Chapitre 1

Introduction

A quoi tu penses ?

Je pense que,

si en ouvrant un dictionnaire au hasard, on tombait sur le mot hasard, ce serait un miracle, alors que si on tombait sur le mot miracle, ce serait un hasard.

H. Le Tellier, Les amnésiques n'ont rien vécu d'inoubliable.

Il peut paraître irréaliste et prétentieux de vouloir, de par sa nature même, **quantifier le hasard**. C'est pourtant ce qui a conduit à la notion de **Probabilité**. Nous allons dans ce livre introduire ce concept mathématique, dont la puissance permettra de **modéliser** d'innombrables situations où le hasard intervient, dépassant ainsi largement le cadre restreint des jeux de dés et tirages de cartes. La modélisation probabiliste est fondamentale dans tous les domaines d'applications, qu'ils soient issus des sciences dures ou des sciences humaines, de la physique (physique quantique, physique des particules), de la climatologie, de la biologie (mutations du génôme), de l'écologie (variabilité des comportements individuels ou variations environnementales), de l'informatique et des réseaux de télécommunications, du traitement du signal et de la parole, de la médecine (imagerie médicale), de l'économie, l'assurance, la finance (marchés boursiers), ou de la sociologie.

1.1 Remerciements

Ce livre est issu d'un cours donné aux cinq cents élèves de première année de l'Ecole Polytechnique. Il est le fruit du travail pédagogique de nombreuses années, développé tout d'abord à l'Université, puis dans son format actuel à l'Ecole Polytechnique. L'auteur remercie ses prédécesseurs Francis Comets et Michel Benaïm pour certaines de leurs idées, Michel Delasnerie et Florent Benaych-Georges pour leur aide précieuse dans le développement des simulations, Amandine Veber et Carl Graham pour leur relecture attentive de ce manuscrit, Aldjia Mazari pour la mise en page des figures et tous les enseignants de petites classes pour leur formidable enthousiasme et leurs encouragements : Stéphanie Allassonnière, Vincent Bansaye, Julien Berestycki, Thierry Bodineau, Olivier Cappé, Jean-René Chazottes, Nicolas Chopin, Arnak Dalalyan, Jean-François Delmas, Randal Douc, Christophe Giraud, Carl Graham, Arnaud Guillin, Caroline Hillairet, Marc Hoffmann, Benjamin Jourdain, Jean-Michel Marin, Stefano Olla, Olivier Rioul, François Roueff, Denis Talay.

Symbole d'une résurrection hautement aléatoire ce livre remercie également tous ceux qui l'ont accompagnée.

1.2 Avant-Propos

Le mot **Hasard** est un mot d'origine arabe : *az-zahr*, le dé. Il est apparu en français pour signifier tout d'abord un jeu de dés, puis plus généralement un événement non prévisible, et par extension le mode d'apparition de ce type d'événement.

Dans la vie quotidienne, chacun est familier avec le mot et même le concept de probabilité : probabilité qu'il pleuve la semaine suivante, probabilité d'avoir une fille aux yeux bleus, probabilité de gagner au loto ou celle d'être dans la bonne file au supermarché. Les assurances fixent le contrat d'assurance-vie d'un individu de 20 ans, grâce à une estimation de sa probabilité de survie à 80 ans. Dans de nombreux domaines, les probabilités interviennent : les entreprises cherchent à calculer le besoin probable de leurs produits dans le futur, les médecins cherchent à connaître les probabilités de succès de différents protocoles de soin, les compagnies pharmaceutiques doivent estimer les probabilités d'apparitions d'effets secondaires pour leurs médicaments. Un exemple récent et spectaculaire est celui de l'utilisation des probabilités en économie, et en particulier en finance. Nous pouvons citer également d'autres domaines d'applications extrêmement importants et en pleine expansion, aussi variés que le calcul de structures, la théorie du signal, l'optimisation et le contrôle des systèmes, l'imagerie médicale, la génomique et la théorie de l'évolution.

Les probabilités sont en lien étroit avec la vie quotidienne. A ce titre, elles s'appuient sur un passage du concret à l'abstrait : la modélisation mathématique. En effet, la première difficulté face à un problème concret va être de transformer cette réalité physique en un modèle mathématique abstrait qu'il est possible d'étudier et sur lequel des calculs peuvent être menés. Il est alors possible de fabriquer des expérimentations fictives du problème concret sur ordinateur, que l'on appelle des simulations numériques, obtenues à partir du modèle mathématique. Ces simulations sont utilisées, soit à des fins descriptives, soit à des fins numériques.

Pour pouvoir modéliser les innombrables situations, de natures très différentes, où le hasard intervient, un cadre très général d'étude est nécessaire. Ce cadre abstrait a été défini rigoureusement par Andrei Kolmogorov en 1933 (donc très récemment), sous le nom de modèle probabiliste. Sa définition a nécessité préalablement le développement de théories d'analyse importantes telles le calcul intégral et la théorie de la mesure.

C'est ce grand écart entre l'apparente simplicité de certains problèmes probabilistes concrets, et l'abstraction que nécessite leur résolution, qui peut rendre le monde de l'aléatoire difficile ou inquiétant, mais c'est aussi ce qui en fait un domaine mathématique fascinant et palpitant.

1.3 Phénomènes aléatoires

Le but de ce cours est d'introduire les notions de base de la théorie des probabilités, et surtout de permettre d'acquérir le raisonnement probabiliste. Cette théorie des probabilités ne peut se construire axiomatiquement qu'en utilisant la théorie de la mesure et de l'intégration, ce qui en constitue une des difficultés principales. Nous n'en donnerons dans ce texte que les éléments nécessaires à sa bonne compréhension, sans exiger de prérequis dans ce domaine. (Mais nous remarquerons que la théorie des probabilités constitue un très bel exemple d'application de la théorie de l'intégration).

L'objet de la théorie des probabilités est l'analyse mathématique de phénomènes dans lesquels le hasard intervient. Ces phénomènes sont appelés des **phénomènes aléatoires**.

Définition 1.3.1 Un phénomène est dit aléatoire si, reproduit maintes fois dans des conditions identiques, il se déroule chaque fois différemment de telle sorte que le résultat de l'expérience change d'une fois sur l'autre de manière imprévisible.

Nous pouvons donner des exemples variés de tels phénomènes :

- Jeu de Pile ou Face
- Jeu de lancé de dés

Dans ces deux exemples, la différence entre les résultats, si l'on réitère l'expérience, peut être liée à l'impulsion initiale communiquée au dé, à la rugosité de la table, aux vibrations du plancher... Le hasard est l'illustration de la méconnaissance des conditions initiales, car la pièce ou le dé ont des trajectoires parfaitement définies par la mécanique classique.

- Durée de vie d'une ampoule électrique
- Temps de passage d'un bus
- Nombre de voitures passant une borne de péage
- Promenade d'un ivrogne : un pas en avant, deux pas en arrière...
- Position d'un impact sur une cible, dans un jeu de fléchettes
- Evolution du prix d'un actif financier au cours du temps
- Mutations dans le génôme.

Ces exemples présentent comme point commun des variations liées à la présence de facteurs extérieurs, influant sur le résultat de l'expérience, et que l'on ne sait pas contrôler. De nombreux effets physiques fonctionnent ainsi, et chaque phénomène déterministe est inévitablement accompagné d'écarts aléatoires. Dans certains cas, il est possible de négliger les éléments aléatoires et de remplacer le phénomène réel par un schéma simplifié, en sélectionnant pour ce faire les paramètres les plus importants (comme par exemple en mécanique classique). Mais cette approximation n'est pas toujours possible et il est souvent fondamental de pouvoir quantifier les écarts aléatoires. Dans d'autres domaines, tels la physique quantique, l'aléatoire fait intrinsèquement partie de la théorie, et certaines mesures ne peuvent être connues qu'aléatoirement dans un ensemble de résultats possibles.

1.4 Deux idées majeures et incontournables

Deux idées majeures illustrent la théorie des probabilités et son extrême richesse : la loi des grands nombres et le conditionnement (lié à la notion d'indépendance). Ces deux notions formeront l'ossature de ce cours et méritent d'être assimilées en profondeur.

1.4.1 La loi des grands nombres

La notion de hasard, ou d'aléatoire, est souvent liée à la méconnaissance de paramètres intervenant dans une expérience, ou à la trop grande multitude de ceux-ci. Néanmoins, bien que ces comportements aléatoires soient a priori sujets à des variations imprévisibles, nous serons capables de donner des renseignements sur ce type de phénomènes. L'idée majeure est que ces informations seront données par la répétition de l'expérience.

En effet, l'observation d'un grand nombre de répétitions d'un même phénomène aléatoire permet d'y déceler généralement des lois régissant les résultats, tout à fait déterminées, stables. Par exemple, pour toute pièce non truquée d'un jeu de Pile ou Face, et quelque soit l'endroit où se déroule le jeu, 1000 lancés de la pièce donneront environ 50% de piles et 50% de faces. De même, l'étude de la répartition des tailles d'un groupe d'individus, et quel que soit l'échantillon pris dans ce groupe, montre qu'il y aura toujours une courbe des répartitions de même type. Il va être ainsi possible de prévoir la fréquence d'apparition de chaque résultat, la valeur moyenne de ces résultats et les oscillations autour de cette valeur moyenne.

C'est cette stabilité confirmée par l'expérience qui s'appelle **Loi des grands nombres**, et qui légitime l'utilisation d'un modèle mathématique.

1.4.2 Conditionnement et Indépendance

La construction d'un modèle probabiliste repose sur l'information connue *a priori* sur l'expérience aléatoire. Ce modèle permet de quantifier les probabilités de réalisation de certains résultats de l'expérience. Il est fondamental de remarquer que si l'information change, les probabilités de réalisation changent. Par exemple, la chance de choisir au hasard un homme de plus de 100 kilos parmi 1000 hommes de la population française est plus grande si le groupe est composé d'hommes de plus de 1,80m que si le groupe est composé d'hommes de moins de 1,65m. La richesse du modèle probabiliste que nous allons construire réside dans le fait que si l'information change par rapport au modèle initial, les nouvelles chances de réalisation pourront être calculées. Ce raisonnement lié à l'information a priori se résume en théorie des Probabilités par le mot **conditionnement**. Quand l'information donnée a priori sur un phénomène aléatoire n'a aucune influence sur la réalisation d'un autre phénomène, par exemple deux tours successifs de roulette dans un casino, ces phénomènes aléatoires sont dits indépendants. Cette hypothèse d'indépendance sera fondamentale dans toute la théorie, et simplifiera de nombreux calculs.

1.5 Les variables aléatoires

1.5.1 Loi d'une variable aléatoire

Nous allons dans ce livre étudier des fonctions qui dépendent du résultat de l'expérience aléatoire sous-jacente. Elles sont appelées **variables aléatoires**, car leurs valeurs varient en fonction du hasard. Plutôt que de chercher les antécédents de chaque valeur possible de la fonction, nous allons nous intéresser à la chance de réalisation de l'ensemble des antécédents qui permettent à la fonction d'être égale à une de ces valeurs ou d'appartenir à un ensemble de ces valeurs. C'est cela que nous appellerons la loi de la variable aléatoire. Cette notion de loi d'une variable aléatoire est à la base du raisonnement probabiliste moderne.

1.5.2 Simulation de variables aléatoires

La simulation consiste en une expérimentation fictive sur machine d'un phénomène modélisé. Elle permet de visualiser une expérience aléatoire, de calculer des quantités numériques et de vérifier certains résultats théoriques.

Des simulations, proposées dans le cours de l'École polytechnique, peuvent accompagner la lecture de cet ouvrage et en illustrer la compréhension. Elles se trouvent à l'adresse :
`http ://www.cmapx.polytechnique.fr/~benaych/aleatoire_index.html.` Nous remercions en cela la participation de leur auteur Florent Benaych-Georges.

La méthode de simulation probabiliste la plus célèbre est la méthode de Monte-Carlo, du nom du quartier où se trouve le casino de Monaco. Elle consiste à effectuer certains calculs (calculs d'intégrales notamment) par de nombreuses simulations numériques de réalisations indépendantes de variables aléatoires de loi donnée. Ce procédé est fondé sur la loi des grands nombres qui en assure la convergence. Mais, pour obtenir une précision acceptable, nous verrons qu'il faut accomplir une grande quantité de simulations, ce qui explique que la méthode n'a pu se développer de manière significative que depuis l'introduction massive d'ordinateurs performants.

L'outil de base est un générateur de nombres au hasard qui simule une variable aléatoire de loi uniforme. La plupart des langages de programmation et des logiciels mathématiques en possèdent un :

- la méthode `Math.random` en JAVA,
- les fonctions `rand` et `grand` sous SCILAB.

Ainsi, par exemple, l'application répétée de la fonction `rand` fournit une suite de nombres indépendants les uns des autres et uniformément répartis sur $[0,1]$. Nous verrons comment, à partir de ce générateur, nous pouvons simuler de nombreux types de loi.

1.6 Historique

La notion de modèle abstrait commun à des expériences variées a mis beaucoup de temps à émerger. Le hasard étant par nature pour nos ancêtres une représentation du divin, il a fallu, pour définir la notion de probabilité, attendre une certaine maturité de la pensée. Il y a très peu d'écrits anciens concernant le calcul des probabilités. Au 4ème siècle, l'existence d'une science des jeux de dés apparaît dans le Mahabharata (célèbre ouvrage indien), de même que ses rapports étroits avec une évaluation de type sondage (cf. Hacking). Mais les premières références publiées sur les chances de gagner au jeu datent de Cardan (1501-1576) dans son livre *De Ludo Alea*. Des calculs de probabilité apparaissent aussi dans les oeuvres de Kepler (1571-1630) et de Galilée (1564-1642). Le calcul probabiliste se développe au cours du 17ème siècle, motivé en particulier par l'engouement frénétique pour les jeux de hasard à cette époque. Le sujet commence réellement à être rigoureusement développé par Pascal (1623-1662) et Fermat (1601-1665) vers 1654, comme un calcul combinatoire, à partir de paradoxes issus de ces jeux (les paradoxes du Chevalier de Méré que l'on verra au Chapitre 2). Dès 1657, Huyghens (1629-1695) rédige un mémoire amplifiant sensiblement les résultats de Pascal et Fermat, et son travail reste jusqu'à la fin du 17ème siècle l'exposé le plus profond de calcul des Probabilités. Bernoulli (1654-1705) établit la loi des grands nombres sous sa forme la plus simple, résultat fondamental qu'il dit avoir médité vingt ans. Vers la fin du 17ème siècle, une autre impulsion au calcul des probabilités vient d'Angleterre et de Hollande, motivée par des problèmes d'assurance (Halley (1656-1742), De Witt (1625-1672)). En effet, l'évaluation des populations (par exemple : tables de mortalité et rentes viagères) devient une discipline essentielle à la gouvernance moderne des états.

La théorie des probabilités se construit dans la modélisation d'une réalité qui n'est pas forcément (pas souvent) de nature physique. Pascal la croit utilisable en théologie. Le célèbre Pari de Pascal montre que croire en Dieu est une solution statistiquement plus avantageuse, en supposant au préalable que les deux hypothèses d'existence ou non de Dieu ont la même probabilité. Leibnitz (1646-1716), et plus tard Laplace (1749-1827), Poisson (1781-1840) (*Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile*), l'appliquent aux controverses juridiques. Les probabilités sont un outil privilégié de modélisation des comportements humains, comme en témoigne l'intérêt récurrent des philosophes pour leurs fondements.

De Moivre (1667-1754) et Euler (1707-1803) développent les idées de Pascal et Fermat, Bayes (1671-1746) introduit la notion de probabilité conditionnelle (probabilité a priori), mais faute d'outils mathématiques puissants, il faut pour développer plus avant la théorie, attendre Laplace (1749-1827). Celui-ci donne une application magistrale du calcul différentiel et intégral à la théorie des probabilités dans son très important *Traité analytique des probabilités* (en 1812). Laplace formule le postulat du déterminisme universel. Cette intelligence est un idéal, un horizon, que notre science ne nous permet pas d'atteindre. Le calcul des probabilités est imaginé comme un outil permettant de pallier cette faiblesse. Laplace permet à la discipline de dépasser définitivement sa première phase combinatoire. Il met en avant le rôle de la loi normale et démontre une version du théorème de la limite centrale. Gauss (1777-1855) développe intensément la théorie. Dans les pays anglo-saxons se développe également l'outil statistique, avec l'étude des données et l'analyse prédictive à partir de ces données. Le mot "statistique" vient du mot "état", et cette science a été, depuis cette époque, un outil puissant pour les organismes de décisions. Elle se développe en utilisant le support d'un modèle probabiliste.

Le développement des probabilités grâce aux méthodes d'analyse occupe le 19ème siècle et le début du 20ème siècle, fondé en particulier sur les travaux de Borel (1871-1956) et de Lebesgue (1875-1941) sur la théorie de la mesure. Les avancées au 19ème siècle de la physique statistique (Maxwell (1831-1879), Boltzmann (1844-1906)) apportent un nouveau point de vue qui dépasse les idées rationalistes de Laplace et permet d'envisager que le hasard est une réalité objective indépendante de nos connaissances, conformément aux idées du philosophe Cournot (1801-1877) qui le premier affirme que le hasard et le déterminisme sont compatibles entre eux. Le principe d'incertitude d'Heisenberg montrera ultérieurement (1927) l'impossibilité de connaître avec une infinie précision la position et la vitesse d'une particule ; on ne peut les connaître qu'à l'aide d'une loi de probabilité.

Sous l'incitation de problèmes de physique statistique, mais aussi de démographie, commence à se dégager, vers la fin du 19ème siècle, la notion fondamentale de fonction aléatoire, destinée à rendre compte d'un phénomène aléatoire qui évolue au cours du temps. Les probabilités entrent à cette époque dans une nouvelle phase de développement. Dès 1875, Galton (1822-1911) et Watson (1827-1903) étudient l'évolution du nombre d'individus d'une population au cours de ses générations successives, mettant en évidence un exemple de processus aléatoire qui sera introduit dans toute sa généralité par Markov (1856-1922). Einstein (1879-1955) vers 1905 s'intéresse à la notion de mouvement Brownien. Brown avait déjà observé le mouvement d'une particule de pollen sur la surface de l'eau, heurtée de toutes parts par des molécules d'eau ; ce mouvement paraît totalement désordonné. En fait, Bachelier (1870-1946) avait lui aussi introduit le mouvement brownien en 1900 pour modéliser la dynamique d'un cours boursier. Ce processus aléatoire, évoluant de manière apparemment totalement erratique, s'est avéré être un outil fondamental de modélisation probabiliste dès lors que l'on s'intéresse à un phénomène aléatoire évoluant continûment au cours du temps.

La période moderne, caractérisée par l'étude systématique des processus aléatoires, débute vers 1930. Dans les *Fondements de la Théorie des Probabilités* que Kolmogorov (1903-1987) publie en 1933 apparaît l'axiomatique rigoureuse, fondée sur la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue et qui sera universellement adoptée ensuite. L'expression mathématique donnée ainsi aux concepts confère à ceux-ci une clarté et une maniabilité beaucoup plus grandes, et cette axiomatique s'est révélée indispensable dans l'étude de tous les modèles dynamiques. Après le travail fondamental de Kolmogorov, Lévy (1886-1971), donne le ton pour les probabilités modernes par son travail sur les processus stochastiques, ainsi que sur les fonctions caractéristiques et les théorèmes limites. Mentionnons ici le rôle essentiel joué par les écoles russes et japonaises et notamment par Itô (prix Gauss 2006), qui définit une notion d'intégrale par rapport au mouvement brownien et, grâce à elle, conduit à la création d'un calcul intégral, appelé calcul stochastique, pour certaines familles de processus stochastiques. Ces résultats avaient été, en partie et de manière totalement indépendante, découverts par le mathématicien français Doeblin pendant la deuxième guerre mondiale. Celui-ci sentant sa fin proche (il est mort en 1940 dans les Ardennes) envoya ses trouvailles sous forme d'un «pli cacheté»à l'Académie des Sciences. Ce pli a été découvert et ouvert il y a seulement quelques années et a suscité une grande émotion.

De nos jours, l'Ecole française de Probabilités est très active. Une médaille Fields a été décernée en août 2006 à Werner (Université Paris 11, ENS). "Communiqué de Presse : *Les travaux de Wendelin Werner sont à l'interaction de la physique et des mathématiques. Ils introduisent des idées et des concepts nouveaux combinant la théorie des probabilités et l'analyse complexe, pour comprendre les phénomènes critiques de certaines transitions de phase (par exemple, la transition liquide/gaz)*". Depuis 2006, de nombreux prix et récompenses ont souligné la grande effervescence des probabilités et de leurs applications.

Les probabilités se développent de plus en plus, alimentées en particulier de manière essentielle par la physique, le développement des réseaux de télécommunications, la finance, et plus récemment, par la biologie et la médecine. Elles permettent de construire des modèles mathématiques, qui peuvent être validés par les données suivant la théorie statistique, et fournissent également des possibilités d'expérimentations fictives dans de multiples domaines d'applications.