

Table des matières

1	Le mouvement brownien	1
1.1	Bref historique du mouvement brownien	1
1.2	Le mouvement brownien et ses trajectoires	4
1.2.1	Définition	5
1.2.2	Propriétés de la courbe brownienne	7
1.3	Invariance par translation et propriétés de Markov	8
1.3.1	Mouvement brownien avec dérive	8
1.3.2	Un premier résultat d'invariance par translation	9
1.3.3	Le principe de symétrie : une version simplifiée	10
1.3.4	Temps d'arrêt	12
1.3.5	Le résultat général d'invariance par translation	13
1.3.6	Application	14
1.4	Propriétés de la courbe brownienne	15
1.4.1	Comportement à l'infini	15
1.4.2	Irrégularité des trajectoires	17
1.4.3	Les zéros du mouvement brownien	18
1.5	Construction du mouvement brownien	19
1.5.1	L'approximation par marche aléatoire	19
1.5.2	Pont brownien	22
1.5.3	Convergence de l'approximation par pont brownien $[0,1]$: construction de Lévy	23
1.5.4	Décomposition du mouvement brownien en séries de Fourier	25
1.6	Exercices	26
2	Équation de la chaleur et formule d'Itô	31
2.1	Introduction	31
2.2	L'équation de la chaleur	32
2.2.1	Le cas simple de fonction $f(x)$	33
2.2.2	Le cas général de fonction $f(t, x)$	34

2.2.3	Application à l'équation de la chaleur dans un intervalle	35
2.2.4	Équation aux dérivées partielles pour le mouvement brownien avec dérive	36
2.2.5	Commentaires	37
2.3	Variation quadratique	38
2.3.1	Notations et définitions	38
2.3.2	Convergence	38
2.4	La formule d'Itô	41
2.5	Intégrale de Wiener	44
2.6	Formule d'Itô pour d'autres processus	45
2.6.1	Le cas unidimensionnel	45
2.6.2	Le cas multidimensionnel	49
2.7	Mouvement brownien vectoriel	51
2.7.1	Mouvement brownien vectoriel standard	51
2.7.2	Mouvement brownien vectoriel corrélé	53
2.8	Exercices	56
3	Quelques processus continus essentiels	61
3.1	Mouvement brownien géométrique	61
3.1.1	Définition et propriétés	61
3.1.2	Équation aux dérivées partielles pour le mouvement brownien géométrique	63
3.1.3	Formule d'Itô pour le mouvement brownien géométrique	63
3.2	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck	64
3.2.1	Le mouvement brownien physique ou processus d'Ornstein- Uhlenbeck	64
3.2.2	Propriétés du processus d'Ornstein-Uhlenbeck	65
3.2.3	EDP associée au processus d'Ornstein-Uhlenbeck	67
3.3	Equations différentielles stochastiques	69
3.3.1	Définition	69
3.3.2	La transformation de Lamperti (1964)	69
3.3.3	La représentation de Doss (1977)	71
3.4	Exercices	72
4	Processus à sauts	75
4.1	Processus de Poisson composé	75
4.2	Modèle mixte brownien-Poisson	77
4.2.1	Définitions	77
4.2.2	Propriétés	78
4.3	Équation de la chaleur intégro-différentielle	79

4.3.1	Modèle mixte brownien-Poisson arithmétique	79
4.3.2	Modèle mixte brownien-Poisson géométrique	82
4.4	Formule d'Itô	82
4.4.1	Notations sur les sauts	83
4.4.2	Formule d'Itô	83
4.4.3	Applications au processus mixte brownien-Poisson géométrique	85
4.5	Exercices	85
5	Changements de probabilité	87
5.1	Généralités	87
5.1.1	Notions élémentaires et exemples	87
5.1.2	Changement de probabilité et changement de tribus	89
5.2	Modèles gaussiens	90
5.2.1	Le cas des gaussiennes réelles	90
5.2.2	Le cas vectoriel	92
5.2.3	La formule de Cameron-Martin	93
5.2.4	Un exemple d'application statistique	94
5.3	Modèles poissonniens	95
5.4	Modèles mixtes browniens-Poisson	96
5.5	Exercices	97
6	Marchés financiers et produits dérivés	101
6.1	Un peu d'histoire	102
6.1.1	De l'Antiquité au XIX ^e siècle	102
6.1.2	Le bouleversement des années 70	102
6.2	Produits dérivés	104
6.2.1	Un peu de typologie	104
6.2.2	Mais encore...	105
6.2.3	Les dérivés de crédit	107
6.2.4	Utilisation et utilité des produits dérivés	107
6.3	Le vendeur d'options : quelle gestion du risque?	108
6.4	Hypothèses de la gestion dynamique efficace	109
7	Couverture à la Black-Scholes-Merton	113
7.1	Marché sans friction et absence d'arbitrage	113
7.2	Modélisation probabiliste du marché	116
7.2.1	Espace de probabilité et mouvement brownien	117
7.2.2	Modélisation du titre sous-jacent	117
7.3	Portefeuille dynamique	118
7.3.1	Portefeuille de couverture	118

7.3.2	Traduction du problème de couverture parfaite de l'option . . .	120
7.3.3	Résolution par équation aux dérivées partielles	121
7.4	La formule de Black et Scholes	121
7.4.1	Résolution de l'EDP par la formule de Feynman-Kac	121
7.4.2	Une ré-interprétation avec un point de vue risque-neutre	123
7.4.3	Les formules fermées	124
7.4.4	Les grecques	125
7.4.5	Résultats numériques	127
7.5	Le cas de titres versant des dividendes	129
7.5.1	Le cas de titres versant un taux de dividende continu	129
7.5.2	Le cas de titres versant des dividendes discrets	131
7.6	Exercices	134
8	Mise en pratique	139
8.1	Estimation de la volatilité	139
8.1.1	Volatilité historique	139
8.1.2	Volatilité implicite	140
8.1.3	Conclusion	142
8.2	Couverture dynamique	143
8.3	Volatilité implicite et Risk-Management	144
9	Au delà des options d'achat et de vente	147
9.1	Options barrières	147
9.1.1	Introduction	147
9.1.2	EDP et espérance risque-neutre	148
9.1.3	Prix des DIC regular ($D \leq K$) dans le cas $\gamma = 1$ ($r = q$)	150
9.1.4	Prix des DIC regular ($D \leq K$) dans le cas général	151
9.1.5	Prix des DIC reverse ($D > K$)	152
9.2	Taux d'intérêt : modèle de Vasicek	152
9.2.1	Obligation zéro-coupon	153
9.2.2	Le modèle de Vasicek [32] pour le taux court	153
9.2.3	Propriétés de $(r_t)_t$	154
9.2.4	Prix des zéro-coupons	155
9.2.5	Courbe des taux	155
9.2.6	Modèle de Hull-White à 1 facteur	156
9.3	Risque de crédit : modèles structurels	157
9.3.1	Modèle de la firme de Merton	158
9.3.2	Extensions du modèle de la firme	160
9.4	Options lookback	161
9.5	Call sur zéro-coupon dans un modèle de Vasicek	163

9.6 Exercices	164
10 Modèles financiers avec sauts	167
10.1 Modèle mixte brownien-Poisson géométrique	167
10.1.1 Modèle de Merton [23]	168
10.1.2 Modèle de Kou et Wang [18]	168
10.2 Couverture d'option	169
10.2.1 Les sauts comme nouvelles sources de risque	169
10.2.2 Couverture parfaite dans le cas d'un nombre fini de sauts possibles	170
10.2.3 Couverture imparfaite en moyenne quadratique	172
10.3 Formule de Merton pour les Calls	174
10.4 Exercices	176
A Appendices	185
A.1 A propos des gaussiennes	185
A.1.1 Variables gaussiennes	185
A.1.2 Vecteurs gaussiens	186
A.1.3 Processus gaussien	187
A.2 Quelques rappels de théorie de l'intégration	187
A.2.1 Tribus et variables aléatoires	187
A.2.2 Mesures et distributions de probabilité	188
A.2.3 Indépendance et conditionnement	189
A.2.4 Fonctions aléatoires et loi temporelle	190
A.3 Formule de Lévy-Khintchine	191
A.4 Simulation	192
A.4.1 Simulation de variables aléatoires	192
A.4.2 Calcul d'espérance par méthode de Monte Carlo	196
B Correction des exercices	201