CHAPITRE 2

Jeux à somme nulle : le cas fini

Les jeux à somme nulle sont les jeux à deux joueurs où la somme des fonctions de paiement est nulle. Dans ce type d'interaction stratégique, les intérêts des joueurs sont opposés donc le conflit est total et il n'y a pas de coopération possible.

1. Généralités, valeur et stratégies optimales

Définition 1.1. *Un jeu à somme nulle sous forme stratégique est défini par un triplet* (I, J, g) *où* I *(resp.* J*) est l'ensemble (non vide) d'actions du joueur 1 (resp. 2), et* $g : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ *est la fonction de gain du joueur 1.*

L'interprétation est la suivante. Indépendamment, le joueur 1 choisit i dans I et le joueur 2 choisit j dans J. Le paiement du joueur 1 est alors $g(i, j)$, et celui du joueur 2 est $-g(i, j)$ (les évaluations du résultat induit par le choix (i, j) sont opposées pour les deux joueurs). Avec les notations du chapitre 1 on a donc $g^1 = g = -g^2$ d'où la terminologie jeu à somme nulle. Chacun des deux joueurs connaît le triplet (I, J, g).

Lorsque I et J sont finis, on dit, sans surprise, que (I, J, g) est un jeu à somme nulle fini. On représente alors le jeu par une matrice A, où le joueur 1 choisit la ligne i, le joueur 2 choisit la colonne j, et l'entrée A_{ij} de la matrice représentent le paiement $g(i, j)$. Par exemple, le jeu suivant est appelé Matching Pennies :

1	-1
-1	1

Réciproquement, toute matrice réelle peut être vue comme un jeu fini à somme nulle, aussi appelé *jeu matriciel.*

On fixe dans la suite un jeu à somme nulle $G = (I, J, g)$. Le joueur 1 maximise la fonction de paiement g, mais celle-ci dépend de deux variables i et j, et le joueur 1 ne contrôle que la variable i et pas la variable j. A l'opposé, le joueur 2 minimise g, et contrôle j mais pas i.

Définition 1.2. *Le joueur 1 garantit* $w \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *dans* G *si il possède une action* *qui lui assure un paiement au moins égal à w, i.e. si :*

$$\exists i \in I, \forall j \in J,\ g(i,j) \geq w.$$

Symétriquement, le joueur 2 garantit $w \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dans G s'il a une action qui lui assure de ne pas perdre plus que w, i.e. si

$$\exists j \in J, \forall i \in I,\ g(i,j) \leq w.$$

Il est clair que pour tout i dans I le joueur 1 garantit $\inf_{j\in J} g(i,j)$, et pour j dans J le joueur 2 garantit $\sup_{i\in I} g(i,j)$.

Définition 1.3.

Le maxmin de G, noté $\underline{v}$, est la quantité $\sup_{i\in I} \inf_{j\in J} g(i,j) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Le minmax de G, noté $\overline{v}$, est la quantité $\inf_{j\in J} \sup_{i\in I} g(i,j) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Ainsi, le maxmin est le supremum des quantités garanties par le joueur 1, et le minmax est l'infimum des quantités garanties par le joueur 2. Le maxmin peut être vu comme l'évaluation de l'interaction où le joueur 1 choisirait i en premier, puis le joueur 2 choisirait j en connaissant i. Il s'agit de la pire situation pour le joueur 1 et donc conduit à une borne inférieure sur son paiement. De même, le minmax correspond à l'interaction où c'est le joueur 2 qui joue en premier, puis le joueur 1 joue en connaissant l'action de son adversaire. (Si le joueur 1 joue en premier mais que son choix n'est pas connu par le joueur 2, il y a indépendance des choix).
Le fait que la première situation soit moins favorable au joueur 1 se traduit par le lemme suivant :

Lemme 1.4.

$$\underline{v} \leq \overline{v}.$$

<u>Preuve</u> : Pour tous i dans I et j dans J, on a : $g(i,j) \geq \inf_{j'\in J} g(i,j')$. En prenant le sup en i de chaque côté, on obtient : $\sup_{i\in I} g(i,j) \geq \underline{v}$, pour tout j de J. En prenant maintenant l'inf en j, on arrive à : $\overline{v} \geq \underline{v}$. ∎

L'écart $\overline{v} - \underline{v}$ est appelé le *saut de dualité*.

Définition 1.5. *On dit que le jeu G a une valeur si $\underline{v} = \overline{v}$, et dans ce cas la valeur $v = \mathtt{val}(G)$ de G est par définition $\underline{v} = \overline{v}$.*

Dans l'exemple Matching Pennies, on a : $\underline{v} = -1 < 1 = \overline{v}$, et le jeu n'a pas de valeur (on verra plus tard que l'extension mixte du jeu a une valeur).
Lorsque le jeu a une valeur, v $(= \overline{v} = \underline{v})$, celle-ci correspond à l'issue rationnelle du

jeu, au sens de l'évaluation considérée comme équitable par les deux joueurs du jeu. La valeur peut alors être vue comme le prix du jeu G.

Lemme 1.6.
S'il existe w qui peut être garanti à la fois par le joueur 1 et le joueur 2, alors w est unique et le jeu a une valeur qui vaut w.

Preuve : On a alors $w \leq \underline{v} \leq \overline{v} \leq w$. ∎

Définition 1.7. *Une stratégie du joueur 1 est dite maxmin ε-optimale si elle garantit $\underline{v} - \varepsilon$. Si le jeu a une valeur, une telle stratégie est simplement dite ε-optimale. Les stratégies ε-optimales du joueur 2 sont définies de façon duale. Les stratégies 0-optimales sont dites optimales .*

Exemple : $G = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, g)$, où $g(i,j) = 1/(i+j+1)$. Le jeu a une valeur qui est 0. Toutes les stratégies du joueur 1 sont optimales, et le joueur 2 n'a aucune stratégie optimale.

Lorsque les espaces I et J ont une structure mesurable, on peut considérer les extensions mixtes de G (cf. Chapitre 1, Section 3). Si une stratégie dans I garantit w dans G, alors la même stratégie garantit également w dans toute extension mixte X, Y de G. En effet par linéarité de l'intégrale en y, $g(x,y) = \int_J g(x,j)dy(j) \geq w$ pour tout $y \in Y$, dès que $g(x,j) \geq w$ pour tout $j \in J$.

On en déduit :

Lemme 1.8.
Le saut de dualité d'une extension mixte de G est inférieur au saut de dualité initial de G.

En particulier, si un jeu à somme nulle possède une valeur, alors toute extension mixte du jeu a également la même valeur.

Dans la suite de ce chapitre, on considère principalement le cas d'un jeu à somme nulle fini.

2. Le théorème du minmax

En théorie des jeux, on autorise souvent les joueurs à choisir leurs actions de manière aléatoire. Par exemple, si l'on doit jouer dans Matching Pennies, ou programmer un ordinateur qui va jouer ce jeu "on line", il est clairement intéressant de choisir chaque action avec probabilité $1/2$, afin de cacher à l'adversaire la ligne ou la colonne que l'on va jouer. (Une autre interprétation des actions "mixtes" est que la probabilité associée aux actions d'un joueur ne représente que la croyance de son adversaire sur son comportement (Harsanyi, 1973a) : voir le Chapitre 7).

Mathématiquement, considérer des actions mixtes permet d'avoir des ensembles d'actions convexes.

Si S est un ensemble fini de cardinal n, on note $\Delta(S)$ l'ensemble des probabilités sur S (ou le simplexe sur S) :

$$\Delta(S) = \{x \in \mathbb{R}^n; x^s \geq 0, \forall s \in S; \sum\nolimits_{s\in S} x^s = 1\}.$$

L'extension mixte d'un jeu fini $G = (I, J, g)$ est alors le jeu $\Gamma = (\Delta(I), \Delta(J), \gamma)$, où la fonction de paiement g est étendue de manière multilinéaire en

$$\gamma(x, y) = \mathbb{E}_{x\otimes y}\, g = \sum\nolimits_{i,j} x^i y^j g(i, j).$$

Un élément x de $\Delta(I)$, resp. y de $\Delta(J)$, est appelé *stratégie mixte* du joueur 1, resp. joueur 2, dans le jeu Γ. Par opposition, un élément de I, resp. J, est assimilé à une mesure de Dirac et est appelé *stratégie pure* du joueur 1, resp. joueur 2, dans Γ.

Le *support* d'une stratégie mixte x du joueur 1, noté $\operatorname{supp}(x)$, est l'ensemble des stratégies pures i telles que $x^i > 0$.

On représentera souvent le jeu G par la matrice A avec $A_{ij} = g(i, j)$ pour tout (i, j) dans $I \times J$. Un élément x de $\Delta(I)$ sera alors vu comme une matrice ligne, et un élément y de $\Delta(J)$ comme une matrice colonne, de façon à pouvoir écrire le paiement comme la forme bilinéaire $\gamma(x, y) = xAy$.

Théorème 2.1 (Von Neumann , 1928)**. Minmax**
Soit A une matrice réelle $I \times J$.
Il existe (x^*, y^*, v) dans $\Delta(I) \times \Delta(J) \times \mathbb{R}$ tel que :

$$(1) \qquad x^*Ay \geq v, \quad \forall y \in \Delta(J) \quad \text{et} \quad xAy^* \leq v, \ \forall x \in \Delta(I).$$

Autrement dit, l'extension mixte d'un jeu matriciel a une valeur (on dit aussi que tout jeu à somme nulle fini a une valeur en stratégies mixtes), et les joueurs y ont des stratégies optimales.

Le réel v du théorème est unique, et correspond précisément à la valeur de la matrice A :

$$v = \max_{x\in\Delta(I)} \min_{y\in\Delta(J)} xAy = \min_{y\in\Delta(J)} \max_{x\in\Delta(I)} xAy$$

que l'on note également $\mathtt{val}(A)$.

En tant qu'application de $\mathbb{R}^{I\times J}$ dans $\mathbb{R}$, l'opérateur $\mathtt{val}$ est continu, croissant et non dilatant : $|\mathtt{val}(A) - \mathtt{val}(B)| \leq \|A - B\|_\infty$ (voir Chapitre 3, Section 3).

Il existe de nombreuses preuves du théorème du minmax. Une démonstration classique repose sur le théorème de dualité en programmation linéaire.
Les deux programmes :

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{array}{c} \min < c, x > \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array} \qquad (\mathcal{P}_2) \quad \begin{array}{c} \max < u, b > \\ uA \leq c \\ u \geq 0 \end{array}$$

sont duaux et ont même valeur dès qu'ils sont réalisables, i.e. si les ensembles $\{Ax \geq b; x \geq 0\}$ et $\{uA \leq c; u \geq 0\}$ sont non vides. Ce résultat est lui même une conséquence du théorème de l'alternative pour des systèmes linéaires (voir par exemple, Sorin (2002), App. A).
Preuve : On se ramène au cas où $A \gg 0$.
On considère les deux programmes duaux

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{array}{c} \min < X, c > \\ XA \geq b \\ X \geq 0 \end{array} \qquad (\mathcal{P}_2) \quad \begin{array}{c} \max < b, Y > \\ AY \leq c \\ Y \geq 0 \end{array}$$

où les variables vérifient $X \in I\!R^m, Y \in I\!R^n$, et les paramètres sont donnés par $c \in I\!R^m, c_i = 1, \forall i$ et $b \in I\!R^n, b_j = 1, \forall j$.
$(\mathcal{P}_2)$ est réalisable avec $Y = 0$ et $(\mathcal{P}_1)$ en prenant X assez grand, par hypothèse sur A.
Il existe donc un triplet X^*, Y^*, w avec

$$X^* \geq 0,\ Y^* \geq 0,\ X^*A \geq b,\ AY^* \leq c, \qquad \sum\nolimits_i X_i^* = \sum\nolimits_j Y_j^* = w$$

$X^* \neq 0$ implique $w > 0$ soit en divisant par w, l'existence de $(x^*, y^*) \in \Delta(I) \times \Delta(J)$ avec

$$x^*Aj \geq 1/w, \forall j, \quad iAy^* \leq 1/w, \forall i.$$

La valeur existe et vaut $1/w$, x^* et y^* sont des stratégies optimales. ∎

Une preuve plus constructive du théorème de Von Neumann peut être obtenue en construisant un algorithme d'approchabilité (voir Exercice 2.4). Par ailleurs, on peut aussi utiliser le théorème de Loomis (Théorème 4.1) dont la preuve repose sur une récurrence sur la dimension.
Indiquons enfin que le théorème du Minmax de Von Neumann se généralise au cas où les paiements ne sont plus nécessairement réels mais appartiennent à un corps ordonné

(et alors la valeur est un élément du corps, Weyl, 1950) : on vérifie que l'ensemble défini par l'équation (1) est spécifié par un nombre fini d'inégalités linéaires larges.

3. Stratégies optimales

Soit un jeu matriciel défini par une matrice A dans $\mathbb{R}^{I\times J}$.
On note $X(A)$ (resp. $Y(A)$) le sous-ensemble de $\Delta(I)$ (resp. $\Delta(J)$) formé des stratégies optimales du joueur 1 (resp. 2).
On rappelle qu'un polytope est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points (ce qui équivaut en dimension finie à un ensemble borné, intersection d'un nombre fini de demi-espaces).

Proposition 3.1.
a) $X(A)$ et $Y(A)$ sont des polytopes non vides.
b) Si $x \in X(A)$, $y \in Y(A)$, $i \in \operatorname{supp}(x)$ et $j \in \operatorname{supp}(y)$, alors $iAy = v$ et $xAj = v$ (complémentarité).
c) Il existe un couple de stratégies optimales (x^*, y^*) dans $X(A) \times Y(A)$ satisfaisant la propriété de complémentarité forte :

$$\forall i \in I, \big(x^{*i} > 0 \Longleftrightarrow iAy^* = v\big) \quad \text{et } \forall j \in J, \ \big(y^{*j} > 0 \Longleftrightarrow x^*Aj = v\big).$$

d) $X(A) \times Y(A)$ est l'ensemble des points-selle de A : éléments (x^*, y^*) de $\Delta(I) \times \Delta(J)$ tels que :

$$x\,A\,y^* \leq \ x^*\,A\,y^* \leq \ x^*\,A\,y \qquad \forall (x,y) \in \Delta(I) \times \Delta(J).$$

Preuve : Les démonstrations de a), b), et d) sont des conséquences élémentaires des définitions et du théorème du minmax. La propriété d) est en fait vraie pour tout jeu à somme nulle (elle correspond à l'identité entre les couples de stratégies optimales et les *équilibres de Nash* (voir le Chapitre 4) d'un jeu à somme nulle).

L'assertion c) correspond à la propriété de complémentarité forte en programmation linéaire et est une conséquence du théorème de l'alternative. ∎

4. Extensions

L'extension suivante du théorème de von Neumann est due à Loomis.

Théorème 4.1 (Loomis , 1946)**.**
Soient A et B deux matrices réelles $I \times J$, avec $B \gg 0$. Il existe (x, y, v) dans $\Delta(I) \times \Delta(J) \times \mathbb{R}$ tel que :

$$xA \geq v \ \ xB \ \text{ et } \ Ay \leq v \ \ By.$$

Si $B_{ij} = 1$ pour tout $(i, j) \in I \times J$, on retrouve le théorème de Von Neumann. Réciproquement, on peut donner une preuve élémentaire du théorème de Loomis à partir de celui de Von Neumann : l'application : $t \in \mathbb{R} \mapsto \texttt{val}(A - tB)$, est continue (strictement décroissante) et a pour limites $+\infty$ en $-\infty$, et $-\infty$ en $+\infty$. Il existe donc un réel v tel que $\texttt{val}(A - vB) = 0$, et il convient.
Voir l'Exercice 2.1 pour une preuve directe du théorème de Loomis.

Un exemple d'application du théorème de Von Neumann est le suivant :

Corollaire 4.2.
Toute matrice stochastique admet une probabilité invariante.

Preuve : Soit A une matrice stochastique dans $\mathbb{R}^{I\times J}$: $I = J$, $A_{ij} \geq 0$ et $\sum_{j\in I} A_{ij} = 1, \forall i \in I$. Notons $B = A - Id$, où Id est la matrice identité, et plaçons-nous dans le jeu défini par B. Considérons tout d'abord la stratégie uniforme y^* du joueur 2. Elle garantit 0, donc la valeur de B est négative. De plus, contre n'importe quelle stratégie mixte y du joueur 2, jouer une ligne i telle que $y^i = \min_{j\in I} y^j$ donne un paiement positif au joueur 1, donc le joueur 2 ne peut pas se garantir une quantité strictement négative. Par conséquent la valeur de B est nulle.
Une stratégie optimale x^* du joueur 1 dans B vérifie $x^*A - x^* \geq 0$, et en considérant le produit par y^* on obtient l'égalité sur toutes les composantes d' où $x^*A = x^*$ (ou par complémentarité). ∎

Le théorème de Von Neumann permet de montrer l'existence de la valeur dans le cas continu suivant, où $\Delta([0, 1])$ dénote l'ensemble des probabilités boréliennes sur $[0, 1]$.

Théorème 4.3 (Ville , 1938)**.**
Soient $I = J = [0, 1]$, et f une fonction réelle continue sur $I \times J$. L'extension mixte $(\Delta(I), \Delta(J), f)$ possède une valeur et chaque joueur a une stratégie optimale. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, chaque joueur a une stratégie ε-optimale à support fini.

(En particulier toute extension mixte du jeu (I, J, f) a la même valeur.)
Voir l'Exercice 2.3 pour la preuve : on procède par discrétisations de plus en plus fines du carré $[0, 1] \times [0, 1]$, et on extrait une sous-suite faiblement convergente d'une suite de stratégies à support fini.
L'Exercice 3.7 montre que l'hypothèse f continue n'est pas superflue dans l'énoncé du théorème de Ville.

5. Exemples

Exemple 1.

1	-2
-1	3

Ici $v = 1/7$. Le joueur 1 a une unique stratégie optimale : jouer Haut avec probabilité $4/7$, et Bas avec probabilité $3/7$. Le joueur 2 a une unique stratégie optimale : jouer Gauche avec probabilité $5/7$, et Droite avec probabilité $2/7$.

Exemple 2.

1	2
0	x

Quel que soit x, le jeu a une valeur $v = 1$, et chaque joueur a une unique stratégie optimale, qui est pure : Haut pour le joueur 1, Gauche pour le joueur 2.

Exemple 3.

a	b
c	d

Dans le cas général à 2 actions par joueur, soit il existe un couple de stratégies optimales pures (et alors la valeur est un des nombres $\{a, b, c, d\}$) et sinon les stratégies optimales sont complètement mixtes et la valeur vaut :

$$v = \frac{ad - bc}{a + d - b - c}.$$

6. Fictitious play

Soit A une matrice réelle $I \times J$. Le processus suivant, appelé *fictitious play*, a été introduit par Brown (1951). Imaginons des joueurs jouant de façon répétée le jeu matriciel A. A chaque étape, chacun des joueurs calcule la moyenne empirique des actions jouées par son adversaire dans le passé, et joue une meilleure réponse pure face à cette moyenne.

Explicitement, on part de (i_1, j_1) arbitraire dans $I \times J$, et à chaque étape n on considère $x_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} i_t$, vu comme un élément de $\Delta(I)$, et de même pour $y_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} j_t$ dans $\Delta(J)$.

Définition 6.1. *Une suite $(i_n, j_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $I \times J$ est une réalisation d'un processus de fictitious play pour la matrice A si : pour tout $n \geq 1$, i_{n+1} est une meilleure réponse du joueur 1 contre y_n dans A, et j_{n+1} est une meilleure réponse du joueur 2 contre x_n dans A.*

Théorème 6.2 (Robinson, 1951).
Soit $(i_n, j_n)_{n\geq 1}$ une réalisation d'un processus de fictitious play pour la matrice A.

Alors la distance entre (x_n, y_n) et l'ensemble des couples de stratégies optimales de A tend vers 0, quand $n \to \infty$. Explicitement :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in \Delta(I), \forall y \in \Delta(J),$

$$x_n A y \geq \mathtt{val}(A) - \varepsilon \quad \text{et} \quad x A y_n \leq \mathtt{val}(A) + \varepsilon.$$

De plus le paiement moyen sur la trajectoire, soit $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} A_{i_t, j_t}$, converge vers $\mathtt{val}(A)$.

Nous allons illustrer la preuve en passant en temps continu.
Prenons comme variables les fréquences empiriques x_n et y_n, donc la dynamique discrète s'écrit (pour la composante du joueur 1) :

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1}(i_{n+1} + n x_n)$$

et satisfait :

$$x_{n+1} - x_n \in \frac{1}{n+1}[BR^1(y_n) - x_n]$$

où BR^1 dénote la correspondance de meilleure réponse du joueur 1 (voir Chapitre 1, Section 3).
Le système analogue en temps continu est alors :

$$\dot{x}(t) \in \frac{1}{t}\left[BR^1(y(t)) - x(t)\right].$$

C'est une inclusion différentielle qui correspond, avec la condition similaire pour le joueur 2, au processus CFP : *continuous fictitious play.*

Proposition 6.3 (Harris, 1998 ; Hofbauer et Sorin, 2006)**.**
Pour le processus CFP, il y a convergence du saut de dualité vers 0 à la vitesse $1/t$.

Preuve : (Nous supposons l'existence d'une solution au processus CFP). On effectue le changement de temps $z(t) = x(\exp(t))$ qui ramène aux inclusions différentielles :

$$\dot{x}(t) \in \left[BR^1(y(t)) - x(t)\right], \text{ et } \dot{y}(t) \in \left[BR^2(x(t)) - y(t)\right].$$

Ceci correspond à la dynamique de meilleure réponse (Gilboa et Matsui, 1991).
Notons le paiement $F(x, y) = xAy$, et pour (x, y) dans $\Delta(I) \times \Delta(J)$, posons $L(y) = \max_{x' \in \Delta(I)} F(x', y)$ et $M(x) = \min_{y' \in \Delta(J)} F(x, y')$.
Donc le *saut de dualité* associé au couple (x, y) est : $W(x, y) = L(y) - M(x) \geq 0$ et le couple (x, y) est une paire de stratégies optimales dans A si et seulement si $W(x, y) = 0$.
Soit maintenant $(x(t), y(t))_{t \geq 0}$ une solution de CFP.
On note $w(t) = W(x(t), y(t))$ l'évaluation du saut de dualité sur la trajectoire,

$\alpha(t) = x(t) + \dot{x}(t) \in BR^1(y(t))$ et $\beta(t) = y(t) + \dot{y}(t) \in BR^2(x(t))$.
On a $L(y(t)) = F(\alpha(t), y(t))$, d'où

$$\frac{d}{dt}L(y(t)) = \dot{\alpha}(t)D_1F(\alpha(t), y(t)) + \dot{y}(t)D_2F(\alpha(y), y(t)).$$

Le théorème de l'enveloppe (voir par exemple, Mas Colell, Whinston and Green, 1995, p. 964) montre que le premier terme est nul et le second terme vaut $F(\alpha(t), \dot{y}(t))$ (par linéarité de F par rapport à la seconde variable).
On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\dot{w}(t) &= \frac{d}{dt}L(y(t)) - \frac{d}{dt}M(x(t)) \\
&= F(\alpha(t), \dot{y}(t)) - F(\dot{x}(t), \beta(t)) \\
&= F(x(t), \dot{y}(t)) - F(\dot{x}(t), y(t)) \\
&= F(x(t), \beta(t)) - F(\alpha(t), y(t)) \\
&= M(x(t)) - L(y(t)) \\
&= -w(t).
\end{aligned}$$

soit : $w(t) = w(0)e^{-t}$. Il y a convergence de $w(t)$ vers 0 à vitesse exponentielle, et donc convergence vers 0 à vitesse $1/t$ dans le problème initial avant changement de temps.
La convergence vers 0 du saut de dualité implique par continuité la convergence de $(x(t), y(t))$ vers l'ensemble des stratégies optimales. ∎

Preuve du Théorème

Remarquons que par compacité des ensembles de stratégies mixtes, on obtient l'existence de stratégies optimales dans le jeu matriciel (points d'accumulation des trajectoires). On retrouve donc le théorème du minmax, à partir de l'existence d'une solution au processus CFP.
Le résultat est en fait plus fort : l'ensemble des stratégies optimales est un attracteur global pour la dynamique de meilleure réponse, ce qui implique la convergence de la version discrète en temps, donc du processus de fictitious play (Hofbauer and Sorin, 2006).
Considérons enfin la somme des paiements réalisés : $R_n = \sum_{p=1}^n F(i_p, j_p)$. En posant $U_m^i = \sum_{k=1}^m F(i, j_k)$ on obtient

$$R_n = \sum_{p=1}^n (U_p^{i_p} - U_{p-1}^{i_p}) = \sum_{p=1}^n U_p^{i_p} - \sum_{p=1}^{n-1} U_p^{i_{p+1}} = U_n^{i_n} + \sum_{p=1}^{n-1} (U_p^{i_p} - U_p^{i_{p+1}})$$

mais la propriété de fictitious play implique

$$U_p^{i_p} - U_p^{i_{p+1}} \leq 0.$$

Donc

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{R_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \max_i \frac{U_n^i}{n} \leq \mathtt{val}(A)$$

car $\frac{U_n^i}{n} = F(i, y_n) \leq \mathtt{val}(A) + \epsilon$ pour n assez grand puisque y_n tend vers $Y(A)$ par le résultat établi précédemment.

L'inégalité duale implique alors le résultat.

■