées :

$$\underline{e}_1 = \underline{e}_r \ , \ \underline{e}_2 = \underline{e}_\theta \ , \ (\underline{e}_1 \, , \, \underline{e}_2) = +\pi/2 \, .$$

Une fonction vectorielle $\underline{U}$ est couramment définie, dans ce système de coordonnées polaires, par la formule :

$$\underline{U}(r \, , \, \theta) = U_r(r \, , \, \theta) \, \underline{e}_r + U_\theta(r \, , \, \theta) \, \underline{e}_\theta \tag{6.17}$$

dans laquelle les vecteurs $\underline{e}_r$ et $\underline{e}_\theta$ sont eux-aussi fonctions de r et θ.

Une méthode commode pour le calcul de $\underline{\underline{\nabla U}}$ consiste à exploiter la formule (6.7) sous la forme différentielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\nabla U}} \cdot \underline{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}\underline{U} = \dfrac{\partial \underline{U}}{\partial r} \, \mathrm{d}r + \dfrac{\partial \underline{U}}{\partial \theta} \, \mathrm{d}\theta \\ \forall \, \underline{\mathrm{d}M} = \underline{e}_r \, \mathrm{d}r + \underline{e}_\theta \, r \, \mathrm{d}\theta \ . \end{array} \right. \tag{6.18}$$

Compte tenu de la variation de la base locale caractérisée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \underline{e}_r}{\partial r} = 0 \ , \ \dfrac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta} = \underline{e}_\theta \ , \ \dfrac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \theta} = -\underline{e}_r \end{array} \right. \tag{6.19}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

il vient :

$$\underline{\underline{\nabla U}} \cdot \underline{e}_r = \frac{\partial \underline{U}}{\partial r} = \frac{\partial U_r}{\partial r}\,\underline{e}_r + \frac{\partial U_\theta}{\partial r}\,\underline{e}_\theta$$
$$\underline{\underline{\nabla U}} \cdot \underline{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \underline{U}}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\big(\frac{\partial U_r}{\partial \theta} - U_\theta\big)\,\underline{e}_r + \frac{1}{r}\big(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r\big)\,\underline{e}_\theta\ .$$

On en déduit, par identification, l'expression de $\underline{\underline{\nabla U}}$:

$$\underline{\underline{\nabla U}} = \frac{\partial U_r}{\partial r}\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r}\big(\frac{\partial U_r}{\partial \theta} - U_\theta\big)\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial U_\theta}{\partial r}\,\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r}\big(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r\big)\,\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta\ . \tag{6.20}$$

Calcul du gradient d'une fonction vectorielle en coordonnées curvilignes orthogonales quelconques

Généralisant l'exemple précédent, la figure 5 représente les lignes coordonnées d'un système de coordonnées curvilignes orthogonales :

– le long de chaque « ligne η_1 » , η_1 varie tandis que η_2 reste constant

– le long de chaque « ligne η_2 » , η_2 varie tandis que η_1 reste constant.

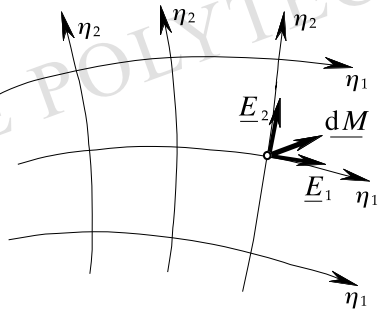


Figure 5 – Coordonnées curvilignes orthogonales quelconques

En chaque point M repéré par les paramètres η_1 et η_2

$$\underline{OM} = \underline{M}(\eta_1\ ,\ \eta_2)\ , \tag{6.21}$$

on définit la ***base locale « naturelle »*** tangente aux lignes coordonnées, constituée des vecteurs $\underline{E}_1$, $\underline{E}_2$ à partir de la formule différentielle :

$$\underline{\mathrm{d}M} = \underline{E}_1\,\mathrm{d}\eta_1 + \underline{E}_2\,\mathrm{d}\eta_2\ ; \tag{6.22}$$

on écrit aussi, en se référant à (6.21) :

$$\underline{E}_1 = \frac{\partial \underline{M}}{\partial \eta_1}\ ,\ \underline{E}_2 = \frac{\partial \underline{M}}{\partial \eta_2}\ . \tag{6.23}$$

L'indication (1 ou 2) des lignes coordonnées est désormais supposée choisie de sorte que $(\underline{E}_1\ ,\ \underline{E}_2) = +\pi/2$.

La ***base locale orthonormée*** colinéaire à la base naturelle est constituée des vecteurs unitaires $\underline{e}_2$, $\underline{e}_2$:

$$\underline{e}_1 = \underline{E}_1/|\,\underline{E}_1\,|\ ,\ \underline{e}_2 = \underline{E}_2/|\,\underline{E}_2\,|\ . \tag{6.24}$$

Les composantes de $\underline{\mathrm{d}M}$ dans cette base sont $\mathrm{d}s_1$ et $\mathrm{d}s_2$ où s_1 et s_2 désignent les abscisses curvilignes sur les lignes coordonnées passant par le point M :

$$\underline{\mathrm{d}M} = \underline{e}_1\,\mathrm{d}s_1 + \underline{e}_2\,\mathrm{d}s_2\ . \tag{6.25}$$

Une fonction vectorielle $\underline{U}$ est couramment définie, dans ce système de coordonneés curvilignes, par la formule :

$$\underline{U}(\eta_1\ ,\ \eta_2) = U_1(\eta_1\ ,\ \eta_2)\,\underline{e}_1 + U_2(\eta_1\ ,\ \eta_2)\,\underline{e}_2 \tag{6.26}$$

dans laquelle les vecteurs $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ de la base locale orthonormée sont eux aussi fonctions de η_1 et η_2.

Pour le calcul de $\underline{\underline{\nabla U}}$ on écrit que :

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{\underline{\nabla U}}\cdot\underline{\mathrm{d}M} = \underline{\mathrm{d}U} = \dfrac{\partial \underline{U}}{\partial \eta_1}\,\mathrm{d}\eta_1 + \dfrac{\partial \underline{U}}{\partial \eta_2}\,\mathrm{d}\eta_2 \\ \forall\,\underline{\mathrm{d}M} = \underline{E}_1\,\mathrm{d}\eta_1 + \underline{E}_2\,\mathrm{d}\eta_2 = \underline{e}_1\,\mathrm{d}s_1 + \underline{e}_2\,\mathrm{d}s_2\ . \end{array}\right. \tag{6.27}$$

On désigne par R_1 (resp. R_2) le rayon de courbure en M de la ligne coordonnée η_1 (resp. η_2) , compté positivement [9] selon $\underline{E}_2$ (resp. $-\underline{E}_1$).

La variation de la base locale orthonormée est caractérisée par les formules classiques :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \underline{e}_1}{\partial s_1} = \dfrac{1}{R_1}\,\underline{e}_2 & \dfrac{\partial \underline{e}_2}{\partial s_1} = -\dfrac{1}{R_1}\,\underline{e}_1 \\ \dfrac{\partial \underline{e}_1}{\partial s_2} = \dfrac{1}{R_2}\,\underline{e}_2 & \dfrac{\partial \underline{e}_2}{\partial s_2} = -\dfrac{1}{R_2}\,\underline{e}_1 \end{array}\right. \tag{6.28}$$

en notant, de façon plus parlante [10]

$$\mathrm{D}_{\underline{e}_1} = \frac{\partial}{\partial s_1} \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_{\underline{e}_2} = \frac{\partial}{\partial s_2}\ . \tag{6.29}$$

Il vient alors :

$$\underline{\underline{\nabla U}}\cdot\underline{E}_1 = \mathrm{D}_{\underline{E}_1}\underline{U} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial \eta_1} = \underline{e}_1\Big(\frac{\partial U_1}{\partial \eta_1} - U_2\frac{1}{R_1}|\,\underline{E}_1\,|\Big) + \underline{e}_2\Big(\frac{\partial U_2}{\partial \eta_1} + U_1\frac{1}{R_1}|\,\underline{E}_1\,|\Big)$$

$$\underline{\underline{\nabla U}}\cdot\underline{E}_2 = \mathrm{D}_{\underline{E}_2}\underline{U} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial \eta_2} = \underline{e}_1\Big(\frac{\partial U_1}{\partial \eta_2} - U_2\frac{1}{R_2}|\,\underline{E}_2\,|\Big) + \underline{e}_2\Big(\frac{\partial U_2}{\partial \eta_2} + U_1\frac{1}{R_2}|\,\underline{E}_2\,|\Big)\ .$$

[9] Cela signifie que si φ_1 est l'angle fait par $\underline{e}_1$ avec une direction fixe, on a : $R_1 = \mathrm{d}s_1/\mathrm{d}\varphi_1$. De même avec φ_2 pour $\underline{e}_2$: $R_2 = \mathrm{d}s_2/\mathrm{d}\varphi_2$.

[10] $\dfrac{\partial}{\partial s_1} = \dfrac{1}{|\,\underline{E}_1\,|}\dfrac{\partial}{\partial \eta_1}$ et $\dfrac{\partial}{\partial s_2} = \dfrac{1}{|\,\underline{E}_2\,|}\dfrac{\partial}{\partial \eta_2}$.
La fonction $\underline{U}$ ne peut être définie en fonction de s_1 et s_2 (si les coordonnées curvilignes sont authentiques) car s_1 et s_2 ne constituent pas un système de coordonnées ; les dérivées partielles par rapport à s_1 et s_2 ont la signification donnée par (6.29).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On en déduit l'expression de $\underline{\underline{\nabla U}}$:

(6.30)
$$\underline{\underline{\nabla U}} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial s_1} - \frac{U_2}{R_1}\right)\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial s_2} - \frac{U_2}{R_2}\right)\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial s_1} + \frac{U_1}{R_1}\right)\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial s_2} + \frac{U_1}{R_2}\right)\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$$

De cette formule on déduit évidemment l'expression de $\operatorname{div} \underline{U}$:

$$\operatorname{div} \underline{U} = \frac{\partial U_1}{\partial s_1} - \frac{U_2}{R_1} + \frac{\partial U_2}{\partial s_2} + \frac{U_1}{R_2} \, .$$

Le calcul du rotationnel du champ $\underline{U}$ s'effectue en écrivant que, dans $\mathbb{R}^3$:

$$\forall \, \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \, , \; (\underline{\operatorname{rot}\, U}) \wedge \underline{v} = (\underline{\underline{\nabla U}} - {}^t\underline{\underline{\nabla U}}) \cdot \underline{v}$$

d'où ici :

$$\underline{\operatorname{rot}\, U} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial s_1} + \frac{U_1}{R_1} + \frac{\partial U_1}{\partial s_2} + \frac{U_2}{R_2}\right)\underline{e}_3 \, .$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Récapitulatif des formules essentielles

Base primale dans E : $\{\underline{e}_k\}$
Base duale dans E : $\{\underline{e}^k\}$

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}^j = \delta_i^j \ , \ \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = g_{ij} \ , \ \underline{e}^i \cdot \underline{e}^j = g^{ij}$$

Tenseur euclidien (représentations)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{T}}} &= T^{ijk}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k = T^i{}_j{}^k\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_k = \cdots = T_{ijk}\, \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}^k \\ \underline{\underline{\mathbb{1}}} &= g^{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \delta_i^j\, \underline{e}^i \otimes \underline{e}_j = \delta_j^i\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j = g_{ij}\, \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j \end{aligned}$$

Produit tensoriel (exemple)

$$\underline{\underline{\underline{A}}} \otimes \underline{\underline{B}} = (A^i{}_j{}^k\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_k) \otimes (B^{mn}\, \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n) = A^i{}_j{}^k\, B^{mn}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n$$

Contraction (exemples)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{T}}} &= T^{ij}{}_k{}^\ell\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}^k \otimes \underline{e}_\ell \\ \underline{\underline{\underline{T}}}_c &= T^{ij}{}_k{}^\ell\, (\underline{e}_j \cdot \underline{e}^k)\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_\ell = T^{ik}{}_k{}^\ell\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_\ell \\ \underline{\underline{\underline{T}}}'_c &= T^{ij}{}_k{}^\ell\, (\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j)\, \underline{e}^k \otimes \underline{e}_\ell = g_{ij}\, T^{ij}{}_k{}^\ell\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_\ell \end{aligned}$$

Produit contracté (exemples)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{A}}} \cdot \underline{\underline{B}} &= (A^i{}_j{}^k\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_k) \cdot (B^{mn}\, \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n) \\ &= A^i{}_j{}^k\, B^{mn}\, (\underline{e}_k \cdot \underline{e}_m)\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_n = A^i{}_j{}^k\, g_{km}\, B^{mn}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{A}}} \cdot \underline{\underline{C}} &= (A^i{}_j{}^k\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_k) \cdot (C_m{}^n\, \underline{e}^m \otimes \underline{e}_n) \\ &= A^i{}_j{}^k\, C_m{}^n (\underline{e}_k \cdot \underline{e}^m)\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_n = A^i{}_j{}^k\, C_k{}^n\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_n \end{aligned}$$

Produit doublement contracté (exemple)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{B}} &= (A^i{}_j{}^k\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}_k) : (B^{mn}\, \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n) \\ &= A^i{}_j{}^k\, B^{mn} (\underline{e}_k \cdot \underline{e}_m)(\underline{e}^j \cdot \underline{e}_n)\, \underline{e}_i = A^i{}_j{}^k\, g_{km}\, B^{mj}\, \underline{e}_i \end{aligned}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Tenseurs du 2ème ordre (propriétés et formules remarquables)

- $\underline{\underline{T}} . \underline{v} \quad = \varphi(\underline{v})$

  φ : application linéaire de E dans E dont la matrice par rapport à la base $\{\underline{e}_k\}$ a pour coefficients $T^i{}_j$.

- $\underline{\underline{T}} . \underline{\underline{T}}^{-1} = \quad \underline{\underline{T}}^{-1} . \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}}$

  $\underline{\underline{T}}^{-1}$: tenseur inverse, correspond à φ^{-1} (s'il existe) .

- $\underline{\underline{T}} . \underline{v} = \underline{v} . {}^t\underline{\underline{T}}$

  ${}^t\underline{\underline{T}}$: tenseur transposé

  $({}^tT)_{ij} = T_{ji}$, $({}^tT)^{ij} = T^{ji}$, $({}^tT)_i{}^j = T^j{}_i, \ldots$

  ${}^t(\underline{\underline{A}} . \underline{\underline{B}}) = {}^t\underline{\underline{B}} . {}^t\underline{\underline{A}}$

- tenseur symétrique : $\underline{\underline{T}} = {}^t\underline{\underline{T}}$

  tenseur antisymétrique : $\underline{\underline{T}} = -{}^t\underline{\underline{T}}$

  $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_{\rm s} + \underline{\underline{T}}_{\rm a}$, $\underline{\underline{T}}_{\rm s} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + {}^t\underline{\underline{T}})$, $\underline{\underline{T}}_{\rm a} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - {}^t\underline{\underline{T}})$

  $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}_{\rm s} : \underline{\underline{B}}_{\rm s} + \underline{\underline{A}}_{\rm a} : \underline{\underline{B}}_{\rm a}$

- Invariants

  $I_1 = \text{tr } \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{\mathbb{1}}}$

  $I_2 = \frac{1}{2} \text{ tr } (\underline{\underline{T}}^2) = \frac{1}{2} \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}$

  $I_3 = \frac{1}{3} \text{ tr } (\underline{\underline{T}}^3) = \frac{1}{3} (\underline{\underline{T}} . \underline{\underline{T}}) : \underline{\underline{T}}$

  $\ldots$

  $I_n = \frac{1}{n} \text{tr } (\underline{\underline{T}}^n)$

  $\det (\underline{\underline{T}}'' . \underline{\underline{T}}') = \det \underline{\underline{T}}'' \times \det \underline{\underline{T}}'$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Gradient d'un champ de tenseurs (exemple)

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\nabla T}}}} = \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial x^k} \otimes \underline{e}^k$$

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\nabla T}}}} \,.\, \underline{\mathrm{d}M} = \underline{\underline{\mathrm{d}T}}$$

Divergence d'un champ de tenseurs (exemple)

$$\mathrm{div}\, \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\nabla T}}}} : \underline{\underline{\mathbb{1}}}$$

Formule de la divergence

$$\int_\Omega \mathrm{div}\, \underline{\underline{T}}\, \mathrm{d}\Omega + \int_{\underline{\underline{\Sigma_T}}} [\![\underline{\underline{T}}(\underline{x})]\!] \,.\, \underline{n}(\underline{x})\, \mathrm{d}\underline{\underline{\Sigma_T}} = \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{T}} \,.\, \underline{n}\, \mathrm{d}a$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Schéma sur les tenseurs euclidiens en bases orthonormées

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Préambule

E : espace ***euclidien*** de dimension n, muni d'un produit scalaire (noté « . »).

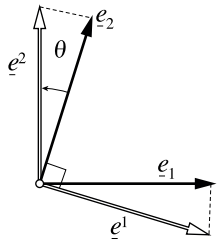
$\{\underline{e}_i\}$: base. On note $\underline{e}_i \,.\, \underline{e}_j = g_{ij}$.
$\{\underline{e}^j\}$: base ***duale*** définie par :

$$\forall i,j \quad \underline{e}_i \,.\, \underline{e}^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \,. \end{cases} \tag{1.1}$$

Posant $\underline{e}^i \,.\, \underline{e}^j = g^{ij}$ on a immédiatement [11] :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{e}^j &= g^{ji}\, \underline{e}_i \\ \underline{e}_i &= g_{ij}\, \underline{e}^j \\ g_{ik} g^{kj} &= \delta_i^j \end{aligned}} \tag{1.2}$$

Exemple $E = \mathbb{R}^3$:



Base normée $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ définie par

$$\begin{cases} |\underline{e}_1| = |\underline{e}_2| = |\underline{e}_3| = 1 \\ \underline{e}_1 \,.\, \underline{e}_2 = \sin\theta \ , \ \underline{e}_1 \,.\, \underline{e}_3 = \underline{e}_2 \,.\, \underline{e}_3 = 0 \,. \end{cases} \tag{1.3}$$

À partir des relations (1.2) on construit la base duale $\{\underline{e}^1, \underline{e}^2, \underline{e}^3\}$:

$$\begin{cases} \underline{e}^1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}(\underline{e}_1 - \underline{e}_2 \sin\theta)\,, \\ \underline{e}^2 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}(-\underline{e}_1 \sin\theta + \underline{e}_2)\,, \\ \underline{e}^3 = \underline{e}_3 \,. \end{cases} \tag{1.4}$$

[11] Règle de sommation sur les indices répétés

On se place désormais dans le cas où $\{\underline{e}_i\}$ est orthonormée. On a alors :

$$\underline{e}_i = \underline{e}^i \ . \tag{1.5}$$

Les indices seront systématiquement placés en bas.

2 Tenseurs euclidiens d'ordre un

Ce sont les ***vecteurs*** de E. Ils peuvent être identifiés, au moyen du produit scalaire, à des ***formes linéaires*** sur E. En effet, à tout vecteur $\underline{u}$ de E, on peut associer la forme linéaire :

$$\underline{v} \in E \to \underline{u} \,.\, \underline{v} \in \mathbb{R} \ . \tag{2.1}$$

3 Tenseurs euclidiens d'ordre deux

3.1 Produit tensoriel de deux vecteurs

On définit le produit tensoriel $(\underline{a} \otimes \underline{b})$ des deux vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$ par :

$$\forall (\underline{u}, \underline{v}) \in E \times E \ , \ (\underline{a} \otimes \underline{b})(\underline{u}, \underline{v}) = (\underline{a} \,.\, \underline{u})(\underline{b} \,.\, \underline{v}). \tag{3.1}$$

À titre d'exemple, le produit tensoriel $\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ de deux vecteurs de base est défini par :

$$\forall (\underline{u}, \underline{v}) \in E \times E \ , \ (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)(\underline{u}, \underline{v}) = u_i v_j. \tag{3.2}$$

3.2 Tenseur euclidien d'ordre deux

C'est une forme ***bilinéaire*** sur $E \times E$, notée $\underline{\underline{T}}$:

$$(\underline{u}, \underline{v}) \in E \times E \to \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) \in \mathbb{R} \ , \tag{3.3}$$

qui s'explicite sous la forme

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{\underline{T}}(u_i \, \underline{e}_i, v_j \, \underline{e}_j) = u_i v_j \, \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j) \ . \tag{3.4}$$

On en déduit, compte tenu de (3.2),

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j)[(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)(\underline{u}, \underline{v})] \ . \tag{3.5}$$

En posant

$$\underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = T_{ij} \tag{3.6}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

il vient :

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u},\underline{v}) = (T_{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)(\underline{u},\underline{v}) \tag{3.7}$$

$$\boxed{\underline{\underline{T}} = T_{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j} \tag{3.8}$$

3.3 Tenseur métrique

Au produit scalaire est associé le ***tenseur métrique***, noté $\underline{\underline{\mathbb{1}}}$ et défini par

$$\underline{\underline{\mathbb{1}}}(\underline{u},\underline{v}) = \underline{u}\,.\,\underline{v} \tag{3.9}$$

d'où

$$\underline{\underline{\mathbb{1}}} = \delta_{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \tag{3.10}$$

avec δ_{ij}, symbole de Kronecker, défini par

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j\ . \end{cases} \tag{3.11}$$

3.4 Tenseur euclidien d'ordre deux associé à une application linéaire

$\underline{\varphi}$ est une application linéaire de E dans E :

$$\forall \underline{v} = v_j \underline{e}_j \in E \quad , \quad \underline{\varphi}(\underline{v}) = \varphi_{kj} v_j \underline{e}_k \in E\ . \tag{3.12}$$

On définit le tenseur euclidien $\underline{\underline{T}}$ associé à $\underline{\varphi}$ par :

$$\forall (\underline{u},\underline{v}) \in E \times E \quad , \quad \underline{\underline{T}}(\underline{u},\underline{v}) = \underline{u}\,.\,\underline{\varphi}(\underline{v}) \tag{3.13}$$

d'où, suivant (3.8),

$$\forall (\underline{u},\underline{v}) \in E \times E \quad , \quad T_{ij} u_i v_j = u_i \varphi_{ij} v_j \tag{3.14}$$

et

$$\boxed{T_{ij} = \varphi_{ij}} \tag{3.15}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Les composantes du tenseur $\underline{\underline{T}}$ sont égales aux composantes de la matrice de l'application linéaire $\underline{\varphi}$ dans la base $\{\underline{e}_i\}$.

On remarque que le tenseur métrique $\underline{\underline{\mathbb{1}}}$ est associé à l'application ***identité*** (d'où la notation).

De façon générale, si $\{\underline{U}_i\}$ désigne l'image de la base orthonormée $\{\underline{e}_i\}$ par l'application linéaire $\underline{\varphi}$, le tenseur euclidien $\underline{\underline{T}}$ associé à $\underline{\varphi}$ s'écrit :

$$\underline{\underline{T}} = \underline{U}_j \otimes \underline{e}_j \quad , \quad (\underline{U}_j = \underline{\varphi}(\underline{e}_j) = \varphi_{ij}\, \underline{e}_i)\ . \tag{3.16}$$

3.5 Tenseur inverse

Le tenseur inverse de $\underline{\underline{T}}$, noté $\underline{\underline{T}}^{-1}$, est associé à $\underline{\varphi}^{-1}$.

3.6 Transposition

Le tenseur ${}^t\underline{\underline{T}}$, transposé de $\underline{\underline{T}}$, est défini par :

$$\boxed{\forall(\underline{u},\underline{v}) \in E \times E,\ {}^t\underline{\underline{T}}(\underline{u},\underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{v},\underline{u})} \tag{3.17}$$

En particulier il vient, pour le produit tensoriel de deux vecteurs :

$${}^t(\underline{a} \otimes \underline{b}) = (\underline{b} \otimes \underline{a}) \tag{3.18}$$

d'où

$${}^t(T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) = T_{ij}\, \underline{e}_j \otimes \underline{e}_i = T_{ji}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j\ . \tag{3.19}$$

3.7 Tenseurs symétriques et antisymétriques

Définitions :

$$\underline{\underline{T}} \quad \text{symétrique} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{T}} = {}^t\underline{\underline{T}} \tag{3.20}$$

$$\underline{\underline{T}} \quad \text{antisymétrique} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{T}} = -{}^t\underline{\underline{T}}\ . \tag{3.21}$$

Tout tenseur euclidien $\underline{\underline{T}}$ du deuxième ordre peut être décomposé de façon unique en la somme de sa partie symétrique et de sa partie antisymétrique :

$$\begin{cases} \underline{\underline{T}} &= \underline{\underline{T}}_{\mathrm{s}} + \underline{\underline{T}}_{\mathrm{a}} \\ \underline{\underline{T}}_{\mathrm{s}} &= \dfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + {}^t\underline{\underline{T}}) \\ \underline{\underline{T}}_{\mathrm{a}} &= \dfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - {}^t\underline{\underline{T}}) \end{cases} \tag{3.22}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Dans $\mathbb{R}^3$, le produit vectoriel permet d'associer à tout tenseur ***antisymétrique*** $\underline{\underline{\Omega}}$ un ***vecteur*** $\underline{\Omega}$ par la relation : $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{\underline{\Omega}} \,.\, \underline{x} = \underline{\Omega} \wedge \underline{x}$. Dans toute base orthonormée directe, la relation entre $\underline{\underline{\Omega}}$ et $\underline{\Omega}$ s'explicite sous la forme :

$$(3.23) \quad \begin{cases} \underline{\Omega} & = p\,\underline{e}_1 + q\,\underline{e}_2 + r\,\underline{e}_3 \\ \underline{\underline{\Omega}} & = -p(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2) - q(\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3) - r(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \end{cases}$$

ou encore

$$(3.24) \quad \underline{\Omega} = -(\Omega_{23}\,\underline{e}_1 + \Omega_{31}\,\underline{e}_2 + \Omega_{12}\,\underline{e}_3) \,.$$

3.8 Changement de base orthonormée

La base orthonormée $\{\underline{e}'_i\}$ est définie à partir de la base orthonormée $\{\underline{e}_k\}$ par :

$$(3.25) \qquad \underline{e}'_i = \alpha_{ik}\,\underline{e}_k \quad \text{avec} \quad \alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij} \,.$$

On en déduit pour les composantes T'_{ij} de $\underline{\underline{T}}$ dans cette base :

$$(3.26) \qquad \underline{\underline{T}} = T'_{ij}\,\underline{e}'_i \otimes \underline{e}'_j = T'_{ij}\alpha_{i\ell}\alpha_{jm}\,\underline{e}_\ell \otimes \underline{e}_m = T_{\ell m}\,\underline{e}_\ell \otimes \underline{e}_m \,.$$

3.9 Contraction d'un tenseur du deuxième ordre

Le scalaire

$$(3.27) \qquad \underline{\underline{T}}(\underline{e}_k, \underline{e}_k) = T_{ij}(\underline{e}_i \,.\, \underline{e}_k)(\underline{e}_j \,.\, \underline{e}_k) = T_{kk}$$

est indépendant de la base orthonormée. C'est la ***trace*** du tenseur $\underline{\underline{T}}$.

En effet, d'après (3.26) et compte tenu de (3.25) on a :

$$(3.28) \qquad T_{kk} = T'_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jk} = T'_{ij}\delta_{ij} = T'_{ii} \,.$$

L'opération effectuée est la ***contraction*** du tenseur $\underline{\underline{T}}$:

$$(3.29) \qquad T_{kk} = \mathrm{tr}\,\underline{\underline{T}} \,.$$

Si $\underline{\underline{T}}$ est exprimé sous la forme (3.16) on a :

$$(3.30) \qquad \underline{\underline{T}} = \underline{U}_j \otimes \underline{e}_j \quad , \quad \mathrm{tr}\,\underline{\underline{T}} = \underline{U}_j \,.\, \underline{e}_j = \underline{e}_j \,.\, \underline{\varphi}(\underline{e}_j) \,.$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

3.10 Déterminant d'un tenseur du deuxième ordre

Le déterminant de $\underline{\underline{T}}$ est le déterminant de l'application linéaire associée :

$$\det \underline{\underline{T}} = \det \underline{\underline{\varphi}} \,. \tag{3.31}$$

Si $V_n\{\underline{a}_i\}$ désigne le volume du n-parallélipipède construit sur n vecteurs indépendants $\underline{a}_i$ (i=1,2,...,n) on a, avec (3.16), en rappelant que la base $\{\underline{e}_i\}$ est orthonormée :

$$\begin{cases} \underline{\underline{T}} & = T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \underline{U}_j \otimes \underline{e}_j \\ \det \underline{\underline{T}} & = V_n\{\underline{U}_j\}/V_n\{\underline{e}_j\} = \det[T_{ij}] \,. \end{cases} \tag{3.32}$$

Il est parfois commode d'exprimer $\underline{\underline{T}}$ au moyen de ***deux bases orthonormées de même orientation*** $\{\underline{E}_I\}$ et $\{\underline{e}_i\}$ sous la forme :

$$\underline{\underline{T}} = T_{Ij}\, \underline{E}_I \otimes \underline{e}_j \tag{3.33}$$

c'est-à-dire avec

$$\underline{U}_j = \underline{\varphi}(\underline{e}_j) = T_{Ij}\, \underline{E}_I \,. \tag{3.34}$$

On a alors :

$$V_n\{\underline{U}_j\} = \det[T_{Ij}]\, V_n\{\underline{E}_I\} \,, \tag{3.35}$$

d'où, par (3.32), puisque les bases ont même orientation,

$$\det \underline{\underline{T}} = \det[T_{Ij}] \,. \tag{3.36}$$

4 Produit contracté de deux tenseurs

Il est noté « . »

4.1 Produit contracté de deux vecteurs

C'est le ***produit scalaire*** de ces vecteurs.

4.2 Produits contractés d'un produit tensoriel de deux vecteurs et d'un vecteur

On définit le produit contracté à droite de $(\underline{a} \otimes \underline{b})$ par un vecteur $\underline{v}$ quelconque. C'est la forme linéaire notée $(\underline{a} \otimes \underline{b}) \,.\, \underline{v}$ telle que :

$$\forall \underline{u} \in E \,,\ [(\underline{a} \otimes \underline{b}) \,.\, \underline{v}] \,.\, \underline{u} = (\underline{a} \otimes \underline{b})(\underline{u}, \underline{v}) = (\underline{a} \,.\, \underline{u})(\underline{b} \,.\, \underline{v}) \tag{4.1}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

d'où

$$(\underline{a} \otimes \underline{b}) \,.\, \underline{v} = \underline{a}\,(\underline{b} \,.\, \underline{v}) \,. \tag{4.2}$$

On définit de même le produit contracté à gauche de $(\underline{a} \otimes \underline{b})$ par un vecteur $\underline{u}$ quelconque, noté $\underline{u} \,.\, (\underline{a} \otimes \underline{b})$:

$$\forall \underline{v} \in E \ , \ [\underline{u} \,.\, (\underline{a} \otimes \underline{b})] \,.\, \underline{v} = (\underline{a} \otimes \underline{b})(\underline{u}, \underline{v}) \tag{4.3}$$

d'où

$$\underline{u} \,.\, (\underline{a} \otimes \underline{b}) = (\underline{a} \,.\, \underline{u})\, \underline{b} \,. \tag{4.4}$$

Il en résulte que :

$$(\underline{a} \otimes \underline{b})(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \,.\, [(\underline{a} \otimes \underline{b}) \,.\, \underline{v}] = [\underline{u} \,.\, (\underline{a} \otimes \underline{b})] \,.\, \underline{v} \tag{4.5}$$

que l'on écrit aussi

$$(\underline{a} \otimes \underline{b})(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \,.\, (a \otimes b) \,.\, \underline{v} \,. \tag{4.6}$$

4.3 Produit contracté d'un tenseur du deuxième ordre et d'un vecteur

Pour un tenseur euclidien du deuxième ordre $\underline{\underline{T}}$ et un vecteur quelconque $\underline{v}$, on définit le produit contracté à droite $\underline{\underline{T}} \,.\, \underline{v}$ comme au paragraphe précédent :

$$\forall \underline{u} \in E \ , \ (\underline{\underline{T}} \,.\, \underline{v}) \,.\, \underline{u} = \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) \,. \tag{4.7}$$

Il résulte alors de (3.13) que :

$$\underline{\underline{T}} \,.\, \underline{v} = \underline{\varphi}(\underline{v}) \,. \tag{4.8}$$

Le produit contracté à gauche $\underline{u} \,.\, \underline{\underline{T}}$ est défini par :

$$\forall \underline{v} \in E \quad , \quad (\underline{u} \,.\, \underline{\underline{T}}) \,.\, \underline{v} = \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) \,. \tag{4.9}$$

D'où l'écriture qui généralise (4.6) :

$$\boxed{\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \,.\, (\underline{\underline{T}} \,.\, \underline{v}) = (\underline{u} \,.\, \underline{\underline{T}}) \,.\, \underline{v} = \underline{u} \,.\, \underline{\underline{T}} \,.\, \underline{v}} \tag{4.10}$$

On remarque que :

$$\mathrm{tr}\ \underline{\underline{T}} = \underline{e}_i \,.\, \underline{\underline{T}} \,.\, \underline{e}_i \,. \tag{4.11}$$

Compte tenu de (3.17) on a aussi, en conséquence de (4.9) :

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = {}^t\underline{\underline{T}}(\underline{v}, \underline{u}) = (\underline{v} \,.\, {}^t\underline{\underline{T}}) \,.\, \underline{u} \tag{4.12}$$

d'où, par comparaison avec (4.7) et (4.8),

$$\boxed{\underline{v} \,.\, {}^t\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}} \,.\, \underline{v} = \underline{\varphi}(\underline{v})} \tag{4.13}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

4.4 Produit contracté de deux tenseurs du deuxième ordre

Le produit contracté $\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}'$ est la forme bilinéaire associée à l'application linéaire composée $\underline{\varphi} \circ \underline{\varphi}'$. Ainsi, d'après (4.8) :

$$\forall \underline{v} \in E \quad , \quad (\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}').\underline{v} = \underline{\varphi} \circ \underline{\varphi}'(\underline{v}) = \underline{\underline{T}}.(\underline{\underline{T}}'.\underline{v}) \; . \tag{4.14}$$

Avec la décomposition (3.8) on obtient :

$$\begin{aligned} \forall \underline{v} \in E \quad , \quad (\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}').\underline{v} &= (T_{ik}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_k).[(T'_{\ell j}\,\underline{e}_\ell \otimes \underline{e}_j).\underline{v}] \\ &= T_{ik}T'_{kj}v_j\,\underline{e}_i \end{aligned} \tag{4.15}$$

d'où

$$\boxed{\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}' = T_{ik}T'_{kj}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j} \tag{4.16}$$

En conséquence :

$$\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{T}}^{-1}.\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}} \tag{4.17}$$

$$\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{\mathbb{1}}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}}.\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}} \; . \tag{4.18}$$

Transposition :

$$\begin{aligned} {}^t(\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}') &= {}^t(T_{ik}T'_{kj}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \\ &= T_{ik}T'_{kj}\,\underline{e}_j \otimes \underline{e}_i \\ &= (T'_{kj}\,\underline{e}_j \otimes \underline{e}_k).(T_{ik}\,\underline{e}_k \otimes \underline{e}_i) \; , \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{{}^t(\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}') = {}^t\underline{\underline{T}}'.{}^t\underline{\underline{T}}} \tag{4.19}$$

4.5 Produit doublement contracté de deux tenseurs du deuxième ordre

Il s'agit de la contraction du tenseur $\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}'$ notée " : "

$$\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}' = \mathrm{tr}(\underline{\underline{T}}.\underline{\underline{T}}') \; . \tag{4.20}$$

La formule (4.14) permet de définir le produit contracté de plusieurs tenseurs du deuxième ordre $\underline{\underline{T}}^1, \underline{\underline{T}}^2, ..., \underline{\underline{T}}^n$:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^1.\underline{\underline{T}}^2.\cdots.\underline{\underline{T}}^n \; ; \tag{4.21}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

la contraction du tenseur $\underline{\underline{T}}$ défini par (4.21) s'écrit alors

$$\text{tr}\ \underline{\underline{T}} = \text{tr}(\underline{\underline{T}}^1 . \underline{\underline{T}}^2 . .... . \underline{\underline{T}}^n) = (\underline{\underline{T}}^1 . \underline{\underline{T}}^2 . .... . \underline{\underline{T}}^{n-1}) : \underline{\underline{T}}^n \tag{4.22}$$

$$= (\underline{\underline{T}}^n . \underline{\underline{T}}^1 . .... . \underline{\underline{T}}^{n-2}) : \underline{\underline{T}}^{n-1} \text{ par permutation circulaire .} \tag{4.23}$$

Remarques :

$$\text{tr}(\underline{\underline{T}}) = \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{\mathbb{1}}} , \tag{4.24}$$

$$\text{tr}(\underline{\underline{\mathbb{1}}}) = 3 . \tag{4.25}$$

5 Dérivation d'un champ de tenseurs

T est un champ de tenseurs d'ordre quelconque défini sur un espace affine dont E est l'espace vectoriel associé. On se limitera ici à l'ordre 1 (champs de vecteurs) ou à l'ordre 2 (champ de tenseurs du deuxième ordre).

5.1 Gradient d'un champ de vecteurs

Le champ de gradient du champ de vecteurs $\underline{T}(\underline{x})$ est le champ de tenseurs du deuxième ordre $\underline{\underline{\nabla T}}(\underline{x})$ défini par :

$$\boxed{\mathrm{d}\underline{T} = \underline{\underline{\nabla T}}(\underline{x}) . \mathrm{d}\underline{x}} \tag{5.1}$$

En coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$\mathrm{d}\underline{\underline{T}} = \mathrm{d}T_j\, \underline{e}_j = \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \underline{e}_j \mathrm{d}x_i = \left(\frac{\partial T_j}{\partial x_i} \underline{e}_j \otimes \underline{e}_i \right) . (\underline{e}_k \mathrm{d}x_k) \tag{5.2}$$

d'où

$$\underline{\underline{\nabla T}} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \underline{e}_j \otimes \underline{e}_i . \tag{5.3}$$

De façon plus générale, $\{\underline{e}_i\}$ et $\{\underline{E}_I\}$ étant deux bases orthonormées, on pose (par définition de $\mathrm{D}_{\underline{e}_i}$) :

$$\mathrm{d}\underline{\underline{T}} = (\mathrm{D}_{\underline{e}_i} \underline{\underline{T}})\, \mathrm{d}x_i = \left(\mathrm{D}_{\underline{e}_i} (T_J \underline{E}_J)\right) \mathrm{d}x_i \tag{5.4}$$

ou encore

$$\mathrm{d}\underline{\underline{T}} = [\left(\mathrm{D}_{\underline{e}_i} (T_J \underline{E}_J)\right) \otimes \underline{e}_i] . (\underline{e}_k \mathrm{d}x_k) , \tag{5.5}$$

d'où :

$$\boxed{\underline{\underline{\nabla T}} = \left(\mathrm{D}_{\underline{e}_i} (T_J \underline{E}_J)\right) \otimes \underline{e}_i = (\mathrm{D}_{\underline{e}_i} \underline{\underline{T}}) \otimes \underline{e}_i} \tag{5.6}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

5.2 Divergence d'un champ de vecteurs

La divergence du champ de vecteurs $\underline{T}(\underline{x})$ est le champ scalaire obtenu par contraction du gradient, c'est-à-dire en prenant la trace du gradient.

En coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$\text{div } \underline{T} = \frac{\partial T_i}{\partial x_i} \,. \tag{5.7}$$

De façon générale, à partir de (5.6) et en application immédiate de (4.11)

$$\text{div } \underline{T} = \text{tr } (\underline{\underline{\nabla T}}) = \underline{e}_j \,.\, [(\text{D}_{\underline{e}_i}(T_J \underline{E}_J)) \otimes \underline{e}_i] \,.\, \underline{e}_j \tag{5.8}$$

d'où

$$\boxed{\text{div } \underline{T} = (\text{D}_{\underline{e}_i}(T_J \underline{E}_J)) \,.\, \underline{e}_i} \tag{5.9}$$

5.3 Gradient et divergence d'un champ de tenseurs du deuxième d'ordre

De façon analogue à (5.1) on définit $\underline{\underline{\underline{\nabla T}}}$, tenseur du 3ème ordre [12], ***gradient*** du champ de tenseurs $\underline{\underline{T}}$, par :

$$\underline{\text{d}T} = \underline{\underline{\underline{\nabla T}}} \,.\, \underline{\text{d}x} \,. \tag{5.10}$$

En coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$\underline{\underline{\underline{\nabla T}}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \,. \tag{5.11}$$

De façon plus générale, avec les bases orthonormées $\{\underline{e}_i\}$ et $\{\underline{E}_I\}$:

$$\underline{\underline{\underline{\nabla T}}} = (\text{D}_{\underline{e}_k}(T_{IJ} \underline{E}_I) \otimes \underline{E}_J) \otimes \underline{e}_k \,. \tag{5.12}$$

La ***divergence*** du champ $\underline{\underline{T}}$ est le champ vectoriel obtenu par contraction de $\underline{\underline{\underline{\nabla T}}}$ sur ses deux derniers indices.

En coordonnées cartésiennes orthonormées

$$\text{div } \underline{\underline{T}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \underline{e}_i (\underline{e}_j \,.\, \underline{e}_k) = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \underline{e}_i \,. \tag{5.13}$$

De façon plus générale, avec les bases $\{\underline{e}_i\}$ et $\{\underline{E}_I\}$

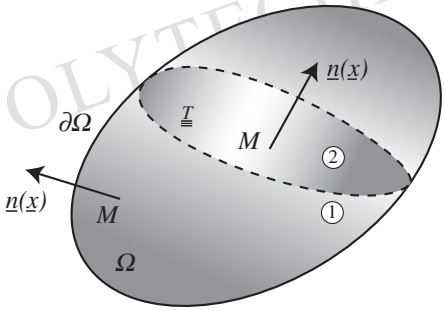
$$\text{div } \underline{\underline{T}} = (\text{D}_{\underline{e}_k}(T_{IJ} \underline{E}_I) \otimes \underline{E}_J) \,.\, \underline{e}_k \,. \tag{5.14}$$

[12] Un tenseur du 3ème ordre $\underline{\underline{\underline{T}}} = T_{ijk} \, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k$ est la forme trilinéaire sur $E \times E \times E$ définie par :

$$\forall (\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) \in E \times E \times E \,,\, \underline{\underline{\underline{T}}}(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = T_{ijk} (\underline{e}_i \,.\, \underline{u})(\underline{e}_j \,.\, \underline{v})(\underline{e}_k \,.\, \underline{w}) = T_{ijk} u_i v_j w_k$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

5.4 Formule de la divergence



Pour un champ tensoriel d'ordre supérieur ou égal à 1, ***continu et différentiable, par morceaux***, sur Ω de $\mathbb{R}^3$, on démontre la ***formule de la divergence***, écrite ici dans le cas du deuxième ordre :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{\underline{T}}(\underline{x})\, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Sigma_{\underline{\underline{T}}}} [\![\underline{\underline{T}}(\underline{x})]\!] \,.\, \underline{n}(\underline{x})\, \mathrm{d}\Sigma_{\underline{\underline{T}}} = \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{T}}(\underline{x}) \,.\, \underline{n}(\underline{x})\, \mathrm{d}a \tag{5.15}$$

avec les notations suivantes :

- $\Sigma_{\underline{\underline{T}}}$ désigne les surfaces de discontinuité de $\underline{\underline{T}}$, orientées transversalement en chaque point M par leur normale $\underline{n}(\underline{x})$,
- $[\![\underline{\underline{T}}(\underline{x})]\!]$ est la discontinuité du champ $\underline{\underline{T}}$ en M au franchissement de $\Sigma_{\underline{\underline{T}}}$ dans le sens de $\underline{n}(\underline{x})$:

$$[\![\underline{\underline{T}}(\underline{x})]\!] = \underline{\underline{T}}^2(\underline{x}) - \underline{\underline{T}}^1(\underline{x}) \,, \tag{5.16}$$

- $\underline{n}(\underline{x})$ est la normale au contour $\partial\Omega$ de Ω en M, orientée vers l'extérieur de Ω.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Annexe II

Opérateurs différentiels : formules essentielles

1 Coordonnées cartésiennes orthonormées 357
1.1 Coordonnées 357
1.2 Champ de vecteurs 357
1.3 Fonction scalaire 358
1.4 Champ de tenseurs du 2ème ordre symétriques 358
2 Coordonnées cartésiennes quelconques 359
2.1 Coordonnées 359
2.2 Champ de vecteurs 359
2.3 Fonction scalaire 359
2.4 Champ de tenseurs du 2ème ordre 360
3 Coordonnées cylindriques 360
3.1 Paramétrage 360
3.2 Champ de vecteurs 361
3.3 Fonction scalaire 361
3.4 Champ de tenseurs du 2ème ordre 361
4 Coordonnées sphériques 362
4.1 Paramétrage 362
4.2 Champ de vecteurs 362
4.3 Fonction scalaire 363
4.4 Champ de tenseurs du 2ème ordre symétriques 363

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Opérateurs différentiels : formules essentielles

1 Coordonnées cartésiennes orthonormées

1.1 Coordonnées

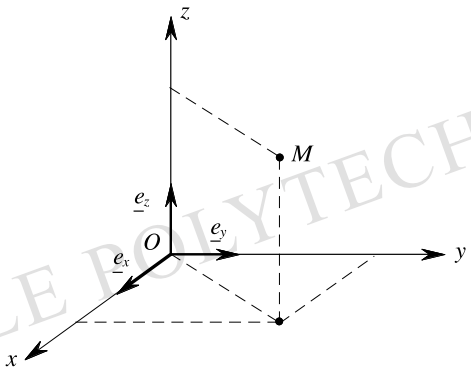


Figure 1 – Coordonnées cartésiennes orthonormées

Les coordonnées d'un point M sont $x^i (i = 1, 2, 3)$ notées aussi $x\,, y\,, z$; ce sont les composantes de $\underline{OM}$ dans la base $\underline{e}_i (i = 1, 2, 3)$ notée aussi $(\underline{e}_x\,, \underline{e}_y\,, \underline{e}_z)$:

$$\underline{OM} = x^i\, \underline{e}_i\ .$$

1.2 Champ de vecteurs

$$\underline{v}(\underline{M}) = \underline{v}(\underline{x}) = v^i(\underline{x})\, \underline{e}_i = v_i(\underline{x})\, \underline{e}^i\ .$$

Ici les composantes contravariantes et covariantes sont égales, et les bases $\{\underline{e}_i\}$ et $\{\underline{e}^i\}$ sont identiques :

$$\underline{v}(\underline{x}) = v_x(\underline{x})\, \underline{e}_x + v_y(\underline{x})\, \underline{e}_y + v_z(\underline{x})\, \underline{e}_z$$
$$\underline{\underline{\nabla v}}(\underline{x}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\underline{x})\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

$$\underline{\underline{\tilde{\nabla} v}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{\partial v_x}{\partial y} & \dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial x} & \dfrac{\partial v_z}{\partial y} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\text{div } \underline{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\underline{\Delta v} = \text{div } (\underline{\underline{\nabla v}}) = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \, \underline{e}_i \, .$$

1.3 Fonction scalaire

$$f(\underline{M}) = f(\underline{x})$$

$$\underline{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \underline{e}_i$$

$$\Delta f = \text{div } (\underline{\nabla f}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} \, .$$

1.4 Champ de tenseurs du 2ème ordre symétriques

$$\underline{\underline{T}}(\underline{M}) = T_{ij} \, (\underline{x}) \, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\underline{\underline{\nabla T}}(\underline{M}) = \big(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}\big) \, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k$$

$$\text{div } \underline{\underline{T}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \, \underline{e}_i$$

$$\underline{\underline{\Delta T}} = \text{div } (\underline{\underline{\nabla T}}) = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} \, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

2 Coordonnées cartésiennes quelconques

2.1 Coordonnées

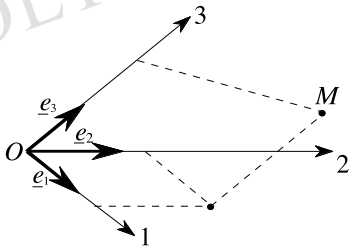


Figure 2 – Coordonnées cartésiennes quelconques

Les coordonnées d'un point M sont x^i $(i = 1, 2, 3)$ composantes de $\underline{OM}$ dans la base $\underline{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$:

$$\underline{OM} = x^i \, \underline{e}_i \ .$$

2.2 Champ de vecteurs

$$\underline{v}\,(\underline{M}) = \underline{v}\,(\underline{x}) = v^i(\underline{x})\,\underline{e}_i = v_i(\underline{x})\,\underline{e}^i$$

$$\underline{\underline{\nabla v}} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}^j$$

$$\text{div}\ \underline{v} = \frac{\partial v^i}{\partial x^i}$$

$$\underline{\Delta v} = \text{div}\,(\underline{\underline{\nabla v}}) = g^{kj}\,\frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j}\,\underline{e}_i \ .$$

2.3 Fonction scalaire

$$f(\underline{M}) = f\,(\underline{x})$$

$$\underline{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\underline{e}^i$$

$$\Delta f = \text{div}\,(\underline{\nabla f}) = g^{ij}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \ .$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

2.4 Champ de tenseurs du 2ème ordre

$$\underline{\underline{T}}\,(\underline{M}) = T_{ij}(\underline{x})\,\underline{e}^i \otimes \underline{e}^j = T^{ij}(\underline{x})\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \dots$$

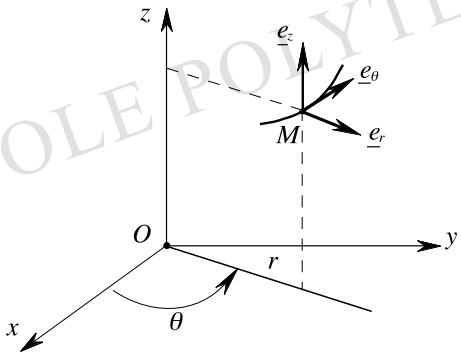
$$\underline{\underline{\underline{\nabla T}}}\,(\underline{M}) = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}^k$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{T}} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}\,\underline{e}_i$$

$$\underline{\underline{\underline{\Delta T}}} = \operatorname{div}\left(\underline{\underline{\underline{\nabla T}}}\right) = g^{k\ell}\frac{\partial^2 T^{ij}}{\partial x^k \partial x^\ell}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j\,.$$

3 Coordonnées cylindriques

3.1 Paramétrage



$$\underline{e}_r = \frac{\partial \underline{M}}{\partial r}$$
$$\underline{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \underline{M}}{\partial \theta}$$
$$\underline{e}_z = \frac{\partial \underline{M}}{\partial z}$$

Figure 3 – Coordonnées cylindriques

La position d'un point M est repérée par les paramètres r, θ, z (figure 3). La base locale orthonormée est $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\theta$, $\underline{e}_z$:

$$\underline{\mathrm{d}M} = \underline{e}_r\,\mathrm{d}r + \underline{e}_\theta\, r\,\mathrm{d}\theta + \underline{e}_z\,\mathrm{d}z\,;$$

sa variation est donnée par

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial \underline{e}_r}{\partial r} = 0 & , & \dfrac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial r} = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial \underline{e}_z}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta} = e_\theta & , & \dfrac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \theta} = -\underline{e}_r \quad , \quad \dfrac{\partial \underline{e}_z}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial \underline{e}_r}{\partial z} = 0 & , & \dfrac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial z} = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial \underline{e}_z}{\partial z} = 0\,. \end{array}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

3.2 Champ de vecteurs

Un vecteur $\underline{v}$ au point M est décomposé dans la ***base locale orthonormée*** $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\theta$, $\underline{e}_z$. Ses composantes sont v_r , v_θ , v_z :

$$\underline{v}\,(\underline{M}) = v_r(r\,,\,\theta\,,\,z)\,\underline{e}_r + v_\theta(r\,,\,\theta\,,\,z)\,\underline{e}_\theta + v_z(r\,,\,\theta\,,\,z)\,\underline{e}_z\ . \tag{3.1}$$

On a, dans cette base :

$$\underline{\underline{\tilde{\nabla} v}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\Big(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\Big) & \dfrac{\partial v_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\Big(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\Big) & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\text{div}\ \underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\underline{\Delta v} = \text{div}\,(\underline{\underline{\nabla v}}) = (\Delta v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2})\,\underline{e}_r + (\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2})\,\underline{e}_\theta + \Delta v_z\,\underline{e}_z\ .$$

3.3 Fonction scalaire

$$f\,(\underline{M}) = f\,(r\,,\,\theta\,,\,z)$$

$$\underline{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial r}\,\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\underline{e}_z$$

$$\Delta f = \text{div}\,(\underline{\nabla f}) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\ .$$

3.4 Champ de tenseurs du 2ème ordre

$$\underline{\underline{T}}\,(\underline{M}) = \underline{\underline{T}}\,(r\,,\,\theta\,,\,z) = T_{ij}\,(r\,,\,\theta\,,\,z)\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

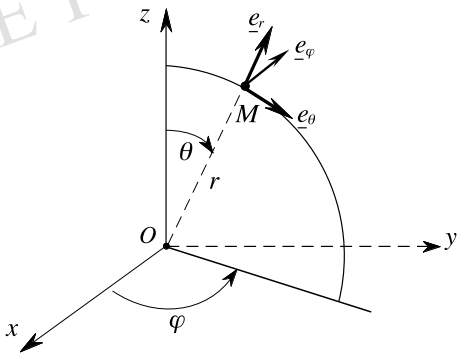
on se limitera à l'expression de div $\underline{\underline{T}}\,(r\,,\,\theta\,,\,z)$:

$$\begin{aligned} \text{div}\ \underline{\underline{T}}\,(r\,,\,\theta\,,\,z) = \quad & \Big(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r}\Big)\,\underline{e}_r \\ & + \Big(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{T_{\theta r} + T_{r\theta}}{r}\Big)\,\underline{e}_\theta \\ & + \Big(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r}\Big)\,\underline{e}_z\ . \end{aligned}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

4 Coordonnées sphériques

4.1 Paramétrage



$$\underline{e}_r = \frac{\partial \underline{M}}{\partial r}$$
$$\underline{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \underline{M}}{\partial \theta}$$
$$\underline{e}_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \underline{M}}{\partial \varphi}$$

Figure 4 – Coordonnées sphériques

La position d'un point M est repérée par les paramètres r , θ , φ (figure 4). La base locale orthonormée est $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\theta$, $\underline{e}_\varphi$:

$$\underline{\mathrm{d}M} = \underline{e}_r\,\mathrm{d}r + \underline{e}_\theta\, r\,\mathrm{d}\theta + \underline{e}_\varphi\, r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\ ;$$

sa variation est donnée par :

$$\frac{\partial \underline{e}_r}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial r} = 0$$
$$\frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta} = \underline{e}_\theta \quad , \quad \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \theta} = -\underline{e}_r \quad , \quad \frac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \varphi} = \underline{e}_\varphi \sin\theta \quad , \quad \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \varphi} = -\underline{e}_\varphi \cos\theta \quad , \quad \frac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\underline{e}_r \sin\theta - \underline{e}_\theta \cos\theta\ .$$

4.2 Champ de vecteurs

Un vecteur $\underline{v}$ au point M est décomposé dans la ***base locale orthonormée*** $(\underline{e}_r\,,\,\underline{e}_\theta\,,\,\underline{e}_\varphi)$:

$$\underline{v}\,(\underline{M}) = v_r\,(r\,,\,\theta\,,\,\varphi)\,\underline{e}_r + v_\theta\,(r\,,\,\theta\,,\,\varphi)\,\underline{e}_\theta + v_\varphi\,(r\,,\,\theta\,,\,\varphi)\,\underline{e}_\varphi\ .$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On a dans cette base :

$$\underline{\underline{\tilde{\nabla} v}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\Big(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\Big) & \dfrac{1}{r}\Big(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi\Big) \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\Big(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\Big) & \dfrac{1}{r}\Big(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - v_\varphi \cot\theta\Big) \\ \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \dfrac{1}{r}\Big(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_\theta \cot\theta + v_r\Big) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r}\cot\theta + 2\frac{v_r}{r} .$$

$$\underline{\Delta v} = \operatorname{div}(\underline{\nabla v}) = \Big(\Delta v_r - \frac{2}{r^2}\Big(v_r + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta \sin\theta) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\Big)\Big)\,\underline{e}_r +$$

$$+ \Big(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\Big(\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{2\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\Big)\Big)\,\underline{e}_\theta +$$

$$+ \Big(\Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\Big(\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \cot\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} - \frac{v_\varphi}{2\sin\theta}\Big)\Big)\,\underline{e}_\varphi .$$

4.3 Fonction scalaire

$$f(\underline{M}) = f(r\,,\,\theta\,,\,\varphi)$$

$$\underline{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial r}\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\underline{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\underline{e}_\varphi$$

$$\Delta f = \operatorname{div}(\underline{\nabla f}) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2}\cot\theta\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} .$$

4.4 Champ de tenseurs du 2ème ordre symétriques

$$\underline{\underline{T}}(M) = \underline{\underline{T}}(r\,,\,\theta\,,\,\varphi) = T_{ij}(r\,,\,\theta\,,\,\varphi)\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\operatorname{div}\underline{\underline{T}}(r\,,\,\theta\,,\,\varphi) = \Big(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}(2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} + T_{r\theta}\cot\theta)\Big)\,\underline{e}_r$$

$$+ \Big(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\big[(T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi})\cot\theta + 3T_{r\theta}\big]\Big)\,\underline{e}_\theta$$

$$+ \Big(\frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}(2T_{\theta\varphi}\cot\theta) + 3T_{r\varphi}\Big)\,\underline{e}_\varphi .$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Bibliographie

ACHENBACH, J.D. (1973) – *Wave Propagation in Elastic Solids*. North-Holland, Amsterdam.

ATTEIA, M. & DEDIEU, J.P. (1981) – Minimization of energy in nonlinear elasticity. *Nonlinear problems of Analysis in Geometry and Mechanics*, (M. ATTEIA, D. BANCEL, I. GUMONSKI ed.). Pitman, Boston, pp. 73-79.

BALL, J.M. (1977) – Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **63**, 337-403.

BALL, J.M., KNOPS, R.J. & MARSDEN, J.E. (1978) – Two examples in nonlinear elasticity. *Proc. Conf. on Nonlinear analysis, Besançon, 1977*. Springer Verlag, Berlin, pp. 41-49.

BAMBERGER, Y. (1981, 1997) – *Mécanique de l'ingénieur*. Hermann, Paris, 1981 (vol. 1 & 2), 1997 (vol. 3 & 4).

BELLET, D. & BARRAU, J.J. (1990) – *Cours d'élasticité*. Cépaduès éditions, Toulouse.

BELTRAMI, E. (1886) – Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell. *Memorie della Reale Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, série IV, **VII**.

BELTRAMI, E. (1892) – Osservazioni sulla Nota precedente. *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, série V, **I**, Roma, 141-142.

BEREST, P. (1997) *Calcul des variations*. Ellipses, Paris.

BOEHLER, J.P. (1978) – Loi de comportement anisotrope des milieux continus. *J. Mécanique*, **17**, 2, 153-190.

BOEHLER, J.P. & SAWCZUCK, A. (1977) – On yielding of oriented solids. *Acta mechanica*, **27**, 185-206.

BONNET, M. (1999) – *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*. John Wiley, Chichester.

BONVALET, M. (1992) – *Les principes de la mécanique*. Masson, Paris.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

BOUSSINESQ, J. (1885) – *Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et des mouvements des solides élastiques, principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent dans ces solides des efforts quelconques exercés sur une petite partie de leur surface ou de leur intérieur*. Gauthier-Villars, Paris.

BROUSSE, P. (1981) – *Mécanique analytique : puissances virtuelles, équations de Lagrange,applications*. Vuibert, Paris.

BRUN, E.A., MARTINOT-LAGARDE, A. & MATHIEU, J. (1968) – *Mécanique des fluides*. Dunod,Paris.

de BUHAN P., DORMIEUX L., & SALENÇON J. (1998) – Modélisation multipolaire de la résistance d'un milieu renforcé par inclusions. *C.R. Ac. Sc. Paris*, **326**, IIb, 163-170.

BUI, H.D. (1970) – Évolution de la frontière du domaine élastique des métaux avec écrouissage plastique et comportement élasto-plastique d'un agrégat de cristaux cubiques.*Mémorial de l'artillerie française, Sciences et techniques de l'armement*, **1**, 141-165.

BUI, H.D. (1978) – *Mécanique de la rupture fragile*. Masson, Paris.

CHADWICK, P. (1999) – *Continuum Mechanics : Concise Theory and Problems*. Dover, New York.

CHUNG, T.J. (1996) – *Applied Continuum Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge UK.

CIARLET, P.G. (1986) – *Élasticité tridimensionnelle*. Masson, Paris.

CIARLET, P.G. (1988) – *Mathematical Elasticity*, vol. I. North-Holland, Amsterdam.

CIARLET, P.G. & GEYMONAT, G. (1982) – Sur les lois de comportement en élasticité non-linéaire compressible. *C.R. Ac. Sc. Paris*, Série A, **295**, 423-426.

COIRIER, J. (1997) – *Mécanique des milieux continus. Concepts de base*. Dunod, Paris.

COLEMAN, B.D. (1964) – On thermodynamics, strain impulses and viscoelasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **17**, 230-254.

COLEMAN, B.D. (1964) – Thermodynamics of materials with memory. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **17**, 1-46.

COLEMAN, B.D. & NOLL, W. (1959) – On the thermostatics of continuous media. *Arch. Rational Mech. Anal*, **4**, 97-128.

COLEMAN, B.D. & OWEN, D.R. (1974) – A mathematical foundation for thermodynamics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **54**, 1-104.

COLONNETTI, G. (1960) – *L'équilibre des corps déformables*. Dunod, Paris.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

COSSERAT, E. & COSSERAT, F. (1909) – *Théorie des corps déformables*. Hermann, Paris.

COURBON, J. (1971) – *Résistance des matériaux*. Dunod, Paris.

COURBON, J. (1972) – *Calcul des structures*. Dunod, Paris.

COUSSY, O. (1995) – *Mechanics of Porous Continua*. John Wiley, Chichester.

DAUTRAY, R. & LIONS, J.L. (2000) – *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

DAVET, J.L. (1985) – Sur les densités d'énergie en élasticité non linéaire : confrontation de modèles et de travaux expérimentaux. *Ann. Ponts et Chaussées*, **35**, 2-33.

DUVAUT, G. (1990) – *Mécanique des milieux continus*. Masson, Paris.

EIRICH, F.R. (1956, 1967) – *Rheology : Theory and Applications*. Academic Press, New York, 1956 (vol. 1), 1958 (vol. 2), 1960 (vol. 3), 1967 (vol. 4).

ERINGEN, A.C. (1962) – *Nonlinear Theory of Continuous Media*. McGraw-Hill, New York.

ERINGEN, A.C. (1967) – *Mechanics of continua*. John Wiley, New York.

FILONENKO-BORODICH, M. (1965) – *Theory of Elasticity*. Dover, New York.

FRANÇOIS, D., PINEAU, A. & ZAOUI, A. (1991, 1993) – *Comportement mécanique des matériaux*. Hermès, Paris, 1991 (vol. 1), 1993 (vol. 2).

FREUDENTHAL, A.M. (1966) – *Introduction to the Mechanics of Solids*. John Wiley, New York.

FREY, F. (1990) – *Analyse des structures et milieux continus*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.

FROCHT, M.M. (1941, 1948) – *Photoelasticity*. John Wiley, New York, 1941 (vol. 1), 1948 (vol. 2).

FUNG, Y.C. (1994) – *A First Course in Continuum Mechanics*. 3rd ed. Prentice Hall.

GEIRINGER, H. (1937) – Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes. *Mem. Sc. Math.*, **86**, Gauthier-Villars, Paris.

GERMAIN, P. (1962) – *Mécanique des milieux continus*. Masson, Paris.

GERMAIN, P. (1973) – *Cours de mécanique des milieux continus*. Masson, Paris.

GERMAIN, P. (1973) – La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. *J. Mécanique*, **12**, 2, 236-274.

GERMAIN, P. (1986) – *Mécanique*. Ellipses, Paris.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

GERMAIN, P. & MULLER, P. (1980) – *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Masson, Paris ; 2ème éd. 1995.

GORDON, J.E. (1988) – *The New Science of Strong Materials*. Princeton Univ. Press, Princeton.

GREEN, A.E. & ADKINS, J.E. (1970) – *Large elastic deformations*. 2nd ed. Clarendon Press, Oxford.

GREEN, A.E. & ZERNA, W. (1954) – *Theoretical Elasticity*. Clarendon Press, Oxford.

GURTIN, M.E. (1972) – The linear theory of elasticity. *Handbuch der Physik*. IV a/2, Springer.

GURTIN, M.E. (1981) – *Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, New York.

HALPHEN, B. & SALENÇON, J. (1987) – *Élasto-plasticité*. Presses de l'ENPC, Paris.

HASHIN, Z. & SHTRICKMAN, S. (1963) – A variational approach to the theory of the elastic behavior of mutiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **11**, 2, 127-140.

HEYMAN, J. (1998) – *Structural analysis. A historical approach*. Cambridge Univ. Press, Cambridge U.K.

HIBBELER, R.C. (1997) – *Structural Analysis*. 3rd edn., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J.

HIBBELER, R.C. & FAN S.C. (1997) – *Engineering Mechanics, Statics*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J.

HJELMSTAD, K.D. (1997) – *Fundamentals of Structural Mechanics*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J.

JOHN, F. (1972) – Uniqueness of non-linear elastic equilibrium for prescribed boundary displacements and sufficiently small strains. *Comm. Pure Appl. Math.*, **25**, 1972, 617-634.

KÖTTER, F. (1903) – Die Bestimmung des Druckes an gekrümmeten Gleitflächen, eine Aufgabe aus der Lehre vom Erddruck. *Berl. Akad. Bericht*, 229.

LAMÉ, G & CLAPEYRON, E. (1828) – Sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences,* sc. math. & phys., **4**, 463-562, Bachelier, Paris, 1834.

LANDAU, L. & LIFCHITZ, E. (1967) – *Théorie de l'élasticité*. Éditions Mir, Moscou.

LANDAU, L. & LIFCHITZ, E. (1994) – *Mécanique des fluides*. Ellipses, Paris.

LEKHNITSKII, S.G. (1963) – *Theory of Elasticity of a Anisotropic Elastic Body*. Holden-Day, San Francisco.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

LEMAITRE, J. & CHABOCHE, J.L. (1985) – *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris.

LE TALLEC, P. (1981) – *Les problèmes d'équilibre d'un corps hyperélastique incompressible en grandes déformations*. Th. D. Sc. Univ. Pierre et Marie Curie, Paris.

LE TALLEC, P. & ODEN, J.J. (1981) – Existence and characterization of hydrostatic pressure in finite deformations of incompressible elastic bodies. *J. Elasticity*, **11**, 341-358.

LIN, T.H. (1968) – *Theory of Inelastic Structures*. John Wiley, New York.

LOVE, A.E.H. (1944) – *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, New York.

LUBLINER, J. (1990) – *Plasticity Theory*. Macmillan, New York.

MAISONNEUVE, O. (1973) – *Sur le Principe de Saint Venant*. Th. D. Sc., Univ. Poitiers.

MALVERN, L.E. (1969) – *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall.

MANDEL, J. (1966) – *Cours de mécanique des milieux continus*. Gauthier-Villars, Paris.

MANDEL, J. (1973) – Équations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques. *Int. J. Solids and Structures*, **9**, 6, 725-740.

MANDEL, J. (1974) – *Introduction à la mécanique des milieux continus déformables*. Éditions scientifiques de Pologne, Varsovie.

MANDEL, J. (1978) – *Propriétés mécaniques des matériaux*. Eyrolles, Paris.

MARSDEN, J.E. & HUGHES, Th.J.R. (1978) – Topics in the mathematical foundations of elasticity. *Nonlinear Analysis and Mechanics : Heriot-Watt Symposium vol.2*. Pitman, London, pp. 30-285.

MARSDEN, J.E. & HUGHES, Th.J.R. (1983) – *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.

MARSDEN, J.E. & HUGHES, Th.J.R. (1994) – *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover, New York.

MASE, G.E. (1970) – *Theory and problems of Continuum Mechanics*, Schaum's outline series. McGraw-Hill, New York.

MIKHLIN, S.G. (1964) – *Variational Methods in Mathematical Physics*.Pergamon Press, Oxford.

MOREAU, J.-J. (1966) – *Fonctionnelles convexes*. Séminaire Jean Leray, n° 2 (1966-1967), 1-108.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

VON MISES R. (1945) – On Saint Venant's Principle. *Bull. Amer. Soc.*, **51**, 555-562.

MONTÁNS, F. J. (2002) – Graphical Relationship among Lamé Ellipsoid and Mohr's Circles. A Graphical View of Mohr's Circles. *J. Eng. Mech.,* **128**, 3, 371-375.

MORERA, G. (1892) – Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo. *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, série V, **I**, Roma, 137-141.

MULLER, P. (1990) – *Résistance des structures*. Hermès, Paris.

MURNAGHAN, F.D. (1951) – *Finite Deformation of an Elastic Solid*. John Wiley, New York.

MUSKHELISHVILI, N.I. (1953) – *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff, Groningen.

NECAS, J. & HLAVÁCEK, I. (1981) – *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-plastic Bodies,an Introduction*. Elsevier, Amsterdam.

ODEN, J.T. (1972) – *Finite Elements of Nonlinear Continuum*. McGraw-Hill, New York.

ODEN, J.T. (1979) – Existence theorems for a class of problems in non-linear elasticity. *J. Math. Anal. Appl.*, **69**, 51-83.

OGDEN, R.W. (1972) – Large deformation isotropic elasticity : On the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids. *Proc. Roy. Soc. London*, A, **328**,567-583.

OGDEN, R.W. (1997) – *Non-linear elastic deformations*. Dover, New York.

ONSAGER, L. (1968) – *The motions of ions : principles and concepts*. Nobel Lecture.

PALAMÁ, A. (1976) – On Saint Venant's Principle in Three-dimensional Elasticity. *Meccanica*, **11**, 2, 98-101.

PERSOZ, B. (1969) – *La rhéologie*. Masson, Paris.

PRAGER, W. (1961) – *Introduction to Mechanics of Continua*. Gin & Co, New York.

PRIGOGINE, I. (1968) – *Introduction à la thermodynamique des phénomènes irréversibles*. Dunod, Paris.

QUÉRÉ, Y. (1988) – *Physique des matériaux*. Ellipses, Paris.

QUÉRÉ, Y. (1998) – *Physics of Materials*. Gordon & Breach.

SAINT VENANT (BARRÉ de), A.J-C. (1853) – Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, etc. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences*, sc. math & phys., **14**, 233-560, Paris, 1856.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

SAINT VENANT (BARRÉ de), A.J-C. (1863) – Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope. *J. Math. Pures et Appliquées*, 2e série, VIII, 257-295 et 353-430.

SAINT VENANT (BARRÉ de), A.J-C. (1864) – *Résumé des leçons données à l'École des ponts et chaussées par* NAVIER, 3ème édition avec notes et appendices, Dunod, Paris, 1864.

SALENÇON, J. (1977) – *Applications of the Theory of Plasticity in Soil Mechanics*. John Wiley, Chichester.

SALENÇON, J. (1983) – *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'ENPC, Paris.

SALENÇON, J. (1983) – *Viscoélasticité appliquée au calcul des structures*. Presses de l'ENPC, Paris.

SALENÇON, J. (1990) – An introduction to the yield design theory and its applications to soil mechanics. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **9**, 5, 477-500.

SALENÇON, J. (2002) – *de l'Élasto-plasticité au Calcul à la rupture*. Les éditions de l'École polytechnique & Ellipses diffusion, Paris.

SALENÇON, J. (2013) – *Yield Design*. ISTE Ltd, London UK & John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ.

SEGEL, L.E. (1987) – *Mathematics Applied to Continuum Mechanics*. Dover, New York.

SMITH, J.O. & CHANG K.L. (1953) – Stresses due to tangential and normal loads on an elastic solid with application to some contact stress problems. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **75**, 157-166.

SOKOLOVSKI, V.V. (1960) – *Statics of soil media*. Butterworths Sci. Publ., London.

SOLOMON, L. (1968) – *Élasticité linéaire*. Masson, Paris.

SOUTHWELL, R.V. (1941) – *An Introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists*. Oxford Univ. Press, Oxford.

STERNBERG, E. (1954) – On Saint Venant's Principle. *Quart. Appl. Math.*, **11**, 393-402.

STERNBERG, E. & ROSENTHAL, F. (1952) – The elastic sphere under concentrated loads.*J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **74**, 413-421.

STOKER, J.J. (1968) – *Nonlinear Elasticity*. Gordon and Breach, New York.

SUQUET, P. (1981) – Approach by homogenization of some linear problems in solid mechanics, *Proc. CNRS Int. Symp. 319 "Plastic Behavior of anisotropic solids"*. CNRS éd., Paris,pp. 77-117.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

SUQUET, P. (1982) – Une méthode duale en homogénéisation : application aux milieux élastiques. *J. Mec. Th. & Appl.*, numéro spécial, 79-98.

SZABO, I. (1974) – Die Geschichte der Materialkonstanten der linearen Elastizitätstheorie homogener isotroper Stoffe. *Die Bautechnik*, **51**, 1-8.

THUAL, O. (1997) – *Introduction à la Mécanique des milieux continus déformables*. Cépaduès éditions, Toulouse.

TIMOSHENKO, S. (1947) – *Théorie de la stabilité élastique*. Béranger, Paris.

TIMOSHENKO, S. (1983) – *History of Strength of Materials*. Dover, New York.

TIMOSHENKO, S. & GOODIER, J.N. (1951) – *Theory of Elasticity*. Mac Graw-Hill, New York.

TIMOSHENKO, S. & GOODIER, J.N. (1961) – *Théorie de l'élasticité*. Béranger, Paris.

TOUPIN, R.A. (1965) – Saint Venant's Principle. *Arch. Rat. Mech. and Analysis*, **18**, 83-96.

TRUESDELL, C. (1966) – *The Elements of Continuum Mechanics*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

TRUESDELL, C. (1968) – *Essays in the History of Mechanics*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

TRUESDELL, C. (1977) – *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. Academic Press,New York.

TRUESDELL, C. & NOLL, W. (1965) – The non-linear field theories of Mechanics. *Handbuch der Physik*, III/3, Springer, Berlin.

TRUESDELL, C. & TOUPIN, R.A. (1960) – The classical field theories. *Handbuch der Physik*, III/3, Springer, Berlin.

UGURAL, A.C. & FENSTER, S.K. (1995) – *Advanced Strength and Applied Elasticity*. 3rd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs.

VALENT, T. (1979) – Teoremi di esistenza e unicità in elastostatica finita. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **60**, 165-181.

VALID, R. (1977) – *La Mécanique des milieux continus et le calcul des structures*. Eyrolles, Paris.

VILLAGIO, P. (1997) – *Mathematical models for elastic structures*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

WAGONER, R.H. & CHENOT, J.L. (1997) – *Fundamentals of Metal Forming*. John Wiley, New York.

WANG, C.C. (1971) – A new representation theorem for isotropic functions. Parts I & II. *Arch. Rat. Mech. and Analysis*, **36**, 1970, 162-223 ; corrigendum, **43**, 392-395.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

WANG, C.C & TRUESDELL, C. (1973) – *Introduction to Rational Elasticity*. Noordhoff, Groningen.

WASHIZU, K. (1975) – *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. 2nd edn. Pergamon Press, Oxford.

WINEMAN, A.S. & PIPKIN, A.C. (1964) – Material symmetry restrictions on constitutive equations. *Arch. Rat. Mech. and Analysis*, **17**, 184-214.

YANG, W.H. (1980) – A Useful Theorem for Constructing Convex Yield Functions. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **47**, 2, 301-303.

YOUNG, T. (1807) – A Course of lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts, Londres.

ZANABONI, O. (1937) – Dimostrazione generale del principio del de Saint Venant. *Atti Accad. Lincei Rend.*, **25**, 117-121.

ZANABONI, O. (1937) – Valutazione dell'errore máximo cui dá luogo l'applicazione del principio del de Saint Venant. *Atti Accad. Lincei Rend.*, **25**, 595-601.

ZANABONI, O. (1937) – Sull'approssimazione dovuta al principio del de Saint Venant nei solidi prismatici isotropi. *Atti Accad. Lincei Rend.*, **26**, 340-345.

ZIEGLER, F. (1991) – *Mechanics of Solids and Fluids*. Springer Verlag, Vienne.

ZIEGLER, H. (1977) – *Introduction to Thermodynamics*. Elsevier, Amsterdam.

ZIENKIEWICZ, Z.O. (1973) – *La méthode des éléments finis*. Ediscience, Paris.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Index alphabétique

Les numéros indiqués renvoient aux chapitres, annexes et paragraphes correspondants.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A

Abstraite
Configuration –, I.3.7.

Accélération –, I.3.6 ; III.4.3.

Action
Loi des – s mutuelles, IV.1.1 ; IV.2.2 ; IV.6.3 ; V.1.
Principe d'– locale, VII.1.1.
Principe de l'– et de la réaction, IV.1.1 ; IV.6.4.

AIRY
Fonction d'–, An III.2.8 ; An III.3.4.

Allongement unitaire, II.3.2 ; II.5.2.
Taux d'–, III.3.4.

Anisotrope
Matériau –, VII.2.2 ; VII.5.7 ; Ex.VII.6 à Ex.VII.8 ; Ex.IX.6.

Anneau, Ex.XI.7 ; Ex.XI.8 ; Ex.XII.4 ; Ex.XII.5.

Appuis, XI.4.2 ; XI.4.4 ; XI.4.6 ; Ex.XI.6 ; Ex.XI.10 ; Ex.XI.13 ; XII.3.3 ; XII.4 ; Ex.XII.7 ; Ex.XII.9.

ARCHIMÈDE
Théorème d'–, Ex.V.4.

Arcs, XI.2.1 ; XI.3.2 ; XI.3.11 ; Ex.XI.5 ; Ex.XI.6 ; XII.2.7.

Articulation, XI.4 ; Ex.XI.3 ; Ex.XI.4 ; Ex.XI.6 ; Ex.XI.11 ; Ex.XI.12 ; XII.4 ; Ex.XII.1 à Ex.XII.3 ; Ex.XII.9 ; Ex.XII.10.

Assemblages, XI.4.3 à XI.4.6 ; Ex.XI.4 ; Ex.XI.9 ; Ex.XI.11 à Ex.XI.13 ; XII.4.1 ; Ex.XII.1 à Ex.XII.3 ; Ex.XII.6.

Autocontrainte
Champ d'–, V.3.13 ; V.4.2 ; Ex.VI.12.
Champ d'– pour le problème, X.6.1 ; X.7.3 ; X.7.4 ; XI.4.5.
Champ d'– pour le système, VIII.2.2 ; VIII.3.5 ; VIII.3.6 ; VIII.7.7 ; X.1.1 ; X.6.1 ; X.7.3 ; XII.2.6.

Autoéquilibrée
Distribution d'efforts intérieurs –, IV.3.4 ; XI.4.5 ; XI.4.6 ; Ex.XI.9 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.6 ; Ex.XII.9.

Axe neutre, IX.3.3 ; IX.4.4 ; IX.5.2.

B

Base, An I.2.3.
Changement de –, An I.3.2 ; An I.5.9.
– *duale*, An I.2.3 ; An I.5.3.

BELTRAMI
Équations de –, VIII.6.2 ; IX.2.2 ; IX.3.2.
Équation de – MICHELL *bidimensionnelle*, An III.2.7.

BERNOULLI
Jakob ; Johann ; Daniel –, II.6.
Théorème de –, Ex.V.9.

BETTI
Théorème de –, X.5.4 ; X.8.3 ; Ex.X.3 ; Ex.X.6.

Bilan
Formules de –, III.4.4.
Méthode du –, III.4.4.

Bilatérale
Liaison –, VIII.1.4.

BOUSSINESQ
Tenseurs des contraintes de –, V.4.2 ; Ex.VII.9.

BRESSE
Formules de – NAVIER, Ex.XI.5 ; XII.3.2 ; XII.3.3.

C

Câbles, XI.2.10 ; Ex.XI.1 ; Ex.XI.2 ; Ex.XI.9 ; Ex.XII.6.

CASTIGLIANO
Théorème de –, X.8.1 ; X.9 ; XII.3.2 ; XII.3.3 ; XII.4.1 ; Ex.XII.4 ; Ex.XII.5 ; Ex.XII.7.

CAUCHY
Tenseur de –, II.3.1.
Tenseur des contraintes de –, V.3.5 ; VI.

Célérité, III.4.4.

Cercles
– *de* MOHR, VI.3.
– *de* MOHR *des déformations*, Ex.II.7.
– *principaux*, VI.3.

Chargement
– *évanouissant*, X.8.1.
Paramètres de –, X.7 ; X.8 ; Ex.X.1 à Ex.X.7.

Choc
– *thermique*, VIII.4.2 ; VIII.4.3 ; VIII.5.3 ; VIII.6.3.
Onde de –, III.4.4 ; III.5.1 ; IV.7.7 ; V.3.9 ; V.3.10.

Cinématiquement admissible
Champ de déplacement –, VIII.4.2 ; VIII.5 ; X ; XI.4.6 ; Ex.XI.5 ; Ex.XI.9 ; Ex.XI.11 à Ex.XI.13 ; XII.3.3 ; XII.4.2 ; Ex.XII.1 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.9.

Cisaillement
Contrainte de –, VI.2.2.
Ligne de –, VIII.7.7.
Module de –, VII.5.3.

Cission, VI.2.2.
– *maximale*, VI.3.4 ; VI.4.3.
– *octaédrale*, VI.2.8 ; VI.4.4.
– *simple*, VI.3.5 ; VIII.7.5 ; VIII.7.7.

CLAPEYRON
Formule de –, X.5.2 ; X.5.3 ; X.8.3 ; Ex.X.1 à Ex.X.3 ; Ex.X.5 à Ex.X.9.

CLAUSIUS-DUHEM
Inégalité de –, VII.3.2 ; VII.3.3 ; VII.4.2 ; VII.4.3.

COLONNETTI
Théorème de –, X.8.3.

Compatibilité
– *des déformations thermiques*, II.6.4 ; Ex.II.9 ; Ex.II.10 ; Ex.IX.7 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.6 ; Ex.XII.9.
– *des données statiques*, VIII.1.2 ; VIII.4.2 ; X.3.1 ; X.4.1 ; XI.2.6 ; XI.2.8 ; XI.3.7 ; XI.4.5.
Conditions de –, II.6 ; III.3.7 ; III.3.9 ; IV.3.4 ; V.3.13 ; V.4.2 ; VIII.6.1 ; X.4.1 ; XI.4.6 ; Ex.XI.4 ; Ex.XI.5 ; Ex.XI.9 ; Ex.XI.11 à Ex.XI.13 ; XII.3.3 ; XII.4.2 ; Ex.XII.1 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.6 à Ex.XII.8. An III.2.5 ; An III.3.4.

Complaisances élastiques
Tenseur des –, X.1.6 ; Ex.X.6.

Comportement
Loi de –, VII.1 ; VII.2.1.
– *thermoélastique*, VII ; VIII ; IX ; X ; XII.

Composantes
– *d'un produit tensoriel*, An I.3.5.
– *d'un tenseur*, An I.3.1.

Compression
– *avec frottement*, Ex.X.7.
– *simple*, VI.3.5 ; IX.2 ; Ex.IX.3 ; Ex.IX.5 à Ex.IX.8 ; X.5.3.
– *triple*, VI.3.5.

Conditions aux limites, VIII.1.2 à VIII.1.4 ; VIII.2.2 ;VIII.4.2 ; VIII.5.1 ; VIII.6.1 ; VIII.7.3 ; VIII.8 ; Ex.VIII ; IX ; Ex.IX ; X.1.1 ; X.2.2 ; X.3.1 ; X.4.2 ; X.7.2 ; Ex.X.5 à Ex.X.7.

Conduction
Inégalité de la –, VII.4.2 ; VIII.1.2.
Loi de FOURIER *de la* –, VII.4.2 ; VIII.1.2.

Configuration, I.2.3 ; I.3.7.

Conservation
– *de l'énergie*, VII.3.1.
– *de la masse*, III.5.
– *de la quantité de mouvement*, IV.7.3 ; V.3.10.

Console
Poutre –, XII.4.

Continuité
– *du milieu*, I.1.
Équation de –, III.5.1.
Hypothèse de –, I.3.2 ; I.3.3.

Contraction
– *d'un tenseur*, An I.4 ; An I.5.

Contrainte, V.3 ; V.4
– *équivalente*, VI.4.4.
– *normale*, VI.2.2.
– *plane*, An III.3.
– *tangentielle*, VI.2.2.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

– *s initiales*, VII.5.2 ; VII.5.4 ; Ex.VII.7.4 ; VIII.2.2 ; VIII.3.4 à VIII.3.6 ; VIII.7.7 ; X.1.1 ; X.3.7 ; X.5 ; X.8.3.
– *s principales*, VI.2.6.
– *s résiduelles*, VIII.2.2.
Couple –, V.5.3.
Fonction de –, VIII.7.3 ; An III.2.8 ; An III.3.4.
Méthode des –, VIII.6 ; VIII.7.6 ; Ex.VIII.1 ; Ex.VIII.2 ; Ex.VIII.4 ; Ex.VIII.5 ; Ex.VIII.7 ; IX.2 ; à IX.5 ; Ex.IX.3 ; Ex.IX.4 ; Ex.IX.6 ; X.1.2 ; X.4.1 ; An III.2.5 ; An III.3.
Vecteur –, V.3.5 ; V.5.3 ; VI.2.

Contravariance, An I.1.1 ; An I.3.2 ; An I.5.

Convention de signe
– *sur les contraintes*, VI.2.3.

Convexité, VII.4.2 ; VII.5.5 ; X.1.5 ; X.2 à X.9.

Corotationnelle
Dérivée –, VI.5.3 ; Ex.VII.12.

Cosinus directeurs, VI.2.5.

COSSERAT
Continus de –, V.5.

COULOMB
Critère de –, Ex.VI.9 ; Ex.VI.10.
Frottement de –, Ex.XI.2.

Couple
– *de contrainte*, V.5.3.
– *de torsion*, VIII.7 ; Ex.VIII.5 à Ex.VIII.7 ; Ex.IX.10 ; Ex.X.1 ; Ex.X.8 ; Ex.X.9 ; XI.3.11 ; XII.2.5 à XII.2.7 ; XII.3.4 ; Ex.XII.4.

Courbure, Ex.II.10 ; IX.3.3 ; IX.4.4.

Covariance, An I.1.1 ; An I.3.2 ; An I.5.

Critères
– *de limite d'élasticité*, VI.4 ; Ex.VI.3 à Ex.VI.6 ; Ex.VI.8 à Ex.VI.11 ; Ex.VI.13 ; VIII.7.7 ; Ex.VIII.5 ; Ex.VIII.6 ; IX.2.4 ; IX.2.5 ; IX.3.4 ; IX.6.4.

Critique
Force – *d'*EULER, Ex.XII.10.

Curvilignes
Milieux –, XI ; XII.

D

Décomposition
– *d'un tenseur*, An I.3.

Décomposition polaire, II.3.4 ; II.4.5.

Déformation
– *du milieu curviligne*, XII.2.2 ; XII.2.7.
– *plane*, An III.2.
– *pure*, II.3.4.
Taux de –, III.2.2 ; III.3.3 à III.3.9 ; Ex.III.3.1 à Ex.III.3.3 ; V.3.13 ; VII.3.1 ; VII.4.6.

Déformations
Tenseur des – *de* GREEN-LAGRANGE, II.3.3 ; II.4.3 ; VII.3.3 ; VII.4.
Tenseur des – *linéarisé*, II.5.2 ; III.3.6 ; VII.5 ; VIII ; IX ; X.
– *thermiques*, Ex.II.9 ; Ex.II.10 ; Ex.VI.12 ; Ex.IX.3 ; Ex.IX.7.

Déformée
– *de la fibre moyenne*, IX.3.3.
– *de la poutre*, XII.3.6.

Déplacement, II.4.4 ; XII.2.2.
Fonction de –, VIII.5.4 ; IX.6.3 ; IX.7.3.
Méthode des – *s*, VIII.1.3 ; VIII.5 ; VIII.7.2 ; Ex.VIII.3 ; Ex.VIII.6 ; IX.6 ; IX.7 ; Ex.IX.1 ; Ex.IX.2 ; Ex.IX.5 ; Ex.IX.7 à Ex.IX.10 ; X.1.2 ; X.4.1 ; An III.2.4.
Distributeur du –, XII.2.2.

Dérivée particulaire, III.2.1 ; III.3.2 ; III.4.
– *d'un flux*, III.4.6.
– *d'un vecteur matériel*, III.2.1 ; III.3.2.
– *d'un volume matériel*, III.2.1 ; III.3.5.
– *d'une circulation*, III.4.5.
– *d'une fonction de point*, III.4.1 ; III.4.3.
– *d'une intégrale de volume*, III.4.4 ; III.5.3.
– *du tenseur des contraintes*, VI.5.1.

Déterminant
– *d'un tenseur*, An I.3.3 ; An I.5.7.

Déviateur
– *des contraintes*, VI.2.8 ; VI.4.3 ; VI.4.4 ; Ex.VI.1 ; VII.5.4 ; X.5.1.
– *des déformations*, VII.5.4 ; X.5.1.

Dilatation, II.3.2.
– *s principales*, II.3.2.
– *volumique*, I.3.2 ; II.2.3 ; II.4.2.
Coefficient de – *thermique*, VII.5.3 ; VII.5.6 ; XII.2.6 ; XII.3.5 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.8 ; Ex.XII.9.
Taux de – *volumique*, III.3.5.
Tenseur des – *s*, II.3.1 ; An I.5.2 ; An I.5.7.

Directions principales, An I.5.10.
– *de la déformation*, II.3.
– *des contraintes*, VI.2.6.
– *du taux de déformation*, III.3.4 ; III.3.5.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Directrice
Courbe –, XI ; XII.

Discontinuité
– *de la tension*, XI.2.7.
– *des efforts intérieurs*, XI.3.8.
– *du champ de contrainte*, V.3.9 ; VIII.1.1 ; VIII.4.2 ; VIII.4.3 ; VIII.5.3 ; VIII.6.3 ; X.1.1.
– *du champ de déformation*, VIII.4.2 ; VIII.4.3 ; VIII.5.3 ; VIII.6.3 ; X.4.2.
– *du champ de vitesse réel*, III.4.4 ; III.5.1 ; IV.7.6 ; V.3.9 ; V.3.11.
– *du champ de vitesse virtuel*, V.2.7 ; V.3.8 ; XI.2.9 ; XI.3.10.

Dislocation-vis, Ex.X.9.

Dissipation, VII.3.2 ; VII.4.2 ; VII.4.3.

Distributeur, IV.5 ; V.5.3 ; XI.3 ; XI.4 ; XII.
– *tensoriel*, IV.5 ; V.5.3.
Dérivée d'un –, IV.5.5 ; XI.3.5.
Gradient d'un –, IV.5.5 ; V.5.3.

Divergence
– *d'un champ de tenseurs*, An I.6.3.
Formule de la –, III.4.4 ; V.2.4 ; V.3.3 ; V.4.2 ; V.5.3 ; An I.6.3.

Domaine initial d'élasticité, VI.4.1 ; Ex.VI.3 à Ex.VI.5 ; VII.2,2 ; VIII.2.3 ; VIII.7.7 ; Ex.VIII.5 ; Ex.VIII.6 ; IX.2.4 ; IX.2.5 ; IX.3.4 ; IX.6.4 ; Ex.XII.3.

Dynamique
Équations de la –, V.2.4 ; V.3.3 ; V.3.7 ; V.3.9 ; V.3.14 ; V.4.2 ; VIII.1.1 ; VIII.2.2.
Loi fondamentale de la –, IV.1.1 ; IV.2.2 ; IV.6.3 ; V.1 ; V.2.6 ; V.3.4.

E

Effort
– *normal*, IX.5.1 ; XI.2.10 ; XI.3.11 à XI.3.13 ; XI.4.7 ; XII.2.5 ; XII.3.2.
– *tranchant*, IX.5.3 ; XI.3.11 à XI.3.13 ; XI.4.7 ; XII.2.5.

Efforts
– *extérieurs*, IV ; V.2.2 ; V.3.1 ; V.5.3 ; XI.2.3 ; XI.3.4.
– *intérieurs*, IV ; V.2.3 ; V.3.2 ; V.3.6 ; V.5 ; XI.2.4 ; XI.2.6 ; XI.3.5 ; XI.3.7.

Élancement, VIII.8 ; IX.2.3 ; IX.3.3 ; Ex.IX.2 ; XI.1 ; XI.3.11 ; XI.3.12 ; XII.2.5 ; Ex.XII.10.

Élasticité, VII ; VIII ; IX ; X ; XII.
– *plane*, An III.
Limite d'–, VIII.7.7 ; Ex.VIII.5 ; Ex.VIII.6 ; IX.2.4 ; IX.2.5 ; IX.3.4 ; IX.6.4.

Éléments finis
Méthode des –, VIII.4.4 ; X.4.2.

Encadrement, X.3.5 ; X.5.2 ; X.5.3 ; Ex.X.5 à Ex.X.8.

Encastrement, XI.4.2 à XI.4.4 ; Ex.XI.9 ; XII.4 ; Ex.XII.6 ; Ex.XII.9.

Énergie
– *complémentaire*, X.3.2.
– *élastique de contrainte*, X.3.2 ; X.3.3 ; X.5.1 ; X.5.2 ; X.8.1 ; XII.2.5 à XII.2.7 ; Ex.XII.8.
– *élastique de déformation*, X.2.2 ; X.2.3 ; X.5.1 ; X.5.2.
– *élastique*, X.5.2.
– *interne*, VII.3.1 ; VII.3.3.
– *libre*, VII.3.2 ; VII.3.3 ; VII.4.2 à VII.4.5 ; VII.5.2 à VII.5.5.
– *potentielle*, X.2.2 ; X.3.2 ; X.3.5.
Équation de l'–, VII.3.1 ; VII.3.2.
Théorème de l'–, X.8 ; XII.3.2 ; XII.3.3 ; XII.4 ; Ex.XII.1 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.4 à Ex.XII.7.
Théorème de l'– cinétique, IV.7.5 ; V.3.11 ; VII.3.1.

Entropie, VII.3.2.

Équilibre
Équation d'–, IV.3.4 ; V.5.3 ; XI.2.5 ; XI.2.8 ; XI.3.6 ; XI.3.9 ; XII.3.4 ; XII.3.5 ; XII.3.6 ;

Euclidien
Espace –, An I.5.

EULER
Force critique d'–, Ex.XII.10.
Théorème d'–, IV.7.4 ; IV.7.6 ; V.3.10.

Eulérienne
Description –, I.4 ; III.3 à III.5.

Évolution
– *thermoélastique*, VIII.1 ; VIII.2 ; VIII.3.1.

Extension
– *simple*, Ex.II.1.
Taux d'–, III.3.4.

Extensométrie, II.7.3 ; Ex.II.8.

F

Facette, V.3.5 ; V.5.3 ; VI.

Facettes conjuguées, VI.2.4.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Fermeture
Conditions de –, II.6.3 ; VIII.6.1 ; Ex.VIII.6.

Fibre, VIII.7.2 ; IX.3.3 ; IX.3.4 ; IX.4 ; IX.5.2.
– *moyenne*, IX.3.3 ; XII.2.5.

Fils, XI.2 ; Ex.XI.1 ; Ex.XI.2 ; Ex.XI.9 ; XII.1 ; Ex.XII.6.

Flambement, Ex.XII.10.

Flèche, XII.4.1.

Flexion
– *circulaire*, IX.3 ; IX.4 ; X.7.4.
– *composée*, IX.5 ; Ex.X.2.
– *déviée*, IX.4.
– *normale*, IX.3.
Moment de –, IX.3 à IX.5 ; Ex.X.2 ; XI.3.11 ; XII.2.5.

Fluides, V.2.5.

Fonction
– *de charge*, VI.4.1.
– *de contrainte*, VIII.7.3 ; An III.2.8 ; An III.3.4.
– *de déplacement*, VIII.5.4 ; IX.6.3 ; IX.7.3.
– *de gauchissement*, VIII.7.2 à VIII.7.6 ; Ex.VIII.5 à Ex.VIII.7 ; IX.2.5 ; Ex.IX.10 ; Ex.X.8.

Force critique
– *d'*EULER, Ex.XII.10.

Forces
– *de masse*, V.2.2 ; V.3.1.
– *surfaciques*, V.2.2 ; V.3.1.
– *de volume*, V.2.2 ; V.3.1.
Méthode des –, X.6.3 ; X.8.2.

Formulation faible
– *des conditions de compatibilité*, III.3.9 ; IV.3.4 ; V.3.13 ; V.4.2 ; X.4.1.
– *des équations de la dynamique*, V.3.14 ; X.4.1.

FOURIER
Loi de –, VII.4.2 ; VIII.1.2.

FRÉNET
Formules de –, XI.2.6 ; XI.4.7 ; XII.3.4.
Trièdre de –, XI.2.6.

Frottement, Ex.X.7 ; Ex.XI.2.

G

Galiléen
Référentiel –, IV.1.1 ; IV.2.3 ; IV.4.4 ; V.1 ; VIII.1.1.

Gauchissement, VII.7.2 à VIII.7.6 ; Ex.VIII.5 à VIII.7 ; Ex.IX.10 ; Ex.X.8 ; XII.2.5.

GEIRINGER
Équations de –, Ex.III.5.

Glissement
– *de deux directions orthogonales*, II.3.2 ; II.5.2.
– *double*, Ex.II.3.
– *simple*, Ex.II.2 ; Ex.II.6.
Taux –, III.3.4.

Gradient
– *d'un champ de distributeurs*, IV.5.5 ; V.5.3.
– *d'un champ de tenseurs*, II.4.1 ; II.5.3 ; An I.6.2.
– *d'un champ de torseurs*, IV.5.5.
– *du champ de vitesse*, III.2.1 ; III.3.2.
– *de température*, Ex.II.9 ; Ex.II.10 ; VII.4.2 ; VIII.1.2 ; VIII.4.3 ; VIII.5.2 ; VIII.6.2 ; Ex.IX.7 ; Ex.XII.8 ; Ex.XII.9.
– *d'une transformation*, II.4.1.

GREEN, VII.6.
Tenseur des déformations de – LAGRANGE –, II.3.3 ; II.4.3 ; VII.3.3 ; VII.4 ; VIII.1.2 ; VIII.1.3.

H

HADAMARD
Relations de –, III.4.4 ; VIII.4.2.

HELMOLTZ
Énergie libre de –, VII.3.2.
Théorème de –, Ex.III.7.

HENCKY
Équation de –, Ex.VI.8.

HERTZ
Problème de –, VIII.2.2.

Hessien, X.1.5.

Homogène
Transformation –, II.2 ; II.3.

HOOKE
Loi de –, VII.2.4.

Houle
– *trochoïdale*, Ex.I.4.

Hyperstaticité
Degré d'–, IV.3.4 ; X.6.1 ; X.8.2 ; XI.4.5 ; XI.4.6 ; Ex.XI.13 ; XII.3.3.

Hyperstatique
Inconnue –, X.6.1 ; XI.4.5 ; XII.4.2 ; Ex.XII.1 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.6 ; Ex.XII.7.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Hypostatique
Problème –, X.6.1 ; XI.4.5 ; XI.4.7 ; Ex.XI.6.

I

Incompressible
Matériau –, II.4.2 ; Ex.II.2 ; Ex.II.6 ; III.3.5 ; Ex.III.1 à Ex.III.5 ; VII.4.3 ; VII.4.6 ; Ex.VII.3 ; Ex.VII.4 ; Ex.VII.9 à Ex.VII.11 ; Ex.IX.8 à Ex.IX.10 ; Ex.X.7.

Inégalité
– *de* CLAUSIUS-DUHEM, VII.3.2 ; VII.3.3 ; VII.4.2 ; VII.4.3.
– *fondamentale*, VII.3.2.

Inertie de torsion, VIII.7.3 ; Ex.VIII.5 à Ex.VIII.7 ; Ex.X.8 ; XII.2.5 à XII.2.7 ; XII.3.4 ; Ex.XII.4.

Inextensible
Matériau –, VII.4.3 ; Ex.VII.5.

Inopérant
Tenseur –, VII.4.3 ; VII.4.6 ; Ex.VII.3 ; Ex.VII.5.

Instabilité
– *élastique*, Ex.XII.10.

Intrinsèque
Dérivée –, VI.5.2 ; Ex.VII.12.

Invariants
– *d'un tenseur du 2ème ordre*, An I.3.3 ; An I.4.6 ; An I.5.7 ; An I.5.10.
– *du tenseur des contraintes*, VI.2.7 ; VI.4.2 ; VI.4.4.
– *du tenseur des déformations*, VII.4.5 ; VII.5.3 ; Ex.VII.1 à Ex.VII.4.

Isostatique
Problème –, X.6.1 ; XI.4.5 ; Ex.XI.7 ; Ex.XI.8 ; XII.3.3 ; XII.4.1 ; Ex.XII.4 ; Ex.XII.5.

Isotrope
Matériau –, VI.4.2 à VI.4.4 ; VII.4.5 ; VII.5.3 ; Ex.VII.1 à Ex.VII.4 ; Ex.VII.10 ; VIII.5.2 ; VIII.6.2 ; VIII.7 ; Ex.VIII.1 à Ex.VIII.3 ; Ex.VIII.5 à Ex.VIII.7 ; IX ; Ex.IX.1 à Ex.IX.5 ; Ex.IX.7 à Ex.IX.10 ; X.2.3 ; X.3.3 ; X.5.1 ; Ex.X.1 à Ex.X.5 ; Ex.X.7 à Ex.X.9 ; An III.
Matériau transversalement –, VII.5.7 ; Ex.VII.6 ; Ex.VIII.4 ; Ex.IX.6.

Isotropie de l'espace, VI.4.2 ; VI.5.2 ; VII.4.1.

J

Jacobien, I.3.2.

JAUMANN
Dérivée de –, VI.5.3 ; Ex.VII.12.

K

KELVIN
Théorème de Lord –, Ex.III.7.

KIRCHHOFF
Tenseur des contraintes de PIOLA –, V.4.1 ; VII.3.3 ; VII.4 ; VII.5 ; Ex.VII ; VIII.1.2 ; VIII.1.3 ; Ex.IX.8 à Ex.IX.10.

KÖTTER
Equations de –, Ex.VI.11.

KRONECKER
Symbole de –, An I.2.3.

L

LAGRANGE
Multiplicateurs de –, VII.4.3 ; VII.4.5 ; VII.4.6 ; Ex.VII.3 à Ex.VII.5 ; VIII.1.2 ; VIII.1.3 ; Ex.IX.8 à Ex.IX.10.
Tenseur des contraintes de PIOLA –, V.4.2.
Tenseur des déformations de GREEN –, II.3.3 ; II.4.3 ; VII.3.3 ; VII.4 ; VIII.1.2 ; VIII.1.3.

Lagrangienne
Description –, I.3 ; II ; III.2.

LAMÉ
Coefficients d'élasticité de –, VII.5.3 ; VII.5.5.
Constante de –, VII.5.3.

LEGENDRE-FENCHEL
Transformée de –, VII.4.2 ; X.1.6 ; X.3 ; X.4.1 ; X.5.

Lemme du tétraèdre, VII.3.1.

Liaison, VIII.1.4 ; X.6.
– *interne*, VII.4.2 ; VII.4.3 ; VII.4.5 ; VII.4.6 ; Ex.VII.3 à Ex.VII.5 ; VIII.1.2 ; VIII.1.3 ; Ex.IX.8 à Ex.IX.10 ; X.2.5 ; X.3.6.
– *parfaite*, VII.4.3.

Ligne
– *d'émission*, I.3.5.
– *de courant*, I.4.3.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Linéarisation, VII.5 ; VIII.2 ; XII.2 ; XII.3.1.

Loi
– *des actions mutuelles*, IV.1.1 ; IV.2.2 ; IV.6.3 ; V.1.
– *fondamentale de la dynamique*, IV.1.1 ; IV.2.2 ; IV.6.3 ; V.1 ; V.2.6 ; V.3.4.

M

Maillages, X.4.2.

Masse
– *volumique*, III.5.1.
Conservation de la –, III.5 ; VIII.1.1 ; VIII.2.3.

Matériel
Domaine –, I.3.2.
Vecteur –, II.2.2 ; II.4.2 ; III.2.1 ; III.3.2.

MAXWELL-BETTI
Théorème de réciprocité de –, X.5.4 ; X.8.4 ; X.10 ; Ex.X.3 ; Ex.X.6.

MENABREA
Théorème de –, X.8.2.

Méthode
– *des contraintes*, VIII.6 ; VIII.7.6 ; Ex.VIII.1 ; Ex.VIII.2 ; Ex.VIII.4 ; Ex.VIII.5 ; Ex.VIII.7 ; IX.2 à IX.5 ; Ex.IX.3 ; Ex.IX.4 ; Ex.IX.6 ; X.1.2 ; X.4.1 ; An III.2.5 ; An III.3.
– *des déplacements*, VIII.1.3 ; VIII.5 ; VIII.7.2 ; Ex.VIII.3 ; Ex.VIII.6 ; IX.6 ; IX.7 ; Ex.IX.1 ; Ex.IX.2 ; Ex.IX.5 ; Ex.IX.7 à Ex.IX.10.
– *énergétiques*, X ; Ex.X.
– *s variationnelles*, VIII.4.4 ; X.1.3 ; X.4.2.

MICHELL
Équations de –, VIII.6.2.

Microstructure, I.5 ; V.5.

Milieu continu, I.

Minimum
– *de l'énergie complémentaire*, X.3.2 ; X.4.1 ; X.5.2 ; X.5.3 ; X.6.2 ; X.8.2 ; Ex.X.5 à Ex.X.9.
– *de l'énergie potentielle*, X.2.2 ; X.4.1 ; X.4.2 ; X.5.2 ; X.5.3 ; Ex.X.5 à Ex.X.9.

von MISES
Critère de –, VI.4.4 ; Ex.VI.4 ; Ex.VI.6 ; VIII.7.7 ; Ex.VIII.5 ; Ex.VIII.6 ; IX.2.4 ; IX.2.5 ; IX.3.4 ; IX.6.4.

Module
– *de cisaillement*, VII.5.3.
– *s d'élasticité*, VII.5.2 ; VII.5.7 ; Ex.VII.6 ; Ex.VII.8 ; Ex.X.6.
– *élastique de compression*, VII.5.4 ; VII.5.5 ; Ex.X.5 ; Ex.X.6.
– *de* YOUNG, VII.5.3.

MOHR
Cercles de –, Ex.II.6 ; VI.3.
Plan de –, VI.3.1.
Représentation de –, VI.3 ; VI.4.3.

Moiré
Méthodes de –, II.7.3.

Moment, IV.1.1 ; IV.5.4 ; V.3.6.
– *de flexion*, IX.3 à IX.5 ; Ex.X.2 ; XI.3.11 ; XII.2.5.
– *de torsion*, XI.3.11 à XI.3.13.
– *fléchissant*, XI.3.11 à XI.3.13 ; Ex.XI.6 à Ex.XI.10 ; Ex.XI.13 ; XII.2.5 à XII.2.8 ; XII.3 ; XII.4 ; Ex.XII.4 à Ex.XII.10.

Mouvement
– *rigidifiant*, III.3.7 ; III.3.8.
– *virtuel*, IV ; V.
– *virtuel rigidifiant*, IV.4 ; IV.5 ; IV.6 ; V.2.4 ; V.3.2 ; V.5.3.
Représentation du –, I.

N

Naturel
État initial –, VII.5.4 ; VIII.2.2 ; VIII.3.4 ; VIII.3.6 ; VIII.4 à VIII.8 ; Ex.VIII ; IX ; Ex.IX ; X.5 ; X.8.3 ; Ex.X ; XII.2.5 ; XII.2.6.

NAVIER
Équation de –, VIII.5.2 ; VIII.6.3 ; VIII.7.3 ; An III.2.4.
Formules de BRESSE –, Ex.XI.5 ; XII.3.2.

NAVIER-BERNOULLI
Condition de –, IX.3.13 ; XI.4.1 ; Ex.XI.5 ; XII.2 ; XII.4.
Hypothèse de –, IX.3.3.

Nœud, X.4.2.

Numériques
Méthodes –, VIII.3.1 ; X.4.2.

O

Objectivité, I.2.4 ; II.4.6 ; III.3.11 ; IV.2.3 ; IV.4.4 ; V.3.15 ; VI.5.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Octaédrale
Cission –, VI.2.8.
Contrainte –, VI.2.8.

Œdométrique
Essai –, Ex.VIII.3 ; Ex.X.6.

Onde de choc, III.4.4 ; III.5.1 ; IV.7.7 ; V.3.9 ; V.3.10.

Ordre
– *d'un tenseur*, An I.1.1.

Orthonormée
Base –, An I.5.3 ; An I.5.9.

Orthotrope
Matériau –, VII.5.7 ; Ex.VIII.4.

P

Parallélépipède
Raisonnement du –, V.2.5 ; V.3.6.

Paramètres
– *cinématiques*, X.7 ; X.8 ; Ex.X.1 à Ex.X.7.
– *de chargement*, X.7 ; X.8 ; Ex.X.1 à Ex.X.7 ; XII.4.1 ; Ex.XII.1 ; Ex.XII.3 à Ex.XII.5.

Permanent
Mouvement –, I.4.4 ; III.5.2

Petites perturbations
Hypothèse des –, VIII.2 à VIII.8 ; Ex.VIII ; IX ; Ex.IX.1 à Ex.IX.7 ; X ; Ex.X ; XII.2.3 ; XII.2.5 ; XII.3.1 ; An III.

Petits déplacements
Hypothèse des –, VIII.2 à VIII.8 ; Ex.VIII ; IX ; Ex.IX.1 à Ex.IX.7 ; X ; Ex.X ; XII.2.3 ; XII.2.5 ; XII.3.1 ; An III.

Photoélasticité, Ex.VI.8 ; VIII.8.

PIOLA-KIRCHHOFF
Tenseur des contraintes de –, V.4.1 ; Ex.V.14 ; VII.3.3 ; VII.4 ; VII.5 ; Ex.VII ; VIII.1.2 ; VIII.1.3 ; Ex.IX.8 à Ex.IX.10.

PIOLA-LAGRANGE
Tenseur des contraintes de –, V.4.2 ; Ex.VII.9.

POISSON
Coefficient de –, VII.5.3 ; VII.5.5.

Potentiel minimum
Théorème du –, X.6.2 ; X.8.2 ; XII.3.3 ; XII.4.2 ; Ex.XII.1 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.6 ; Ex.XII.7 ; Ex.XII.9.

Potentiel thermodynamique, VII.4.2 ; X.1.6.

POYNTING
Effet –, Ex.IX.10.

Préchargé
État de référence –, VIII.3.6 ; X.3.7 ; XII.2.6.

Précontraint
État de référence –, VII.5.4 ; VIII.3.5 ; X.1 à X.3 ; XII.2.6.

Pression, V.2.5.

Principes de minimum, X.2.2 ; X.3.2 ; X.4.1 ; X.5.3 ; X.6.2 ; X.8.2 ; Ex.X.5 à Ex.X.9.

Principe de la thermodynamique
Premier –, VII.3.1.
Deuxième –, VII.3.2.

Problème bien posé, VIII.1.3 ; VIII.3.3.

Produit
– *contracté*, An I.4.2 ; An I.5.
– *tensoriel*, An I.2.

Propagation
Vitesse de –, III.4.4 ; III.5.1.

Puissance de déformation, V.3.12.

Puissances virtuelles
– *des efforts extérieurs*, IV ; V.2.2 ; V.3.1 ; V.5.3 ; XI.2.3 ; XI.3.4.
– *des efforts intérieurs*, IV ; V.2.1 ; V.3.2 ; V.5.3 ; XI.2.4 ; XI.3.5.
– *des quantités d'accélération*, - IV ; V.2.1.
– *des quantités de mouvement*, - IV.7.7.
Méthode des –, IV ; V ; XI.2 ; XI.3.
Principe des –, IV ; V ; X.1.4 ; XI.

Q

Quasi-naturel
État initial –, VII.5.4 ; VIII.2.2 ; X.1.1.

R

Réciprocité
– *des contraintes*, - VI.2.4.
Théorème de –, X.5.4 ; X.8.3 ; X.10 ; Ex.X.3 ; Ex.X.6.

Référentiel, I.2.2 ; VI.5.4.
– *galiléen*, IV.1.1 ; IV.2.3 ; IV.4.4 ; V.1 ; VIII.1.1.

REISSNER
Principe de –, X.9.

Repère, I.2.2.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Représentation
– *s d'un tenseur*, An I.5.5 ; An I.5.7.
Théorème de –, VI.2.7 ; VI.4.2 ; VII.4.5 ; An I.5.7.

Résistance des matériaux, X.8.1 ; XII.2.7 ; XII.5.

Résultante, IV.1.1 ; IV.5.4 ; V.3.6.

Réversibilité, VII.3.2 ; VII.4.2 ; VII.4.3.

Rigidifiant
Champ de déplacement –, II.6.3 ; VIII.3.3 ; VIII.7.4 ; X.2.4 ; X.4.3.
Mouvement –, III.3.7 ; III.3.8.
Mouvement virtuel –, IV.4 ; IV.5 ; IV.6 ; V.2.4 ; V.3.2 ; V.5.3.

Rupture
Calcul à la –, Ex.VI.2 ; Ex.VI.13 ; XI.4.2 ; XI.4.4 ; XI.4.5 ; Ex.XI.11 à Ex.XI.13 ; Ex.XII.3.

S

SAINT-VENANT
Principe de –, VIII.8 ; IX.2.3 ; IX.3.3 ; Ex.IX.2 ; ; Ex.X.9.
Problème de –, IX.5.3.

Section
– *droite*, VIII.7.2 ; VIII.7.4 ; VIII.7.5 ; Ex.VIII.5 à Ex.VIII.7 ; IX.3 à IX.5 Ex.X.8 ; XI.3.2 ; XI.3.11 ; XI.3.12 ; XII.2.1 ; XII.2.2 ; XII.2.7.
– *transversale*, XI.3.1 ; XI.3.12 ; XI.3.13.

Semi-permanent
Mouvement –, I.4.5.

Sous-structuration, X.6.3 ; X.8.2.

Sphère
– *creuse sous pression*, Ex.VI.2 ; IX.6 ; X.7.4.

Stabilité, VII.5.5 ; VIII.3.3 ; X.1.6.

Stationnaire
Fonctionnelle –, X.4.1.
Mouvement –, I.4.4 ; III.5.2.

Statique
– *des fils*, XI.2 ; Ex.XI.1 ; Ex.XI.2.
– *des fluides*, V.2.5.
– *des poutres*, XI.3 ; Ex.XI.3 ; Ex.XI.4 ; Ex.XI.6 à Ex.XI.13.
Loi fondamentale de la –, IV.6.4.

Statiquement admissible
Champ de contrainte –, VIII.4.2 ; VIII.6 ; X.

Structures, XI.
Calcul des –, VIII.4.4 ; X.8.1 ; X.8.2 ; Ex.X.4 ; XII.2.7 ; XII.5.
– *planes*, XI.4.7 ; XII.3.5.

Superposition
Principe de –, VIII.3.4 ; IX.2.5 ; IX.4 ; IX.5 ; Ex.X.2 ; Ex.X.3 ; Ex.X.9 ; XII.2.5.

Surface libre, VI.3.5.

Symétries de la matière
Respect des –, VI.4.2 ; VII.1 ; VII.4.4 ; VII.4.5 ; VII.5.3 ; VII.5.7 ; Ex.VII.6 à Ex.VII.8.

Systèmes, IV.1.1 ; IV.2 à IV.4 ; IV.6 ; IV.7 ; V.2.2 ; V.2.3 ; V.3.2 ; VII.3.1 ; VII.3.2 ; XI.2 ; XI.3.
Sous –, IV.1.1 ; IV.2 à IV.4 ; IV.6 ; IV.7 ; V.2.2 ; V.2.3 ; V.3.2 ; VII.3.1 ; VII.3.2 ; XI.2 ; XI.3.

T

Taux
– *d'allongement unitaire*, III.3.4.
– *de déformation*, III.3.3.
– *de déformation lagrangien*, III.2.
– *de déformation virtuel*, V.3.2 ; XI.3.5.
– *de dilatation volumique*, III.3.5.
– *d'extension*, III.3.4.
– *d'extension virtuel*, XI.2.4.
– *de glissement de deux directions orthogonales*, III.3.4.
– *de rotation*, III.3.5.
– *de rotation virtuel*, V.3.2.

Température, VII.3.2 ; VII.4 ; VIII.
Gradient de –, Ex.XII.8 ; Ex.XII.9.
Variation de –, II.6.4 ; Ex.II.9 ; Ex.II.10 ; VII.5 ; VIII.4.3 ; Ex.IX.7 ; X ; XII.2.6 ; XII.3.5 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.8 ; Ex.XII.9.

Tenseur
– *antisymétrique*, An I.3.4 ; An I.5.7.
– *décomposé*, An I.2.3 ; An I.5.6.
– *métrique*, An I.5.1.
– *sur un espace euclidien*, An I.5 ; An I.6.
– *sur un espace vectoriel*, An I.
– *symétrique*, An I.3.4 ; An I.5.7.
– *transposé*, An I.3.3 ; An I.5.7.
Champ de – s, An I.6.

Tension, XI.2.10.

Tétraèdre
Lemme du –, VII.3.1.
Raisonnement du –, V.3.6.

Thermique
Équation –, VIII.1.2.
Découplage du problème –, VIII.3.1.

Thermodynamique, VII.3.

Thermoélasticité, VII ; VIII ; IX ; X ; XII.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Torseur, IV.5.
– *d'efforts extérieurs*, XI.3 à XI.5.
– *des efforts extérieurs*, IV.6.3 ; IV.7.3 ; IV.7.4 ; V.2.6 ; V.3.4 ; V.3.10 ; VIII.1.2 ; VIII.4.2 ; X.3.1 ; X.4.1.
– *d'efforts intérieurs*, XI.3 à XI.5.
– *des efforts intérieurs*, IV.6.3 ; V.3.2.
– *des quantités d'accélération*, IV.6.3 ; V.2.6 ; V.3.4.
– *des quantités de mouvement*, IV.7.2 ; V.3.
– *tensoriel*, IV.5 ; V.5.3.
Dérivée d'un –, IV.5.5 ; XI.3.6.
Gradient d'un –, IV.5.5.

Torsion
– *élastique*, VIII.7 ; Ex.VIII.5 à Ex.VIII.7 ; Ex.IX.10 ; Ex.X.1 ; Ex.X.8 ; Ex.X.9 ; XII.2.5 à XII.2.7.
Poutre en –, XII.3.4 ; Ex.XII.4.

Tourbillon
vecteur –, III.3.5 ; Ex.III.7.
– *ponctuel*, Ex.II.6 ; Ex.III.3.

Trace, An I.3.3 ; An I.5.7.

Traction, VII.2.2 ; VII.5.3 ; VII.5.5 ; IX.2 ; IX.5 ; Ex.IX.8 ; X.5.3 ; X.7.4 ; Ex.X.2.
Câble en –, XI.2.10 ; Ex.XI.1 ; Ex.XI.2 ; Ex.XI.9 ; Ex.XII.6.
Poutre en – compression, Ex.XI.3 ; Ex.XI.4 ; Ex.XI.11 ; Ex.XI.12 ; XII.4.1 ; Ex.XII.1 à Ex.XII.3.

Trajectoire, I.3.4 ; I.4.2.

Transformation
– *finie*, II.1 à II.4 ; Ex.II.1 à Ex.II.6 ; VII.1 à VII.4 ; Ex.VII.2 à Ex.VII.12 ; VIII.1 ; Ex.IX.8 à Ex.IX.10.
– *homogène*, II.2 ; II.3.
– *homogène tangente*, II.4.1.
– *infinitésimale*, II.5.1 ; Ex.II.1 à Ex.II.3 ; Ex.II.6 à Ex.II.10 ; III.3.6 ; III.3.10 ; VII.5.4 ; Ex.VII.1 ; Ex.VII.12 ; VIII.2.1 ; VIII.7.2 ; IX.3.3 ; Ex.IX.10.
– *rigidifiante*, II.3.3 ; II.4.5 ; II.6.3 ; II.7.1.

Transport convectif, II.2 ; II.4.2.

Transposition, An I.3.3 ; An I.5.7.

Travaux virtuels
Théorème des –, X.1.4 ; X.2 à X.9 ; Ex.X.6 ; XII.2.3 ; XII.2.5.

Treillis, XI.4.5 ; Ex.XI.3 ; Ex.XI.4 ; Ex.XI.11 ; XII.4.1 ; Ex.XII.1 à Ex.XII.3.

TRESCA
Critère de –, VI.4.3 ; Ex.VI.2 ; Ex.VI.3 ; Ex.VI.5 ; Ex.VI.8 ; Ex.VI.13 ; VIII.7.7 ; Ex.VIII.5 ; Ex.VIII.6 ; IX.2.4 ; IX.2.5 ; IX.3.4 ; IX.6.4.

TRUESDELL
Dérivée de –, V.5.2 ; Ex.VII.12.

Triaxial
État de contrainte –, VI.3.5.

Tube cylindrique, VIII.7.5 ; Ex.VIII.6 ; IX.7 ; Ex.IX.1 ; Ex.IX.2 ; Ex.IX.5 ; An III.2.9 ; An III.3.5.

U

Unicité
– *en élasticité*, VIII.1.3 ; VIII.3.3 ; X.2.4 ; X.3.4 ; XII.3.1 ; Ex.XII.10 ; An III.2.6.

Unilatérale
Liaison –, VIII.1.4 ; XI.4.2 ; Ex.XII.7.

V

Valeurs principales, An I.5.10.

Variance, An I.1.1.

Vecteur-contrainte, V.3.5 ; V.5.3 ; VI.2 ; VI.3.

Vecteur-position, I.3.1.

Virtuel
Champ de déplacement –, X.1.4 ; XII.2.3.
Champ de vitesse –, IV.2.3 ; IV.2.5 ; IV.5.1 ; V.2.1 ; V.5.3.
Mouvement –, IV ; V.2.1 ; V.5.3 ; XI.2.2 ; XI.3.3 ; XI.3.12.
Puissances – les, IV ; V ; X.1.4 ; XI.2 ; XI.3.
Travaux – s, X.1.4 ; X.7.2 ; Ex.X.6 ; XII.2.3.

Vitesse, I.3.6.
– *d'extension*, III.3.4.
– *de déformation*, III.3.3.

Volume
Invariance du –, II.4.2 ; Ex.II.2 ; Ex.II.6 ; III.3.5 ; Ex.III.1 à Ex.III.5 ; VII.4.3 ; VII.4.6 ; Ex.VII.3 ; Ex.VII.4 ; Ex.VII.9 à Ex.VII.11 ; Ex.IX.8 à Ex.IX.10.
Variation de –, I.3.2 ; II.2.3 ; II.4.2 ; III.3.5 ; VII.5.4 ; VII.5.5 ; Ex.X.5 ; Ex.X.6.

Y

YOUNG
Module de –, VII.5.3 ; VII.5.5 ; IX.2 ; X.5.3.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Dans la même collection

Biologie
Introduction à la génétique moderne. P. Monget et R. A. Veitia. 324 pages - ISBN 978-2-7302-1620-3.

Bioinformatique. Génomique et post-génomique - F. Dardel et F. Képès - 250 pages - ISBN 2-7302-0927-1

Chimie
Chimie moléculaire des éléments de transition - F. Mathey et A. Sevin - 300 pages - ISBN 2-7302-0714-7

Les orbitales moléculaires dans les complexes - avec Exercices et Corrigés - Y. Jean
350 pages - ISBN 2-7302-1024-5

Chimie moléculaire, sol-gel et nanomatériaux - R. Corriu et Nguyen T.-A.
208 pages - ISBN 978-2-7302-1413-1

Introduction à la chimie quantique - P. Hiberty et Nguyen T.-A. - 320 pages - ISBN 978-2-7302-1485-8

Informatique
Introduction à la théorie des langages de programmation - G. Dowek, J.-J. Lévy
112 pages - ISBN 978-2-7302-1333-2

Les principes des langages de programmation - G. Dowek - 176 pages - ISBN 978-2-7302-1526-8

Les démonstrations et les algorithmes : introduction à la logique et la calculabilité - G. Dowek - 200 pages - ISBN 978-2-7302-1569-5

Économie
Introduction à la microéconomie - N. Curien
110 pages - ISBN 2-7302-0722-8 - ISBN 978-2-7302-0722-5

Introduction à l'analyse macroéconomique - P.-A. Muet - 208 pages - ISBN 2-7302-1140-3

Économie de l'entreprise - J.-P. Ponssard, D. Sevy, H. Tanguy (2e édition)
316 pages - ISBN 978-2-7302-1244-1

Corporate Social Responsibility? From Compliance to Opportunity - P. Crifo, J.-P. Ponssard - 298 pages - ISBN 978-2-7302-1568-8

Économie du climat. Pistes pour l'après-Kyoto - J.-P. Ponssard et O. Godard - 314 pages
ISBN 978-2-7302-1576-3

Mathématiques
Le problème de Kepler. Histoire et théorie - A. Guichardet - 102 pages - ISBN 978-2-7302-1596-1

Autour des inégalités isopérimétriques - Sous la direction de Alessio Figalli - 130 pages - ISBN 978-2-7302-1573-2

Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres) - Nouvelle édition - P. Colmez - 678 pages - ISBN 978-2-7302-1587-9

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Transversalité, Courants et Théorie de Morse. Un cours de topologie différentielle (exercices proposés par François Labourie) - F. Laudenbach - 200 pages - ISBN 978-2-7302-1585-5

Groupes et représentations - D. Renard - 223 pages - ISBN 978-2-7302-1571-8

Milieux continus en transformations finies. Hyperélasticité, Rupture, Élastoplasticité - C. Stolz - 278 pages - ISBN 978-2-7302-1562-6

Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres) - P. Colmez -488 pages-ISBN 978-2-7302-1563-3

Cours d'analyse - J.-M. Bony - 272 pages - ISBN 2-7302-0775-1

Calcul différentiel et intégral - F. Laudenbach - 220 pages - ISBN 2-7302-0724-4

Méthodes mathématiques pour les sciences physiques - J.-M. Bony - 217 pages - ISBN 2-7302-0723-6

Siméon-Denis Poisson. Les mathématiques au service de la science - Y. Kosmann-Schwarzbach, 550 pages - ISBN 978-2-7302-1584-8

Les théorèmes de Noether - Y. Kosmann-Schwarzbach, avec la collaboration de L. Meersseman
180 pages - ISBN 2-7302-1138-1 (2e édition)

Groupes et symétries. Groupes finis, groupes et algèbres de Lie, représentations - Y. Kosmann-Schwarzbach
222 pages - ISBN 978-2-7302-1257-1 (2e édition)

Algèbre corporelle - A. Chambert-Loir - 200 pages - ISBN 2-7302-1217-5

Calcul variationnel - J.-P. Bourguignon - 348 pages - ISBN 978-2-7302-1415-5

Introduction à la théorie de Galois - D. Hernandez et Y. Laszlo - 226 pages - ISBN 978-2-7302-1593-0

Aspects des systèmes dynamiques - XUPS1994-1996 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
238 pages - ISBN 978-2-7302-1560-2

Aspects de la théorie du contrôle - XUPS1999 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
208 pages - ISBN 978-2-7302-1530-5

Groupes finis - XUPS 2000 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
104 pages - ISBN 2-7302-0751-5

Pavages - XUPS 2001 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial) - 112 pages - ISBN 2-7302-0855-0

La fonction zêta - XUPS 2002 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
206 pages - ISBN 2-7302-1011-3

Distributions - XUPS 2003 - Dans le sillage de Laurent Schwartz - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial) - 106 pages - ISBN 2-7302-1095-4

Graphes- XUPS 2004 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial) - 84 pages - ISBN 2-7302-1182-9

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Théorie algorithmique des nombres et équations diophantiennes - XUPS2005 - N. Berline, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 200 pages - ISBN 2-7302-1293-0

Théorie des jeux. Introduction à la théorie des jeux répétés - XUPS 2006 - N. Berline, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 152 pages - ISBN 978-2-7302-1366-0

Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques - XUPS2007 - N. Berline, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 160 pages - ISBN 978-2-7302-1418-6

Géométrie tropicale - XUPS2008 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) 128 pages - ISBN 978-2-7302-1529-9

Les représentations linéaires et le grand théorème de Fermat - XUPS2009 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 140 pages - ISBN 978-2-7302-1566-4

Facettes mathématiques de la mécanique des fluides - XUPS2010 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 118 pages - ISBN 978-2-7302-1578-7

Histoire de mathématiques - XUPS2011 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) 118 pages - ISBN 978-2-7302-1595-4

Henri Cartan & André Weil mathématiciens du XX^e siècle - XUPS2012 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 190 pages - ISBN 978-2-7302-1610-4

Aléatoire - XUPS2013 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 130 pages ISBN 978-2-7302-1622-7

Chaos en mécanique quantique - XUPS2014 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) 156 pages - ISBN 978-2-7302-1631-9

Des problèmes à N corps aux Tokamaks - XUPS2015 - P. Harinck, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 88 pages - ISBN 978-2-7302-1643-2

Journal de l'École polytechnique. Mathématiques - Tome 1 - Année 2014 - 412 pages - ISBN 978-2-7302-1640-1

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Années 1971 à 2001
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2000-2001 - 400 pages - ISBN 2-7302-0834-8
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2001-2002 - 364 pages - ISBN 2-7302-0930-1
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2002-2003 - 390 pages - ISBN 2-7302-1041-5
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2003-2004 - 404 pages - ISBN 2-7302-1183-7
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2004-2005 - 404 pages - ISBN 2-7302-1221-3
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2005-2006 - 366 pages - ISBN 2-7302-1335-X
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2006-2007 - 444 pages - ISBN 978-2-7302-1414-8
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2008-2009 - 308 pages - ISBN 978-2-7302-1567-1
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2009-2010 - 342 pages - ISBN 978-2-7302-1613-5
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2011-2012 - 491 pages - ISBN 978-2-7302-1617-3
Séminaires Laurent Schwartz, EDP et applications - Année 2012-2013 - 356 pages - ISBN 978-2-7302-1626-5
Séminaires Laurent Schwartz, EDP et applications - Année 2013-2014 - 262 pages - ISBN 978-2-7302-1633-3
Séminaires Laurent Schwartz, EDP et applications - Année 2014-2015 - 332 pages - ISBN 978-2-7302-1650-0

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Mathématiques appliquées

Une exploration des signaux en ondelettes - S. Mallat - 654 pages - ISBN 2-7302-0733-3

Promenade aléatoire - M. Benaïm et N. El Karoui - 316 pages - ISBN 2-7302-1168-3
Analyse numérique et optimisation - G. Allaire - 480 pages - ISBN 978-2-7302-1255-7

Systèmes hyperboliques de lois de conservation. Application à la dynamique des gaz - F. Dubois, B. Després 208 pages - ISBN 2-7302-1253-1

Commande et optimisation de systèmes dynamiques - F. Bonnans et P. Rouchon
286 pages - ISBN 2-7302-1251-5

Les outils stochastiques des marchés financiers. Une visite guidée de Einstein à Black-Scholes - N. El Karoui et E. Gobet - 238 pages - ISBN 978-2-7302-1579-4

Simulation stochastique et méthodes de Monte-Carlo - C. Graham et D. Talay - 210 pages - ISBN 978-2-7302-1582-4

Aléatoire. Introduction à la théorie et au calcul des probabilités - S. Méléard - 280 pages - ISBN 978-2-7302-1575-6

Bases mathématiques de la théorie des jeux - R. Laraki, J. Renault, S. Sorin - 186 pages - ISBN 978-2-7302-1611-1

Méthodes de Monte-Carlo et processus stochastiques : du linéaire au non-linéaire - E. Gobet - 258 pages - ISBN 978-2-7302-1616-6

Recherche opérationnelle : aspects mathématiques et applications - J.-F. Bonnans et S. Gaubert - 398 pages - ISBN 978-2-7302-1641-8

Mécanique

Dynamique de l'atmosphère et de l'océan - P. Bougeault et R. Sadourny - 312 pages - ISBN 2-7302-0825-9

Introduction aux écoulements compressibles et aux fluides hétérogènes - A. Sellier
175 pages - ISBN 2-7302-0764-5

Mécanique des milieux continus - J. Salençon
Tome 1 - *Concepts généraux* - 376 pages - ISBN 978-2-7302-1245-8 (avec CD-Rom)
Tome 2 - *Thermoélasticité* - 344 pages - ISBN 978-2-7302-1419-3 (avec CD-Rom)
Tome 3 - *Milieux curvilignes* - 162 pages - ISBN 978-2-7302-1644-9

de l'Élasto-plasticité au Calcul à la rupture - J. Salençon
(accompagné d'un CD-Rom réalisé par J. Salençon) - 266 pages - ISBN 978-2-7302-0915-1

Viscoélasticité pour le calcul des structures - J. Salençon - 160 pages - ISBN 978-2-7302-1557-2

Fluides et Solides - E. de Langre - 130 pages - ISBN 978-2-7302-0833-8

Ondes acoustiques - A. Chaigne - 224 pages - ISBN 2-7302-0840-2

Stabilité des matériaux et des structures - C. Stolz - 206 pages - ISBN 2-7302-1076-8

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Instabilités, Chaos et Turbulence - P. Manneville - 360 pages - ISBN 2-7302-0913-1

Vibrations des structures couplées avec le vent - P. Hémon - 144 pages - ISBN 2-7302-1332-5

Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis - M. Bonnet et A. Frangi
316 pages - 2-7302-1349-X
Dynamique et vibrations - E. de Langre et A. Chaigne - 152 pages - ISBN 978-2-7302-1521-3

Modélisation et calcul des milieux continus - P. Le Tallec - 560 pages - ISBN 978-2-7302-1494-0

Poutres et arcs élastiques. P. Ballard et A. Millard - 312 pages - ISBN 978-2-7302-1561-9

Hydrodynamique de l'environnement. O. Thual - 328 pages - ISBN 978-2-7302-1564-0

Microhydrodynamique et fluides complexes. D. Barthès-Biesel - 292 pages - ISBN 978-2-7302-1572-5

Sport Physics - Paris MMXII - Sous la direction de C. Clanet - 640 pages - ISBN 978-2-7302-1615-9

PHYSIQUE
Physique des Tokamaks - J.-M. Rax - 436 pages - ISBN 978-2-7302-1580-0

Semi-conducteurs : les bases de la théorie k.p - G. Fishman - 742 pages - ISBN 978-2-7302-1497-1

Énergie nucléaire - J.-L. Basdevant, J. Rich et M. Spiro - 340 pages - ISBN 2-7302-0901-8

Mécanique quantique - J.-L. Basdevant et J. Dalibard
(accompagné d'un CD-Rom de M. Joffre) 520 pages - ISBN 978-2-7302-0914-4

Problèmes quantiques - J.-L. Basdevant et J. Dalibard - 214 pages - ISBN 2-7302-1117-9

Principes de la cosmologie - J. Rich, adaptation française J.-L. Basdevant - 400 pages - ISBN 2-7302-0925-5

Introduction à la relativité - A. Rougé - 188 pages - ISBN 978-2-7302-0940-3

Relativité restreinte. La contribution d'Henri Poincaré - A. Rougé - 288 pages - ISBN 978-2-7302-1525-1

Introduction à la physique subatomique - A. Rougé - 448 pages - ISBN 2-7302-1231-0

Physique statistique et illustrations en physique du solide. - C. Hermann - 292 pages - ISBN 978-2-7302-1022-5

Bases physiques de la plasticité des solides - J.-C. Tolédano - 264 pages - ISBN 978-2-7302-1378-3

Physique des électrons dans les solides. Structure de bandes, Supraconductivité et Magnétisme. H. Alloul - Tome
1 - 360 pages - ISBN 978-2-7302-1411-7

Physique des électrons dans les solides. Recueil d'exercices et de problèmes. H. Alloul
Tome 2 - 272 pages - ISBN 978-2-7302-1412-4

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Achevé d'imprimer en mai 2016 sur les presses
du Centre Poly-Média de l'École polytechnique
Dépôt légal : 3e trimestre 2005
ISBN 978 – 2 – 7302 – 1245 – 8. *Imprimé en France*