

Table des matières

1	INTRODUCTION A LA MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET A LA SIMULATION NUMÉRIQUE	1
1.1	Introduction générale	1
1.2	Un exemple de modélisation	2
1.3	Quelques modèles classiques	9
1.3.1	Équation de la chaleur	9
1.3.2	Équation des ondes	10
1.3.3	Le Laplacien	12
1.3.4	Équation de Schrödinger	12
1.3.5	Système de Lamé	13
1.3.6	Système de Stokes	14
1.3.7	Équations des plaques	14
1.4	Calcul numérique par différences finies	15
1.4.1	Principes de la méthode	15
1.4.2	Résultats numériques pour l'équation de la chaleur	18
1.4.3	Résultats numériques pour l'équation d'advection	22
1.5	Remarques sur les modèles mathématiques	26
1.5.1	Notion de problème bien posé	27
1.5.2	Classification des équations aux dérivées partielles	29
2	MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES	31
2.1	Introduction	31
2.2	Différences finies pour l'équation de la chaleur	32
2.2.1	Divers exemples de schémas	32
2.2.2	Consistance et précision	35
2.2.3	Stabilité et analyse de Fourier	37
2.2.4	Convergence des schémas	42
2.2.5	Schémas multiniveaux	44
2.2.6	Le cas multidimensionnel	46
2.3	Autres modèles	51
2.3.1	Équation d'advection	51
2.3.2	Équation des ondes	59

3	FORMULATION VARIATIONNELLE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES	65
3.1	Généralités	65
3.1.1	Introduction	65
3.1.2	Formulation classique	66
3.1.3	Le cas de la dimension un d'espace	67
3.2	Approche variationnelle	68
3.2.1	Formules de Green	68
3.2.2	Formulation variationnelle	71
3.3	Théorie de Lax-Milgram	74
3.3.1	Cadre abstrait	74
3.3.2	Application au Laplacien	77
4	ESPACES DE SOBOLEV	81
4.1	Introduction et avertissement	81
4.2	Fonctions de carré sommable et dérivation faible	82
4.2.1	Quelques rappels d'intégration	82
4.2.2	Dérivation faible	83
4.3	Définition et principales propriétés	86
4.3.1	Espace $H^1(\Omega)$	86
4.3.2	Espace $H_0^1(\Omega)$	90
4.3.3	Traces et formules de Green	92
4.3.4	Un résultat de compacité	97
4.3.5	Espaces $H^m(\Omega)$	98
4.4	Quelques compléments utiles	101
4.4.1	Démonstration du Théorème 4.3.5 de densité	101
4.4.2	Espace $H(\text{div})$	103
4.4.3	Espaces $W^{m,p}(\Omega)$	105
4.4.4	Dualité	106
4.5	Lien avec les distributions	107
5	ÉTUDE MATHÉMATIQUE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES	111
5.1	Introduction	111
5.2	Étude du Laplacien	112
5.2.1	Conditions aux limites de Dirichlet	112
5.2.2	Conditions aux limites de Neumann	118
5.2.3	Coefficients variables	125
5.2.4	Propriétés qualitatives	129
5.3	Résolution d'autres modèles	139
5.3.1	Système de l'élasticité linéarisée	139
5.3.2	Équations de Stokes	147

6	MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS	151
6.1	Approximation variationnelle	151
6.1.1	Introduction	151
6.1.2	Approximation interne générale	152
6.1.3	Méthode de Galerkin	155
6.1.4	Méthode des éléments finis (principes généraux)	155
6.2	Éléments finis en dimension $N = 1$	156
6.2.1	Éléments finis \mathbb{P}_1	156
6.2.2	Convergence et estimation d'erreur	161
6.2.3	Éléments finis \mathbb{P}_2	166
6.2.4	Propriétés qualitatives	168
6.2.5	Éléments finis d'Hermite	172
6.3	Éléments finis en dimension $N \geq 2$	174
6.3.1	Éléments finis triangulaires	174
6.3.2	Convergence et estimation d'erreur	186
6.3.3	Éléments finis rectangulaires	194
6.3.4	Éléments finis pour Stokes	199
6.3.5	Visualisation des résultats numériques	205
7	PROBLÈMES AUX VALEURS PROPRES	209
7.1	Motivation et exemples	209
7.1.1	Introduction	209
7.1.2	Résolution des problèmes instationnaires	210
7.2	Théorie spectrale	213
7.2.1	Généralités	213
7.2.2	Décomposition spectrale d'un opérateur compact	215
7.3	Valeurs propres d'un problème elliptique	218
7.3.1	Problème variationnel	218
7.3.2	Valeurs propres du Laplacien	222
7.3.3	Autres modèles	226
7.4	Méthodes numériques	229
7.4.1	Discretisation par éléments finis	229
7.4.2	Convergence et estimations d'erreur	232
8	PROBLÈMES D'ÉVOLUTION	235
8.1	Motivation et exemples	235
8.1.1	Introduction	235
8.1.2	Modélisation et exemples d'équations paraboliques	236
8.1.3	Modélisation et exemples d'équations hyperboliques	237
8.2	Existence et unicité dans le cas parabolique	238
8.2.1	Formulation variationnelle	238
8.2.2	Un résultat général	240
8.2.3	Applications	245
8.3	Existence et unicité dans le cas hyperbolique	250

8.3.1	Formulation variationnelle	250
8.3.2	Un résultat général	251
8.3.3	Applications	254
8.4	Propriétés qualitatives dans le cas parabolique	257
8.4.1	Comportement asymptotique	257
8.4.2	Principe du maximum	259
8.4.3	Propagation à vitesse infinie	260
8.4.4	Régularité et effet régularisant	261
8.4.5	Équation de la chaleur dans tout l'espace	263
8.5	Propriétés qualitatives dans le cas hyperbolique	265
8.5.1	Réversibilité en temps	265
8.5.2	Comportement asymptotique et équipartition de l'énergie	266
8.5.3	Vitesse de propagation finie	267
8.6	Méthodes numériques dans le cas parabolique	269
8.6.1	Semi-discrétisation en espace	269
8.6.2	Discrétisation totale en espace-temps	271
8.7	Méthodes numériques dans le cas hyperbolique	274
8.7.1	Semi-discrétisation en espace	275
8.7.2	Discrétisation totale en espace-temps	276
9	INTRODUCTION À L'OPTIMISATION	281
9.1	Motivation et exemples	281
9.1.1	Introduction	281
9.1.2	Exemples	282
9.1.3	Définitions et notations	288
9.1.4	Optimisation en dimension finie	289
9.2	Existence d'un minimum en dimension infinie	291
9.2.1	Exemples de non-existence	291
9.2.2	Analyse convexe	294
9.2.3	Résultats d'existence	297
10	CONDITIONS D'OPTIMALITÉ ET ALGORITHMES	301
10.1	Généralités	301
10.1.1	Introduction	301
10.1.2	Différentiabilité	302
10.2	Conditions d'optimalité	307
10.2.1	Inéquations d'Euler et contraintes convexes	307
10.2.2	Multiplicateurs de Lagrange	310
10.3	Point-selle, théorème de Kuhn et Tucker, dualité	321
10.3.1	Point-selle	322
10.3.2	Théorème de Kuhn et Tucker	323
10.3.3	Dualité	324
10.4	Applications	328
10.4.1	Énergie duale ou complémentaire	328

10.4.2	Commande optimale	330
10.4.3	Optimisation des systèmes distribués	335
10.5	Algorithmes numériques	337
10.5.1	Introduction	337
10.5.2	Algorithmes de type gradient (cas sans contraintes)	338
10.5.3	Algorithmes de type gradient (cas avec contraintes)	341
10.5.4	Méthode de Newton	347
11	MÉTHODES DE LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE	
	(Rédigé en collaboration avec Stéphane Gaubert)	351
11.1	Introduction	351
11.2	Programmation linéaire	352
11.2.1	Définitions et propriétés	352
11.2.2	Algorithme du simplexe	357
11.2.3	Algorithmes de points intérieurs	362
11.2.4	Dualité	362
11.3	Polyèdres entiers	366
11.3.1	Points extrémaux de compacts convexes	366
11.3.2	Matrices totalement unimodulaires	369
11.3.3	Problèmes de flots	372
11.4	Programmation dynamique	376
11.4.1	Principe d'optimalité de Bellman	376
11.4.2	Problème en horizon fini	377
11.4.3	Problème du chemin de coût minimum, ou d'arrêt optimal	380
11.5	Algorithmes gloutons	385
11.5.1	Généralités sur les méthodes gloutonnes	385
11.5.2	Algorithme de Kruskal pour le problème de l'arbre couvrant de coût minimum	386
11.6	Séparation et relaxation	388
11.6.1	Séparation et évaluation (branch and bound)	388
11.6.2	Relaxation de problèmes combinatoires	393
	ANNEXE : ESPACES DE HILBERT	403
	ANNEXE : ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE	409
13.1	Résolution des systèmes linéaires	409
13.1.1	Rappels sur les normes matricielles	410
13.1.2	Conditionnement et stabilité	413
13.1.3	Méthodes directes	415
13.1.4	Méthodes itératives	428
13.1.5	Méthode du gradient conjugué	432
13.2	Calcul de valeurs et vecteurs propres	440
13.2.1	Méthode de la puissance	440
13.2.2	Méthode de Givens-Householder	443

13.2.3 Méthode de Lanczos	446
Bibliographie	451
Index	454
Index des applications	458
Index des notations	459