Avant propos

Le cours porte sur la mécanique des milieux continus tridimensionnels. Quatre aspects sont plus particulièrement considérés :

- la modélisation macroscopique des milieux continus et de leur mouvement, en y décrivant les déformations et en rappelant les lois de conservation que doit respecter tout mouvement ;
- la description des efforts qui génèrent le mouvement des milieux continus, avec l'introduction de la notion de contraintes et l'écriture des équations globales qui les régissent ;
- l'introduction à l'échelle microscopique des comportements élémentaires qui permet de compléter la modélisation en introduisant les relations de comportement traduisant le lien local entre déformations et efforts ;
- la résolution de problèmes d'équilibre élastique. Cette étape de résolution de problèmes globaux utilise le principe des puissances virtuelles pour écrire, analyser et résoudre les problèmes posés, et pour en valider les solutions. Elle permet d'aborder de nombreuses situations pratiques et de sensibiliser les étudiants aux problèmes de distribution d'efforts, de discontinuités de solutions, d'incompatibilité de déformations, et d'instabilités géométriques.

Il ne s'agit pas dans ce cours de présenter une théorie fermée, mais de faire découvrir un domaine scientifique en évolution, avec ses enjeux, ses problèmes ouverts, et ses nombreuses implications scientifiques, techniques ou industrielles.

Les notes de cours ne cherchent pas non plus à être un document de référence. Elles définissent plutôt un point de départ pour développer une démarche, susciter une réflexion, accompagner le cours oral et aider au travail en petites classes. Un travail personnel et bibliographique est bienvenu pour approfondir certaines notions, trouver des exercices, découvrir de nouvelles applications, se renseigner sur l'état de l'art, les enjeux, les problèmes ouverts. Pour ce faire, l'étudiant doit s'appuyer sur l'équipe enseignante et sur la bibliographie proposée.

Chaque chapitre est précédé d'une brève introduction présentant la démarche, et donnant les points clés. Les formules principales sont encadrées, et résumées en fin de chapitre. Chaque chapitre est illustré par des exercices commentés. Les sections en caractères plus petits correspondent à des développements plus spécialisés qui peuvent être omis en première lecture.

Remerciements

à Jean Salençon qui a été l'inspirateur de cet ouvrage et un modèle pour toute l'équipe enseignante du département de mécanique de l'École polytechnique ;

aux membres de cette équipe pour leur soutien, leurs conseils et leurs contributions;

au personnel du centre poly-media de l'École polytechnique pour son dévouement et sa compétence et plus généralement à tous les membres de la direction de l'enseignement.

Première partie

Mouvements et Efforts

Chapitre 1

Le milieu continu

Sommaire

1.1 La notion de milieu continu	9
1.2 Le cadre mathématique	20
1.2.1 Référentiel	20
1.2.2 Configuration	22
1.3 L'observation du mouvement 2	24
1.4 Description lagrangienne 2	26
1.5 Description eulérienne	80
1.5.1 Construction	30
1.5.2 Équivalence avec la représentation lagrangienne 3	32
1.5.3 Mouvements stationnaires	33
1.5.4 Dérivées particulaires	33
Formules essentielles	3 5
Exercices	37

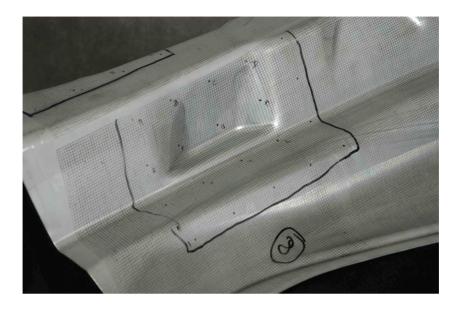


Fig. 1.1: Formage d'une tôle par emboutissage. Photo Arcelor.

1.1 La notion de milieu continu

Par rapport aux autres sciences, la mécanique doit systématiquement travailler à plusieurs échelles de longueur. Son échelle de référence est l'échelle macroscopique associée à l'objet complet étudié, que ce soit une planète (10^9 m) , un massif rocheux (10^4 m) , un ouvrage d'art (10^2 m) , un écoulement autour d'une voiture (1m), une pale de turbine (10^{-1} m) , ou une micropompe (10^{-6} m) . Mais d'autres échelles doivent être reliées à cette échelle de référence : les échelles des sous-systèmes constitutifs, et l'échelle microscopique permettant de comprendre et de caractériser localement le comportement des matériaux constitutifs.

Le cadre de la mécanique des milieux continus s'applique quand l'observation aux échelles étudiées conduit aux constatations suivantes (Figure 1.1):

- 1. Le milieu observé se présente comme un continuum de points.
- Chaque point est entouré d'un petit volume de matière qu'il suit en moyenne dans son mouvement, le mouvement respectant les voisinages aux échelles étudiées.

On y fait aussi souvent l'hypothèse que les évolutions des grandeurs physiques de deux points voisins resteront proches.

Ces constatations dépendent par construction de l'échelle utilisée. Une dune de sable observée dans sa globalité sera vue comme un milieu continu. Étudiée à l'échelle du grain de sable, elle sera considérée comme un milieu granulaire. Mais chaque grain peut ensuite être considéré comme un milieu continu.

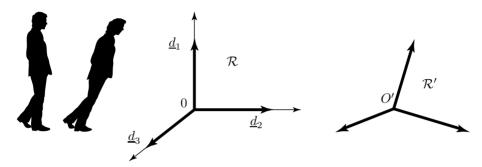


Fig. 1.2: Notion de référentiel. Deux observateurs différents dans l'espace, le premier lié au référentiel \mathcal{R} , le second à \mathcal{R}' .

Le but de ce chapitre est d'introduire le cadre et les outils permettant de décrire la forme et le mouvement d'un milieu continu. Il commence par proposer une description géométrique d'un milieu continu en introduisant la notion de configuration. Il identifie ensuite les notions physiques de trajectoire, ligne d'émission, ligne de courant afin de pouvoir les caractériser dans la représentation proposée du mouvement. Il propose enfin deux représentations du mouvement : une représentation lagrangienne à base de trajectoires définie en configuration de référence, une configuration eulérienne, à base de vitesses, définie en configuration actuelle.

1.2 Le cadre mathématique

Le cadre mathématique permettant de décrire la notion de milieu continu a deux composantes : le référentiel qui en est l'outil de mesure, et la configuration qui en est la modélisation géométrique.

1.2.1 Référentiel

Le mouvement d'un milieu continu se mesure dans l'espace physique euclidien usuel \mathbb{E} par rapport à un observateur. Le référentiel \mathcal{R} définit l'espace euclidien qui suit le mouvement de l'observateur choisi. Il est donc caractérisé dans l'espace \mathbb{E} par le mouvement d'un trièdre de référence $\mathcal{R} = (0, \underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3)(t)$. Le mouvement d'un

milieu continu dans un référentiel donné représente alors le mouvement relatif entre les points considérés et le trièdre \mathcal{R} qui suit l'observateur.

Le choix de l'observateur n'est pas unique. Par exemple, pour étudier le mouvement d'un pneu sur une route, on peut choisir un observateur suivant la roue dans sa rotation ou un observateur lié à la route. Sur cet exemple, on s'aperçoit que l'on passe d'un observateur à l'autre, donc d'un référentiel à l'autre, par un mouvement de corps rigide (combinaison d'une translation et d'une rotation, appelé aussi mouvement rigidifiant), et que tous les observateurs utilisent la même chronologie et observent les mêmes formes. Plus généralement, une grandeur physique $\mathcal B$ est dite objective si son observation par deux observateurs différents donne le même résultat. Parmi tous les référentiels, la loi fondamentale de la dynamique postule l'existence d'un référentiel galiléen dans lequel on a proportionalité entre force imposée et accélération.

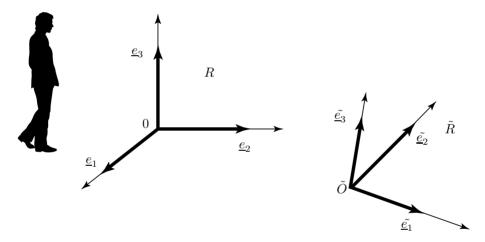


Fig. 1.3 : Deux repères différents R et \tilde{R} dans le même référentiel R.

Un référentiel donné peut être muni de plusieurs repères. Les grandeurs physiques devant être indépendantes du repère $R=(\underline{e}_i)_{i=1,3}$ choisi dans le référentiel \mathcal{R} , les objets mathématiques qui les représentent en mécanique doivent donc aussi exister indépendamment des repères utilisés pour les mesurer. Ces grandeurs seront donc représentées par des vecteurs (déplacements, vitesses) ou plus généralement par des tenseurs (déformations, efforts, contraintes). Rappelons qu'un tenseur d'ordre m défini sur un espace vectoriel $\mathbb E$ est une application multilinéaire à valeurs dans $\mathbb R$: à m vecteurs donnés de $\mathbb E$ ou de son dual, un tel tenseur associe un nombre réel qui dépend linéairement de chaque argument. Une force ponctuelle $\underline{f}(P)$ est par exemple caractérisée par un tenseur d'ordre un dont l'action sur une vitesse \underline{v} donne la puissance $\underline{f}(P) \cdot \underline{v}$ développée par la force dans le mouvement du point P effectué à vitesse \underline{v} . Au-delà des vecteurs et des tenseurs, une grandeur est dite intrinsèque quand elle ne dépend pas du repère choisi pour la mesurer.

1.2.2 Configuration

La notion de configuration permet de définir la géométrie du milieu étudié. Elle s'appuie conceptuellement sur la notion de point matériel. Au niveau d'un milieu continu, le point matériel désigne un volume élémentaire représentatif de matière, de taille infiniment petite par rapport à l'échelle de l'objet macroscopique étudié. Positions et vitesses à l'échelle d'un point matériel représentent donc la moyenne des positions et vitesses de toutes les molécules constitutives du volume élémentaire représentatif associé. Sous microscope électronique, un échantillon d'acier a l'aspect indiqué en Figure 1.4 avec une structure polycristalline assez hétérogène. Au niveau de la structure, l'échantillon observé sera assimilé à un point matériel, car seul nous intéressera à cette échelle le mouvement collectif des différents grains constitutifs du milieu.

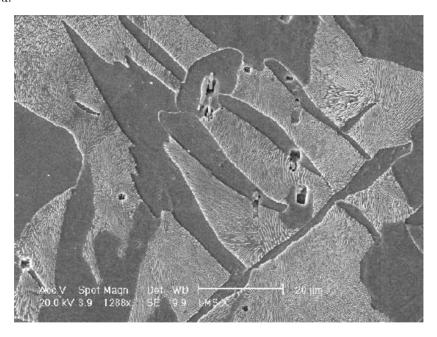


FIG. 1.4: Notion de point matériel : l'échantillon d'acier ferrito-martensitique observé ici sous microscope peut être assimilé à un point matériel dans l'étude de la structure complète.

La configuration κ d'un milieu continu dans un référentiel donné est ensuite définie par la position géométrique dans le référentiel choisi de tous les points matériels M constituant le milieu. Pour un milieu continu tridimensionnel, cette configuration doit traduire la notion de continuum. Une configuration sera donc constituée par juxtaposition des volumes élémentaires représentatifs associés aux points matériels. Ce sera ainsi un volume de l'espace tridimensionnel lié à l'observateur, constitué d'un

intérieur Ω et d'une frontière $\partial\Omega$. Rappelons que les points à l'intérieur de Ω peuvent être entourés par un boule incluse dans Ω . Ce sont donc les points auxquels on peut effectivement associer un volume élémentaire représentatif. Par contre, les points de la frontière $\partial\Omega$ ne sont pas des points matériels au sens premier, mais seulement des points situés à la frontière de volumes élémentaires représentatifs.

Il y a évidemment plusieurs configurations possibles pour un même milieu continu, car un point matériel change de position au cours du temps. On particularise en général deux configurations :

1. une configuration de référence κ_0 , d'intérieur Ω_0 , de frontière $\partial\Omega_0$, choisie une fois pour toutes, définie par exemple par la position \underline{X} à l'instant initial t=0 de chaque point matériel constitutif M, et permettant de caractériser le point matériel par cette position initiale \underline{X}

$$OM(0) = X$$
 de coordonnées X_i dans κ_0 ; (1.1)

2. la configuration actuelle κ_t , d'intérieur $\Omega(t)$, de frontière $\partial\Omega(t)$, définie par la position \underline{x} à l'instant t de chaque point matériel M, et permettant de caractériser le point matériel par cette position actuelle \underline{x}

$$OM(t) = \underline{x} \text{ de coordonnées } x_i \text{ dans } \kappa_t.$$
 (1.2)

En règle générale, les grandeurs physiques mesurées sur la configuration de référence seront notées avec une majuscule, celles mesurées sur la configuration actuelle seront notées avec une minuscule. Ainsi une grandeur physique \mathcal{B} sera représentée par la fonction $\mathcal{B} = B(\underline{X}, t)$ en configuration de référence et par la fonction $\mathcal{B} = b(\underline{x}, t)$ en configuration actuelle. La représentation de la vitesse d'un point matériel fera exception à cette règle, car on la notera toujours en majuscule

$$\frac{D}{Dt}\underline{OM}(t) = \underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{U}(\underline{x}, t). \tag{1.3}$$

La représentation du gradient déroge aussi un peu à la règle. Un gradient $\frac{\partial B}{\partial \underline{X}}$ calculé en configuration de référence sera noté par le symbole ∇

$$\underline{\nabla B} = \frac{\partial B}{\partial \underline{X}},$$

et le gradient $\frac{\partial b}{\partial x}$ calculé en configuration actuelle sera noté en minuscule

$$\underline{\operatorname{grad}} b = \frac{\partial b}{\partial \underline{x}}.$$

Écrit en base cartésienne orthonormée $(\underline{e}_i)_i$, on aura donc

$$\underline{\nabla B} = \frac{\partial B}{\partial X_i} \underline{e}_i, \quad \underline{\text{grad}} \ b = \frac{\partial b}{\partial x_i} \underline{e}_i \ .$$

1.3 L'observation du mouvement

L'observation expérimentale du mouvement d'un milieu continu s'appuie d'abord sur les notions de trajectoires, de lignes d'émission, de lignes de courant. On en donne ici la définition physique. Leur caractérisation mathématique en sera donnée ultérieurement après modélisation du mouvement.

Une trajectoire (*pathline*) est liée à un point matériel donné. Elle correspond à l'ensemble des points physiques qu'il occupe au cours du temps.

Définition 1.1 La trajectoire d'un point matériel est définie par l'ensemble des positions occupées par un même point matériel au cours du temps.

Expérimentalement, elle se construit en superposant sur le même support les images du même point matériel au cours du temps.

Par opposition, une ligne d'émission (streakline) est liée à un point M_0 donné de l'espace physique. Elle correspond à l'ensemble des points matériels qui sont passés par ce point géométrique.

Définition 1.2 La ligne d'émission d'un point M_0 de l'espace physique est l'ensemble défini par la position actuelle des points matériels qui sont passés par M_0 au cours du temps.

La ligne d'émission d'un point M_0 s'obtient par une photographie instantanée du milieu continu étudié après avoir marqué (par exemple par injection de colorant) les points matériels qui sont passés par le point M_0 (Figure 1.5).

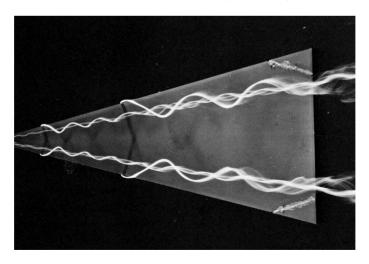


Fig. 1.5: Écoulement sur aire Delta. Représentation des lignes d'émission issues de différents points situés sur le bord d'attaque de l'aile. Photo ONERA.

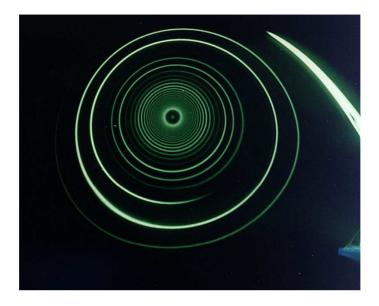


Fig. 1.6: Lignes d'émission dans un tourbillon. Photo ESPCI.

Enfin, les lignes de courant (*streamlines*) sont les lignes engendrés par les vecteurs vitesses des différents points matériels du milieu continu.

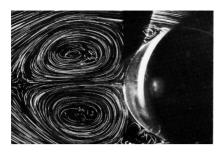
Définition 1.3 Les lignes de courant sont les lignes enveloppe du champ de vitesse actuel.

À l'instant t, la ligne de courant issue d'un point physique \underline{x}_p est définie par intégration en τ de l'équation différentielle

$$\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}\underline{\tilde{x}}}{d\tau} = \underline{U}(\underline{\tilde{x}}, t), \\
\underline{\tilde{x}}(0) = \underline{x}_{n}.
\end{cases} (1.4)$$

Les lignes de courant s'observent expérimentalement en ensemençant le milieu continu avec des particules rétroréfléchissantes, en éclairant le milieu et en le photographiant pendant un temps de pose $d\tau$ (Figure 1.7).

Une dernière composante importante dans l'observation d'un mouvement est l'étude des déformations. Cette étude fera l'objet du chapitre suivant.



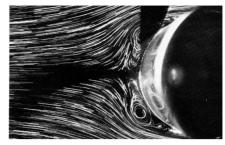


FIG. 1.7: Lignes de courant observées dans un écoulement autour d'un cylindre. Photos tirées de [14].

1.4 Description lagrangienne

Ayant défini le milieu continu et identifié les caractéristiques à observer, il est maintenant possible de construire une modélisation du mouvement. Une première modélisation a été proposée par Louis de Lagrange (1736-1813). Dans cette représentation lagrangienne, le mouvement est caractérisé par la transformation $\underline{\phi}$ qui définit la position $\underline{x}(\underline{X},t)$ en tout temps t de chaque point matériel en fonction de sa position \underline{X} en configuration de référence et de l'instant t considéré

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t), \forall \underline{X} \in \kappa_0, \forall t > 0 \text{ (représentation lagrangienne)}.$$
 (1.5)

À chaque instant t, cette application est définie sur la configuration de référence κ_0 et prend ses valeurs dans la configuration actuelle κ_t . La carte $\underline{\phi}$ permet de calculer immédiatement la trajectoire $\mathcal{T}(M)$ de tout point M de position initiale \underline{X} par

$$\mathcal{T}(M) = \{\underline{x}, \exists t' \text{ avec } \underline{x} = \phi(\underline{X}, t')\}$$
.

La représentation lagrangienne est donc par construction une représentation par trajectoires, avec la donnée de l'horaire de parcours en information supplémentaire. Elle donne aussi directement accès à la vitesse de chaque particule en calculant la dérivée en temps de la position à particule \underline{X} fixée

$$\underline{U}(\underline{X},t) = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}_{|\underline{X}}(\underline{X},t), \tag{1.6}$$

et par la même aux lignes de courant.

La carte ϕ ne peut pas être arbitraire. Elle doit respecter la notion de milieu continu et représenter un mouvement collectif respectant les voisinages à l'échelle étudiée.

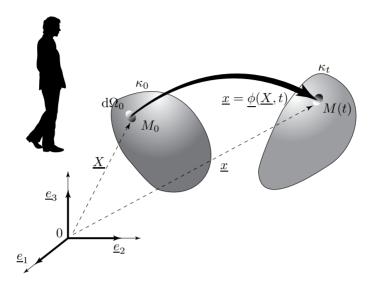


Fig. 1.8: Description lagrangienne du mouvement. La carte $\underline{\phi}(\underline{X},t)$ envoie bijectivement la configuration de référence κ_0 vers la configuration actuelle κ_t . Tiré de Salençon [28].

- On demandera donc dans un premier temps à la carte d'être continue en espace.
 On s'attend de même à avoir des trajectoires continues, ce qui veut dire que cette carte doit aussi être continue en temps.
- Deux points matériels ne peuvent pas non plus occuper le même volume après mouvement. La carte $\underline{\phi}$ doit donc être injective sur le domaine intérieur Ω_0 . Ceci implique l'existence d'un inverse $\underline{\psi}(\underline{x},t)$ défini sur l'image de Ω_0 et à valeurs dans Ω_0 .
- Pour pouvoir définir la notion de vitesse à partir de la notion de trajectoire, il est nécessaire ensuite de pouvoir caractériser les petites variations en temps de la position. Pour définir les déformations, il sera nécessaire de savoir calculer les petites variations en espace. Pour pouvoir faire l'un et l'autre, on demandera donc à la carte ϕ d'être presque partout différentiable par rapport à la variable d'espace \underline{X} et de temps t.
- Il faut enfin vérifier que la matière ne se croise pas au cours du mouvement. D'un point de vue mathématique, cela veut dire qu'un trièdre direct doit rester direct. Autrement dit, il est impossible d'intervertir l'ordre de deux vecteurs dans un trièdre. Au niveau infinitésimal, un trièdre direct $(\underline{dM}_1(0), \underline{dM}_2(0), \underline{dM}_3(0))$ est associé à un volume orienté det $(\underline{dM}_1(0), \underline{dM}_2(0), \underline{dM}_3(0))$ positif en configuration initiale. Respecter l'orientation revient donc à respecter le signe du déterminant. Or, pour toute application différentiable en espace, le vecteur matériel infinitisémal $\underline{dM}(0)$ est transporté par l'application tangente $\underline{\nabla \phi} = \frac{\partial \phi}{\partial X}$.

Le déterminant est donc transformé en

$$\begin{split} &\det \ (\underline{\mathrm{d}M}_1(t),\underline{\mathrm{d}M}_2(t),\underline{\mathrm{d}M}_3(t)) \\ &= \ \det \ \left(\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}} \cdot \underline{\mathrm{d}M}_1(0), \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}} \cdot \underline{\mathrm{d}M}_2(0), \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}} \cdot \underline{\mathrm{d}M}_3(0) \right) \\ &= \ \det \ \left(\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}} \right) \ \det \ (\underline{\mathrm{d}M}_1(0),\underline{\mathrm{d}M}_2(0),\underline{\mathrm{d}M}_3(0)) \ . \end{split}$$

Pour qu'il reste positif, il faut donc que le jacobien de la transformation défini par

$$J = \det \left(\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial X}\right) \tag{1.7}$$

soit strictement positif à tout instant. Ci-dessus, la jacobienne $\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}} = \underline{\nabla \phi}$ peut être représentée dans un repère cartésien orthonormé par la matrice

$$F_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_j},$$

ou encore sous forme tensorielle par

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \ .$$

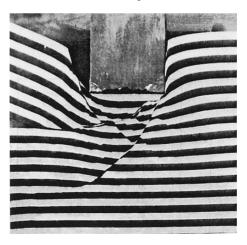


FIG. 1.9: Expérience de poinçonnement en laboratoire effectué à l'Institut de Physique du Globe pour construire un modèle réduit de la dérive de l'Inde dans la plaque asiatique. On voit clairement apparaître un glissement d'un bloc sur l'autre. Tiré de Salençon [28].

Une première exigence résumant toutes ces restrictions serait donc de demander que la carte $\underline{\phi}(\underline{X},t)$ soit continue et différentiable en espace et en temps sur Ω_0 , ait un inverse continu $\underline{\psi}(\underline{x},t)$ définie sur l'image de Ω_0 , et admette un jacobien J strictement positif en tout point. Mais, l'observation expérimentale indique que ces exigences peuvent être trop fortes. Des lignes de glissement peuvent se produire. Le premier exemple décrit sur la figure 1.9 est tiré de [28]. Il s'agit d'une expérience de poinçonnement en laboratoire effectué à l'Institut de Physique du Globe pour construire un modèle réduit de la dérive du sous continent indien dans la plaque asiatique. On voit clairement apparaître un glissement d'un bloc sur l'autre. Le second exemple décrit sur la figure 1.10 est le résultat d'une expérience de traction réalisée à 1100 degrés Celsius par le Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique sur un échantillon d'acier en phase austinoferritique. Elle montre la déformation d'une microgrille gravée sur l'échantillon, et fait aussi apparaître une ligne de glissement.

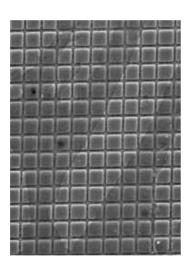




FIG. 1.10: Déformation d'une microgrille gravée (pas de $5\,\mu m$ avant déformation) lors d'une compression plane à 1100 degrés Celsius sur un échantillon d'acier biphasé austinoferritique telle qu'observée dans le cadre d'une collaboration entre le LMS et l'institut IMMPETUS de l'Université de Sheffield. La microgrille gravée sur l'échantillon se déforme au cours du mouvement. Un glissement apparaît à l'interface de deux grains constitutifs du matériau.

Pour permettre de représenter ces situations expérimentales de mouvements continus par morceaux, on demande finalement à la représentation lagrangienne $\underline{\phi}$ de satisfaire aux exigences suivantes :

Hypothèse 1.1 La représentation lagrangienne $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ définie pour tout instant t > 0 et pour tout point matériel \underline{X} de la configuration initiale κ_0 doit

- 1. être continue et différentiable par morceaux en espace et en temps,
- 2. avoir un inverse continu $\underline{\psi}$ défini sur l'image de Ω_0 diminuée des lignes de discontinuité,
- 3. avoir un jacobien $J(\underline{X},t) = \det \left(\frac{\partial \phi}{\partial \underline{X}}(\underline{X},t)\right)$ strictement positif presque partout

$$0 < J(\underline{X}, t) < \infty . \tag{1.8}$$

Remarque 1.1 L'injectivité n'est pas forcément vérifiée sur la frontière de la configuration, car aucune raison physique n'interdit à deux frontières d'entrer en contact au cours du mouvement.

Remarque 1.2 Nous verrons au chapitre suivant qu'un jacobien qui s'annule au cours du temps correspondrait à un volume initial de matière qui se transformerait en un volume nul, ce qui est impossible. De même, un jacobien qui deviendrait infini correspondrait à une quantité finie de matière se dilatant en temps fini dans un volume infini.

Remarque 1.3 Les hypothèses précises de régularité mathématique à imposer à la carte $\underline{\phi}$ vont dépendre du contexte. Elles doivent permettre de spécifier l'hypothèse 1.1 dans \overline{le} cadre mathématique utilisé.

Remarque 1.4 Les lignes d'émission sont aussi facilement accessibles à la représentation lagrangienne dès que l'on connait l'application inverse $\underline{\psi}$, permettant ainsi de connaitre la position initiale $\underline{\psi}(M_0,t')$ d'un point matériel qui serait au point M_0 à l'instant t'. La ligne d'émission $\mathcal{E}(M_0)$ de tout point M_0 est alors définie par

$$\mathcal{E}(M_0) = \{\underline{x}, \exists t' \ avec \ \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{\psi}(M_0, t'), t)\}.$$

1.5 Description eulérienne

1.5.1 Construction

La description lagrangienne du mouvement nécessite d'introduire une configuration de référence du milieu continu étudié. Dans de nombreux cas, et en particulier en mécanique des fluides, cette tâche est difficile. Sur la figure 1.11 il paraît difficile d'identifier une configuration de référence du mélange de fluides s'écoulant dans le canal du fait des instabilités tourbillonaires provoquées par la présence d'obstacles sur la paroi. Pour surmonter la difficulté, Léonard Euler (1707-1783) a proposé de

représenter le mouvement par son champ de vitesses $\underline{U}(\underline{x},t)$ à définir en tout point \underline{x} de la configuration actuelle κ_t .

$$\underline{U} = \underline{U}(\underline{x}, t), \forall \underline{x} \in \kappa_t, \forall t > 0 \text{ (représentation eulérienne)}.$$
 (1.9)

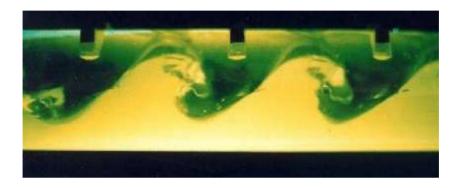


Fig. 1.11: Instabilités tourbillonaires dans une couche de mélange en présence d'obstacles (photo Ladhyx).

Cette description permet une construction incrémentale du mouvement (Figure 1.12). La connaissance du champ de vitesse à l'instant t en tout point \underline{x} de la configuration actuelle κ_t permet de prédire la position $\underline{x} + \underline{U}(\underline{x}, t) \mathrm{d}t$ à l'instant $t + \mathrm{d}t$ du point matériel qui se trouve en \underline{x} à t, donc de construire la configuration $\kappa_{t+\mathrm{d}t}$ du milieu continu à l'instant $t + \mathrm{d}t$. Autrement dit, la représentation eulérienne du mouvement prend à chaque instant la configuration actuelle comme configuration de référence pour décrire l'évolution du milieu entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

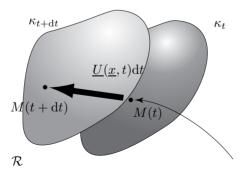


Fig. 1.12: Configuration eulérienne et son actualisation incrémentale. Tiré de Salençon [28].

1.5.2 Équivalence avec la représentation lagrangienne

La représentation eulérienne du mouvement se déduit directement de la représentation lagrangienne par simple identification du champ de vitesse

$$\underline{U}(\underline{x},t) = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}(\underline{X},t) = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}(\underline{\psi}(\underline{x},t),t).$$

Réciproquement, la représentation la grangienne du mouvement s'obtient par intégration du processus de construction incrémentale décrit plus haut, c'est-à-dire par intégration en tout point matériel \underline{X} de l'équation différentielle

$$\begin{cases}
\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}(\underline{X}, t) = \underline{U}(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t), \\
\underline{\phi}(\underline{X}, 0) = \underline{X}.
\end{cases} (1.10)$$

En intégrant cette équation pour chaque point matériel \underline{X} , on peut ainsi reconstruire une représentation lagrangienne du mouvement si nécessaire, et ainsi calculer trajectoires et lignes d'émission.

On peut se demander si la carte $\underline{\phi}$ ainsi reconstruite satisfait aux exigences de régularité imposées à une représentation lagrangienne du mouvement. La régularité en temps de la carte $\underline{\phi}$ est garantie par construction de $\underline{\phi}$ comme intégrale du champ de vitesse, la régularité en espace sera déduite de la régularité en espace du champ de vitesse. La construction de l'inverse $\underline{\psi}$ s'obtient en inversant le sens du temps dans l'équation (1.10), ce qui permet de l'intégrer du temps final t au temps initial t_0 . La positivité du jacobien s'obtient enfin en écrivant l'équation différentielle qui le caractérise. Pour ce faire, il faut d'abord calculer le taux d'accroissement d'un déterminant

$$\det \left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{dA}} \right) = \det \underline{\underline{A}} \det \left(\underline{\underline{n}} + \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{dA}} \right) = \det \underline{\underline{A}} \left(1 + \operatorname{Tr} \left(\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{dA}} \right) + o(\underline{\underline{dA}}) \right), \tag{1.11}$$

ce qui permet de calculer la dérivée du déterminant le long de la direction $\underline{\underline{\mathrm{d}A}}$ par

$$\frac{\partial \det \underline{\underline{A}}}{\partial \underline{A}} : \underline{\underline{dA}} = (\det \underline{\underline{A}}) \operatorname{Tr} (\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{dA}}) = (\det \underline{\underline{A}}) \ \underline{\underline{A}}^{-1} : \underline{\underline{dA}}. \tag{1.12}$$

En introduisant le gradient de déformation

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}\phi} = \frac{\partial\underline{\phi}}{\partial\underline{X}} = \frac{\partial\underline{x}}{\partial\underline{X}},$$

on en déduit que la dérivée en temps à point matériel fixé du jacobien $J=\det\underline{\underline{F}}$ vérifie

$$\frac{\partial J}{\partial t}_{\mid X} = \frac{\partial J}{\partial \underline{F}} : \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial t} = J \operatorname{Tr} \ (\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial t}) = J \operatorname{Tr} \ (\frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial t} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}) \ .$$

Mais par construction du gradient $\underline{\underline{F}}$ et du champ de vitesse \underline{U} , on a

$$\frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial t} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial t \ \partial \underline{X}} \cdot \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{X}} \cdot \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{x}} = \underline{\underline{\mathrm{grad}} \ \underline{U}} \ .$$

Il reste alors

$$\frac{\partial J}{\partial t}|_{X} = J \operatorname{Tr} \left(\underline{\underline{\operatorname{grad} U}} \right) = J \operatorname{div} \underline{U} . \tag{1.13}$$

Autrement dit, en tout point, le logarithme du jacobien peut se calculer par intégration de l'équation différentielle

$$\frac{\partial \ln J}{\partial t}_{|\underline{X}} = \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t}_{|\underline{X}} = \operatorname{div} \underline{U}, \quad \ln J(0) = 0,$$
(1.14)

ce qui signifie en particulier que le jacobien reste constamment positif au cours du temps.

1.5.3 Mouvements stationnaires

Un mouvement est dit stationnaire dans un référentiel donné si et seulement si dans ce référentiel son champ de vitesse en représentation eulérienne ne dépend pas du temps

$$\underline{U} = \underline{U}(\underline{x})$$
.

Dans ce cadre, on remarque immédiatement que l'équation différentielle (1.10) permettant de calculer les trajectoires et l'équation (1.4) permettant de calculer les lignes de courant deviennent identiques. Cela signifie que dans un écoulement stationnaire, lignes de courant et trajectoires sont confondues.

Par ailleurs, pour un mouvement stationnaire, les équations définissant les trajectoires restent invariantes par translation en temps. En effectuant une translation de t', cela veut dire que la position à l'instant t du point matériel qui était au point M_0 à l'instant t' (point de la ligne d'émission de M_0) est égale à la position à l'instant t-t' du point matériel qui était au point M_0 à l'instant initial (point de la trajectoire du point matériel M_0). Cela implique donc que lignes d'émission et trajectoires sont aussi confondues pour un écoulement stationnaire.

1.5.4 Dérivées particulaires

La représentation eulérienne du mouvement donne enfin accès aux dérivées particulaires de champs de tenseurs, dérivées qui mesurent les variations en temps $\frac{Db}{Dt} = \frac{\partial b}{\partial t}_{|\underline{X}}$ de quantités physiques \mathcal{B} liées à un point matériel \underline{X} en mouvement. La dérivée particulaire du champ de tenseur b s'obtient en écrivant que la position actuelle \underline{x} est l'image de la position initiale \underline{X} par la transformation $\underline{\phi}$, ce qui donne par un calcul direct de dérivée de fonction composée

$$\frac{Db}{Dt}(\underline{x},t) := \frac{\partial b}{\partial t}(\underline{\phi}(\underline{X},t),t)_{|\underline{X}} = \frac{\partial b}{\partial t}_{|\underline{x}}(\underline{x},t) + \frac{\partial b}{\partial \underline{x}}(\underline{x},t) \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \; .$$

En introduisant le champ de vitesse $\underline{U} = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}$ et le gradient du champ de tenseur $\underline{\text{grad}} b = \frac{\partial b}{\partial x}$, on obtient la formule classique donnant la dérivée particulaire d'un champ de tenseur d'ordre quelconque par

$$\frac{Db}{Dt} = \frac{\partial b}{\partial t}_{|\underline{x}|} + \underline{\text{grad}} b \cdot \underline{U}.$$
(1.15)

Cette dérivée comporte deux termes. Le premier mesure la variation en fonction du temps du champ b au point géométrique \underline{x} . Le second mesure la variation de b induite par le mouvement du point matériel qui change de position géométrique et qui par là même peut être soumise à une autre valeur du champ b. Ce terme de convection est proportionnel à la vitesse du milieu continu. Il joue un rôle crucial en mécanique des fluides. Pour un tenseur du premier ordre $\underline{b} = b_i \underline{e}_i$, ce terme de convection se développe en base orthonormée $\{\underline{e}_i\}$ sous la forme

$$\underline{\underline{\operatorname{grad}}\ b} \cdot \underline{U} = (\frac{\partial b_i}{\partial x_k} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_k) \cdot (U_l \underline{e}_l) = \frac{\partial b_i}{\partial x_k} U_k \underline{e}_i \ .$$

Un cas particulier important de ces formules concerne l'accélération $\underline{\gamma}$ d'un point matériel qui par construction est égal à la dérivée particulaire de la vitesse

$$\underline{\gamma} = \frac{D\underline{U}}{Dt} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}_{|\underline{x}} + \underline{\operatorname{grad}} \underline{U} \cdot \underline{U}. \tag{1.16}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{grad}}\ b} = \frac{\partial b_i}{\partial x_k} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_i \ .$$

Formules essentielles 35

Formules essentielles

- Configurations (configurations)

 $\underline{X} = \text{ position du point matériel en configuration de référence } \kappa_0$ $\underline{x} = \text{ position du point matériel en configuration actuelle } \kappa_t$.

- Description lagrangienne du mouvement

$$\begin{split} &\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t), \forall \underline{X} \in \kappa_0, \forall t > 0 \text{ (position)} \\ &\underline{U}(\underline{X},t) = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}_{|\underline{X}}(\underline{X},t) \text{ (vitesse)} \\ &J(\underline{X},t) = \det \left(\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{X}}(\underline{X},t)\right) \text{ (jacobien)} \\ &0 < J(\underline{X},t) < \infty \text{ (préservation de l'orientation)} \;. \end{split}$$

- Description eulérienne du mouvement

$$\underline{U} = \underline{U}(\underline{x}, t), \forall \underline{x} \in \kappa_t, \forall t > 0 \text{ (vitesse)}$$
Trajectoires $(pathlines)$:
$$\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}(\underline{X}, t) = \underline{U}(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t), \quad \underline{\phi}(\underline{X}, 0) = \underline{X};$$
Jacobien $(jacobian)$:
$$\frac{\dot{J}}{J} = \text{div } \underline{U};$$
Dérivée particulaire $(material \ derivative)$:
$$\frac{Db}{Dt} = \frac{\partial b}{\partial t}_{|x} + \underline{\text{grad }} b \cdot \underline{U}.$$