APPLICATION
DE L'ALGÈBRE
A LA GÉOMÉTRIE.

DES SURFACES
DU PREMIER ET SECOND DEGRÉ.

§. I.

DES ÉQUATIONS D'UN POINT.

1. On détermine la position d'un système de points en les rapportant à trois plans rectangulaires fixes par rapport à eux ; on abaisse de chacun des points du système, des perpendiculaires sur les plans fixes : la longueur de ces perpendiculaires et le sens dans lequel on doit les compter, déterminent la position relative des points donnés.

On nomme *coordonnées* d'un point les perpendiculaires abaissées d'un point sur les plans fixes rectangulaires ; ces plans se nomment *plans des coordonnées*, et les trois droites suivant lesquelles ils se coupent, *axes des coordonnées* ; l'origine des coordonnées est le sommet de la pyramide triangulaire formée par les trois plans coordonnés.

On désigne ordinairement les coordonnées d'un point d'une surface par les trois lettres x, y, z ; on nomme axe des x, celui qui est parallèle à la coordonnée x; axe des y, celui qui est parallèle à la coordonnée y, et axe des z, celui qui est parallèle à la coordonnée z; on distingue chacun des plans rectangulaires par les deux axes qu'ils contiennent; ainsi le plan des $x\,y$ est celui qui contient l'axe des x et celui des y, le plan des $y\ z$ est celui qui contient l'axe des y et celui des z.

Les trois plans des coordonnées divisent l'espace en huit portions; on indique celle où un point est situé par les signes qui précèdent les valeurs absolues des coordonnées de ce point : les quantités x, y, z, correspondent aux huit points dont les coordonnées sont :

$$+x+y+z,\quad +x+y-z,\quad x-y+z,\quad -x+y+z,$$
$$-x-y+z,\quad x-y-z,\quad -x+y-z,\quad -x-y-z.$$

Les coordonnées d'un point déterminé étant a, b, c, les équations de ce point sont :

$$x=a,\ y=b,\ z=c;$$

chacune des quantités a, b, c pouvant être positive ou négative.

§. II.

DES ÉQUATIONS DE LA LIGNE DROITE.

Les équations d'une ligne droite située dans l'espace expriment la relation qui existe entre les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de cette droite; supposons-la projetée sur le plan des xz et celui des yz, les projections sont d'autres droites qui ont pour équations :

$$x=az+\alpha\ \ldots\ldots\ldots\ y=bz+\beta;$$

éliminant z entre ces deux équations, l'équation résultante :

$$bx-ay=b\alpha-a\beta$$

appartient à la projection sur le plan des xy.

Les équations de ces trois projections, dont deux quelconques comportent la troisième, sont aussi les équations de la ligne droite dont la position dans l'espace dépend des constantes a, b, α, β.

Pour avoir les coordonnées des points où cette droite coupe les trois plans rectangulaires, il faut faire successivement $z=0$, $y=0$, $x=0$, ce qui donne:

$x=\alpha$, $y=\beta$, pour le point où la droite perce le plan des xy;

$z=-\frac{\beta}{b}$, $x=-\frac{a\beta}{b}+\alpha$, pour le point où elle est coupée par le plan des xz;

$z=-\frac{\alpha}{a}$, $y=-\frac{b\alpha}{a}+\beta$, pour le point où elle rencontre le plan des yz.

La droite dont l'équation est $x=az+\alpha$, fait avec l'axe des z un angle dont la tangente est a; elle coupe l'axe des x en un point distant de l'origine des coordonnées d'une quantité égale à α, puisqu'en faisant dans cette équation, $z=0$, on a $x=\alpha$.

Soient les équations de deux droites situées dans un même plan, par exemple, celui des x et z, pour la première droite $x=az+\alpha$;
et pour la seconde . . . . $x=a'z+\alpha'$.

Pour que ces droites soient parallèles il faut qu'on ait $a'=a$, et pour qu'elles soient perpendiculaires, il faut qu'on ait

$$1+aa'=0\text{, ou } a'=-\frac{1}{a}.$$

Les équations de deux droites situées dans l'espace étant:
pour la première $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$
et pour la seconde $x=a'z+\alpha'$, $y=b'z+\beta'$,

l'équation qui exprime que ces droites se rencontrent est:

$$(\alpha'-\alpha)(b'-b)-(\beta'-\beta)(a'-a)=0.$$

Elle résulte de l'élimination de x, y, z entre les quatre équations des deux droites.

Problèmes relatifs a la ligne droite.

I.

Par un point donné dans l'espace, mener une droite parallèle à une autre droite donnée?

Les trois coordonnées rectangulaires étant x, y, z, parmi lesquelles z est supposée verticale, soient :

$$x = az + b \qquad y = a'z + b'$$

les équations des projections de la droite donnée sur les plans verticaux, et qui donnent pour équation de la projection horisontale :

$$ay - a'x = ab' - a'b$$

Soient x', y', z', les coordonnées du point donné, les équations de la droite demandée seront :

$$\begin{aligned} x - x' &= a(z - z') \\ y - y' &= a'(z - z') \\ a'(x - x') &= a(y - y') \end{aligned}$$

dont deux quelconques produisent la troisième.

Problème II.

Trouver les équations d'une droite menée par deux points donnés dans l'espace?

Soient x', y', z', les coordonnées du premier point donné; x'', y'', z'', celles du second; la droite devant passer par le premier point, ses équations seront de la forme :

$$\begin{aligned} x - x' &= a(z - z') \\ y - y' &= b(z - z') \end{aligned}$$

Et parce qu'elle doit passer par le second, ses équations seront aussi :

$$x - x'' = a\,(z - z'')$$
$$y - y'' = b\,(z - z'')$$

Eliminant a et b entre ces quatre équations, on aura pour équations de la droite :

$$x\,(z' - z'') = z\,(x' - x'') + x''z' - x'z''$$
$$y\,(z' - z'') = z\,(y' - y'') + y''z' - y'z''$$

Les coordonnées des deux extrémités d'une ligne droite étant x', y', z' pour la première, x'', y'', z'' pour la seconde, la distance de ces deux points, ou la longueur de la droite qui les joint, est :

$$\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}.$$

§. III.

DE L'ÉQUATION DU PLAN.

Le plan étant donné par ses deux traces sur deux des plans coordonnés, on peut le considérer comme engendré par l'une des traces qui se meut parallélement à elle-même en suivant l'autre trace.

Soient $z = ax + c$, et $z = by + c$, les équations des deux traces données ; la droite mobile génératrice du plan, étant parallèle à elle-même et à la trace donnée sur le plan des xz, ses équations en une position quelconque, seront :

$$z = ax + \gamma \qquad y = \beta.$$

Or, elle doit rencontrer la seconde trace dont les équations sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = by + c \end{array} \right\},$$

donc on aura l'équation de condition :

$$b\beta + c = \gamma;$$

d'où il suit que les équations de la génératrice du plan dans une position quelconque dépendante de β, sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = ax + b\beta + c \\ y = \beta \end{array} \right\}$$

éliminant β entre ces deux équations, on a pour celle du plan

$$z = ax + by + c,$$

dans laquelle a et b sont les tangentes des angles que les traces du plan font avec l'axe des x et l'axe des y; c est la coordonnée z correspondant à l'origine des coordonnées, puisqu'en faisant x et y nuls dans l'équation du plan, on a $z = c$.

Pour introduire dans les calculs la symétrie qui les rend plus faciles et pour faire disparoître les dénominateurs, on pourra mettre l'équation du plan sous la forme :

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

dans laquelle des quatre constantes A, B, C, D, trois seulement sont nécessaires.

Si on définit le plan, *la surface sur laquelle on peut tracer des lignes droites dans tous les sens*, on peut démontrer que la surface ainsi définie a pour équation celle qu'on vient de trouver,

$$z = ax + by + c.$$

En effet soient pris sur ce plan deux points quelconques, qui aient pour coordonnées, l'un x', y', z', l'autre x'', y'', z''; la droite qui joint ces deux points a pour équations (parag. II, problème 2).

$$y\,(z' - z'') - z\,(y' - y'') = z'y'' - z''y' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (e').$$
$$z\,(x' - x'') - x\,(z' - z'') = x'z'' - x''z' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (e'').$$
$$x\,(y' - y'') - y\,(x' - x'') = y'x'' - y''x' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (e''').$$

Il s'agit de prouver que cette droite est toute entière dans le plan : les deux points par lesquels elle passe sont par hypothèse sur le plan; donc on a :

$$z' = ax' + by' + c \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; z'' = ax'' + by'' + c.$$

Ces deux équations donnent pour a et b les valeurs suivantes :

$$a = z'y'' - z''y' - c\,(y'' - y') \;:\; x'y'' - x''y'.$$
$$b = z''x' - z'x'' - c\,(x' - x'') \;:\; x'y'' - x''y'.$$

Le plan qui passe par les deux points a donc pour équation :

$$x(z'y''-z''y')+y(x'z''-x''z')+z(y'x''-y''x') = -c\left\{\begin{matrix} x(y'-y'')-y(x'-x'') \\ +\; x'y''-x''y' \end{matrix}\right\}(e^{\text{IV}})$$

Or il est facile de vérifier que cette équation du plan est satisfaite par les coordonnées d'un point quelconque de la droite ; car d'après l'équation (e'''), le coefficient de c est nul ; multipliant les équations (e'), (e''), (e''') respectivement par x, y, z et les ajoutant ; la somme des premiers membres est nulle, donc la somme des seconds, qui forme le premier membre de l'équation (e^{IV}) est aussi nulle.

En supposant le plan déterminé par ses traces sur les plans des coordonnées, on en a conclu son équation : on peut résoudre le problême inverse et revenir de l'équation du plan aux équations de ses traces ; soit cette équation $z = ax + by + c$; en faisant successivement $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, les équations qu'on obtient

$$\left\{\begin{matrix} z = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{matrix}\right.,\quad \left\{\begin{matrix} y = 0 \\ z = ax + c \end{matrix}\right.,\quad \left\{\begin{matrix} x = 0 \\ z = by + c \end{matrix}\right.,$$

sont celles des traces du plan proposé sur les plans des xy, des xz des yz ; l'équation d'une droite située dans un des plans coordonnés est aussi celle d'un plan passant par cette droite et perpendiculaire au plan des coordonnées qui la contient ; lorsqu'un plan est perpendiculaire à un des axes, par exemple, à celui des x, on a pour son équation :

$$x = \text{constante}.$$

$y = \beta$, $z = \gamma$, sont les équations de deux autres plans perpendiculaires l'un à l'axe des y, l'autre à l'axe des z.

Faisant successivement dans l'équation d'un plan

$$\left\{\begin{matrix} z = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} x = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} y = 0 \\ x = 0 \end{matrix}\right\},$$

les valeurs qu'on obtient pour x, y, z, sont les distances de l'origine des coordonnées aux points de rencontre du plan avec les axes des coordonnées ; soit l'équation du plan, $z = ax + by + c$; ces distances sont : $-\frac{c}{a}$, $-\frac{c}{b}$, c.

Deux plans qui sont parallèles ont des traces parallèles ; donc si le premier plan a pour équation $z = ax + by + c$,
et le second . . . . $z = a'x + b'y + c'$,
la condition du parallélisme est exprimée par les équations suivantes :

$$a = a', \qquad b = b'.$$

Problème relatif au plan.

Faire passer un plan par trois points donnés dans l'espace ?

Les coordonnées des trois points donnés étant :

pour le premier x', y', z' ;
pour le second x'', y'', z'' ;
pour le troisième x''', y''', z''' ;

et l'équation du plan demandé, étant supposée :

$$Lx + My + Nz + K = 0 ;$$

on aura évidemment les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} Lx' + My' + Nz' + K &= 0 \\ Lx'' + My'' + Nz'' + K &= 0 \\ Lx''' + My''' + Nz''' + K &= 0 \end{aligned}$$

desquelles on tirera les valeurs des trois quantités $\frac{L}{K}$, $\frac{M}{K}$, $\frac{N}{K}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} L &= y'(z'' - z''') + y''(z''' - z') + y'''(z' - z'') \\ M &= z'(x'' - x''') + z''(x''' - x') + z'''(x' - x'') \\ N &= x'(y'' - y''') + x''(y''' - y') + x'''(y' - y'') \\ K &= x'(y''z''' - y'''z'') + x''(y'''z' - y'z''') + x'''(y'z'' - y''z') \end{aligned}$$

Monge a remarqué que le triangle formé par les droites qui joignent les points donnés deux à deux, étant projeté sur les trois plans des zy, des xz, des yx, les aires de ces projections avoient pour expression

$$\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}M, \frac{1}{2}N,$$

$\frac{K}{6}$ étant la solidité de la pyramide qui a pour base le triangle projeté, et pour sommet l'origine des coordonnées.

---

§. IV.

DES PROBLEMES RELATIFS A LA LIGNE DROITE ET AU PLAN.

PROBLÈME I.

Etant données les coordonnées d'un point, et les équations d'une droite, trouver l'équation du plan qui passe par la droite et le point ?

Soient x', y', z' les coordonnées du point,

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \ldots\ldots \\ y = bz + \beta \ldots\ldots \\ b(x - \alpha) = a(y - \beta) \end{array}\right\} \text{les équations de la droite.}$$

le plan dont on demande l'équation passe par le point donné et de plus par le point où la droite donnée coupe le plan des xy, point dont les coordonnées sont :

$$z = 0, \ldots x = \alpha, \ldots y = \beta.$$

Si on suppose que ce plan ait pour équation :

$$z = Lx + My + N,$$

on aura :

$$(1) \ldots z' = Lx' + My' + N,$$

$$(2) \ldots 0 = L\alpha + M\beta + N.$$

Ramenant la droite et le plan parallélement à eux-mêmes jusqu'à l'origine des coordonnées, leurs équations deviendront, pour la droite :

$$x = az, \ldots y = bz, \ldots bx = ay,$$

et pour le plan : $z = Lx + My$; or dans cette nouvelle position, la droite est encore contenue dans le plan; donc on aura :

$$(3) \ldots 1 = La + Mb.$$

Les équations (1), (2), (3) donneront les valeurs de L, M, N, et l'équation $z = Lx + My + N$ deviendra :

$$(x-x')(y'-bz'-\beta)-(y-y')(x'-az'-\alpha)+(z-z')\{b(x'-\alpha)-a(y'-\beta)\} = 0.$$

PROBLÈME II.

Etant données les équations d'une droite et celle d'un plan, trouver 1°. les conditions qui doivent avoir lieu pour que le plan et la droite soient rectangulaires ; 2°. les coordonnées du point où ils se rencontrent ; 3°. la distance de ce point à un autre point donné ou sur la droite ou sur le plan?

Lorsqu'un plan est perpendiculaire à une droite, les traces du plan sur les plans coordonnés et les projections de la droite sur ces mêmes plans sont perpendiculaires entre elles ; soient
$x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$ les équations d'une droite,
$z = Ax + By + C$ l'équation d'un plan, les équations des traces de ce plan sur les plans rectangulaires des xz et des xy sont :

$$z = Ax + C, \ldots z = By + C;$$

or le plan étant perpendiculaire à la droite, on a (paragraphe II) $A = -a$, $B = -b$, donc l'équation d'un plan perpendiculaire à la droite est : $ax + by + z = C$; combinant cette équation avec celles de la droite $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$, on en déduira les valeurs de x, y, z coordonnées du point de rencontre de la droite et du plan.

Si on donne un plan dont l'équation soit $ax + by + z = C$, et si on demande la perpendiculaire à ce plan, menée par un point dont les coordonnées soient x', y', z', les équations de cette perpendiculaire seront : $x - x' = a(z - z')$, . . . $y - y' = b(z - z')$,

l'équation du plan pouvant être mise sous la forme suivante :

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = C - ax' - by' - z'.$$

Soient X, Y, Z les coordonnées du point de rencontre de ce plan et de la perpendiculaire, on aura :

$$Z = z' + \frac{C - ax' - by' - z'}{1 + a^2 + b^2},$$

$$Y = y' + \frac{b(C - ax' - by' - z')}{1 + a^2 + b^2},$$

$$X = x' + \frac{a(C - ax' - by' - z')}{1 + a^2 + b^2}.$$

La longueur de la perpendiculaire comprise entre le point X, Y, Z et le point x', y', z' est (parag. II, problême II) :

$$\sqrt{(X - x')^2 + (Y - y')^2 + (Z - z')^2},$$

ou . . $\dfrac{C - ax' - by' - z'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$;

d'où il suit que la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur le plan de l'équation $ax + by + z = C$,

a pour expression $\dfrac{C}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$;

Ayant les équations d'une droite $\left\{\begin{matrix} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{matrix}\right\}$, l'équation du plan perpendiculaire à cette droite, mené par le point x', y', z' est :

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0.$$

Pour trouver les coordonnées du point derencontre de la droite et du plan, on mettra les équations de la droite sous la forme suivante:

$$x - x' = az + \alpha - x',$$
$$y - y' = bz + \beta - y';$$

et nommant X', Y', Z' les coordonnées du point de rencontre, on aura:

$$Z' = \;.\;.\; \frac{a(x' - \alpha) + b(y' - \beta) + z'}{1 + a^2 + b^2},$$

$$Y' = \beta + \frac{b(a(x' - \alpha) + b(y' - \beta) + z')}{1 + a^2 + b^2},$$

$$X' = \alpha + \frac{a(a(x' - \alpha) + b(y' - \beta) + z')}{1 + a^2 + b^2}.$$

Substituant dans le radical $\sqrt{(X' - x')^2 + (Y - y')^2 + (Z - z')^2}$ pour X', Y', Z', leurs valeurs, on obtiendra l'expression de la perpendiculaire comprise entre le point donné x', y', z' et le point de la droite, dont les coordonnées sont X', Y', Z'; en supposant que la droite passe par l'origine des coordonnées, ses équations deviennent:

$$x = az \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; y = bz.,$$

et le radical $\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}$ exprime la longueur de la droite comprise entre l'origine des coordonnées et le pied de la perpendiculaire abaissée du point x', y', z' sur cette droite; or dans cette hypothèse $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $Z' = \dfrac{ax' + by' + z'}{1 + a^2 + b^2}$ $Y' = bZ'$ $X' = aZ'$,

$$\text{donc } \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} = \frac{ax' + by' + z'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

On fera usage de cette expression pour trouver l'angle que deux droites font entre elles.

Quant aux équations de la droite menée par le point x', y', z' perpendiculairement à la droite $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$, elles sont déja trouvées; l'une $a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0$ est celle du plan qui passe par le point x', y', z' et qui est perpendiculaire à la droite ; l'autre est celle d'un plan qui passe par le point et la droite donnés, et qui, par conséquent, contient la perpendiculaire à celle-ci, cette équation est (parag IV, probl. I) :

$$(x-x')(y'-bz'-\beta)-(y-y')(x'-az'-\alpha)+(z-z')\{b(x'-\alpha)-a(y'-\beta)\}=0.$$

Problème III.

Les équations de deux droites étant données, si elles se coupent, trouver l'angle qu'elles forment entre elles ; ou si elles ne se coupent pas, trouver l'angle que forment leurs projections sur un plan qui leur est parallèle ?

Soient les équations des deux droites données,

Pour la première $\begin{cases} x = az + \alpha, \\ y = bz + \beta ; \end{cases}$

Pour la seconde $\begin{cases} x = a'z + \alpha', \\ y = b'z + \beta'. \end{cases}$

L'angle de ces deux droites, si elles se coupent, est égal à l'angle formé par leurs parallèles, menées par l'origine des coordonnées ; les équations de ces parallèles étant,

Pour la première, $x = az$, $y = bz$,
Pour la seconde, $x = a'z$, $y = b'z$;

qu'on prenne sur la seconde parallèle un point dont les coordonnées soient x', y', z' et qu'on abaisse de ce point une perpendiculaire sur la première parallèle ; dans le triangle rectangle formé par cette perpendiculaire et les droites menées de l'origine des coordonnées aux deux extrémités de la perpendiculaire, on connoît la longueur des deux côtés qui comprennent l'angle cherché ; l'un de ces côtés a pour expression

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} ;$$

l'autre a été trouvé (probl. précédent) égal à :

$$\frac{ax' + by' + z'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}};$$

donc le co-sinus de l'angle cherché égale

$$\frac{ax' + by' + z'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}};$$

mais on a : $x' = a'z' \; . \; . \; . \; y' = b'z'$;

donc le co-sinus de l'angle formé par les deux droites données est :

$$\frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \times \sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}.$$

On voit par cette expression, que lorsque deux droites ont pour équations :

La première $\quad x = az \; . \; . \; . \; y = bz$,
La seconde $\quad x = a'z \; . \; . \; . \; y = b'z$,

si elles sont perpendiculaires entre elles, on a l'équation de condition suivante :

$$1 + aa' + bb' = 0,$$

équation à laquelle on peut arriver directement de la manière suivante : le plan perpendiculaire à la première droite, mené par l'origine des coordonnées, a pour équation :

$$ax + by + z = 0.$$

Or, la perpendiculaire à cette première droite, doit être contenue dans le plan qui lui est perpendiculaire; donc les équations de la perpendiculaire $x = a'z, y = b'z$, et l'équation du plan ont lieu en même tems ; donc on a :

$$1 + aa' + bb' = 0.$$

Connoissant l'angle de deux droites, on peut en conclure l'angle de deux plans. En effet, soient

$ax + by + z = C, \quad a'x + b'y + z = C'$ les équations de deux plans,

ces plans font entre eux le même angle que les droites qui leur sont perpendiculaires et qui partent de l'origine des coordonnées; donc le co-sinus de l'angle formé par les deux plans donnés, est:

$$\frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \times \sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}.$$

Si on demande l'angle d'une droite et d'un plan, on menera par l'origine une parallèle à la droite et une perpendiculaire au plan; l'angle de ces deux droites sera le complément de l'angle cherché; et par conséquent le co-sinus de l'angle des deux droites sera le sinus de l'angle demandé.

La droite dont les équations sont : $x = az$, $y = bz$, fait avec les axes des x, des y, des z, des angles dont les co-sinus sont :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

ou $$\frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Les mêmes expressions sont les valeurs des co-sinus des angles qu'un plan qui est perpendiculaire à la droite, et dont l'équation est : $ax + by + z = 0$, fait avec les plans coordonnés des zy, des xz et des yx; si l'équation du plan est de la forme :

$$Lx + My + Nz + K = 0,$$

les co-sinus des angles qu'il fait avec les plans coordonnés sont :

$$\frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

et l'expression trouvée (parag. IV, problème II) pour la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur un plan, devient:

$$\frac{K}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}.$$

On a remarqué (parag. III, problème relatif au plan) qu'en nommant T le triangle formé par les droites qui, dans ce même problème, joignent deux à deux les points donnés, et t, t', t'' ses trois projections sur les trois plans des zy, des xz, des yx, on avoit:

$t=\frac{1}{2}L$, $t'=\frac{1}{2}M$, $t''=\frac{1}{2}N$, $\frac{K}{6}$ étant la solidité de la pyramide qui a pour base le triangle T, et pour sommet l'origine des coordonnées; or la solidité de cette pyramide est, comme on sait, le produit de sa base T par le tiers de sa hauteur $\frac{K}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$;

donc $\frac{K}{6}=T\times\frac{K}{3\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$, et mettant pour L, M, N leurs valeurs $2t$, $2t'$, $2t''$,

$$T^2=t^2+t'^2+t''^2,$$

nommant S l'aire d'un autre triangle dont les projections sont s, s', s'', et qui est situé dans le même plan que le triangle T, on aura de même:

$$S^2=s^2+s'^2+s''^2.$$

Puisque $T=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{L^2+M^2+N^2}$, $\frac{T}{t}=\frac{1}{\left(\frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}\right)}$;

par la même raison $\frac{T}{t'}=\frac{1}{\left(\frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}\right)}$, $\frac{T}{t''}=\frac{1}{\left(\frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}\right)}$;

ce qui signifie qu'*un triangle quelconque est à sa projection sur un* *des plans coordonnés, dans le rappôrt du rayon au co-sinus de l'angle que fait le plan du triangle avec le plan sur lequel on le projette;* mais le triangle S étant dans le même plan que le triangle T,

$$\text{on a } \frac{t}{T}=\frac{s}{S},\ \frac{t'}{T}=\frac{s'}{S},\ \frac{t''}{T}=\frac{s''}{S}.$$

Donc si on met l'équation $T^2=t^2+t'^2+t''^2$ sous cette forme :

$$T=\frac{t}{T}\cdot t+\frac{t'}{T}\cdot t'+\frac{t''}{T}\cdot t''\text{, elle deviendra :}$$

$$TS=ts+t's'+t''s'' :$$

$$\text{or } (T+S)^2=T^2+2TS+S^2=t^2+t'^2+t''^2+2ts+2t's'+2t''s''+s^2+s'^2+s''^2.$$

$$\text{Donc } (T+S)^2=(t+s)^2+(t'+s')^2+(t''+s'')^2.$$

En prenant dans le même plan, que les deux premiers triangles T et S, un troisième triangle R dont les projections sur les trois plans rectangulaires, seroient r, r', r'', on prouveroit de même qu'on auroit :

$$(R+S+T)^2=(r+s+t)^2+(r'+s'+t')^2+(r''+s''+t'')^2;$$

donc, *une figure plane quelconque étant projetée sur trois plans rectangulaires, le carré de l'aire de cette figure est égal à la somme des carrés des aires de ses trois projections.*

PROBLÈME IV.

Deux droites étant données: 1°. trouver les équations de la droite qui est en même tems perpendiculaire à l'une et à l'autre et sur laquelle se mesure leur plus courte distance; 2°. trouver l'expression de cette distance?

La direction d'un plan parallèle aux deux droites connues de position, est déterminée; ce plan étant mené par un point quelconque de l'espace, on peut, par chacune des droites données, concevoir un plan qui lui soit perpendiculaire ; or, l'intersection de ces deux nouveaux plans est évidemment la droite demandée, donc les équations de ces plans seront celles de la perpendiculaire aux deux droites données.

Soient $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$, les équations de la première droite donnée, elle rencontre le plan des xy en un point (P) dont les coordonnées sont : $z = 0$, $y = \beta$, $x = \alpha$.

La seconde droite donnée ayant pour équations :

$$x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \beta' :$$

elle rencontre le plan des xy en un point (P') dont les coordonnées sont : $z = 0$, $y = \beta'$, $x = \alpha'$.

Les équations des plans menés par les points (P) et (P') parallèlement aux deux droites données, sont de la forme :

$$(e) \qquad A(x - \alpha) + B(y - \beta) + z = 0,$$
$$(e') \qquad A(x - \alpha') + B(y - \beta') + z = 0,$$

A et B étant deux constantes dont les valeurs sont déterminées par les équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} 1 + Aa + Bb = 0 \\ 1 + Aa' + Bb' = 0 \end{array}\right\} \text{ d'où l'on déduit}$$

$$(1) \qquad A = b - b' : ab' - a'b,$$
$$(2) \qquad B = a' - a : ab' - a'b.$$

Les perpendiculaires à ces plans parallèles, menées par les points (P) et (P'), ont pour équations :

la première, $x = Az + \alpha \; . \; . \; . \; . \; y = Bz + \beta$;
la seconde, $x = Az + \alpha' \; . \; . \; . \; . \; y = Bz + \beta'$.

Le plan mené par la première de ces perpendiculaires et la première droite donnée, a pour équation :

$$(E) \qquad L(x - \alpha) + M(y - \beta) + z = 0 ;$$

L et M étant données par les deux équations :

$$(3) \qquad 1 + LA + MB = 0\,;$$
$$(4) \qquad 1 + La + Mb = 0.$$

Le plan mené par la seconde des perpendiculaires et la seconde droite donnée, a pour équation :

$$(E') \qquad L'(x - \alpha') + M'(y - \beta') + z = 0\,;$$

L' et M' étant déterminés par les deux équations :

$$1 + L'A + MB = 0,$$
$$1 + L'a' + M'b' = 0.$$

Or, chacun de ces deux derniers plans contient la droite demandée ; donc leurs équations sont aussi les équations de cette droite.

Les équations (1) et (2) donnent les valeurs de A et B ; en les combinant avec les équations (3) et (4), on en déduira les valeurs suivantes pour L, M, L', M'.

$$\begin{aligned}
L &= a - a' + b\,(ab' - a'b) : a\,(a' - a) + b\,(b' - b)\\
M &= b - b' - a\,(ab' - a'b) : \qquad id.\\
L' &= a - a' + b'\,(ab' - a'b) : a'\,(a' - a) + b'\,(b' - b)\\
M' &= b - b' - a'\,(ab' - a'b) : \qquad id.
\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans les équations (E) et (E'), on a pour les équations de la droite perpendiculaire aux deux droites données :

$$(x-\alpha)\{a-a'+b(ab'-a'b)\} + (y-\beta)\{b-b'-a(ab'-a'b)\} + z'\{a(a'-a)+b(b'-b)\} = 0.$$

$$(x-\alpha')\{a-a'+b'(ab'-a'b)\} + (y-\beta')\{b-b'-a'(ab'-a'b)\} + z\{a'(a'-a)+b'(b'-b\} = 0.$$

La seconde de ces équations auroit pu se déduire de la première, en y changeant

a, b, α, β en a', b', α', β', et a', b' en a et b.

Si de l'origine des coordonnées on abaisse une perpendiculaire sur chacun des plans (e) et (e') parallèles aux deux droites données, ces perpendiculaires ayant même direction, se confondront, et leur différence qui sera la distance des deux plans, sera égale à la plus courte distance des droites données, mesurée sur la perpendiculaire à ces droites; or (d'après le probl. III, parag. IV), les grandeurs de ces perpendiculaires, sont:

pour la première, $\frac{A\alpha+B\beta}{\sqrt{1+A^2+B^2}}$; pour la seconde, $\frac{A\alpha'+B\beta'}{\sqrt{1+A^2+B^2}}$:

donc leur différence sera:

$$\frac{A(\alpha'-\alpha)+B(\beta'-\beta)}{\sqrt{1+A^2+B^2}},$$

et mettant pour A et B leurs valeurs:

$$\frac{(\alpha'-\alpha)(b'-b)+(\beta'-\beta)(a'-a)}{\sqrt{(a'-a)^2+(b-b')^2+(a'b-ab')^2}}.$$

Lorsque les droites données se rencontrent, cette distance devient nulle et on a:

$$(\alpha'-\alpha)(b'-b)-(\beta'-\beta)(a'-a)=0,$$

équation trouvée (parag. II) et qui exprime que deux droites se coupent.

§. V.

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

1. *Etant données les coordonnées d'un point rapporté à trois plans rectangulaires, trouver les coordonnées de ce point par rapport à trois nouveaux plans?*

Ces trois nouveaux plans étant connus de position par rapport aux trois plans primitifs, leurs équations sont données. Soient ces équations,

Pour le premier. . . . $Ax+By+Cz+D=0$;
Pour le second . . . . $A'x+B'y+C'z+D'=0$;
Pour le troisième . . . $A''x+B''y+C''z+D''=0$.

Ces trois plans se coupent deux à deux, suivant trois droites, qui sont les nouveaux axes. Les nouvelles coordonnées du point se mesurent sur les droites menées par ce point, parallélement aux nouveaux axes. Une quelconque des coordonnées a pour longueur la partie de l'une de ces droites comprise entre le point et le plan des coordonnées auquel cette droite n'est pas parallèle.

Soient x, y, z les coordonnées du point par rapport aux plans primitifs, et u, v, w les coordonnées de ce point rapporté aux trois nouveaux plans ; faisant pour abréger,

$$L^2 = \frac{[A(C'B''-C''B')+B(A'C''-A''C')+C(B'A''-B''A')]^2}{(C'B''-C''B')^2+(A'C''-A''C')^2+(B'A''-B''A')^2},$$

$$L'^2 = \frac{[A'(CB''-C''B)+B'(AC''-A''C)+C'(BA''-B''A)]^2}{(CB''-C''B)^2+(AC''-A''C)^2+(BA''-B''A)^2},$$

$$L''^2 = \frac{[A''(CB'-C'B)+B''(AC'-A'C)+C''(BA'-B'A)]^2}{(CB'-C'B)^2+(AC'-A'C)^2+(BA'-B'A)^2},$$

les valeurs des nouvelles coordonnées sont :

$$u = Ax + By + Cz + D : L.$$
$$v = A'x + B'y + C'z + D' : L'.$$
$$w = A''x + B''y + C''z + D'' : L''.$$

2. Si on suppose que les trois nouveaux plans sont perpendiculaires entre eux, on a les trois équations

$$AA'+BB'+CC'=0; \quad AA''+BB''+CC''=0; \quad A'A''+B'B''+C'C''=0.$$

Multipliant la première de ces trois équations par B'', la seconde par B', et retranchant, on a :

$$C(C'B''-C''B')-A(B'A''-B''A')=0.$$

Multipliant la première par A'', la seconde par A', et retranchant, on a :

$$B(B'A''-B''A')-C(A'C''-A''C')=0.$$

Multipliant la première par C'', la seconde par C', et retranchant, on a :

$$A(A'C''-A''C')-B(C'B''-C''B')=0.$$

Au moyen de ces trois équations, on réduit l'expression de L à

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Par un calcul semblable, on trouve pour les valeurs de L' et L'' :

$$L'=\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2},\ L''=\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2};$$

ce qui donne pour les nouvelles coordonnées u, v, w :

$$u=Ax+By+Cz+D:\sqrt{A^2+B^2+C^2},$$
$$v=A'x+B'y+C'z+D':\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2},$$
$$w=A''x+B''y+C''z+D'':\sqrt{A''^2+B''^2+C''^2}.$$

On auroit pu obtenir directement ces valeurs de u, v, w, puisqu'elles sont celles des perpendiculaires abaissées d'un point x, y. z, sur trois plans, dont on a les équations (parag. IV, probl. II).

3. Lorsqu'on passe d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre système de coordonnées aussi rectangulaires et de même origine que le premier, les nouveaux axes peuvent être donnés par les équations de trois nouveaux plans rectangulaires. Des six constantes qui entrent dans les équations de ces plans, trois sont déterminées par la condition que les plans sont perpendiculaires entre eux, et leurs valeurs doivent être calculées d'après celle qu'on assigne aux trois autres; mais on évite ce calcul en déterminant la position des nouveaux axes, par trois angles quelconques ψ, θ, φ. Cette transformation étant usitée dans l'application de l'analyse à la mécanique, nous allons la faire connoître telle que M. *Laplace* l'a donnée dans sa *Mécanique céleste*.

Désignons les plans primitifs par deux des trois coordonnées x, y, z que chacun d'eux contient, et les nouveaux plans par deux des coordonnées x''', y''', z'''.

Soit θ l'angle formé par les deux plans des xy et des $x'''y'''$;

ψ l'angle que l'axe des x fait avec la trace du plan des $x'''y'''$ sur celui des xy;

φ l'angle de cette trace avec l'axe des x'''.

Il s'agit de trouver les valeurs de x''', y''', z''' en fonction de x, y, z, et des trois angles ψ, θ, φ.

Soient x', y', z' les coordonnées d'un point rapporté aux axes rectangulaires, comptés sur les trois droites suivantes : 1°. la trace du plan des $x'''y'''$ sur celui des xy ; 2°. la projection de l'axe des z''' sur le plan des xy ; 3°. l'axe des z ; on aura :

$$\begin{aligned} x &= x' \cos.\ \psi + y' \sin.\ \psi. \\ y &= y' \cos.\ \psi - x' \sin.\ \psi. \\ z &= z'. \end{aligned}$$

Soient x'', y'', z'' les coordonnées d'un point rapporté aux axes rectangulaires, comptés sur les trois droites suivantes : 1°. la trace du plan des $x'''y'''$, sur celui des xy ; 2°. la perpendiculaire à cette trace sur le plan des $x'''y'''$; 3°. l'axe des z''' ; on aura

$$\begin{aligned} x' &= x'', \\ y' &= y'' \cos.\ \theta + z'' \sin.\ \theta, \\ z' &= z'' \cos.\ \theta - y'' \sin.\ \theta. \end{aligned}$$

x''', y''', z''' étant les coordonnées du point, rapportées aux trois axes des x''', des y''', des z''', on aura

$$\begin{aligned} x'' &= x''' \cos.\ \varphi - y''' \sin.\ \varphi, \\ y'' &= y''' \cos.\ \varphi + x''' \sin.\ \varphi, \\ z'' &= z'''. \end{aligned}$$

De là il est facile de conclure,

$$x = \left\{ \begin{array}{l} \quad x''' (\cos.\ \theta \sin.\ \psi \sin.\ \varphi + \cos.\ \psi \cos.\ \varphi) \\ + y''' (\cos.\ \theta \sin.\ \psi \cos.\ \varphi - \cos.\ \psi \sin.\ \varphi) \\ + z''' \sin.\ \theta \sin.\ \psi. \end{array} \right.$$

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \quad x''' (\cos.\ \theta \cos.\ \psi \sin.\ \varphi - \sin.\ \psi \cos.\ \varphi) \\ + y''' (\cos.\ \theta \cos.\ \psi \cos.\ \varphi + \sin.\ \psi \sin.\ \varphi) \\ + z''' \sin.\ \theta \cos.\ \psi. \end{array} \right.$$

$$z = z''' \cos.\ \theta - y''' \sin.\ \theta \cos.\ \varphi - x''' \sin.\ \theta \sin.\ \varphi.$$

En multipliant ces valeurs de x, y, z respectivement par les coefficiens de x''' dans ces valeurs, on aura, en les ajoutant :

$$x''' = \begin{cases} x\,(\cos.\,\theta \sin.\,\psi \sin.\,\varphi + \cos.\,\psi \cos.\,\varphi) \\ + y\,(\cos.\,\theta \cos.\,\psi \sin.\,\varphi - \sin.\,\psi \cos.\,\varphi) \\ - z \sin.\,\theta \sin.\,\varphi. \end{cases}$$

En multipliant pareillement les valeurs de x, y, z respectivement par les coefficiens de y''' dans ces valeurs, et ensuite par les coefficiens de z''', on aura :

$$y''' = \begin{cases} x\,(\cos.\,\theta \sin.\,\psi \cos.\,\varphi - \cos.\,\psi \sin.\,\varphi) \\ + y\,(\cos.\,\theta \cos.\,\psi \cos.\,\varphi + \sin.\,\psi \sin.\,\varphi) \\ - z \sin.\,\theta \cos.\,\varphi. \end{cases}$$

$$z''' = x \sin.\,\theta \sin.\,\psi + y \sin.\,\theta \cos.\,\psi + z \cos.\,\theta.$$

4. On fait encore usage d'une autre transformation : un point étant rapporté à trois plans rectangulaires par les coordonnées x, y, z, on mène de ce point à l'origine des coordonnées, une droite, on donne la longueur de cette droite et les angles qu'elle fait avec les axes rectangulaires ; et il est évident qu'en nommant r la longueur de la droite, α, β, γ les angles qu'elle fait avec les axes, on a :

$$(E) \quad x = r \cos.\,\alpha,\ y = r \cos.\,\beta,\ z = r \cos.\,\gamma.$$

Des trois angles α, β, γ, deux seulement sont nécessaires, à cause de l'équation $\cos.\,\alpha^2 + \cos.\,\beta^2 + \cos.\,\gamma^2 = 1$.

Lorsqu'on détermine la position d'un point par la droite r et deux des angles α, β, γ, on nomme la droite r le *rayon vecteur* du point, et l'origine des coordonnées devient un pôle, d'où partent les rayons vecteurs des différens points de l'espace.

5. Dans quelques cas, on projette le rayon vecteur sur l'un des plans des coordonnées, par exemple, sur le plan des xy; on donne l'angle du rayon avec sa projection, et l'angle de la projection avec l'axe des x ou l'axe des y; et nommant φ le premier angle, et ψ le second, on a :

$$(E') \quad z = r \sin.\,\varphi,\ y = r \sin.\,\varphi \sin.\,\psi,\ x = r \sin.\,\varphi \cos.\,\psi.$$

Lorsque le point rapporté à trois plans rectangulaires par les coordonnées x, y, z, appartient à une surface, on a entre ces trois coordonnées une équation $F(x, y, z,) = 0$; si on change de coordonnées, et que les nouvelles soient u, v, w, on substituera dans $F=0$, pour x, y, z, leurs valeurs en u, v, w, et l'équation qui en résultera, appartiendra à la surface rapportée aux nouveaux plans.

Si on substitue dans $F=0$, pour x, y, z, les valeurs données par les équations (E) ou (E'), elle deviendra l'équation polaire de la surface.

Lorsqu'une courbe sera donnée par deux équations $f(x, y, z)=0$, $\mathrm{f}(x, y, z)=0$, en faisant dans ces équations les substitutions indiquées pour l'équation $F(x, y, z)=0$, on obtiendra l'équation de la courbe rapportée, ou à de nouveaux plans par des coordonnées u, v, w, ou à un pôle par des rayons vecteurs et des angles.

§. VI.

DU CENTRE ET DES PLANS DIAMÉTRAUX D'UNE SURFACE.

1. On appelle *centre* d'une surface, un point dans lequel toutes les cordes qui passent par ce point sont divisées en deux parties égales, et *plan diamétral*, celui qui divise un système de cordes parallèles entre elles, chacune en deux parties égales. Il suit de ces définitions, que lorsqu'une surface a un centre, tous les plans diamétraux qu'elle peut avoir passent nécessairement par ce point.

Etant donnée l'équation algébrique d'une surface, reconnoître 1°. si elle a un centre; 2° si elle a des plans diamétraux?

Si la surface proposée a un centre, concevons qu'elle soit rapportée à trois plans par des coordonnées dont l'origine soit le centre même; une droite quelconque menée par l'origine des coordonnées sera un diamètre et coupera la surface en deux points; les coordonnées du premier étant x, y, z, celles du second seront $-x$, $-y$, $-z$. Donc l'équation de la surface devra avoir lieu, en prenant x, y, z positives ou négatives : pour qu'elle satisfasse à cette condition, il faut que la somme des exposans des trois coordonnées dans chaque terme, soit de même parité que le nombre qui exprime le degré de l'équation proposée. Ainsi $f(r, s, t)=0$ étant l'équation algébrique

4

d'une surface rapportée à trois plans quelconques, on fera dans cette équation :

$$r = x + a, \quad s = y + b, \quad t = z + c.$$

On aura en x, y, z l'équation de la surface rapportée à trois nouveaux plans parallèles aux premiers, et passant par le point qu'on suppose être le centre de la surface. Si par des valeurs particulières assignées aux trois constantes a, b, c, on peut faire disparoître tous les termes dans lesquels la somme des exposans des trois coordonnées sera d'une autre parité que le degré de l'équation $f(r, s, t) = 0$, la surface proposée aura un centre.

2. *Des plans diamétraux.* Lorsque dans tous les termes de l'équation d'une surface, l'exposant d'une des coordonnées est un nombre pair, le plan des deux autres coordonnées divise la surface en deux parties égales et semblables. L'équation étant en x, y, z, si dans tous ses termes, l'exposant de z est un nombre pair, le plan des x et y sera un plan diamétral ; car elle donnera pour z une valeur α, fonction de x, y et constantes, et $z = -\alpha$, satisfera encore à cette équation ; donc aux mêmes x et y correspondront deux valeurs de z, qui ne différeront que par le signe du radical ; donc le plan des x et y sera un plan diamétral : par la même raison, les deux autres plans des coordonnées seront diamétraux, lorsque, dans chaque terme, les exposans de x et y seront des nombres pairs.

Soit $f(r, s, t) = 0$ l'équation algébrique de la surface proposée ; par la méthode pour la transformation des coordonnées, on rapportera cette surface à trois nouveaux plans :

$$Ar + Bs + Ct + D = 0, \quad A'r + B's + C't + D' = 0, \quad A''r + B''s + C''t + D'' = 0,$$

équations dans lesquelles entrent neuf constantes.

La surface proposée a des plans diamétraux, lorsque, par des valeurs particulières et réelles assignées aux neuf constantes, on peut faire disparoître les termes où les exposans des coordonnées sont des nombres impairs. Les racines réelles des équations qu'on obtient en égalant à zéro les coefficiens de ces termes, déterminent le nombre des plans diamétraux.

En traitant des surfaces du second degré, on fera usage de ce qui précède, pour déterminer le centre et les plans diamétraux de ces surfaces.

§. VII.

DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

1. Soit l'équation générale du second degré entre trois variables x, y, z,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz + gx + hy + kz + 1 = 0.$$

On demande si la surface à laquelle cette équation appartient a un centre.

Faisant $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$, $z = z' + \gamma$, α, β, γ étant supposées les coordonnées du centre, l'équation générale devient :

$$a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + d'x'y' + e'y'z + f'x'z' + g'x' + h'y' + k'z' + 1 = 0.$$

Celle-ci étant encore du second degré, il n'y a que trois termes dans lesquels la somme des exposans des coordonnées soit impaire. On fait disparoître ces termes en égalant leurs coefficiens à zéro, ce qui donne :

$$g' = 0, \ h' = 0, \ k' = 0;$$

ou en effectuant la substitution et ne prenant que les termes multipliés par x', y', z' :

$$2a\alpha + d\beta + f\gamma + g = 0, \ 2b\beta + d\alpha + e\gamma + h = 0, \ 2c\gamma + e\beta + f\alpha + k = 0.$$

Ces équations étant linéaires en α, β, γ, on en déduit, pour ces quantités, des valeurs réelles ; donc les surfaces du second degré ont un centre : établissant une certaine relation entre les constantes a, b, c, d, etc., ce centre peut être placé à une distance infinie de l'origine des coordonnées. En effet, les valeurs de α, β, γ sont des fractions dont le dénominateur commun est : $ae^2 + bf^2 + cd^2 - 4abc - def$; donc, lorsqu'on aura entre les constantes de l'équation générale de la surface du second degré, l'équation suivante :

$$ae^2 + bf^2 + cd^2 = 4abc + def:$$

les coordonnées du centre de cette surface seront infinies.

2. La surface du second degré a-t-elle des plans diamétraux ?

En transformant les coordonnées, on peut rapporter la surface à trois nouveaux plans contenant neuf constantes; prenant u, v, w pour les nouvelles coordonnées, l'équation générale deviendra :

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Duv + Evw + Fuw + Gu + Hv + Kw + 1 = 0.$$

Faisant disparoître les termes où l'exposant de l'une quelconque des coordonnées est impair, on aura les six équations suivantes :

$$D = 0, E = 0, F = 0, G = 0, H = 0, K = 0 \ldots \ldots (A).$$

Des neuf constantes, six seulement seront déterminées par ces équations; d'où il suit que trois plans peuvent couper la surface du second degré en quatre parties égales et symétriques d'une infinité de manières : elle a donc une infinité de plans diamétraux conjugués, propriété analogue à celle des courbes du second degré, qui ont une infinité de diamètres conjugués; de même que dans ces courbes il y a deux diamètres conjugués perpendiculaires entre eux, qu'on nomme *axes*, la surface du second degré a trois plans diamétraux conjugués perpendiculaires entre eux, qui se coupent suivant des droites sur lesquelles on compte les axes de cette surface.

Les trois équations qui expriment que les nouveaux plans des coordonnées sont rectangulaires, jointes aux six équations (A), déterminent neuf constantes qui entrent dans les équations de ces plans.

On n'a pas encore démontré rigoureusement que ces neuf équations donneront toujours pour les constantes des valeurs réelles; mais comme cette démonstration sera l'objet d'une note qui suivra ce mémoire, on supposera qu'en rapportant la surface du second degré à ses plans conjugués rectangulaires, son équation générale pourra toujours être ramenée à la forme

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 - 1 = 0.$$

Nous considérerons d'abord les surfaces du second degré comprises dans cette équation, puis nous les examinerons dans le cas où leur centre s'éloigne à l'infini de l'origine des coordonnées.

3. Toute surface du second degré, coupée par un plan, donne pour

section une courbe du second degré. En effet, quel que soit ce plan coupant, il peut devenir, par la transformation des coordonnées, l'un des plans auxquels on rapporte la surface; or, après cette transformation, l'équation de la surface est encore du second degré; de plus les équations des sections faites sur une surface par les plans des coordonnées, ne peuvent pas être d'un degré plus élevé que celui de l'équation de la surface; donc toute surface du second degré, coupée par un plan, donne pour section une courbe du même degré.

Si le plan coupant se meut parallélement à lui-même, la section est toujours semblable à elle-même; ses axes restent toujours parallèles entre eux, et son centre est toujours sur le même diamètre de la surface, ce qu'on peut démontrer ainsi.

L'équation d'une courbe du second degré peut toujours être ramenée à la forme

$$lx^2 + my^2 + nxy + p = 0.$$

Si, dans cette équation, on substitue fx et fy à x et à y, f étant une constante, la nouvelle équation qui résulte de cette substitution appartient évidemment à une courbe semblable à la première, et semblablement placée; or, elle ne diffère de la première que par le terme constant, car après avoir divisé tous les termes par f^2, elle devient

$$lx^2 + my^2 + nxy + \frac{p}{f^2} = 0,$$

Donc toutes les courbes du second degré dont les équations seront de cette forme, et ne différeront que par le terme constant, seront semblables, et semblablement placées.

Cela posé, reprenons l'équation de la surface du second degré,

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 - 1 = 0.$$

Soit l'équation d'un plan qui coupe la surface,

$$z = Ax + By + C.$$

La projection de la courbe d'intersection sur le plan des xy, a pour équation

$$\left.\begin{array}{l} x^2(L + NA^2) + y^2(M + NB^2) + 2ABNxy \\ + 2ACNx + 2BCNy + NC^2 - 1 \end{array}\right\} = 0 \ldots\ldots\ldots (a).$$

Lorsque le plan coupant change de position, s'il se meut parallèlement à lui-même, A et B ne changent pas, C seul varie ; d'où il suit que les coefficiens de x^2, y^2, xy, dans l'équation de la projection, seront toujours les mêmes, quel que soit C. Or, par la transformation des coordonnées, cette équation peut être ramenée à la forme

$$l'u^2 + m'v^2 + n'uv + p' = 0,$$

équation dans laquelle les coefficiens l', m', n' ne contiennent que A et B, tandis que p' seul est une fonction de C ; faisant changer le plan coupant de position, ou, ce qui est la même chose, faisant varier C, la valeur de p' varie aussi, et se change en p'' ; donc l'équation précédente devient :

$$l'u^2 + m'v^2 + n'uv + p'' = 0.$$

Or, celle-ci n'en diffère que par le terme constant : donc elle appartient à une courbe semblable à la première projection. Ainsi il est demontré que toutes les projections des sections parallèles sont semblables ; d'où l'on conclut que toutes les sections sont elles-mêmes semblables et semblablement placées. De plus, le lieu des centres de ces sections est un diamètre de la surface.

D'abord il est facile de voir que les centres des projections des sections parallèles sont sur une droite. On sait (*mémoire de* Prony *sur les Sections coniques*) qu'en résolvant l'équation (a) par rapport à x, et ensuite par rapport à y, et ne prenant de ces deux valeurs que la partie qui est hors le radical, on a les équations de deux diamètres de la courbe à laquelle l'équation (a) appartient.

Pour le premier diamètre,

$$x = \frac{-AN(By + C)}{L + NA^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b);$$

Pour le second diamètre,

$$y = \frac{-BN(Ax + C)}{M + NB^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c).$$

En donnant à C une valeur particulière C', et tirant de ces deux équations les valeurs de x et y, elles seront celles des coordonnées du centre de la section correspondante à C', puisque le centre de la projection d'une courbe est la projection du centre de cette courbe : donc, éliminant C' entre ces deux équations, on aura, pour la ligne qui est le lieu de tous les centres des sections parallèles, l'équation

$$\frac{x(L+Na^2)+ABNy}{y(M+NB^2)+ABNx}=\frac{A}{B},$$

qui appartient à une droite tracée sur le plan des xy.

Mettant dans l'équation du plan $z=Ax+By+C$, pour C sa valeur tirée de l'équation (b) ou (c), on aura la seconde équation de la droite ; ces deux équations étant linéaires et n'ayant pas de terme constant, appartiennent à une droite qui passe par l'origine des coordonnées : donc, cette droite passe par le centre de la surface, et en est par conséquent un diamètre.

4. Si, dans l'équation $Lx^2+My^2+Nz^2-1=0$, on substitue aux coefficiens L, M, N, les constantes $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, a étant plus grand que b, $b>c$, elle devient :

$$b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2 \;.\;.\;.\;(E).$$

L'avantage de cette substitution est de rendre le signe de chaque terme de l'équation indépendant des valeurs particulières des coefficiens, et de n'introduire pour constantes dans les équations des sections de la surface par les plans des coordonnées, que les axes principaux de ces sections.

La combinaison des signes de l'équation (E) présente trois cas très-distincts : le second membre de l'équation étant toujours positif, ou tous les termes du premier membre sont positifs, ou deux sont positifs et le troisième négatif, ou enfin le premier est positif et les deux autres négatifs ; pour ces trois cas, l'équation (E) peut s'écrire ainsi :

$$b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2, \quad (E) \quad \text{ou } Lx^2+My^2+Nz^2=1.$$
$$b^2c^2x^2+c^2a^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2, \quad (E') \quad \text{ou } Lx^2+My^2-Nz^2=1.$$
$$b^2c^2x^2-c^2a^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2, \quad (E'') \quad \text{ou } Lx^2-My^2-Nz^2=1.$$

DE L'ELLIPSOÏDE.

5. A chaque équation (E), (E'), (E''), correspond une forme particulière de la surface : considérons d'abord l'équation dont tous les termes sont positifs. La surface de l'équation (E) est fermée : il n'y a aucun de ses points qui ne soit à une distance finie de son centre. En effet, qu'on mène par l'origine des coordonnées une droite quelconque, dont les équations soient :

$$x = \alpha z, \ldots\ldots y = \beta z;$$

en substituant les valeurs de x et y dans (E), on aura pour la valeur de z, correspondant au point d'intersection de la droite et de la surface,

$$z = abc : \sqrt{b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\beta^2 + a^2b^2}.$$

Or, quelles que soient les constantes α, β, le radical

$$\sqrt{b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\beta^2 + a^2b^2}$$

ne peut devenir nul : d'où il suit que les valeurs des coordonnées du point d'intersection de la surface et d'une droite quelconque, ne peuvent devenir infinies : donc la surface est fermée. Pour la distinguer des deux autres qui ne sont pas fermées, on la nomme *ellipsoïde.*

Les sections principales de l'ellipsoïde, qu'on obtient en faisant successivement $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, sont des ellipses qui ont pour équations :

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),\; z^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - x^2),\; z^2 = \frac{c^2}{b^2}(b^2 - x^2).$$

Les axes de ces ellipses $2a$, $2b$, $2c$, sont aussi les axes de la surface. Les points où ces axes rencontrent la surface, en sont les sommets.

L'ellipsoïde devient ellipsoïde de révolution ou sphère, selon que deux ou trois de ses axes sont égaux.

DE L'HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

6. Le second genre des surfaces du second degré est compris

dans l'équation (E'), dont les deux premiers termes sont positifs et le troisième négatif :

$$b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2 \quad \ldots\ldots (E').$$

Les trois sections principales ont pour équations :

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),\ z^2 = \frac{c^2}{a^2}(x^2 - a^2),\ z^2 = \frac{c^2}{b^2}(y^2 - b^2).$$

La première section est une ellipse, et les deux autres des hyperboles. De là on peut conclure que cette surface, qu'on a nommée *hyperboloïde à une nappe*, n'est pas fermée; on peut encore le démontrer, comme n°. 5 (parag. VII), en imaginant, par l'origine des coordonnées, une droite $x = \alpha z$, $y = \beta z$, qui coupe la surface en un point dont les coordonnées sont :

$$\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\beta^2 - a^2b^2}},\ \alpha\cdot\frac{abc}{\sqrt{\ }},\ \beta\cdot\frac{abc}{\sqrt{\ }};$$

faisant le radical nul, ce qui rend les valeurs des coordonnées infinies, on a :

$$b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0,$$

d'où l'on tire $\beta = \frac{b\sqrt{a^2 - c^2\alpha^2}}{ac}$, valeur qui sera réelle, lorsque a^2 sera plus grand que $c^2\alpha^2$. Les équations $x = \alpha z$, $y = \beta z$ de la droite qui coupe la surface en un point situé à une distance infinie de l'origine des coordonnées, deviennent :

$$x = \alpha z,\quad y = \frac{bz\sqrt{a^2 - c^2\alpha^2}}{ac}.$$

Si on élimine α entre ces deux équations, on a

$$b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 - a^2b^2z^2 = 0.$$

Cette équation, qu'on obtiendroit en égalant à zéro le second membre de l'équation (E'), appartient à une surface conique, qui a son sommet à l'origine des coordonnées, et qui est asymptote à l'hyperboloïde.

7. L'hyperboloïde à une nappe jouit d'une propriété très-remarquable, et qui ne convient qu'à cette surface : c'est qu'il peut être engendré par une droite, de deux manières différentes. Toutes les équations des surfaces engendrées par une droite mobile, sont comprises dans celle qui résulte de l'élimination de α entre ces deux-ci :

$$y = \alpha x + \varphi\alpha\,, \quad z = x\psi\alpha + \pi\alpha\,,$$

φ, ψ, π étant des signes de fonctions dont la forme dépend de la loi du mouvement (Feuilles d'analyse de *Monge*, n°. 29).

Combinant l'équation $y + \alpha x + \varphi\alpha$, avec l'équation (E'), celle-ci devient :

$$(b^2c^2 + c^2a^2\alpha^2)x^2 + 2c^2a^2\alpha\varphi\alpha . x + c^2a^2(\varphi\alpha)^2 - a^2b^2c^2 - a^2b^2z^2 = 0 \ldots (e').$$

On décomposera cette équation en deux facteurs, si on peut la ramener à la forme

$$(Ax + B)^2 - a^2b^2z^2 = 0\,, \text{ ou } A^2x^2 + 2ABx + B^2 - a^2b^2z^2 = 0\,;$$

car cette dernière est le produit des deux facteurs

$$(Ax + B + abz)\,,\ (Ax + B - abz).$$

Comparant ces deux équations terme à terme, on a :

$$A^2 = b^2c^2 + c^2a^2\alpha^2\,,\ AB = c^2a^2\alpha\varphi\alpha\,,\ B^2 = c^2a^2(\varphi\alpha)^2 - a^2b^2c^2\,,$$

d'où l'on tire pour A, B et $\varphi\alpha$, les valeurs suivantes :

$$\varphi\alpha = \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2}\,,\ A = c\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2}\,,\ B = a^2c\alpha.$$

Donc l'équation (e') sera décomposée en deux facteurs, et pourra être mise sous cette forme :

$$[cx\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2} + a^2c\alpha + abz)][cx\sqrt{a\alpha^2 + b^2} + a^2c\alpha - abz)] = 0.$$

Or chacun de ces facteurs tient lieu de l'équation $z = x\psi\alpha + r\alpha$; donc l'hyperboloïde peut être engendré par une droite, de deux manières. Pour le premier mode de génération, la droite mobile a pour équations :

$$y = \alpha x + \sqrt{\alpha\,\alpha^2 + b^2}\ {}^{*},$$

$$cx\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2} + a^2c\alpha + abz = 0\,;$$

(*) Cette quation est celle d'une tangente à l'ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, section de la surface par le plan des xy.

et pour le second mode :

$$y = \alpha x + \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2},$$
$$cx\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2} + a^2c\alpha - abz = 0.$$

Si de l'un ou l'autre système d'équations on élimine α, on retrouve l'équation (E').

A la même projection de la droite génératrice sur le plan des xy, correspondent deux projections de cette droite sur le plan des xz; d'où il suit : 1°. qu'il y a sur la surface deux systèmes de lignes droites ; 2°. qu'une droite quelconque du premier système coupe toutes les droites du second ; 3°. qu'en prenant dans l'un ou l'autre système trois droites quelconques, et les considérant comme les directrices d'une quatrième droite mobile, cette dernière engendre l'hyperboloïde.

Lorsqu'on donne les équations de trois droites situées d'une manière quelconque par rapport aux plans coordonnés, l'équation du second degré qu'on obtient pour celle de la surface engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur les trois droites données, contient tous ses termes et se présente sous une forme très-compliquée ; le moyen de la simplifier consiste à rapporter les droites données à trois plans tels que les axes des coordonnées soient parallèles à ces droites, l'origine des coordonnées étant un point pris arbitrairement dans l'espace.

Nommons u, v, w les coordonnées d'un point quelconque de la surface, les équations des droites données seront :

pour la première, $u = f$, $v = f'$, (F)

pour la seconde, $w = g$, $u = g'$, (G)

pour la troisième, $v = h$, $w = h'$, (H)

f, f', g, g', h, h' étant des quantités connues et données.

Soient les équations de la droite mobile :

$$v = Mu + N,\ w = M'u + N',\ M'v - Mw = M'N - MN'.$$

Des quatre quantités M, N, M', N', trois sont déterminées par les équations suivantes, qui expriment que la droite mobile rencontre les droites fixes :

$$f' = Mf + N, \quad g = M'g' + N', \quad M'h - Mh' = M'N - MN';$$

éliminant M et M', et ordonnant par rapport aux coordonnées u, v, w, on trouve :

$$uv(h'-g)+vw(g'-f)+wu(f'-h)+u(gh-f'h')+v(fg-g'h')+w(fh-f'g')+f'g'h'-fgh=0. \quad (z)$$

Cette équation entre les coordonnées u, v, w d'un point de la surface engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur les trois droites (F), (G), (H), seroit encore du second degré, si on changeoit les coordonnées obliques u, v, w en trois autres x, y, z rectangulaires ; car on sait (parag. V, n°. 1) que les expressions de u, v, w en x, y, z sont linéaires.

En prenant pour directrices de la droite mobile, trois autres droites (F'), (G'), (H'), qui aient pour équations

la première, (F') $\quad u = f'$, $v = h$,

la seconde, (G') $\quad u = f$, $w = h'$,

la troisième, (H') $\quad v = f'$, $w = g$;

il est facile de vérifier qu'on arrive encore à l'équation (z) ; or la droite (F') est parallèle à la droite (F) et passe par les deux autres droites (G) et (H); il en est de même des deux droites (G') et (H') ; elles sont parallèles à l'une des trois droites (F), (G), (H) et passent par deux de ces dernières ; donc les trois droites (F'), (G'), (H') correspondent à trois positions de la génératrice dans le premier mode de génération, mais elles peuvent elles-mêmes servir de directrices à la droite mobile ; donc la surface de l'équation (z) a deux modes de générations, et pour chacun de ses points, on a deux droites dont l'une passe par les trois droites (F), (G), (H) ; et l'autre par les trois parallèles à celles-ci (F'), (G'), (H').

Lorsque deux des trois axes a, b, c sont égaux entre eux, *l'hyperboloïde à une nappe* devient la surface de révolution qui a pour section par le plan du méridien une hyperbole, et pour génératrice une droite placée de manière à ne pas couper l'axe de révolution.

L'équation (E') comprend les équations des cônes et des cylindres droits ou obliques.

Dans l'ellipsoïde, les six sommets sont réels; dans l'hyperboloïde à une nappe, deux deviennent imaginaires, et quatre seulement sont réels.

DE L'HYPERBOLOÏDE A DEUX NAPPES.

8. Le troisième genre des surfaces du second degré est représenté par l'équation (E''),

$$b^2c^2x^2 - c^2a^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2 \quad . \; . \; . \; (E''),$$

dont le premier terme est positif et les deux autres négatifs.

Les sections principales ont pour équations

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

$$z^2 = \frac{c^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

$$-c^2a^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

Les deux premières sections sont des hyperboles, et la troisième est imaginaire; ce qui indique que la surface a des nappes infinies entre lesquelles il y a un intervalle. On a nommé cette surface *hyperboloïde à deux nappes :* elle a pour asymptote une surface conique de l'équation

$$b^2c^2x^2 - c^2a^2y^2 - a^2b^2z^2 = 0,$$

dont le sommet est à l'origine des coordonnées.

Cette surface ayant deux nappes séparées et distinctes, ne peut pas être engendrée par une droite; et, en effet, supposant que son équation est le produit de deux facteurs, $Ax + B + abz$, $Ax + B - abz$, on trouve, par un calcul semblable à celui du n°. 7 de ce parag., pour A et B, des valeurs imaginaires.

Cet hyperboloïde n'a que deux sommets réels.