Calcul Intégral.

Dans le calcul différentielle, on se propose étant donnée une fonction, de trouver sa différentielle; le but du calcul intégral est au contraire de revenir de la différentielle à la fonction.

Nous indiquerons la fonction qui a pour différentielle $f(x)dx$ par le symbole $\int f(x)dx$, qu'on appelle <u>somme</u> ou <u>intégrale</u> de $f(x)dx$; $F(x)$ étant cette intégrale, nous aurons donc :

$$\int f(x)dx = F(x).$$

A une fonction ne correspond en général qu'une seule différentielle, mais à une différentielle correspondent une infinité d'intégrales; ainsi $F(x)$ ayant pour différentielle $f(x)dx$, nous aurons une infinité d'autres fonctions ayant même différentielle et comprises toutes dans la formule $F(x)+C$, C indiquant une quantité constante. Si l'on admet, en effet qu'une fonction non comprise dans cette formule ait même différentielle que $F(x)$ nous pourrons la représenter par $F(x)+\varphi(x)$ et nous aurons :

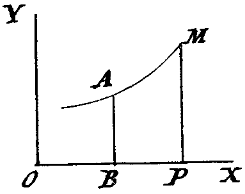
$$d\left[F(x)+\varphi(x)\right] = f(x)dx = dF(x)$$

$$\text{ou}\quad dF(x) + d\varphi(x) = dF(x)$$

Donc $d\varphi(x)=0$; par conséquent $\varphi(x)=C$.

Toute différentielle $f(x)dx$, réelle et finie pour les valeurs de x voisines de celle que l'on considère, a une intégrale.

En effet je construis la courbe $y=f(x)$ que je supposerai n'être pas constamment discontinue dans le voisinage du point M correspondant à une abscisse



$OP = X$. Je pourrai toujours prendre un point A assez rapproché de M, pour que de A à M j'ai une courbe continue et dont les coordonnées soient finies. Or, d'après ce que nous avons vu aire $d\,ABPM = f(x)dx$ donc aire $ABPM = \int f(x)dx$; or l'aire étant une fonction de l'abscisse, il s'en suit que $\int f(x)dx = F(x)$. Comme le point B peut avoir une infinité de positions, cette égalité exprime en même temps l'indétermination de l'intégrale.

Le théorème est encore vrai pour $[f_1(x) + \sqrt{-1} f_2(x)]dx$ en faisant sur $f_1(x)$ et $f_2(x)$ les hypothèses déjà faites sur $f(x)$.

En effet nous aurons :

$$\int f_1(x)dx = F_1(x)$$

$$\int f_2(x)dx = F_2(x)$$

Posons $F_1(x) + \sqrt{-1}\, F_2(x) = F(x)$

d'où : $dF(x) = dF_1(x) + \sqrt{-1}\, dF_2(x) = f_1(x)dx + \sqrt{-1} f_2(x)dx = [f_1(x) + \sqrt{-1} f_2(x)]\,dx$.

Donc d'après la définition : $\int [f_1(x) + \sqrt{-1} f_2(x)]\,dx = F(x)$.

Remarquons que l'intégrale d'une différentielle, peut n'être pas exprimable par un nombre limité des fonctions introduites jusqu'ici dans le calcul ; telle est $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$; nous devons dès lors la considérer comme étant une <u>fonction</u> <u>nouvelle</u> exprimant l'aire d'une courbe.

Principe analogue au principe des fonctions de fonctions.

Si l'on a $\int f(x)dx = F(x)$ je dis qu'on aura également $\int f(u)du = F(u)$; u n'étant plus la variable indépendante.

On a en effet: $dF(x) = f(x)dx$

Donc, $dF(u) = f(u)du$

Par conséquent: $\int f(u)du = F(u)$.

ou bien $\int f(u)\frac{\partial u}{\partial x}dx = F(u)$

en mettant en évidence la variable indépendante.

Comme application de ce principe, je vais démontrer que connaissant

$\int f(x)dx = F(x)$, on peut en déduire $\int f(ax+b)dx$.

En effet, posons: $ax+b=u$ d'où $dx = \frac{du}{a}$

Nous aurons: $\int f(ax+b)dx = \int f(u).\frac{du}{a} = \int \frac{f(u)du}{a} = \frac{F(u)}{a}$

Donc $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a}$.

Voici une transformation, souvent employée pour arriver à l'intégrale d'une différentielle. Elle consiste à effectuer un changement de variable indépendante. Soit à trouver $\int f(u)dx$, que je représente par $F(x)$ ou par $x = \varphi(t)$, cette fonction étant telle qu'on sache trouver: $\int f(\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

$\psi(t)$ étant cette intégrale, en substituant à t sa valeur en x, on obtiendra $F(x)$.

En effet: $\int f(x)dx = F(x)$ donc:

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)].$$

Donc $\psi(t) = F[\varphi(t)]$

$\psi(t)$ étant ce que devient $F(x)$ lorsque j'y remplace x par $\varphi(t)$, lorsque je remplacerai t par sa valeur en x, je trouverai $F(x)$.

Règles d'Intégration.

Pour intégrer une somme de différentielles, on fait la somme des intégrations partielles.

Ainsi l'on a:

$$\int\left[f(x)dx+\varphi(x)dx-\psi(x)dx\right]=\int f(x)dx+\int\varphi(x)dx-\int\psi(x)\,dx.$$

En effet pour différentier le 2e membre, il suffit de différentier chacune des parties, ce qui nous donne bien:
$f(x)\,dx+\varphi(x)\,dx-\psi(x)\,dx$.

On peut faire sortir du signe d'intégration toute quantité constante multipliant la différentielle.

Ainsi on aura: $\int A f(x)dx = A\int f(x)dx$

Si en effet nous différentions le 2e membre nous retrouverons, $A f(x)dx$ et le 2e membre ayant pour différentielle $A f(x)dx$, en est donc l'intégrale.

Ceci permettra, lorsque la différentielle sera affectée du signe $-$ de la transporter devant l'intégrale; puisque cela revient à le considérer comme étant donné par le facteur -1.

Pour intégrer une puissance $x^m dx$, on augmente l'exposant d'une unité, et on divise le résultat par le nouvel exposant.

Ce qui donne pour intégrale de $x^m dx$, $\dfrac{x^{m+1}}{m+1}$.

En effet :

$$d\,(A\,x^m) = m.A.x^{m-1}\,dx.$$

d'où : $\int m\,A\,x^{m-1}dx = A\,x^m.$

Remplaçons dans cette égalité, m par $m+1$, nous aurons :

$$\int (m+1).A.x^m dx = A\,x^{m+1}$$

En posant $(m+1)A = B$, d'où $A = \dfrac{B}{m+1}$, l'égalité devient :

$$\int B.x^m.\,dx = \frac{B.x^{m+1}}{m+1}$$

$$\text{ou}\quad B.\int.x^m\,dx = \frac{B.x^{m+1}}{m+1}$$

et en supprimant le facteur B

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

La démonstration ne peut s'appliquer dans le cas de $m=-1$, car $B=(m+1)A$ étant nul, sa suppression n'est plus permise, et l'égalité devient $0=0$.

Traitons à part ce cas particulier ; nous aurons :

$$\int x^{-1}.\,dx = \int\frac{dx}{x} = \log.x.\quad\text{car}\quad d\log.x = \frac{dx}{x}.$$

On pourra de même vérifier facilement les égalités suivantes :

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log.a}$$

$$\int \sin.x\,dx = -\cos.x$$

$$\int \cos.x\,dx = \sin.x$$

On aura de même.

$$\int \sin. mx\, dx = -\frac{\cos. mx}{m} \text{ car } d\cos. mx = -m \sin. mx\, dx.$$

$$\int \cos. mx\, dx = \frac{\sin. mx}{m}.$$

Il résulte du principe que nous avons établi dès l'origine, que toutes ces règles subsisteront encore lorsqu'on remplacera x par u, u étant une fonction de fonction.

Intégration d'une fraction rationnelle quelconque.

$f(x)$ et $F(x)$ étant deux polynomes entiers et rationnels, nous allons nous proposer de trouver $\int \frac{f(x)}{F(x)} dx$.

Or, on a vu qu'on pourrait décomposer une pareille fraction en fractions rationnelles plus simples et on a trouvé dans cette décomposition trois sortes de termes; les termes de la partie entière compris dans la formule Ax^m, des termes de la forme $\frac{A}{(x-\alpha)^m}$, enfin des termes de la forme $\frac{Ax+B}{\left[(x-\lambda)^2+\beta^2\right]^m}$

et comme l'intégration revient à intégrer séparément chacune des différentielles, nous pourrons considérer le problème comme résolu si nous parvenons à trouver

$$\int Ax^m dx, \quad \int \frac{A}{(x-\alpha)^m}, \quad \int \frac{Ax+B}{\left[(x-\lambda)^2+\beta^2\right]^m}$$

Or, $\int Ax^m dx = \frac{Ax^{m-1}}{m+1}$ d'après ce que nous avons démontré.

et nous n'avons pas à considérer le cas exceptionnel de $m=-1$, puisque l'ensemble des termes correspondants à Ax^m est un polynome entier.

$$\int \frac{A\,dx}{(x-\alpha)^m} = \int \frac{A\,d(x-\alpha)}{(x-\alpha)^m} = \int A.(x-\alpha)^{-m} d(x-\alpha) = \frac{A.(x-\alpha)^{-m+1}}{-m+1} = \frac{A}{(1-m)(x-\alpha)^{m-1}}$$

Pour le cas déjà considéré de $m=1$, ou $-m=-1$, nous savons que la formule n'est plus applicable; mais traitons le directement:

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \log.(x-a).$$

Si $x-a$ était une quantité négative on prendrait $A \log.(a-x)$; car il est à remarquer que $\log.(x)$ et $\log.(-x)$, ont la même différentielle $\frac{dx}{x}$; cela ne fait pas d'ailleurs exception à ce théorème: que deux fonctions ayant la même différentielle, ne diffèrent que par une constante, en effet $\log.(-x) = \log.(x \times -1) = \log.(x) + \log.(-1)$.

Arrivons à la partie difficile c'est-à-dire à l'intégration de $\frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\lambda)^2+\beta^2]^m}$. Je considérerai d'abord le cas de $m=1$.

Décomposons $\frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\lambda)^2+\beta^2}$ en deux parties dont l'une peut se mettre sous la forme $\frac{du}{u}$ dont l'intégrale est connue.

Pour cela j'introduis au numérateur la différentielle du dénominateur et je pose

$$Ax+B = \frac{A}{2}.\ 2\,(x=\alpha) + A\alpha + B$$

J'aurai

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(a-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{A}{2}\int \frac{2(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + (A\alpha+B)\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

or $\dfrac{A}{2}\displaystyle\int \frac{2(x-\alpha)\,du}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{A}{2}\log.\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]$

Je vais ramener la 2^e intégrale à un arc tangent.

On sait que d arc $\log.x = \dfrac{dx}{1+x^2}$.

Or je remarque que $d.\,\text{arc tang.}\dfrac{x-\alpha}{\beta} = \dfrac{d.\frac{x-\alpha}{\beta}}{1+\frac{(x-\alpha)^2}{\beta^2}} = \dfrac{\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$

Donc $\dfrac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = d\left[\dfrac{1}{\beta}\,\text{arc tang.}\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right]$

Par conséquent. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\,\text{arc. tang.}\frac{x-\alpha}{\beta}$

nous aurons donc :

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{A}{2}\log.\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right] + (A\alpha+B)\frac{1}{\beta}\cdot\text{arc tang.}\frac{x-\alpha}{\beta}$$

Il est facile de retrouver la formule

$\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2\beta^2} = \frac{1}{\beta}\,\text{arc tang.}\frac{x-\alpha}{\beta}$. Il suffit de poser

$x-\alpha = \beta u$, $dx = \beta\,du$,

Donc : $\dfrac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \dfrac{\beta\,du}{\beta^2u^2+\beta^2} = \dfrac{1}{\beta}\cdot\dfrac{du}{1+u^2} = \dfrac{1}{\beta}.\,d.\,\text{arc tang}.\,u = d.\dfrac{1}{\beta}\,\text{arc. tang.}\dfrac{x-\alpha}{\beta}$

Pour traiter le cas général, où l'exposant est quelconque est égal à m. Je vais faire voir comment on peut le déduire du cas où cet exposant est $m-1$; dès lors le problème sera résolu, puisqu'on pourra passer du cas de $m=1$, au cas de $m=2$; puis de $m=2$, au cas de $m=3$, et ainsi de suite.

Posons $m-\alpha=\beta u$, d'où $dx=\beta du$, nous aurons

$$\int\frac{(Am+B)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}=\int\frac{(A\beta u+A\alpha+B)\beta du}{(\beta^2u^2+\beta^2)^m}=\frac{A}{\beta^{2m-2}}\int\frac{udu}{(1+u^2)^m}+\frac{A\alpha+B}{\beta^{2m-1}}\int\frac{du}{(1+u^2)^m}$$

$$\text{Or}\int\frac{udu}{(1+u^2)^m}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+u^2)}{(1+u^2)^m}=\frac{1}{2}\int(1+u^2)^{-m}.d(1+u^2)=\frac{1}{2}.\frac{(1+u^2)^{-m+1}}{-m+1}.$$

Nous n'avons pas à nous occuper du cas exceptionnel où $m=1$, que nous avons déjà traité.

Pour avoir l'intégrale de $\frac{du}{(1+u^2)^m}$, je supposerai connue celle de $\frac{du}{(1+u^2)^{m-1}}$

$$\text{or } d.\frac{u}{(1+u^2)^{m-1}}=d\left\{u(1+u^2)^{1-m}\right\}=(1+u^2)^{1-m}du+(1-m).u.(1+u^2)^{-m}\times 2u.du$$

$$\text{ou } d.\frac{u}{(1+u^2)^{m-1}}=\frac{du}{(1+u^2)^{m-1}}+2(1-m)\frac{u^2du}{(1+u^2)^m}$$

$$\text{or. }\frac{u^2}{(1+u^2)^m}=\frac{1+u^2}{(1+u^2)^m}-\frac{1}{(1+u^2)^m}=\frac{1}{(1+u^2)^{m-1}}-\frac{1}{(1+u^2)^m}.$$

Nous aurons en substituant à $\frac{u^2}{1+u^2}$ sa valeur

$$d.\frac{u}{(1+u^2)^{m-1}}=\frac{du}{(1+u^2)^{m-1}}+2(1-m)\frac{du}{(1+u^2)^{m-1}}-2(1-m)\frac{du}{(1+u^2)^m}$$

ou bien :

$$d.\frac{u}{(1+u^2)^{m-1}} = (3-2m).\frac{du}{(1+u^2)^{m-1}} - 2(1-m).\frac{du}{(1+u^2)^m}.$$

Donc :

$$\int d.\frac{u}{(1+u^2)^{m-1}} = (3-2m)\int\frac{du}{(1+u^2)^{m-1}} - 2(1-m)\int\frac{du}{(1+u^2)^m}.$$

or, $\int d.\frac{u}{(1+u^2)^{m-1}} = \frac{u}{(1+u^2)^{m-1}}$.

Nous supposons connue $\int\frac{du}{(1+u^2)^{m-1}}$

Nous pourrons donc déduire de cette égalité $\int\frac{du}{(1+u^2)^m}$ en fonction de quantités connues et de $\int\frac{du}{(1+u^2)^{m-1}}$; nous pourrons donc connaître $\int\frac{du}{(1+u^2)^2}$, puisque nous connaissons $\int\frac{du}{1+u^2}$; on aura de même $\int\frac{du}{(1+u^2)^2}$ et ainsi de suite jusqu'à $\int\frac{du}{(1+u^2)^m}$.

On peut présenter sous un point de vue plus général l'opération qui nous a conduit à la valeur de $\int\frac{du}{(1+u^2)^m}$.

La méthode prend le nom d'intégration par parties ; elle repose sur l'égalité $d\,(u.v) = v\,du + u\,dv$ d'où l'on déduit : $\int v.du + \int u.dv = u.v$ et par conséquent : $\int v\,du = u.v - \int u.dv$ on ramène par là une intégrale à une autre. Ainsi ayant à trouver $\int f(x)dx$; on prépare $f(x)dx$, sous la forme $v\,du$, et dès lors on a : $\int f(x)dx = u.v - \int u\,dv$.
S'il arrive que $\int u.dv$ est égale à $\int f(x)dx$, ou n'en diffère que par une constante, nous pourrons déduire de cette équation, la valeur de $\int f(x)dx$. En voici un exemple :

Soit à trouver $\int x^m dx$: $x^m dx$ est immédiatement sous la forme $v\,du$, nous aurons donc :

$$\int x^m dx = x^m x - \int x\,.\,d(x^m) = x^{m+1} - m\int x^m dx$$

d'où : $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$.

Appliquons maintenant cette méthode à la recherche de $\int \dfrac{du}{(1+u^2)^m}$ ou bien ce qui reviens au même, de $\int \dfrac{dx}{(1+x^2)^m}$, puisque nous savons de cette intégrale déduire la 1ère. Nous aurons :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^m} = \int \frac{(1+x^2-x^2)\,dx}{(1+x^2)^m} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^m} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^m}.$$

Nous supposons connue $\int \dfrac{dx}{(1+x^2)^{m-1}}$.

Occupons nous donc de $\int \dfrac{x^2.\,dx}{(1+x^2)^m}$, nous mettrons d'abord $\dfrac{x^2 dx}{(1+x^2)^m}$ sous la forme $v\,du$, or : $\dfrac{x^2 dx}{(1+x^2)^m} = x, \dfrac{x.\,dx}{(1+x^2)^m}$

$$\frac{x\,dx}{(1+x^2)^m} = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-m} d(1+x^2) = d\left\{\frac{1}{2}\ \frac{(1+x^2)^{-m+1}}{-m+1}\right\}$$

Donc

$$\int \frac{x' dx}{(1+x^2)^m} = x.\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)^{-m+1}}{-m+1} - \int \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)^{-m+1}}{-m+1}dx$$

$$\int \frac{x' dx}{(1+x^2)^m} = x.\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)^{-m+1}}{-m+1} - \frac{1}{2(1-m)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{m-1}}$$

Donc

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^m} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{m-1}} - \frac{x}{2(1-m)(1+x^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(1-m)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{m-1}}.$$

ou : $$\int \frac{dx}{(1+x^2)^m} = \frac{3-2m}{2(1-m)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{m-1}} - \frac{x}{2(1-m)(1+x^2)^{m-1}}$$

Nous avons suivi la même marche, seulement nous l'avons rattachée au principe de l'intégration par parties.

Nous allons donner le moyen d'intégrer différentes fonctions en ramenant leur intégration à celle de fractions rationnelles :

<u>Intégration d'expressions, ne renfermant que des irrationnelles monomes, c'est-à-dire relatives à la simple variable indépendante x.</u>

Prenons un exemple :

Soit à intégrer : $$\frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} - x}{1 + \sqrt[5]{x}}\, dx$$

nous aurons :

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} - x}{1 + \sqrt[5]{x}}\, dx = \frac{(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}} - x)\, dx}{1 + x^{\frac{1}{5}}}.$$

Je réduis les exposants au même dénominateur 2, 3, 5, et je pose : $x^{\frac{1}{2.3.5}} = z$, d'où $x = z^{2.3.5} = z^{30}$

$$\text{et } dx = 30.\, z^{30-1} dz$$

or $x^{\frac{1}{2}} = z^{15}$, $x^{\frac{1}{3}} = z^{10}$, $x^{\frac{1}{5}} = z^{6}$.

En substituant ces valeurs, la fonction devient rationnelle en z, et prend la forme $\frac{f(z)}{F(z)} dz$, $\frac{f(z)}{F(z)}$ étant une fraction rationnelle, nous pourrons donc en trouver l'intégrale, $F(z)$, en y remplaçant z par sa valeur en x, nous aurons, d'après ce que nous avons vu, l'intégrale cherchée.

L'intégration serait encore possible si tous les radicaux portaient sur un même binôme $ax+b$. Car nous avons vu que connaissant l'intégrale de $f(x)dx$, on peut en déduire celle de $f(ax+b)dx$.

Autre cas d'intégration, relatif aux différentielles binômes.

Soit à trouver $\int x^m(a+bx^m)^k dx$

On aperçoit immédiatement deux cas où l'intégration est possible.

1°. Si K est un nombre entier positif; on aura en effet en développant d'après le binôme un nombre limité de termes, qu'on intégrera séparément.

2°. Si $n=m-1$ ce qui donne $\int x^{m-1}(a+bx^m)^k$

alors:

$$\int x^{m-1}(a+bx^m)^k = \int \frac{(a+bx^m)^k . d(a+bx^m)}{mb} = \frac{1}{mb}\,\frac{(a+bx^m)^{k+1}}{k+1},$$

et dans le cas exceptionnel de $K=-1$

$$\int x^{m-1}(a+bx^m)^{-1} = \int \frac{(a+bx^m)^{-1} . d(a+bx^m)}{mb} = \int \frac{d(a+bx^m)}{mb.(a+bx^m)} = \frac{1}{mb}\log.(a+bx^m).$$

Pour résoudre cette intégrale dans d'autres cas, je poserai:

$$a+bx^m = u$$

$$\text{d'où}: mbx^{m-1}dx = du,\ x = \left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1}{m}},\ x^n = \left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{n}{m}}$$

$$dx = \frac{1}{mb}.du.x^{1-m} = \frac{1}{mb}.du.\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1-m}{m}}$$

Nous aurons:

$$\int x^m(a+bx^m)^k dx = \int \left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} . u^k \frac{1}{mb}.du.\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{mb}\int u^k . \left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{n+1}{m}-1} \times du$$

Si $\frac{n+1}{m}-1$ est un nombre entier positif, l'intégration sera possible.

Ainsi l'intégration sera possible, toutes les fois qu'il existera entre n et m, indépendamment de toute valeur attribuée à K, la relation : $\frac{n+1}{m} = \mu$, μ étant un nombre entier positif.

On voit que le cas de $n = m-1$, déjà traité, satisfait à la condition.

Pour arriver à l'intégration d'une autre classe de différentielles binômes, je mettrai x^m en facteur et j'aurai :

$$a + bx^m = x^m\left(b + ax^{-m}\right)$$

$$\left(a + bx^m\right)^K = x^{mK}\left(b + ax^{-m}\right)^K$$

$$\int x^n\left(a + bx^m\right)^K dx = \int x^{n+mK}\left(b + ax^{-m}\right)^K dx,$$

et en appliquant à cette fonction, la règle trouvée précédemment, nous voyons que nous pourrons en avoir l'intégrale toutes les fois qu'entre n, m et K il y aura la relation :

$$\frac{n + mK + 1}{-m} = \mu$$

μ étant nombre entier positif.

On pourra ramener à une fraction rationnelle, et par suite intégrer, $f\left(x, \sqrt{a + bx + cx^2}\right)dx$ toutes les fois que f sera une fraction rationnelle par elle-même, c'est-à-dire que $f(x, y)$ sera rationnelle en x et en y.

Afin d'éviter l'introduction d'imaginaires dans le calcul, je distinguerai trois cas et je donnerai trois méthodes correspondantes à chacun de ces cas. C'est dans le même but que dans les décompositions d'une fraction rationnelle, on a introduit des expressions de la forme $\dfrac{Ax+B}{((x+\alpha)^2+\beta^2)^m}$.

1° cas de c positif.

Je pose $c=\alpha^2$, d'où $\alpha=\pm\sqrt{c}$

Le radical devient $\sqrt{a+bx+\alpha^2x^2}$, et je l'égale à $\alpha x+z$ j'aurai : $a+bx+\alpha^2x^2=\alpha^2x^2+2\alpha xz+z^2$, en élevant au carré

$$\text{d'où } x=\frac{z^2-a}{b-2\alpha z}$$

dx sera donc rationnelle, et le radical disparaîtra, de sorte que la fonction deviendra rationnelle, et nous pourrons par conséquent l'intégrer :

Nous aurons :

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=z+\frac{\alpha z^2-a\alpha}{b-2\alpha z}=\frac{bz-2\alpha z^2+\alpha z^2-a\alpha}{b-2\alpha z}=\frac{bz-\alpha z^2-a\alpha}{b-2\alpha z}$$

$$dx=\frac{(b-2\alpha z).2zdz+(z^2-a)2\alpha dz}{(b-2\alpha z)^2}=\frac{2bz-2\alpha z^2-2a\alpha}{(b-2\alpha z)^2}$$

$$f(x,\sqrt{a+bx+cx^2})x=f\left(x,\frac{bz-\alpha z^2-a\alpha}{b-2\alpha z}\right)\frac{2bz-2\alpha z^2-2a\alpha}{(b-2\alpha z)^2}$$

Par la méthode précédente nous aurions $\alpha=\pm\sqrt{-c}$ et l'artifice réussirait encore ; mais pour éviter l'introduction d'imaginaires nous procéderons autrement, et nous distinguerons deux cas :

Le cas de a positif, le cas de a négatif.

Cas de a positif.

Soit $a=g^2$, $g=\pm\sqrt{a}$

Je pose : $\sqrt{a+bx+cx}=g+xz$

Élevons au carré :

$$a+bx+cx^2=g^2+2x.zg+x^2.z^2,\ \text{divisons par } x$$

$$b+cx=2g.z+xz^2, \text{ d'où } \frac{b-2gz}{z^2-c}$$

Alors le radical et dx deviendront rationnels, par suite il en sera de même de la fonction; nous aurons :

$$dx=\frac{(z^2-c)(-2g\,dz)-(b-2gz).2z.dz}{(z^2-c)^2}=\frac{2gc-2bz+2gz^2}{(c^2-c)^2}dz$$

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=g+\frac{bz-2gz^2}{z^2-c}=\frac{bz-gz^2-cg}{z^2-c}$$

$$f(x,\sqrt{a+bx+cx'})dx=f\left(x,\frac{bz-gz^2-cg}{z^2-c}\right)\times\frac{2gc-2bz+2gz^2}{(z^2-c)^2}dx$$

Il est à remarquer que cette méthode serait aussi applicable dans le cas de c positif.

Cas de a négatif.

Si a et c étant négatifs les racines sont imaginaires, les imaginaires étant déjà dans la fonction il est essentiel d'en éviter l'introduction; et dès lors on pourra employer l'une quelconque des deux méthodes précédentes applicables à tous les cas lorsqu'on ne rejette pas l'introduction des imaginaires.

Nous supposerons donc que les racines sont réelles et nous pourrons écrire :

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{c(x-h)(x-K)}$$

Je poserai :

$$\sqrt{c(x-h)(x-K)}=(x-h)z$$

en élevant au carré

$c(x-h)(x-K)=(x-h)^2z^2$, supprimant le facteur $x-h$ ce que nous pourrons faire puisque dans le cas où x

serait égal à h, le radical se réduirait à zéro.

$$c(x-k)=(x-h)z^2,\quad cx-ck=xz^2-hz^2$$

d'où $x=\dfrac{hz^2-ck}{z^2-c}$

$$dx=\frac{(z^2-c)2\cdot h\cdot z\cdot dz-(hz^2-ck)2\cdot z\cdot dz}{(z^2-c)^2}=\frac{-2hcz+2kcz}{(z-c)^2}\cdot dz=\frac{2cz(k-h)}{(z^2-c)^2}dz$$

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=z\left(\frac{hz^2-ck}{z^2-c}-h\right)=z\,\frac{c(h-k)}{z^2-c}$$

$$\int f(x\sqrt{a+bx+cx^2})\,a=\int f\left(x,z.\frac{c(h-k)}{z^2-c}\right)\frac{2cz(k-h)}{(z^2-c)^2}\,dz.$$

Les deux premières méthodes sont applicables dans tous les cas, lorsqu'on admet l'introduction des imaginaires, et remarquons qu'en les employant dans les cas où le résultat final doit être rationnel, les imaginaires se détruiront d'elles-mêmes, en ayant soin toutefois de remplacer les logarithmes imaginaires par les expressions qui en ont été données.

Application des méthodes précédentes.

Cherchons $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, ou plus généralement $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a+x^2}}$, que nous savons être égale à $\log.(x+\sqrt{a+x^2})$.

Voici d'abord un premier moyen d'y arriver :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}=\int\frac{(x+\sqrt{a+x^2})\,dx}{(\sqrt{a+x^2})(x+\sqrt{a+x^2})}=\int\frac{\frac{x\,dx}{\sqrt{a+x^2}}+dx}{x+\sqrt{a+x^2}}$$

$$=\int\frac{d(x+\sqrt{a+x^2})}{x+\sqrt{a+x^2}}=\log.(x+\sqrt{a+x^2})$$

Pour qu'en appliquant l'une des méthodes précédentes, précédentes, j'arrive à ce même résultat, voici comment j'opérerai :

Je poserai $\sqrt{a+x^2}=-x+z$

En élevant au carré : $a+x^2=x^2-2xz+z^2$

$$\text{d'où} \quad x=\frac{z^2-a}{2z}$$

$$\text{et } dx=\frac{4z^2-2z^2+2a}{4z^2}dz=\frac{z^2+a}{2z^2}dz.$$

$$\sqrt{a+x^2}=-\frac{z^2-a}{2z}+z=\frac{z^2+a}{2z} \quad \text{Donc :}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}=\int\frac{z^2+a}{2z^2}dz\times\frac{2z}{z^2+a}=\int\frac{dz}{z}=\log.z=\log.(x+\sqrt{a+x^2})$$

Nous serions arrivés en opérant autrement, à une expression identique au fond, mais en différant par la forme et qu'on aurait pu y ramener

Soit à intégrer $f(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{a'x+b'})dx$, en supposant que f est par elle même une fonction rationnelle.

Nous pourons écrire $f(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{a'x+b'})$ sous la forme

$$\frac{L+L'\sqrt{ax+b}+L''\sqrt{a'x+b'}+L'''\sqrt{ax+b}\sqrt{a'x+b'}}{M+M'\sqrt{ax+b}+M''\sqrt{a'x+b'}+M'''\sqrt{ax+b}\sqrt{a'x+b'}}$$

L, L', L'', L'''; M, M', M'', M''' étant des polynomes entiers et rationnels.

Posons pour abréger : $\sqrt{ax+b}=\sqrt{R}$, $\sqrt{a'x+b'}=\sqrt{R'}$

Nous pourons mettre cette expression sous la forme :

$$\frac{P+P'\sqrt{R}}{Q+Q'\sqrt{R}} \text{ qui devient } \frac{(P+P'\sqrt{R})(Q-Q'\sqrt{R})}{Q^2-Q'^2R}$$

en multipliant les deux termes par $Q-Q'\sqrt{R}$ et le radical $\sqrt{R}$, n'entre plus au dénominateur; je mets maintenant la fraction sous la forme $\dfrac{N}{S+S'\sqrt{R'}}$.

Elle devient en multipliant les deux termes par $S-S'\sqrt{R'}$

$$\frac{N(S-S'\sqrt{R'})}{S^2-S'^2R'}$$

Nous avons par là rendu le dénominateur rationnel; l'expression proposée pourra donc toujours être mise sous la forme :

$$\frac{L+L'\sqrt{ax+b}+L''\sqrt{a'x+b'}+L'''\sqrt{ax+b}\sqrt{a'x+b'}}{M}$$

et nous aurons :

$$\int\frac{L+L'\sqrt{ax+b}+L''\sqrt{a'x+b'}+L'''\sqrt{ax+b}\sqrt{a'x+b'}}{M}dx=\int\frac{L\,dx}{M}+\int\frac{L'\sqrt{ax+b}}{M}dx$$

$$+\int\frac{L''\sqrt{a'x+b'}}{M}dx+\int\frac{L'''\sqrt{(ax+b)(a'x+b')}}{M}dx$$

Or, nous savons trouver chacune de ces intégrales; la 1ère. puisque $\dfrac{L}{M}$ est une fraction rationnelle; les deux suivantes, puis qu'elles correspondent au cas déjà traité, d'une fraction ne renfermant qu'un même radical binôme; enfin la dernière puis qu'elle est comprise dans la formule, $f(x, \sqrt{a+bx+cx^2})$, seulement ici la décomposition du trinôme en deux facteurs réels, est possible et effectuée; on pourra donc, employer la troisième méthode.

Voici d'autres exemples d'intégration, où comme nous l'avons fait jusqu'ici, nous nous appuierons sur le principe de changement de variable indépendante, établi plus haut.

Cherchons $\int f(a^x)dx$.

Je pose $a^x = y$, $a^x \log.a.dx = dy$ $dy = \frac{dy}{y \log.a}$

$$\int f(a^x)\,dx = \int f(y)\frac{dy}{y\log.a}$$

De sorte que toutes les fois que la transformée, rentrera dans l'une des fonctions que nous avons traitées, on saura trouver l'intégrale de la proposée, par exemple si f est par elle-même une fonction rationnelle.

Soit encore à trouver : $\int f(\log.x)\frac{dx}{x}$.

Posons $\log.x = y$ $\frac{dx}{x} = dy$

$$\int f(\log.x)\frac{dx}{x} = \int f(y)\,dy.$$

Nous pourrons effectuer cette transformation sur une multitude d'exemples, il suffit que la fonction soit suivie de la différentielle de la quantité mise en évidence dans cette fonction : Ainsi :

$\int f(\text{arc.tang}.x)\frac{dx}{1+x^2}$, posons, $\text{arc tang}.x = y$, $dy = \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int f(\text{arc tang}.x)\frac{dx}{1+x^2} = \int f(y)\,dy. \quad \text{etc.}$$

. . . .

Soit à trouver : $\int f(\sin. x, \cos. x)\, dx$,

Nous supposerons f rationnelle en elle-même, et nous allons arriver à une transformée que nous saurons intégrer.

Un premier moyen, le plus naturel, consiste à poser : $\sin. x = y$

d'où $\cos. x = \sqrt{1-y^2}$, $dx = \dfrac{dy}{\sqrt{1-x^2}}$

et l'expression devient : $\int f(y, \sqrt{1-y^2}) \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$; que nous savons intégrer. Mais en employant ce procédé, nous devons faire une deuxième transformation pour éliminer le radical carré ; afin d'éviter cette double transformation voici comment nous opérerons :

Posons : $\tang. \frac{1}{2} x = z \quad x = 2 \operatorname{arc} \tang. z$

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$\sin. \frac{1}{2} x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \quad \cos. \frac{1}{2} x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\sin. x = 2 \sin. \frac{1}{2} x \cos. \frac{1}{2} x = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$\cos. x = \cos^2 \frac{1}{2} x - \sin^2 \frac{1}{2} = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Donc :

$$\int f(\sin. x, \cos. x)\, dx = \int f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Dans la fonction f, le sinus ou le cosinus peuvent manquer séparément. Si par exemple nous considérons $\int \dfrac{dx}{\sin. x}$, nous aurons en nous servant des résultats précédents :

$$\int \frac{dx}{\sin.x} = \int \frac{2dz}{1+z^2} \cdot \frac{1+z^2}{2z} = \int \frac{dz}{z} = \log.(z) = \log.(\tang.\tfrac{1}{2}x).$$

Nous pourrions trouver de même $\int \frac{dx}{\cos.x}$, mais nous pouvons la déduire de l'expression que nous venons de trouver ; il suffit de remarquer que $\cos.x = \sin.\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; nous aurons :

$$\int \frac{dx}{\cos.x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\int d\log.\tang.\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)$$

ou $\int \frac{dx}{\cos.x} = -\log.\ \cotang.\ \frac{1}{2}\,x.$

Nous aurons aussi, en appliquant la première de ces deux formules :

$$\int \frac{dx}{\sin.x\cos.x} = \int \frac{2dx}{\sin.2x} = \int \frac{d\,(2x)}{\sin.(2x)} = \log.\ \tang.\ (x)$$

Nous aurions pu faire l'inverse, partir de cette intégrale pour arriver à la première, de la manière suivante :

$$\int \frac{d(2x)}{\sin 2x} = \int \frac{dx}{\sin.x\cos.x} = \int \frac{\cos.x}{\sin.x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d\tang.x}{\tang.x} = \log.\tang.x,$$

et en remplaçant $2x$ par x

$$\int \frac{dx}{\sin.x} = \log.\tang.\ \frac{1}{2}\,x$$

Appliquons le principe d'intégration par parties, à la recherche de $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+x^2}}$, où nous supposerons m entier.

Le procédé que nous allons employer est le procédé d'intégration par réduction, il consiste à abaisser le degré m de l'exposant.

Nous aurons :

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a+x}}, \int\frac{x^m dx}{\sqrt{a+x^2}} = \int x^{m-1}\cdot\frac{x\,dx}{\sqrt{a+x^2}} = \int x^{m-1}\, d\sqrt{a+x^2}$$

Donc

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a+x}} = x^{m-1}\sqrt{a+x^2} - \int d(x^{m-1})\sqrt{a+x^2}$$

$$= x^{m-1}\sqrt{a+x^2} - (m-1)\int\sqrt{a+x^2}\, x^{m-2}\cdot dx.$$

or $\int\sqrt{a+x^2}\, x^{m-2} dx = a\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a+x^2}} + \int\frac{x^m\cdot dx}{\sqrt{a+x^2}}$

en multipliant et divisant à la fois l'expression par $\sqrt{a+x^2}$

Donc : $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a+x^2}} = x^{m-1}\sqrt{a+x^2} - (m-1)a\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a+x^2}} - (m-1)\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a+x^2}}$

ou $m\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a+x^2}} = x^{m-1}\sqrt{a+x^2} - (m-1)\, a\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{a+x^2}}$

d'où $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a+x^2}} = \frac{\sqrt{a+x^2}}{m}x^{m-1} - \frac{(m-1)a}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a+x^2}}$

Nous faisons donc dépendre l'intégrale cherchée, d'une quantité connue et d'une autre intégrale analogue, ou l'exposant m est diminué de deux unités. Par conséquent le problème peut être considéré comme résolu, si nous trouvons l'intégrale pour le cas de l'exposant $=0$, où l'on sera ramené si m est pair, et pour le cas de cet exposant $=1$, où l'on sera ramené si m est impair.

Supposons maintenant l'exposant négatif, et remplaçons dans la formule précédente m par $m-1$, elle deviendra :

$$-m\int\frac{dx}{x^m\sqrt{a+x^2}}=\frac{\sqrt{a+x^2}}{x^{m+1}}+(m+1)a\int\frac{dx}{x^{m+2}\sqrt{a+x^2}}$$

D'où l'on déduit :

$$\int\frac{dx}{x^{m+2}\sqrt{a+x^2}}=-\frac{\sqrt{a+x^2}}{(m+1)ax^{m+1}}-\frac{m}{(m+1)a}\int\frac{dx}{x^m\sqrt{a+x^2}}.$$

Et en y remplaçant m par $m-2$, nous aurons la formule :

$$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{a+x^2}}=-\frac{\sqrt{a+x^2}}{(m-1)ax^{m-1}}-\frac{m-2}{(m-1)a}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a+x^2}}$$

On voit donc que si m est pair le problème sera ramené au cas où l'exposant est zéro, si m est impair, au cas où cet exposant est -1.

Ainsi pour que le problème soit résolu, m étant un nombre entier positif ou négatif, il suffira de connaître :

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+x^2}},\ \int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}},\ \int\frac{dx}{x\sqrt{a+x^2}}$$

or $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+x^2}}=\sqrt{a+x^2},\ \int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}=\log.\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)$

Pour trouver $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{a+x^2}}$ posons $x=\frac{1}{y}$, $dx=-\frac{dy}{y^2}$

on aura :

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+x^2}}=-\int\frac{dy}{\sqrt{ay^2+1}}.$$

Distinguons le cas de a positif, et de a négatif ; dans le premier, posons $a = \frac{1}{b^2}$, alors:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{ay^2+1}} = \int \frac{b\,dy}{\sqrt{b^2+y}} = b \log.\left(y + \sqrt{y^2+b^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+x^2}} = -b \log.\left(y + \sqrt{b^2+y^2}\right)$$

Si a est négatif, posons $a = -\frac{1}{b^2}$, nous aurons:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{ay^2+1}} = \int \frac{b\,dy}{\sqrt{b^2-y^2}} = b \int \frac{d\left(\frac{y}{b}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{y^2}{b^2}\right)}} = b \text{ arc sin } \frac{y}{b}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+x^2}} = -b \text{ arc sin } \frac{y}{b} = -b \text{ arc sin } \frac{1}{bx}.$$

Nous arriverons au même résultat, en faisant,

$a = -\frac{1}{b^2} \int \frac{dx}{x\sqrt{a+x^2}}$, nous aurons:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+x^2}} = \int \frac{b\,dx}{x\sqrt{b^2x^2-1}} = b \int \frac{d(bx)}{bx\sqrt{(bx)^2-1}}.$$

$$= b\int d \text{ arc sec } bx = b\int d \text{ arc cos.} \frac{1}{b} = b\int - d \text{ arc sin} \frac{b}{bx} = -b \text{ arc.sin} \frac{1}{bx}$$

On pourrait d'ailleurs ramener le cas de m négatif, au cas de m positif, en posant $x = \frac{1}{y}$, d'où $dx = \frac{-dy}{y^2}$.
Il vient alors:

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{a+x^2}} = \int \frac{-dy}{y^2} \cdot \frac{y^m}{\sqrt{a+\frac{1}{y^2}}} = -\int \frac{y^{m-1}\,dy}{\sqrt{ay^2+1}}$$

Appliquons le procédé d'intégration par réduction,

ÉCOLE
POLYTECHNIQUE

à la recherche de $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, m étant un nombre entier.

Cas de m positif.

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int x^{m-1} \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{or} \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \frac{x^{m-1} x dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2} + (m-1)\int x^{m-2} dx \sqrt{a^2-x^2}$$

en multipliant et divisant par $\sqrt{a^2-x^2}$ la 2^e expression :

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2} + (m-1)a^2 \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - (m-1)\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2}}{m} + \frac{(m-1)a^2}{m}\int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

En y remplaçant, m par $2-m$, on aura la formule convenant au cas de m négatif ; et on verra comme précédemment qu'il suffit de résoudre le problème pour les cas de $m=1$, $m=0$, $m=-1$.

Or, $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arc\sin.\frac{x}{a}$

Pour trouver $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ je pose $x = \frac{1}{y}$, $dx = -\frac{dy}{y^2}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\int \frac{dy}{y^2}.y.\frac{1}{\sqrt{a^2-\frac{1}{y^2}}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{a^2y^2-1}} = -\frac{1}{a}\int \frac{d(ay)}{\sqrt{(ay)^2-1}}.$$

Donc : $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\log.\left(ay + \sqrt{(ay)^2-1}\right)$

Soit à trouver $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

Cette intégrale rentre dans un cas plus général que nous avons traité, mais nous allons en donner une solution d'une application plus facile.

Introduisons au numérateur la différentielle du trinome du 2.e degré, et pour cela remarquons que :
$x = \frac{1}{2c}\left(b+2cx\right) - \frac{b}{2c}$. nous aurons :

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \int x^{m-1} \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

et substituant dans $x\,dx$ à x sa valeur :

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx+2x^2}} = -\frac{b}{2c}\int x^{m-1} \frac{dx.}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + \frac{1}{c}\int x^{m-1}. \frac{d(a+bx+cx^2)}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

$$\int x^{m-1} \frac{d(a+bx+cx^2)}{2\sqrt{a+bx+cx^2}} = x^{m-1}.\sqrt{a+bx+cx^2} - (m-1)\int x^{m-2}.dx.\sqrt{a+bx+cx^2}$$

or. $\int x^{m-2}.dx\sqrt{a+bx+cx^2} = a\int \frac{x^{m-1}.dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + b\int \frac{x^{m-1}.dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + c\int \frac{x^m.dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

en multipliant et divisant par le radical.

Nous aurons donc en substituant :

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{b}{2c}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + \frac{1}{c}x^{m-1}\sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{(m-1)a}{c}\int \frac{x^{m}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$
$$-\frac{(m-1)b}{c}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$
$$(m-1)\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

$$m.\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{c}x^{m-1}\sqrt{a+bx+cx^2} + \frac{(1-2m)b}{2c}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\ \frac{(m-1)a}{c}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

Nous faisons par là dépendre l'intégrale cherchée, de deux autres, dont l'une à l'exposant $m-1$, et l'autre $m-2$.