SYNOPSIS

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES DÉTAILLÉE

Préface de la seconde édition

Le cours dont est issu ce livre a pris fin, et j'en ai profité pour inclure le matériel pédagogique de la dernière année, et divers compléments (près de 200 pages au total).

Le Vocabulaire Mathématique a vu sa taille doubler par rapport à la première édition, et offre maintenant (si on lui adjoint un peu de l'analyse réelle des chapitres II, III et IV) un survol assez complet d'un cours correspondant aux deux années de classe préparatoire dans un lycée ambitieux(2), avec plus d'une centaine d'exercices corrigés dont beaucoup sont des classiques faisant partie de la culture de ces classes. Il ne s'agit pas d'un cours organisé, et je ne pense pas que ce soit l'endroit parfait pour un premier contact avec les sujets qu'il regroupe (les cours sont faits pour cela) ; son but est plutôt de rassembler et de préciser, sous une forme compacte, les résultats d'usage constant(3).

Le chapitre « Problèmes corrigés » a été enrichi d'exercices posés lors des examens finaux, et de quatre problèmes : l'un (prob. H.12) propose une démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ qui utilise la fonction Γ dans le plan complexe, un autre (prob. H.11) vise à démontrer l'identité $q^{1/24}\prod_{n\geqslant 1}(1-q^n)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}(-1)^m q^{(6m+1)^2/24}$ due à Euler et en profite pour passer en revue la plupart des techniques de transformée de Fourier et de fonctions holomorphes, le troisième (prob. H.13) présente un résultat très frappant de Borel concernant la rationalité d'une série $\sum a_n z^n$ à coefficients entiers, et le dernier (prob. H.4) établit la table des caractères du plus petit groupe simple après A_5. Les problèmes de ce genre sont une spécialité bien française, et je pense qu'ils expliquent en grande partie les succès de l'École Française de mathématiques : ils permettent d'illustrer l'unité des mathématiques en montrant, à un niveau relativement élémentaire, l'intérêt de combiner des techniques différentes. Ils offrent une aide irremplaçable pour assimiler les énoncés du cours et apprécier leur puissance, et mon conseil serait de chercher à les résoudre (et d'aller voir(4) la solution en cas d'échec), avant d'essayer de maîtriser les démonstrations des théorèmes fondamentaux (lire lesdites démonstrations peut toutefois être utile pour

(2) Cela correspond à peu près à ce que j'ai eu la chance de recevoir comme cours en math. sup. (la pénurie de professeurs de mathématiques n'avait pas encore été résolue par une diminution drastique des heures d'enseignement au collège et au lycée et on arrivait en classe préparatoire nettement mieux armé qu'à l'heure actuelle) ; je voudrais en profiter pour remercier D. Monasse du riche et beau cours qu'il nous a offert cette année-là, et dont j'utilise le contenu tous les jours de ma vie de mathématicien.

(3) Avec des démonstrations en petits caractères pour ceux qui aiment bien pouvoir vérifier que l'on n'est pas en train de leur raconter des sornettes ; certaines de ces démonstrations sont d'ailleurs assez belles

(4) Lire la solution d'une question à laquelle on n'a pas réfléchi est la recette idéale pour ne rien apprendre ; par contre essayer de résoudre une question soi-même est la meilleure manière pour préparer le cerveau à recevoir et assimiler la solution. Les puristes prétendront qu'il ne faut jamais aller voir la solution et tout résoudre soi-même (c'est la position des japonais en ce qui concerne les problèmes de go ; celle des chinois est plutôt qu'il faut réfléchir dix minutes et aller voir la solution si on ne trouve pas ; il y a 30 ans, les japonais étaient de loin les plus forts, mais ils se sont depuis fait dépasser par les chinois et les coréens...).

se faire une idée de la manière dont les concepts s'articulent, mais s'acharner à les retenir est plutôt une perte de temps).

Les autres ajouts notables sont :

— un appendice (annexe E) démontrant la transcendance de π et l'existence d'une infinité de $\zeta(2n+1)$ irrationnels (en écho au prob. H.12),

— une construction complète de la fonction zêta p-adique (§ D.4),

— des remarques sur les équations diophantiennes (§ F.2).

J'ai appris énormément de choses en écrivant ce texte, et j'espère que le lecteur y trouvera de quoi satisfaire sa curiosité. Étant arithméticien, j'ai privilégié les problèmes issus de la théorie des nombres pour illustrer l'unité[5] des mathématiques ; quelqu'un de plus proche de la physique aurait probablement pu écrire autant d'appendices inspirés de problèmes physiques et mettant en jeu les mathématiques du Vocabulaire et des chapitres I à VII. La géométrie et les probabilités sont presque totalement absentes ; c'est fort regrettable car la vision que ces théories apportent est fondamentale (en particulier en théorie des nombres ou en physique), mais c'est un reflet de l'organisation de l'enseignement des mathématiques dans notre pays.

[5] Il est assez fascinant de voir comment les concepts se répondent d'une théorie ou d'un monde à l'autre. La note 50 du Vocabulaire en fournit une illustration assez frappante. De même, le prob. H.9 m'a été inspiré par le th. D.3.2 du monde p-adique, dont je me suis demandé ce qu'il pouvait bien devenir dans le monde réel (ou complexe) ; j'ai réalisé par la suite qu'il s'agissait d'un résultat parfaitement classique dans la veine du th. de Paley-Wiener.