

## INTRODUCTION

Si l'on veut quitter le monde du « linéaire » qui à l'évidence est insuffisant pour décrire la réalité, deux voies se présentent : celle de la géométrie algébrique qui étudie les polynômes et celle du calcul différentiel qui met en place une classe de fonctions à la fois plus riche et plus « flexible ». Ce mot a aujourd'hui un sens mathématique assez précis, ainsi que son contraire « rigide », l'étude de la frontière flexibilité-rigidité étant l'objet de nombreux travaux actuels. Signalons aussi la géométrie analytique qui s'insère entre les deux et qui travaille avec les fonctions analytiques, c'est-à-dire développables en séries entières. Parmi ces voies celle du calcul différentiel correspond bien à l'esprit de l'Analyse ; elle est relativement facile à aborder et possède un vaste champ d'applications. Nous tâcherons de lui garder sa saveur géométrique.

Le calcul différentiel est un sujet techniquement délicat à cause de ses notations. Ce n'est pas vraiment une théorie, c'est plutôt un outil ; pour en apprécier l'efficacité il convient de le mettre en situation.

Nous avons donc choisi de commencer ce cours en parlant des équations différentielles. C'est un sujet dont l'apport à de nombreuses sciences est avéré, et même si la plupart des équations de la physique sont des équations aux dérivées partielles, il est bon d'être familiarisé avec les équations différentielles avant d'aborder les EDP. De plus la mécanique céleste, qui fait l'objet de vigoureuses recherches non seulement parce qu'on s'interroge sur l'instabilité éventuelle du système solaire mais plus prosaïquement à cause des satellites, offre un champ privilégié aux équations différentielles et plus généralement à la théorie des systèmes dynamiques, avec leurs aspects déterministes et aléatoires. Le point fascinant est que le système des équations régissant le mouvement de  $N$  corps ( $N \geq 3$ ) soumis à l'attraction gravitationnelle n'est pas « intégrable » (résoluble par des formules explicites). Ce fait, parmi beaucoup d'autres établis par Poincaré dans les *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, oblige à un changement de point de vue considérable : au lieu de chercher à résoudre une équation dont on sait qu'elle n'est pas résoluble explicitement, on adopte le point de vue de mener une étude *qualitative*, c'est-à-dire de chercher le comportement géométrique des solutions. À notre niveau, c'est ce point de vue que nous adopterons.

Au tout début de l'Analyse, intégrer est le geste réciproque de différentier. Mais dès que l'on a affaire à des fonctions de plusieurs variables, l'idée de moyenne prend le pas sur le calcul de primitives. Pour les fonctions continues, le calcul intégral de Riemann fondé sur une idée naïve de volume fonctionne de façon satisfaisante. Cependant les passages à la limite font sortir du monde des fonctions continues et rapidement les difficultés commencent ; on ne sait plus pour quelle classe de fonctions (à  $n$  variables) on peut

définir une intégrale (multiple), qui d'une part se comporte bien par passage à la limite sous le signe somme et dont d'autre part le calcul se ramène au calcul de  $n$  intégrales simples. Ces difficultés sont levées par l'intégrale de Lebesgue. La clé réside dans la notion de *mesure* qui généralise le volume à des domaines qui ne sont plus limités par des graphes de fonctions continues.

Dans cette théorie de l'intégration, les ensembles de mesure nulle jouent un rôle très important puisque l'intégrale d'une fonction ne change pas lorsqu'on la modifie sur un ensemble de mesure nulle. Alors vient une relation très profonde entre le calcul différentiel et le calcul intégral : par un changement de variable différentiable, un ensemble de mesure nulle reste de mesure nulle, ce qui n'est pas le cas pour certains changements de variable continus.

La théorie de la mesure, qui gagne en efficacité à être présentée dans un cadre abstrait, ne sert pas seulement à définir l'intégrale de Lebesgue. Elle est bien adaptée aux Probabilités. Dans le cadre des questions évoquées ici, elle permet par exemple de formuler un principe statistique sur les orbites d'un système mécanique évoluant avec conservation de l'énergie (Principe de récurrence de Poincaré) : si le niveau d'énergie est compact, presque toute orbite est *récurrente*, ou encore : pour toute condition initiale, à l'exception d'un ensemble de mesure nulle, le système mécanique considéré repassera dans le futur arbitrairement près de sa position initiale. Ce retour annoncé comme presque certain est évidemment très troublant. Avant la mécanique quantique, la mécanique classique a ses paradoxes !

En somme, dans ses deux parties, calcul différentiel et calcul intégral, ce cours s'inspire de ce que l'on appelle aujourd'hui la théorie des systèmes dynamiques. Il en pose les outils de base, permettant directement un approfondissement dans cette direction. Bien entendu, ces outils se retrouvent aussi dans beaucoup d'autres branches des mathématiques et des mathématiques appliquées.

## Plan du cours

Le chapitre I étudie les équations différentielles avec les moyens que nous offre le calcul différentiel à une variable (supposé bien connu) et la topologie (théorème du point fixe pour les applications contractantes dans les espaces complets, compacité). On établit l'existence et l'unicité des solutions « maximales » (théorème de Cauchy-Lipschitz), la continuité par rapport aux conditions initiales ; on s'intéresse à la durée de vie des solutions, avec des estimations explicites grâce au lemme de Gronwall.

Le chapitre II met en place le calcul différentiel proprement dit, y compris en dimension infinie. Le théorème des fonctions implicites est la pièce maîtresse du calcul différentiel, théorème que l'on croit savoir mais que l'on ne reconnaît qu'avec peine dans une situation concrète. Il n'a d'ailleurs peut-être pas fini de dévoiler sa profondeur. Son application aux équations différentielles (due à J. Robbin) ne date que des années 60.

Signalons la dernière section sur le « lemme de Morse », lemme qui tient une place majeure en géométrie. Celui-ci compare (localement) une fonction différentiable à une fonction quadratique et non à une fonction linéaire comme on le fait au début du calcul différentiel.

Au chapitre III on développe quelques aspects géométriques du calcul différentiel. À l'aide du théorème des fonctions implicites on définit les surfaces, et plus généralement les

sous-variétés, comme des objets de l'espace euclidien qui se laissent linéariser localement. Une idée féconde, en fait universelle, pour construire des sous-variétés est la *transversalité* au sens de R. Thom ; on s'aperçoit que l'intersection de deux sous-variétés en position transversale est une sous-variété.

Le tout début du calcul différentiel sur les sous-variétés est abordé. On explique la notion de différentielle (première) pour une fonction sur une surface (ou sur une sous-variété). En revanche on constate qu'il n'existe pas de différentielle seconde pour une fonction définie sur une sous-variété, au moins en un sens directement comparable à celui donné pour la différentielle seconde d'une fonction définie sur un espace « plat ». La « courbure » est responsable de cette difficulté, au cœur de la relativité générale et qui nécessite un arsenal mathématique assez lourd pour être contournée.

Le chapitre IV reprend l'étude des équations différentielles avec les outils du calcul différentiel : différentiabilité par rapport aux conditions initiales, petites perturbations, stabilité des équilibres, conservation de l'énergie. Les champs de *gradient* donnent l'exemple d'une dynamique particulièrement simple, où les comportements asymptotiques des solutions peuvent être complètement décrits.

La théorie de la mesure est introduite au chapitre V. Le début est formel, mais à partir du moment où l'on sait que la mesure de Lebesgue existe sur  $\mathbf{R}^n$ , ce qui est un théorème difficile, on peut « mesurer » des parties dont la topologie est très compliquée et pour lesquelles toute idée naïve de volume échoue.

Au chapitre VI on récolte les fruits des abstractions du chapitre précédent avec la justification tant attendue de certains passages à la limite : théorème de convergence dominée de Lebesgue, dérivation sous le signe somme.

Le chapitre VII est consacré aux intégrales multiples : théorème de Fubini, changement de variable. Le cours se termine par le théorème de récurrence de Poincaré dont on a déjà parlé et par un retour à la géométrie. Évoquons-le dans le cas des surfaces.

D'une part on définit l'élément d'aire d'une surface (plongée dans l'espace euclidien) : d'autre part on montre que le contour apparent pour la projection d'une surface sur un plan est de mesure nulle au sens de la mesure d'aire de ce plan (théorème de Sard). On peut alors énoncer et démontrer la formule de Stokes pour le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface compacte ; cette formule existe en toute dimension. Au départ, la formule de Stokes appartient à la Physique. Aujourd'hui, convenablement généralisée, elle est à la base du calcul de certains *invariants* qui permettent de distinguer les (sous)-variétés les unes des autres, ce qui est l'objet de la *topologie algébrique*.

## Mode d'emploi

Les chapitres sont numérotés en chiffres romains ; ceux-ci sont subdivisés en sous-chapitres dans lesquels tous les éléments remarquables reçoivent un numéro. Les formules ne sont que très rarement numérotées ; lorsque c'est le cas, la numérotation est interne au sous-chapitre. Un carré noir ■ marque la fin de chaque preuve.

Le rôle de l'appendice est avant tout de permettre d'utiliser librement le langage de la topologie dans le corps du texte. Il rassemble donc les principales définitions topologiques à l'intention de ceux qui n'en sont pas familiers. Parfois il fait double emploi avec des paragraphes dans les chapitres ; c'est intentionnel, en sorte que la lecture puisse se faire en ayant le moins possible à tourner les pages. Il est plus complet sur quelques sujets :

- Le théorème de Urysohn et les partitions de l'unité  $C^0$  (les partitions de l'unité  $C^\infty$  feront l'objet d'un exercice) ; il n'en est pas fait un usage important dans ce cours, mais c'est un outil technique bien utile qui sera sans doute utilisé dans d'autres cours.

- La compacité. Au-delà de la définition et des propriétés élémentaires, on donne le théorème de Borel-Lebesgue qui, s'il n'est pas utilisé ici, le sera dans le cours sur les *distributions*.

- Les ensembles de Cantor et la courbe de Peano. Historiquement ces objets insolites étaient avant tout des contre-exemples à quelques spéculations. Aujourd'hui ils occupent une place centrale dans certains sujets (systèmes dynamiques, mouvement brownien).

Pour le reste, je dois seulement avertir le lecteur que le texte n'est pas totalement linéaire. Par exemple, à propos des équations différentielles, on évoque l'effet du flot sur le volume (théorème de Liouville) avant d'avoir établi la formule de changement de variable dans les intégrales multiples. J'espère qu'une telle anticipation sera motivante.

Les paragraphes en petits caractères sont là pour donner du relief au texte. Ils ne marquent pas la frontière entre le nécessaire et le superflu. On trouvera peut-être que certains paragraphes devraient être en petits caractères, alors qu'ils le sont en grands, et réciproquement. Quoi qu'il en soit j'espère qu'ils contribueront à éclairer la compréhension de l'ensemble.

Je remercie Bruno Bensasson (X92) pour sa lecture d'une version préliminaire et ses nombreux commentaires. Je remercie les élèves de la promotion X94 pour leurs remarques constructives, plus spécialement les délégués Émilie Soucaret et Thomas Guyot, ainsi que Francis Bach. Beaucoup de corrections et améliorations m'ont été encore proposées par Bertrand de Singly (X95) et je l'en remercie ici.

Je remercie le secrétariat du Centre de mathématiques, en particulier Catherine François, Claudine Harmide et Paule Truc, pour l'aide compétente qu'elles m'ont apportée dans la fabrication de ce texte.

Palaiseau, juillet 1997

F. L.

Dernière révision : juillet 2000

## Ouvrages de référence

Les ouvrages marqués d'une étoile sont d'un niveau plus avancé.

V. I. ARNOLD

[Arnold1] *Équations différentielles ordinaires*, Mir, Moscou, traduction française 1974.

[Arnold2]\* *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou, traduction française 1976.

A. AVEZ, *Calcul différentiel*, Masson, Paris 1983.

P. BILLINGSLEY, *Probability and measure theory*, John Wiley & Sons, New-York 1979.

H. CARTAN, *Calcul différentiel*, Hermann, Paris 1977.

J.-P. DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, 1991.

M. DEMAZURE, *Catastrophes et bifurcations*, Ellipses, Paris 1989.

J. DUGUNDJI,\* *Topology*, Allyn & Bacon, 1966.

G. FOLLAND, *Real analysis, Modern techniques and their applications*, J. Wiley & Sons, New York, 1984.

M. HIRSCH,\* *Differential topology*, GTM, Springer, 1976.

M. HIRSCH - S. SMALE, *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, Acad. press, London 1974.

J. HOCKING - G. YOUNG,\* *Topology*, Dover Pub., New-York 1988.

S. LEFSCHETZ, *Differential equations: geometric theory*, Dover Pub., New-York 1977.

J.E. MARSDEN - M. J. HOFFMAN, *Elementary classical analysis*, W.H. Freeman & Co, New York, 1993.

J. MILNOR,\* *Topology from the differential viewpoint*, Univ. Press of Virginia at Charlottesville, 1964.

F. PHAM, *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés*, Interéditions, Paris 1992.

L.S. PONTRYAGIN, *Ordinary differential equations*, Pergamon Press, 1962.

*Équations différentielles*, Mir, Moscou, traduction française 1969.

N. ROUCHE - J. MAWHIN, *Équations différentielles ordinaires*, Masson, Paris 1973.

W. RUDIN, *Real and complex analysis*, Mc Graw-Hill, 1966, traduction française Masson 1980.

L. SCHWARTZ, *Analyse*, Hermann, Paris 1993.

*Analyse I. Théorie des ensembles et topologie.*

*Analyse II. Calcul différentiel et équations différentielles.*

*Analyse III. Calcul intégral.*

*Analyse IV. Applications à la théorie de la mesure.*

M. SPIVAK, *Calculus on manifolds*, Benjamin, New-york 1966.



## Chapitre I

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES I : POINT DE VUE ÉLÉMENTAIRE

Dans ce chapitre, on n'utilise du calcul différentiel que la notion de dérivée pour une fonction vectorielle d'une seule variable réelle. C'est la raison pour laquelle le point de vue est qualifié d'élémentaire.

### I.1. Position du problème

I.1.1. Une *équation différentielle du premier ordre* consiste en une liste de données à partir desquelles on formule un problème à résoudre.

Les *données* sont les suivantes :

- un ouvert  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ,
- un intervalle ouvert  $I \subset \mathbf{R}$ ,
- une application  $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbf{R}^n$ .

On note  $x$  la variable dans  $\Omega$  et  $t$  la variable dans  $I$ . La première variable est une variable de *position* si on utilise le langage de la mécanique ou d'état si on utilise un langage physico-chimique. L'espace  $\mathbf{R}^n$  contenant  $\Omega$  est un espace affine, constitué de points. La seconde variable est une variable de *temps*. Quant au  $\mathbf{R}^n$  du but, il faut y penser comme un espace vectoriel, l'espace vectoriel des vecteurs vitesses. Son élément général est noté  $\dot{x}$ .

Avec ces données l'équation différentielle s'écrit

$$\dot{x} = f(x, t) .$$

Il s'agit d'une écriture symbolique pour désigner au lecteur le *problème à résoudre* : trouver toutes les fonctions  $\gamma : J \rightarrow \mathbf{R}^n$  vérifiant les conditions suivantes :

- $J$  est un sous-intervalle de  $I$  non réduit à un point,
- $\gamma$  est dérivable en tout point de  $J$  et prend ses valeurs dans  $\Omega$ ,
- pour tout  $t \in J$ ,  $\frac{d\gamma}{dt}(t) = f(\gamma(t), t)$ .

### I.1.2. Commentaires

1) Dit avec les mots de la mécanique, il s'agit de trouver tous les mouvements possibles pour un mobile qui est astreint à avoir la vitesse  $f(x, t)$  quand il passe au point  $x$  à l'instant  $t$ .

2) L'intervalle  $J$ , domaine de définition de la solution  $\gamma$ , fait partie des inconnues. Il n'a aucune raison d'être égal à  $I$ . On connaît bien le phénomène d'explosion en temps fini qui se produit dans l'exemple suivant.

**Exemple.** Considérons l'équation différentielle  $\dot{x} = x^2$  où  $\Omega = \mathbf{R}$ ,  $I = \mathbf{R}$ . La solution  $\gamma$  qui passe en  $x_0$  au temps  $t_0$  est donnée par

$$\gamma(t) = \frac{x_0}{x_0(t_0 - t) + 1} .$$

Si  $x_0 > 0$ , cette formule n'est définie que pour  $t \in ]-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}[$ .

Cet exemple montre qu'une des questions importantes est la durée de vie des solutions. Cette question sera abordée plusieurs fois dans ce chapitre.

3) A partir d'une solution on en obtient d'autres en restreignant l'intervalle de définition. Il convient donc de chercher les solutions *maximales*, c'est-à-dire celles qui ne s'obtiennent pas à partir d'une autre par restriction.

4) En Mathématiques Spéciales, on écrit les équations différentielles du premier ordre sous la forme

$$y' = g(x, y) ,$$

dans lesquelles  $x$  et  $y$  sont des variables réelles. A un changement de notations près qu'on laisse au soin du lecteur, il s'agit du cas  $n = 1$ . Le cas  $n > 1$  était anciennement qualifié de *système* d'équations différentielles du premier ordre. D'ailleurs si on décompose  $x$  et  $\dot{x}$  en leurs  $n$  composantes  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ , l'équation différentielle s'écrit bien sous la forme d'un système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, t) . \end{cases}$$

Dans cette écriture,  $f_i : \Omega \times I \rightarrow \mathbf{R}$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante de la fonction vectorielle  $f$ . Mais attention : en général chaque ligne de ce système n'est pas une équation différentielle, à moins que pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $f_i$  ne soit fonction que de  $x_i$  et de  $t$ . Pour cette raison, il est préférable de dire que l'on a affaire à une équation différentielle (vectorielle) plutôt qu'à un système d'équations différentielles.

5) Si  $f$  est continue (dans la suite on fera des hypothèses plus fortes), on voit par composition d'applications continues que si  $\gamma$  est solution,  $\frac{d\gamma}{dt}$  est continue. Donc les solutions sont des fonctions vectorielles  $C^1$ .

Introduisons les espaces fonctionnels (de « dimension infinie ») suivants :



- $\mathcal{E}^1$  est l'ensemble des applications  $\gamma : J \rightarrow \Omega$  de classe  $C^1$  où  $J$  est un sous-intervalle de  $I$  ( $\mathcal{E}^1$  n'est pas un espace vectoriel) ;
- $\mathcal{E}^0$  est l'ensemble des applications  $d : J \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $C^0$ .

La dérivation donne une application  $D : \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^0$ . Par ailleurs à  $\gamma \in \mathcal{E}^1$  on peut associer  $F(\gamma) \in \mathcal{E}^0$  défini par

$$F(\gamma)(t) = f(\gamma(t), t)$$

pour  $t$  appartenant au domaine de définition de  $\gamma$ . Résoudre l'équation différentielle  $\dot{x} = f(x, t)$  revient donc à résoudre dans  $\mathcal{E}^1$  l'équation *ordinaire*

$$D(\gamma) = F(\gamma) .$$

Ce point de vue sera exploité au chapitre IV et une variante va nous servir tout de suite pour traiter les équations différentielles linéaires dépendant du temps. Dans ce cadre l'ingrédient topologique majeur pour la résolution des équations différentielles réside dans un théorème de point fixe, en l'occurrence le théorème du point fixe pour les applications contractantes (ou théorème du point fixe de Picard), appliqué dans un espace fonctionnel convenable. D'ailleurs le procédé itératif de Picard est un outil de base pour résoudre les équations non-linéaires ; on le reverra à l'occasion du théorème des fonctions implicites au chapitre II.

## I.2. Préliminaire topologique

### I.2.1. Suite de Cauchy, espace complet

1) Dans un espace métrique  $(X, d)$ , une suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  – on écrira simplement  $(x_n)$  – est *convergente* s'il existe  $x_\infty \in X$  tel que

$$d(x_n, x_\infty) \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow +\infty .$$

On dit que  $x_\infty$  est la *limite* de la suite  $(x_n)$  et on écrit  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_\infty$ . Par l'inégalité du triangle, la limite est unique lorsqu'elle existe.

2) Une partie  $A \subset X$  est dite *fermée* si pour toute suite  $(x_n)$  dans  $A$ , convergente dans  $X$ , la limite appartient à  $A$ .

3) Une suite  $(x_n)$  est dite de *Cauchy* si elle vérifie la condition suivante : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbf{N}$  tel que

$$m, p \geq N \implies d(x_m, x_p) \leq \varepsilon .$$

Par l'inégalité du triangle, une suite convergente est de Cauchy.

4) L'espace métrique  $(X, d)$  est dit *complet* si toute suite de Cauchy est convergente.

Par construction même,  $\mathbf{R}$  muni de la distance usuelle  $d(x, y) = |x - y|$  est complet. Plus généralement tout espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$  de dimension finie sur  $\mathbf{R}$  est complet lorsqu'il est muni de la distance  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

**I.2.2. Proposition.** *Dans un espace métrique complet, toute partie fermée est complète pour la métrique induite.*

**Démonstration.** Soit  $A$  fermée dans  $(X, d)$  complet. Soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy dans  $A$ . Elle a une limite  $x_\infty$  dans  $X$  car  $X$  est complet. Comme  $A$  est fermée dans  $X$ ,  $x_\infty$  appartient à  $A$ . ■

### I.2.3. L'espace des chemins d'un espace métrique complet

Soit  $(X, d)$  un espace métrique et soit  $\Lambda$  l'espace de ses *chemins*, c.-à-d. l'ensemble des applications continues  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  que l'on munit de la distance

$$d_\infty(\gamma, \gamma') = \sup_{t \in [0, 1]} d(\gamma(t), \gamma'(t)) .$$

La compacité de  $[0, 1]$  garantit que  $d_\infty$  est bien définie. On vérifie facilement les axiomes d'une distance. Noter qu'une suite  $(\gamma_n)$  tend vers  $\gamma$  au sens de  $d_\infty$  si et seulement si la suite  $(\gamma_n(t))$  dans  $X$  tend vers  $\gamma(t)$  *uniformément en*  $t \in [0, 1]$ , ou encore si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N$  tel que

$$n \geq N \implies d(\gamma_n(t), \gamma(t)) \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } t \in [0, 1] .$$

**Proposition.** *Si  $(X, d)$  est complet, l'espace métrique  $(\Lambda, d_\infty)$  est complet.*

**Démonstration.** Soit  $(\gamma_n)$  une suite de Cauchy pour  $d_\infty$ . On a la majoration uniforme en  $t$  :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \text{tel que } m, p \geq N, t \in [0, 1] \implies d(\gamma_m(t), \gamma_p(t)) \leq \varepsilon . \quad (1)$$

En particulier pour chaque  $t \in [0, 1]$ ,  $(\gamma_n(t))$  est une suite de Cauchy dans  $(X, d)$ , donc converge vers un point noté  $\gamma_\infty(t) \in X$ . De l'inégalité (1) on déduit (2) ci-dessous en faisant tendre  $p$  vers  $+\infty$  :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \text{tel que } m \geq N, t \in [0, 1] \implies d(\gamma_m(t), \gamma_\infty(t)) \leq \varepsilon . \quad (2)$$

Cela se traduit par

$$d_\infty(\gamma_n, \gamma_\infty) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 .$$

Enfin,  $\gamma_\infty : [0, 1] \rightarrow X$  est bien continu comme limite uniforme d'applications continues et ainsi  $\gamma_\infty$  appartient à  $\Lambda$ .

Rappelons l'argument pour ce dernier fait. D'après (2) et l'inégalité du triangle on a :

$$d(\gamma_\infty(t), \gamma_\infty(t')) \leq d(\gamma_m(t), \gamma_m(t')) + 2\varepsilon$$

où  $m$  est choisi  $\geq N$ . Comme  $\gamma_m$  est continue, pour  $t$  fixé, il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|t - t'| \leq \delta \implies d(\gamma_m(t), \gamma_m(t')) \leq \varepsilon .$$

Finalement, pour tout  $t \in [0, 1]$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on a trouvé  $\delta > 0$  tel que :

$$|t - t'| \leq \delta \implies d(\gamma_\infty(t), \gamma_\infty(t')) \leq 3\varepsilon$$

Cette implication exprime la continuité de  $\gamma_\infty$ . ■

Autant la compacité de  $[0, 1]$  nous a servi pour définir la distance  $d_\infty$ , autant aucune propriété topologique de la source n'est requise pour l'argument ci-dessus. On peut remplacer  $[0, 1]$  par n'importe quel espace topologique  $S$  et le résultat suivant reste vrai : une suite de Cauchy uniforme d'applications continues  $S \rightarrow X$  à valeurs dans un espace métrique complet  $X$  converge uniformément vers une application continue.

**I.2.4. Corollaire.** Soit  $x_0 \in X$  et soit  $\Lambda_0 \subset \Lambda$  le sous-espace des chemins commençant en  $x_0$  ( $\gamma(0) = x_0$ ). Muni de la métrique  $d_\infty$ ,  $\Lambda_0$  est complet.

**Démonstration.** Si  $(\gamma_n)$  est une suite dans  $\Lambda_0$  convergeant vers  $\gamma \in \Lambda$  au sens de  $d_\infty$ , alors  $(\gamma_n(0))$  tend vers  $\gamma(0)$  et donc  $\gamma(0) = x_0$ . Cela prouve que  $\Lambda_0$  est un sous-espace fermé de  $\Lambda$  pour la métrique  $d_\infty$ . Comme  $\Lambda$  est complet,  $\Lambda_0$  est lui-même complet d'après I.2.2. ■

### I.2.5. Application lipschitzienne, contraction

1) Soit  $(X, d)$  et  $(X', d')$  deux espaces métriques. Soit  $k > 0$ . Une application  $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$  est dite *k-lipschitzienne* si, pour tout  $x_1, x_2 \in X$ , on a

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq k d(x_1, x_2) .$$

On dit que  $f$  est *lipschitzienne* si elle est *k-lipschitzienne* pour un certain  $k > 0$ . Cette condition implique évidemment la continuité de  $f$ . La constante de Lipschitz de  $f$  est définie par

$$\text{lip}(f) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in X \\ x_1 \neq x_2}} \frac{d'(f(x_1), f(x_2))}{d(x_1, x_2)} .$$

2) On dit que  $f$  est une *contraction* si elle est *k-lipschitzienne* pour un certain  $k < 1$ .

### I.2.6. Le théorème du point fixe de Picard

**Théorème.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet non vide et soit  $T : X \rightarrow X$  une contraction. Alors il existe un unique point fixe, c'est-à-dire une unique solution à l'équation  $T(x) = x$ .

**Démonstration.** L'inégalité de contraction interdit d'avoir deux points fixes distincts. Par ailleurs on va montrer que, pour tout  $x \in X$ , la suite des itérés,

$$T^n(x) = T \circ T \cdots \circ T(x)$$

est une suite de Cauchy dans  $X$ . Sa limite  $x_0 = \lim_n T^n(x)$  vérifiera

$$T(x_0) = \lim_n T^{n+1}(x) = \lim_n T^n(x) = x_0$$

qui sera donc un point fixe de  $T$ . [Noter que  $T(\lim_n T^n(x)) = \lim_n T^{n+1}(x)$  car  $T$  est continue]. Pour la suite des itérés on a :

$$\begin{aligned} d(x, T^p(x)) &\leq d(x, T(x)) + \cdots + d(T^{p-1}(x), T^p(x)) \\ &\leq d(x, T(x)) [1 + k + \cdots + k^{p-1}] \leq \frac{d(x, T(x))}{1 - k}. \end{aligned}$$

On applique la contraction  $T^n$ , dont la constante de Lipschitz est  $\leq k^n$ , et il vient :

$$d(T^n(x), T^{n+p}(x)) \leq k^n d(x, T^p(x)) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x, T(x)).$$

Il suit que la suite  $(T^n(x))$  est une suite de Cauchy. ■

**I.2.7. Corollaire.** *Si  $(X, d)$  est complet et si  $T : X \rightarrow X$  a un itéré  $T^r$  qui est une contraction, alors  $T$  a un unique point fixe.*

**Démonstration.** Tout point fixe de  $T$  est un point fixe de  $T^r$ . Inversement si  $x_0$  est un point fixe de  $T^r$  alors  $T^r(T(x_0)) = T(T^r(x_0)) = T(x_0)$  ; autrement dit,  $T(x_0)$  est aussi un point fixe de  $T^r$ . Comme  $T^r$  a un unique point fixe  $T(x_0) = x_0$ . ■

### I.2.8. Point fixe dépendant d'un paramètre

On considère un espace métrique complet  $(X, d)$  et un espace topologique  $Y$  (espace de paramètres). Soit  $T : X \times Y \rightarrow X$  une application continue. Pour  $y \in Y$ , on note  $T_y = T|_{X \times \{y\}}$ .

**Proposition.** *Dans les conditions ci-dessus, on suppose qu'il existe  $0 < k < 1$  tel que, pour tout  $y \in Y$ ,  $\text{lip}(T_y) \leq k$ . On note  $a(y) \in X$  l'unique point fixe de  $T_y$ . Alors  $y \in Y \mapsto a(y) \in X$  est continue.*

**Démonstration.** Par l'inégalité du triangle, on a :

$$\begin{aligned} d(a(y'), a(y)) &\leq d(T_{y'}(a(y')), T_{y'}(a(y))) + d(T_{y'}(a(y)), T_y(a(y))) \\ &\leq k d(a(y'), a(y)) + d(T_{y'}(a(y)), T_y(a(y))) \end{aligned}$$

Donc

$$(1 - k) d(a(y), a(y')) \leq d(T(a(y), y'), T(a(y), y)) . \quad (2)$$

Par continuité de  $T$  en  $(a(y), y)$ , on voit que le majorant dans (2) peut être rendu arbitrairement petit si  $y'$  est assez proche de  $y$ . Appliquée au membre de gauche de (2), cette affirmation traduit la continuité de  $a$  en  $y$ . ■

### I.3. Équations différentielles linéaires

I.3.1. Une équation différentielle linéaire du premier ordre sur  $\mathbf{R}^n$  s'écrit

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1)$$

où  $x \in \mathbf{R}^n$ , où  $t \in I$  intervalle de  $\mathbf{R}$  et où  $A : I \rightarrow \text{End}(\mathbf{R}^n)$  est une application continue à valeurs dans les endomorphismes de  $\mathbf{R}^n$ . Lorsque  $A(t)$  est indépendant de  $t$  on dit que l'équation différentielle est à coefficients constants. Ce dernier cas est beaucoup plus simple : toutes les solutions sont de la forme  $t \in \mathbf{R} \mapsto e^{tA}x_0$ . Ainsi on peut résoudre explicitement une équation différentielle linéaire à coefficients constants alors qu'une équation différentielle linéaire ne se résout en général pas par quadratures, c'est-à-dire qu'elle ne se réduit pas au calcul d'un nombre fini d'intégrales simples (à rapprocher du fait que, d'après E. Galois, une équation algébrique ne se résout pas par radicaux). Dans le cas à coefficients non constants, pour trouver les solutions on a recours au théorème du point fixe de Picard, lequel ne donne pas une formule explicite pour le point fixe mais seulement une suite d'approximations.

I.3.2. **Théorème.** Pour toute condition initiale ( $x_0 \in \mathbf{R}^n$ ,  $t_0 \in I$ ) il existe une unique application  $\Gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  de classe  $C^1$  qui vérifie :

$$\begin{aligned} \Gamma(t_0) &= x_0, \\ \frac{d\Gamma}{dt}(t) &= A(t)\Gamma(t). \end{aligned}$$

#### I.3.3. Commentaires

1) Ce théorème énonce en particulier que les solutions maximales sont définies sur  $I$  tout entier.

2) Il suffit de démontrer le théorème pour tout sous-intervalle  $J \subset I$  fermé borné. En effet, si le théorème n'est pas vrai pour  $I$ , par exemple s'il y a une solution maximale non définie en  $t_1 \in I$  ou si deux solutions, définies sur  $I$  tout entier et de même condition initiale, diffèrent en  $t_1 \in I$ , alors le théorème n'est pas vrai non plus pour l'intervalle compact  $J = [t_0, t_1]$ .

Quitte à faire un changement affine de temps, on peut supposer  $J = [0, 1]$  et  $t_0 = 0$ .

3) On cherche la solution  $\Gamma$  sous la forme  $\Gamma(t) = x_0 + \gamma(t)$ , où  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$  est  $C^1$  avec  $\gamma(0) = 0$ . Alors  $\Gamma$  est solution de (1) si et seulement si  $\gamma$  est solution de

$$\gamma(t) = \int_0^t A(s)(x_0 + \gamma(s))ds \quad \text{pour tout } t \in [0, 1]. \quad (2)$$

L'intégrale a un sens même si  $\gamma$  est seulement continue et toute solution de (2) est automatiquement de classe  $C^1$ .

### I.3.4. Démonstration du théorème I.3.2

On va prouver que (2) a une unique solution continue. On introduit l'espace (vectoriel)  $\Lambda^0$  des chemins continus  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$  tels que  $\gamma(0) = 0$ . On le munit de la norme

$$\|\gamma\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |\gamma(t)|,$$

où  $|x|$  désigne la norme euclidienne sur  $\mathbf{R}^n$ . On rappelle (A.1.9) que  $\text{End}(\mathbf{R}^n)$  est muni de la norme d'opérateur : pour  $u \in \text{End}(\mathbf{R}^n)$

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|u(x)|}{|x|}.$$

Le nombre  $2\|u\|$  est le diamètre de l'image par  $u$  de la boule unité de  $\mathbf{R}^n$  et sa finitude – toujours vraie en dimension finie mais pas toujours en dimension infinie – traduit la continuité de  $u$  en 0. On a alors, pour tout  $x \in \mathbf{R}^n$ , l'inégalité  $|u(x)| \leq \|u\||x|$ . Comme  $A$  est continue sur  $[0, 1]$  compact,  $\sup_{t \in [0, 1]} \|A(t)\| = K < +\infty$ .

On considère  $T : \Lambda^0 \rightarrow \Lambda^0$  défini par

$$(T\gamma)(t) = \int_0^t A(s)(x_0 + \gamma(s))ds.$$

Dire que  $\gamma$  est solution de (2) revient à dire que  $\gamma$  est un point fixe de  $T$ .

**Lemme.** *Si  $m$  est assez grand, l'itérée  $T^m$  est une contraction pour la distance associée à  $\|\cdot\|_\infty$ .*

**Démonstration.** On a

$$(T\gamma_1)(t) - (T\gamma_2)(t) = \int_0^t A(s)(\gamma_1(s) - \gamma_2(s))ds.$$

Comme la norme d'une intégrale est majorée par l'intégrale de la norme, il vient

$$\begin{aligned} |(T\gamma_1)(t) - (T\gamma_2)(t)| &\leq K \int_0^t |\gamma_1(s) - \gamma_2(s)|ds \\ &\leq Kt\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Par récurrence on établit pour tout  $m$  entier  $> 0$

$$|(T^m\gamma_1)(t) - (T^m\gamma_2)(t)| \leq \frac{K^m t^m}{m!} \|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty.$$

L'argument de la récurrence se déroule ainsi :

$$\begin{aligned} |T^m\gamma_1(t) - T^m\gamma_2(t)| &\leq \int_0^t \|A(s) (T^{m-1}\gamma_1(s) - T^{m-1}\gamma_2(s))\| ds \\ &\leq K \int_0^t \frac{K^{m-1}}{(m-1)!} s^{m-1} \|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty ds. \end{aligned}$$

En particulier

$$\|T^m \gamma_1 - T^m \gamma_2\|_\infty \leq \frac{K^m}{m!} \|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty$$

Pour  $m$  assez grand,  $\frac{K^m}{m!} < 1$  ;  $T^m$  est alors une contraction. ■

Le théorème du point fixe de Picard et son corollaire I.2.7 disent que  $T$  a un unique point fixe, ou encore que (2) a une unique solution continue. Cela achève la démonstration de I.3.2. ■

### I.3.5. L'espace des solutions

On reprend l'équation différentielle (1)  $\dot{x} = A(t)x$ , où  $x \in \mathbf{R}^n$  et où  $A : I \rightarrow \text{End}(\mathbf{R}^n)$  est continue. On s'intéresse maintenant à l'ensemble  $S$  de toutes les solutions de (1) *maximales*, c'est-à-dire définies sur  $I$  tout entier. Soit  $t_0 \in I$  ; le théorème I.3.2 nous permet de définir une application

$$R_{t_0} : \mathbf{R}^n \longrightarrow S$$

qui, à  $x \in \mathbf{R}^n$ , associe la solution  $R_{t_0}(x) : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  de condition initiale  $(x, t_0)$  :

$$\begin{cases} R_{t_0}(x)(t_0) = x \\ \frac{d}{dt} R_{t_0}(x)(t) = A(t)[R_{t_0}(x)(t)] . \end{cases} \quad (3)$$

L'application  $R_{t_0}$  est bijective parce que l'application qui à une solution maximale associe sa valeur en  $t_0$  en est l'inverse.

#### Proposition.

- 1) L'espace  $S$  des solutions maximales est un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$ .
- 2) L'application  $R_{t_0} : \mathbf{R}^n \rightarrow S$  est un isomorphisme linéaire. En particulier  $S$  est de dimension finie.

**Démonstration.** Le 1) signifie que, si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux solutions de (1) et si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ , alors  $t \mapsto \lambda_1 \gamma_1(t) + \lambda_2 \gamma_2(t)$  est une solution de (1). La linéarité de l'opérateur  $A(t)$  rend ce fait clair.

Alors, sachant que  $S$  est un espace vectoriel, l'application *valeur en  $t_0$*  :  $S \rightarrow \mathbf{R}^n$  est linéaire. Or on vient de dire qu'elle est l'inverse de  $R_{t_0}$  ; ce dernier est donc un isomorphisme linéaire. ■

### I.3.6. La résolvente

L'espace des solutions maximales est de dimension finie mais chaque temps  $t_0$  produit un isomorphisme particulier de  $S$  avec  $\mathbf{R}^n$ . Si  $t_0, t_1 \in I$ , on peut considérer  $R_{t_0}^{t_1} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  l'isomorphisme linéaire  $(R_{t_1})^{-1} \circ R_{t_0}$ . À tout  $x \in \mathbf{R}^n$  il associe la valeur au temps  $t_1$  de la solution maximale de (1) de condition initiale  $(x, t_0)$ .

La famille  $R_{t_0}^t \in GL_n(\mathbf{R})$ ,  $t \in I$ , s'appelle la *résolvente*. Connaître la résolvente n'est pas autre chose que connaître toutes les solutions maximales. Le fait que  $R_{t_0}^t$  soit inversible s'exprime en disant qu'à des conditions initiales linéairement indépendantes correspondent des solutions linéairement indépendantes à chaque instant. Par construction, on a les propriétés suivantes.

- $R_{t_1}^{t_2} \circ R_{t_0}^{t_1} = R_{t_0}^{t_2}$  ;
- $R_{t_0}^{t_0} = Id$  ;
- $t \mapsto R_{t_0}^t$  est  $C^1$  à valeurs dans l'espace des matrices  $n \times n$  à coefficients réels (dont l'élément général est noté  $M$ ) et est solution de l'équation différentielle matricielle

$$\dot{M} = A(t)M. \quad (4)$$

- Si  $(e_1, \dots, e_n)$  désigne la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ , la  $i$ -ème colonne  $R_{t_0}^t(e_i)$  de la résolvente n'est autre que la solution prise au temps  $t$  de l'équation différentielle (1) avec la condition initiale  $(e_i, t_0)$ .

Dans le cas d'une équation différentielle à coefficients constants,  $\dot{x} = Ax$ , la résolvente s'écrit :

$$R_{t_0}^t = e^{(t-t_0)A}.$$

### I.3.7. Compléments sur les équations à coefficients constants

On veut rappeler quelques résultats d'algèbre sur l'exponentielle d'un endomorphisme. Soit  $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  un endomorphisme, identifié à sa matrice dans la base canonique. On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres et  $m_1, \dots, m_p$  leurs multiplicités respectives :  $n = m_1 + \dots + m_p$ . Disons que  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2q}$  sont non réelles,  $\lambda_1 = a_1 + i\omega_1$  ( $\omega_1 > 0$ ),  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$  etc, et que  $\lambda_{2q+1}, \dots, \lambda_p$  sont réelles.

**Proposition.** Pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , les coefficients de  $e^{tA}$  sont des combinaisons linéaires à coefficients réels des fonctions  $t^k e^{a_j t} \cos \omega_j t$ ,  $t^k e^{a_j t} \sin \omega_j t$  avec  $j = 1, 3, \dots, 2q - 1$ , et des fonctions  $t^k e^{\lambda_j t}$ ,  $j = 2q + 1, \dots, p$ , avec  $k \in \{0, 1, \dots, m_j - 1\}$ .

**Démonstration.** Elle repose essentiellement sur la réduction de Jordan des endomorphismes complexes. Soit  $u : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$  l'endomorphisme  $\mathbf{C}$ -linéaire de matrice  $A$  dans la base canonique. On sait qu'il existe une décomposition en somme directe

$$\mathbf{C}^n = \bigoplus_{j \in J} E_j,$$

où  $E_j$  est un sous-espace vectoriel (de dimension  $r_j$ ) invariant par  $u$  et possédant une base  $B_j$  dans laquelle la matrice de  $u|_{E_j}$  est une matrice de Jordan  $r_j \times r_j$ , c'est-à-dire s'écrivant :

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$$



Dans ce bloc,  $\lambda_j$  est l'une des valeurs propres de  $A$  ; par conséquent  $r_j$  est inférieur ou égal à la multiplicité de  $\lambda_j$ . Noter que plusieurs blocs peuvent apparaître avec la même valeur propre. Dans la base  $B_j$  la matrice de  $e^{t(u|E_j)}$  s'écrit :

$$e^{\lambda_j t} \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{r_j-1}}{(r_j-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le retour dans la base canonique de  $\mathbf{C}^n$  donne la matrice de  $e^{tA}$ , automatiquement réelle, avec des coefficients ayant l'allure annoncée. ■

Le corollaire suivant jouera un rôle important dans l'étude de la stabilité des points d'équilibre (IV.5.10).

**I.3.8. Corollaire.** *Si toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle négative, majorée strictement par un même nombre  $-a$ ,  $a > 0$ , alors il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\|e^{tA}\| \leq C e^{-at} \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

**Démonstration.** En effet d'après la proposition I.3.7, pour chaque coefficient  $e_{ij}(t)$  de la matrice  $e^{tA}$ , le produit  $|e_{ij}(t)|e^{at}$  tend vers 0 pour  $t \rightarrow +\infty$  ; par conséquent il est majoré sur  $[0, +\infty[$  par une constante  $\geq 0$ . En sommant ces majorants, on trouve  $C \geq 0$  tel que, pour tout  $t \geq 0$ , on ait

$$\sum_{i,j} |e_{ij}(t)| \leq C e^{-at}.$$

Si  $\mathbf{R}^n$  est muni de la norme euclidienne et si  $\|e^{tA}\|$  est la norme d'opérateur correspondante, on a  $\|e^{tA}\| \leq \sum_{i,j} |e_{ij}(t)|$  (voir A.1.9). D'où l'inégalité voulue. ■

### I.3.9. Théorème de Liouville

On a insisté sur le fait qu'en général le calcul de la résolvante ne se réduit pas à des calculs d'intégrales simples. C'est tout de même le cas pour son déterminant comme le montre le théorème de Liouville ci-dessous.

**Théorème.** *La fonction numérique  $t \in I \mapsto \det R_{t_0}^t$  est la solution de l'équation différentielle scalaire*

$$\dot{v} = (\text{trace } A(t))v$$

de condition initiale  $v(t_0) = 1$ . Autrement dit :

$$\det R_{t_0}^t = e^{\int_{t_0}^t (\text{trace } A(s)) ds}.$$

**Remarque.** On sait déjà que  $R_{t_0}^t$  est inversible. Cette formule le redit puisque la fonction exponentielle ne s'annule pas.

**Démonstration.** Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ . On commence par rappeler l'identité fondamentale satisfaite par la trace d'un endomorphisme  $u$  de  $\mathbf{R}^n$ . On considère la forme  $n$ -linéaire alternée

$$(v_1, \dots, v_n) \in (\mathbf{R}^n)^n \longmapsto \sum_i \det_B(v_1, \dots, v_{i-1}, u(v_i), v_{i+1}, \dots, v_n).$$

Comme l'espace vectoriel des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $\mathbf{R}^n$  est de dimension 1, celle-là est proportionnelle à

$$(v_1, \dots, v_n) \longmapsto \det_B(v_1, \dots, v_n)$$

et le coefficient de proportionnalité est la trace de  $u$  :

$$\sum_i \det_B(v_1, \dots, u(v_i), v_{i+1}, \dots, v_n) = [\text{trace } u] \det_B(v_1, \dots, v_n). \quad (5)$$

En prenant  $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n)$ , on trouve bien

$$\text{trace } u = \sum_i u_{ii},$$

où  $(u_{ij})$  est la matrice de  $u$  dans la base  $B$ .

Si maintenant  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  sont  $n$  vecteurs, chacun fonction différentiable du temps, la multilinéarité du déterminant donne :

$$\frac{d}{dt} \det_B(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \sum_i \det_B \left( x_1(t), \dots, \frac{d}{dt} x_i(t), \dots, x_n(t) \right).$$

Si on prend  $x_i(t) = R_{t_0}^t(e_i)$ , on a  $\frac{d}{dt} x_i(t) = A(t)x_i(t)$ . Donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det R_{t_0}^t &= \sum_i \det_B(x_1(t), \dots, A(t)x_i(t), x_{i+1}(t), \dots, x_n(t)) \\ &= [\text{trace } A(t)] \det_B(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &= [\text{trace } A(t)] \det R_{t_0}^t, \end{aligned}$$

où la seconde égalité vient de (5). ■

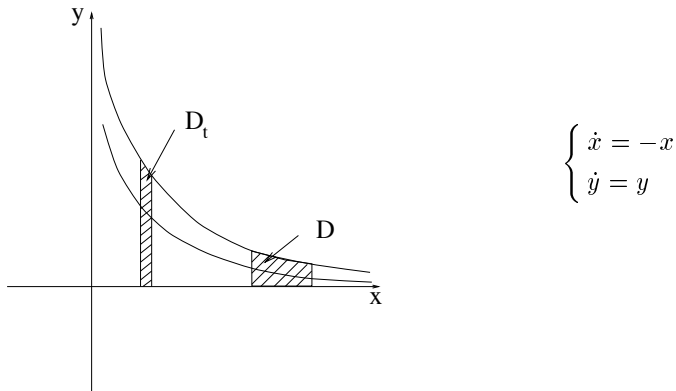
## I.3.10. Commentaires

Cette formule donne une information sur les volumes. Si  $D$  est un domaine de  $\mathbf{R}^n$  et si on considère le domaine image  $D_t = R_{t_0}^t(D)$ , la formule de changement de variables dans les intégrales multiples (VII.4.2) donne :

$$\text{vol}(D_t) = (\det R_{t_0}^t) \text{vol}(D) .$$

Par exemple si  $A(t)$  est de trace identiquement nulle, alors  $\text{vol}(D_t) = \text{vol}(D)$  pour tout  $t$ . En revanche, il n'y a aucun contrôle sur la façon dont varie le diamètre de  $D_t$ .

**Exemple 1.** (À coefficients constants)



$R_{t_0}^t(x, y)$  se déplace sur l'hyperbole  $xy = \text{constante}$ . Ici la matrice du système est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Elle est de trace nulle donc l'aire de  $D_t$  est égale à l'aire de  $D$ .

**Exemple 2.** (À coefficients variables)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -(1 + \epsilon \cos 2\pi t)x \end{aligned}$$

La trace de la matrice du système est nulle et, bien que l'on ne sache pas résoudre (exactement) cette équation différentielle, on sait au moins que le mouvement dans le plan  $(x, y)$  préserve l'aire.

Ce système du premier ordre vient de l'équation différentielle du second ordre

$$\ddot{x} = -(1 + \epsilon \cos 2\pi t)x$$

qui est celle d'un pendule de longueur variable, limité à de petites oscillations pour que  $\sin x$  puisse être confondu avec  $x$ .

### I.3.11. Équations différentielles affines

Ces équations sont du type

$$\dot{x} = A(t)x + p(t) \quad (6)$$

où  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $t \in I$  intervalle de  $\mathbf{R}$ , et où  $A : I \rightarrow \text{End}(\mathbf{R}^n)$  et  $p : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  sont continues. L'équation différentielle

$$\dot{x} = A(t)x \quad (7)$$

est l'équation différentielle linéaire associée.

L'espace  $\underline{S}$  des solutions maximales de (6) est un espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est l'espace  $S$  des solutions maximales de (7). Autrement dit, on obtient toutes les solutions maximales de (6) à partir d'une solution particulière  $\gamma_0$  de (6) en lui ajoutant un élément quelconque de  $S$ .

Pour trouver une solution particulière de (6), on peut faire appel à la méthode dite de *variation des constantes* qui se déroule comme suit. On cherche  $\gamma_0$  sous la forme

$$\gamma_0(t) = R_{t_0}^t c(t),$$

où  $c : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  est une fonction vectorielle  $C^1$  et où  $R_{t_0}^t$  est la résolvante de (7). Il vient :

$$\dot{\gamma}_0(t) = \left( \frac{d}{dt} R_{t_0}^t \right) c(t) + R_{t_0}^t \dot{c}(t).$$

On rappelle que  $\frac{d}{dt} R_{t_0}^t = A(t)R_{t_0}^t$ . Donc il est équivalent que  $\gamma_0$  soit solution de (6) ou que  $c$  vérifie :

$$R_{t_0}^t \dot{c}(t) = p(t).$$

Cette dernière équation différentielle s'écrit :

$$\dot{c}(t) = R_t^{t_0} p(t).$$

Elle admet pour solution particulière

$$c(t) = \int_{t_0}^t R_s^{t_0} p(s) ds,$$

qui donne

$$\begin{aligned} \gamma_0(t) &= \int_{t_0}^t R_{t_0}^t R_s^{t_0} p(s) ds \\ &= \int_{t_0}^t R_s^t p(s) ds. \end{aligned}$$

La solution de (6) de condition initiale  $(x_0, t_0)$  est donc

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^t R_s^t p(s) ds + R_{t_0}^t x_0.$$

## I.4. Équations différentielles non linéaires

Comme en I.1 on considère une équation différentielle

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{1}$$

où  $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbf{R}^n$  est continue,  $\Omega$  étant un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  et  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ .

### I.4.1. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

**Théorème.** *On suppose qu'il existe une constante  $k > 0$  telle que, pour tout  $t \in I$ ,*

$$x \mapsto f(x, t)$$

*soit  $k$ -lipschitzienne sur  $\Omega$ . Alors, pour tout  $(x_0, t_0) \in \Omega \times I$ , il existe  $\alpha > 0$  et  $\epsilon > 0$  avec la propriété suivante :*

*Pour tout  $(x'_0, t'_0) \in \Omega \times I$  vérifiant  $|x'_0 - x_0| \leq \epsilon$  et  $|t'_0 - t_0| \leq \epsilon$ , il existe une unique solution*

$$\Gamma : [t'_0 - \alpha, t'_0 + \alpha] \rightarrow \Omega$$

*de  $\dot{x} = f(x, t)$  avec la condition initiale  $\Gamma(t'_0) = x'_0$ .*

*De plus, toute solution de même condition initiale définie sur un intervalle  $J \subset [t'_0 - \alpha, t'_0 + \alpha]$  est la restriction de  $\Gamma$  à  $J$ .*

### Commentaires

- 1) On peut commencer par retenir que, pour toute condition initiale, il existe une solution définie sur un intervalle de temps de longueur non nulle et que cette solution est unique à restriction près.
- 2) Que la longueur de cet intervalle puisse être choisie constante sur tout un ouvert de conditions initiales aura son importance pour étudier la continuité des solutions (globales) par rapport aux conditions initiales.
- 3) Si on ne s'intéresse au théorème qu'au voisinage de  $(x_0, t_0)$ , on peut prendre pour  $\Omega$  (resp.  $I$ ) un voisinage arbitrairement petit de  $x_0$  (resp. de  $t_0$ ) et l'hypothèse lipschitzienne n'est utilisée que sur un tel voisinage.

Autrement dit, le théorème vaut encore si  $f$  n'est que localement lipschitzienne par rapport à la variable  $x$  (voir I.4.12). Typiquement, on est dans ce cas de figure si  $f$  est de classe  $C^1$  (II.1.11).

**Réflexion.** Comparer le théorème des équations différentielles linéaires I.3.2 au théorème de Cauchy-Lipschitz.

### I.4.2. Inégalité de sécurité

L'objet de ce paragraphe est d'expliciter un  $\alpha$ . On choisit d'abord  $R > 0$  et  $\bar{\alpha} > 0$  tels que :

$$B_R(x_0) := \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x - x_0| \leq R\} \subset \Omega,$$

$$I_{\bar{\alpha}}(t_0) := [t_0 - \bar{\alpha}, t_0 + \bar{\alpha}] \subset I.$$

Le  $M$  ci-dessous est alors un majorant de  $|f(x, t)|$  pour tout  $x \in B_R(x_0)$  et  $t \in I_{\bar{\alpha}}(t_0)$  :

$$M = \sup_{t \in I_{\bar{\alpha}}} |f(x_0, t)| + kR.$$

On fixe  $r < R$  et on choisit  $\alpha < \bar{\alpha}$  vérifiant l'inégalité de sécurité relative à la boule  $B_r(x_0)$  :

$$\alpha M \leq r. \quad (2)$$

Le sens géométrique de (2) est le suivant :

Toute solution  $\Gamma$  de (1) de condition initiale  $(x_0, t_0)$ , définie sur un intervalle  $J$ , vérifie  $\Gamma(t) \in B_r(x_0)$  pour tout  $t \in J \cap I_{\alpha}(t_0)$ .

Dans le cas contraire, par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à  $t \mapsto |\Gamma(t) - x_0|$ , il existe  $t_1$  vérifiant  $|\Gamma(t_1) - x_0| = r$ ,  $|t_1 - t_0| < \alpha$  et  $|\Gamma(t) - x_0| < r$  pour tout  $t \in [t_0, t_1[$  (ou  $]t_1, t_0]$ ). La dernière inégalité et la majoration de  $|f|$  sur  $B_r(x_0) \times I_{\alpha}(t_0)$  impliquent  $|\dot{\Gamma}(t)| \leq M$  pour tout  $t \in [t_0, t_1[$ . L'inégalité des accroissements finis et l'inégalité de sécurité interdisent alors que  $\Gamma(t_1)$  soit sur la frontière de  $B_r(x_0)$  si  $|t_1 - t_0| < \alpha$ .

On va voir dans le paragraphe suivant qu'un  $\alpha$  vérifiant l'inégalité de sécurité convient pour la condition initiale  $(x_0, t_0)$  : on aura *existence et unicité* d'une solution de (1) définie sur  $I_{\alpha}(t_0)$ . Si tel est le cas, le même  $\alpha$  convient aussi pour des conditions initiales suffisamment proches de  $(x_0, t_0)$ .

En effet, pour  $\varepsilon > 0$  petit,  $B_{r+\varepsilon}(x_0) \subset B_R(x_0)$  et  $I_{\alpha+\varepsilon}(t_0) \subset I_{\bar{\alpha}}(t_0)$ . Si  $|x'_0 - x_0| < \varepsilon$  et  $|t'_0 - t_0| < \varepsilon$ , l'inégalité du triangle donne  $B_r(x'_0) \subset B_{r+\varepsilon}(x_0)$  et  $I_{\alpha}(t'_0) \subset I_{\alpha+\varepsilon}(t_0)$ . Finalement  $M$  est encore un majorant de  $|f|$  sur  $B_r(x'_0) \times I_{\alpha}(t'_0)$  et (2) est une inégalité de sécurité pour la boule  $B_r(x'_0)$ . La conclusion du théorème vaut donc pour la condition initiale  $(x'_0, t'_0)$ .

### I.4.3. Démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz

Après la discussion précédente, on peut se limiter à la condition initiale  $(x_0, t_0)$ . La démonstration suit mot à mot celle du cas linéaire. Soit  $\Lambda$  l'ensemble des chemins continus  $\gamma : I_{\alpha}(t_0) = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbf{R}^n$  tels que  $\gamma(t_0) = 0$  et  $|\dot{\gamma}(t)| \leq r$  pour tout  $t \in I_{\alpha}(t_0)$ . On munit  $\Lambda$  de la métrique  $d_{\infty}(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_t |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|$ , qui est bien définie car l'intervalle  $I_{\alpha}(t_0)$  est compact. Comme la boule fermée  $B_r(0)$  est complète, l'espace  $\Lambda$  muni de la métrique  $d_{\infty}$  est complet (I.2.4). De plus on a l'équivalence suivante : pour tout  $\gamma \in \Lambda$ ,

- a)  $\gamma$  est  $C^1$  et  $x_0 + \gamma(t)$  est solution de (1),  
 $\Leftrightarrow$   
 b)  $\gamma$  est  $C^0$  et, pour tout  $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , on a

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^t f(x_0 + \gamma(s), s) ds. \quad (3)$$

On a vu par l'inégalité de sécurité (I.4.2) que toute solution de (1) de condition initiale  $(x_0, t_0)$ , définie sur  $I_{\alpha}(t_0)$ , s'écrit  $x_0 + \gamma(t)$  avec  $\gamma \in \Lambda$ . Il s'ensuit que son existence et son unicité équivalent à l'existence et à l'unicité d'une solution de l'équation (3) pour  $\gamma \in \Lambda$ .

On définit  $T : \Lambda \rightarrow \Lambda$  par

$$(T\gamma)(t) = \int_{t_0}^t f(x_0 + \gamma(s), s) ds .$$

L'inégalité de sécurité (2) assure bien que  $T\gamma$  appartient à  $\Lambda$ . En effet

$$\left| \int_{t_0}^t f(x_0 + \gamma(s), s) ds \right| \leq M\alpha \leq r$$

pour tout  $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ . De plus, si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux éléments de  $\Lambda$ , en appliquant l'hypothèse lipschitzienne on obtient :

$$\begin{aligned} |(T\gamma_1)(t) - (T\gamma_2)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(x_0 + \gamma_1(s), s) - f(x_0 + \gamma_2(s), s)] ds \right| \\ &\leq \pm \int_{t_0}^t k |\gamma_1(s) - \gamma_2(s)| ds \\ &\leq k|t - t_0| \|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty . \end{aligned}$$

Par récurrence sur  $m$ , on a pour la  $m$ -ème itérée :

$$\begin{aligned} |(T^m\gamma_1)(t) - (T^m\gamma_2)(t)| &\leq \frac{k^m}{m!} |t - t_0|^m \|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty \\ \|T^m\gamma_1 - T^m\gamma_2\|_\infty &\leq \frac{k^m \alpha^m}{m!} \|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty . \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, pour  $m$  assez grand,  $T^m$  est une contraction. D'après I.2.7,  $T$  a un unique point fixe. Autrement dit, (3) a une unique solution. Finalement, on a existence et unicité d'une solution de l'équation différentielle de condition initiale  $(x_0, t_0)$  et définie sur  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

Comme tout  $\alpha' \in ]0, \alpha]$  vérifie l'inégalité de sécurité, la même conclusion vaut pour les solutions définies sur le sous-intervalle  $[t_0 - \alpha', t_0 + \alpha']$  ; elles ne peuvent donc être que les restrictions des précédentes. ■

#### I.4.4. Solutions maximales

L'unicité locale des solutions pour toute condition initiale se traduit par une unicité globale.

**Proposition.** *Si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2 : J \rightarrow \Omega$  sont deux solutions de (1) de même condition initiale et définies sur le même intervalle  $J$ , alors elles coïncident.*

**Démonstration.** En effet, si on regarde dans le futur de  $t_0$ , on peut considérer la borne supérieure

$$t_+ = \sup \{ t \in J \mid t > t_0, \gamma_1(s) = \gamma_2(s) \forall s \in [t_0, t] \} .$$

Si  $t_+ < \sup J$ , par continuité  $\gamma_1(t_+) = \gamma_2(t_+)$  et on obtient une contradiction en appliquant l'unicité locale à la condition initiale  $(\gamma_1(t_+), t_+)$  ; les deux solutions coïncident un peu au-delà de  $t_+$ . Donc  $t_+ = \sup J$ . Un argument analogue vaut dans le passé de  $t_0$ . ■

On rappelle qu'une solution  $\gamma : J \rightarrow \Omega$  est *maximale* si elle n'a pas de prolongement à un intervalle strictement plus grand. Grâce à la proposition ci-dessus on peut établir le théorème qui suit.

**Théorème.** *Pour toute condition initiale  $(x_0, t_0)$ , il existe une unique solution maximale  $\gamma : ]t_-, t_+[ \rightarrow \Omega$  telle que  $\gamma(t_0) = x_0$ .*

**Démonstration.** Si  $\gamma_1 : J_1 \rightarrow \Omega$  et  $\gamma_2 : J_2 \rightarrow \Omega$  sont deux solutions de condition initiale  $(x_0, t_0)$  définies sur des intervalles ouverts contenant  $t_0$ , alors d'après la proposition ci-dessus  $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$  pour tout  $t \in J_1 \cap J_2$ . Ainsi on peut définir la *réunion* de  $\gamma_1$  et de  $\gamma_2$  comme application  $J_1 \cup J_2 \rightarrow \Omega$  de classe  $C^1$ . C'est une solution qui prolonge les deux précédentes.

Plus généralement, si  $\{\gamma_i : J_i \rightarrow \Omega\}_{i \in \mathcal{I}}$  désigne l'ensemble de toutes les solutions de condition initiale  $(x_0, t_0)$ , on peut prendre la réunion  $\gamma_{\max}$  de tous les  $\gamma_i$ , qui est définie sur  $]t_-, t_+[ [= \cup_{i \in \mathcal{I}} J_i$ . Par construction, toute autre solution est une restriction de celle-ci, ce qui prouve à la fois qu'elle est maximale et unique. ■

Les bornes  $t_+$  et  $t_-$  sont des fonctions de  $(x_0, t_0)$  dont on étudiera plus loin quelques propriétés.

### I.4.5. Durée de vie finie

Le titre de ce paragraphe se rapporte au cas où l'intervalle de définition de l'équation différentielle (1) est  $I = \mathbf{R}$  mais la proposition est générale. On s'intéresse à la borne supérieure  $t_+$  de l'intervalle de définition d'une solution maximale  $\gamma$ . L'étude de la borne inférieure  $t_-$  serait analogue.

**Proposition.** *Si  $t_+ < \sup I$  (en particulier si  $\sup I = +\infty$  et  $t_+ < +\infty$ ),  $\gamma$  sort définitivement de tout compact contenu dans  $\Omega$  lorsque  $t \rightarrow t_+$ .*

On rappelle (A.5) que  $K \subset \mathbf{R}^n$  est *compact* si de toute suite dans  $K$  on peut extraire une sous-suite convergente dans  $K$ . Les parties compactes de  $\mathbf{R}^n$  sont exactement les parties fermées (dans  $\mathbf{R}^n$ ) et bornées.

Attention : une partie  $A$  bornée de  $\Omega$  et fermée dans  $\Omega$  peut ne pas être compacte. C'est le cas s'il existe une suite  $(x_m)$  dans  $A$  convergeant vers  $x_\infty \notin \Omega$ .

Cet avertissement étant fait, l'énoncé signifie que, pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe un temps  $t_1$ ,  $t_1 < t_+$ , tel que  $t_1 < t < t_+$  implique  $\gamma(t) \notin K$ . On peut retenir le slogan suivant, qui est en fait plus faible que la proposition ci-dessus :

*Si une solution maximale reste confinée dans un compact contenu dans  $\Omega$  alors elle est définie pour tout temps.*

**Démonstration.** Soit  $K \subset \Omega$  une partie compacte. Si  $\gamma$  ne sort pas définitivement de  $K$ , il existe une suite  $(t_m)$  dans  $]t_-, t_+[$ , convergeant vers  $t_+$ , avec  $\gamma(t_m) \in K$  pour tout  $m$ . Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que  $\gamma(t_m) \rightarrow x_0 \in K$ . D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe  $\alpha > 0$  et une solution définie sur  $]t_+ - \alpha, t_+ + \alpha[$  de condition initiale  $(x_0, t_+)$ . De plus le même  $\alpha$  vaut pour toute condition initiale suffisamment proche de  $(x_0, t_+)$ , en particulier pour  $(\gamma(t_m), t_m)$  si  $m$  est assez grand. On choisit un tel  $m$  vérifiant en plus  $t_m + \alpha > t_+$ . Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne alors une solution sur  $[t_m, t_m + \alpha[$  qui prolonge  $\gamma|_{]t_-, t_m]}$ . Autrement dit, la solution  $\gamma$  est prolongeable jusqu'au temps  $t_m + \alpha$ , ce qui contredit la définition de  $t_+$ . ■

Un exemple simple du phénomène d'explosion en temps fini a été donné en I.1.2 avec l'équation différentielle  $\dot{x} = x^2$ . En revanche les équations différentielles linéaires ne présentent pas ce phénomène.



**Exemple.** Voici un exemple de solution maximale confinée dans un compact, dont la durée de vie est donc infinie dans le futur comme dans le passé. Dans le plan  $\mathbf{R}^2$  muni des coordonnées  $(x, y)$ , on considère l'équation différentielle donnée par les formules ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$$

On vérifie que, pour  $x_0^2 + y_0^2 = 1$ , les formules suivantes donnent une solution de condition initiale  $(x_0, y_0)$  à l'instant  $t_0$  :

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(t - t_0) - y_0 \sin(t - t_0) \\ y = x_0 \sin(t - t_0) + y_0 \cos(t - t_0) \end{cases}$$

Par unicité des solutions de condition initiale donnée, aucune autre solution ne rencontre le cercle unité. Donc, si  $x_0^2 + y_0^2 < 1$ , une solution passant par ce point reste dans le disque unité (compact), puisque pour en sortir il faudrait rencontrer le cercle unité [appliquer un argument de valeur intermédiaire].

#### I.4.6. Majoration a priori : le lemme de Gronwall

Après l'argument topologique précédent, on va s'intéresser à un point de vue quantitatif et donner des *majorations a priori* qui garantissent la non-sortie des compacts.

On suppose que l'on a sur  $\Omega \times I$  une majoration de la forme

$$|f(x, t)| < g(|x|, t), \quad (4)$$

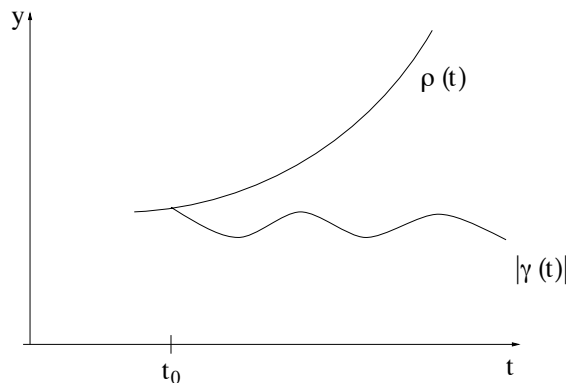
où  $g : [0, +\infty) \times I \rightarrow [0, +\infty)$  est une fonction continue  $\geq 0$ . Dans le lemme ci-dessous, on ne se préoccupe pas de l'existence de solutions mais d'une inégalité lorsque les solutions existent.

**Lemme.** Soit  $\rho$  une solution de  $\dot{y} = g(y, t)$ ,  $y \in [0, +\infty)$ , définie sur l'intervalle  $[t_0, t_1[ \subset I$ . Soit  $\gamma : [t_0, t_1[ \rightarrow \mathbf{R}^n$  une fonction dérivable et vérifiant :

- $|\gamma(t_0)| = \rho(t_0)$ ,
- $|\dot{\gamma}(t)| < g(|\gamma(t)|, t)$ .

Alors, pour tout  $t \in ]t_0, t_1[$ , on a :

$$|\gamma(t)| < \rho(t). \quad (5)$$



Par exemple, lorsque  $f$  vérifie l'inégalité (4), la conclusion (5) est valable si  $\gamma$  est une solution de  $\dot{x} = f(x, t)$  définie sur  $[t_0, t_1]$  avec  $|\gamma(t_0)| = \rho(t_0)$ .

**Démonstration.** Par un développement limité au voisinage de  $t_0$ , on constate que (5) est vrai pour  $t - t_0 > 0$  assez petit. En effet il vient :

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \rho(t_0) + (t - t_0)g(\rho(t_0), t_0) + o(t - t_0) \\ |\gamma(t)| &\leq |\gamma(t_0)| + (t - t_0)|\dot{\gamma}(t_0)| + o(t - t_0) .\end{aligned}$$

En retranchant la seconde ligne à la première on voit que la différence des membres de droite

$$(t - t_0)[g(\rho(t_0), t_0) - |\dot{\gamma}(t_0)|] + o(t - t_0)$$

est positive pour  $t > t_0$  et  $t - t_0$  petit. A fortiori  $\rho(t) - |\gamma(t)|$  est strictement positif dans les mêmes conditions.

Si (5) n'est pas vrai sur  $]t_0, t_1[$ , il existe une partie non vide  $E \subset ]t_0, t_1[$  sur laquelle  $\rho(t) = |\gamma(t)|$ . Cette partie est fermée dans  $]t_0, t_1[$  car, si deux fonctions continues coïncident sur une suite convergente, elles coïncident sur la limite. De plus  $t_0$  n'adhère pas à  $E$  car, pour  $t > t_0$  proche de  $t_0$ , on vient de voir que (5) est vrai. Alors la borne inférieure  $\theta$  de  $E$  appartient à  $E$  et vérifie  $\theta > t_0$ . De plus pour tout  $t \in ]t_0, \theta[$ , on a  $|\gamma(t)| \neq \rho(t)$  et, comme pour  $t$  voisin de  $t_0$  on a  $|\gamma(t)| < \rho(t)$ , il en est de même sur tout l'intervalle  $]t_0, \theta[$ .

Faisons un développement limité au voisinage de  $\theta$ . Pour  $t < \theta$ , on a

$$\begin{aligned}|\gamma(t)| &\geq |\gamma(\theta)| - (\theta - t)|\dot{\gamma}(\theta)| + o(t - \theta) \\ \rho(t) &= \rho(\theta) - (\theta - t)g(\rho(\theta), \theta) + o(t - \theta) ,\end{aligned}$$

d'où il suit que  $|\gamma(t)| > \rho(t)$  pour  $t < \theta$ ,  $t$  proche de  $\theta$ , ce qui contredit la propriété de  $\theta$  mentionnée plus haut. ■

**Remarque.** Il faut bien souligner que l'inégalité (5) a lieu dans le futur de  $t_0$  et non dans le passé.

#### I.4.7. Exemple (Inégalité classique de Gronwall).

*On suppose avoir la majoration « linéaire »*

$$|f(x, t)| \leq \alpha|x| + \beta \tag{6}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes  $\geq 0$ . Soit  $\gamma$  une solution de l'équation différentielle  $\dot{x} = f(x, t)$ , définie sur un intervalle  $J$ . Alors, pour tout  $t \in J$ , on a l'une ou l'autre des inégalités suivantes :

$$\text{si } \alpha \neq 0 , \quad |\gamma(t)| \leq |\gamma(t_0)|e^{\alpha|t-t_0|} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha|t-t_0|} - 1) \tag{7}$$

$$\text{si } \alpha = 0 , \quad |\gamma(t)| \leq |\gamma(t_0)| + \beta|t - t_0| . \tag{8}$$

Par exemple, si  $f(x, t)$  est défini pour tout  $(x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$  et vérifie (6), alors chaque solution maximale  $\gamma$  de  $\dot{x} = f(x, t)$  est définie pour tout temps ; en effet, si  $t_+ < +\infty$ , (7)-(8) implique que  $\gamma([t_0, t_+])$  est dans un compact de  $\mathbf{R}^n$ , ce qui contredit I.4.5, et on traite  $t_-$  de la même façon.

**Démonstration.** On remplace l'inégalité large (6) par l'inégalité stricte

$$|f(x, t)| < \alpha|x| + \beta + \varepsilon . \quad (9)$$

Pour  $t > t_0$ , le lemme I.4.6 donne des inégalités strictes analogues à (7) et (8) dans lesquelles  $\beta$  est remplacé par  $\beta + \varepsilon$ . On fait alors tendre  $\varepsilon$  vers 0 et on en déduit (7) et (8) pour  $t \geq t_0$ .

Pour étudier le cas  $t < t_0$ , on fait le changement de temps  $t' = -t$  et on considère l'équation différentielle

$$\dot{x} = -f(x, -t')$$

Sa solution de condition initiale  $(x_0, t'_0 = -t_0)$  est  $t' \mapsto \gamma(-t')$ . L'étudier dans le futur de  $t'_0$  revient à étudier  $\gamma$  dans le passé de  $t_0$ . La conclusion suit. ■

#### I.4.8. L'inégalité de Gronwall pour les équations différentielles scalaires

On suppose ici que  $n = 1$  ( $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbf{R}$ ) et que  $\gamma : [t_0, t_1[ \rightarrow \mathbf{R}$  vérifie une inégalité sans valeurs absolues :

$$\dot{\gamma}(t) < g(\gamma(t), t) .$$

Soit  $\rho$  une solution de  $\dot{y} = g(y, t)$  définie sur  $[t_0, t_1[$  avec  $\rho(t_0) = \gamma(t_0)$ . Alors, pour tout  $t \in ]t_0, t_1[$ , on a :

$$\gamma(t) < \rho(t) .$$

La démonstration se fait de façon analogue avec des développements limités, sans y prendre de valeur absolue.

#### I.4.9. Le lemme de Gronwall avec inégalité large

On revient au cas des équations différentielles vectorielles. On suppose ici qu'au lieu de la majoration stricte (4) on a une inégalité large

$$|f(x, t)| \leq g(|x|, t) .$$

On suppose que  $g$  est lipschitzienne par rapport à la première variable. On suppose avoir sur l'intervalle fermé  $[t_0, t_1] \subset I$

- une solution  $\gamma$  de  $\dot{x} = f(x, t)$  (ou seulement une solution de  $\dot{x} \leq g(|x|, t)$ ),
  - une solution  $\rho$  de  $\dot{y} = g(y, t)$
- vérifiant  $|\gamma(t_0)| = \rho(t_0)$ . Alors, pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ , on a

$$|\gamma(t)| \leq \rho(t) .$$

**Démonstration.** Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\gamma$  est solution de l'inégalité stricte

$$|\dot{x}| < g(|x|, t) + \varepsilon .$$

Notons  $\rho_\varepsilon(t)$  la solution maximale de  $\dot{y} = g(y, t) + \varepsilon$  de condition initiale  $\rho_\varepsilon(t_0) = \rho(t_0)$ . Anticipant sur les équations différentielles dépendant d'un paramètre, on sait que, pour  $\varepsilon$  assez petit,  $\rho_\varepsilon$  est défini sur l'intervalle compact  $[t_0, t_1]$  et converge uniformément vers  $\rho$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0 ; on verra que, sous l'hypothèse lipschitzienne, ces propriétés découlent de l'inégalité classique de Gronwall I.4.7. Pour un tel  $\varepsilon > 0$ , I.4.6 donne  $|\gamma(t)| < \rho_\varepsilon(t)$  pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ . D'où le résultat en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0. ■

Dans le cas des équations différentielles scalaires ( $n = 1$ ), si  $f(x, t) \leq g(x, t)$ , alors  $\gamma(t) \leq \rho(t)$  pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ .

#### I.4.10. Tube de solutions et continuité par rapport aux conditions initiales

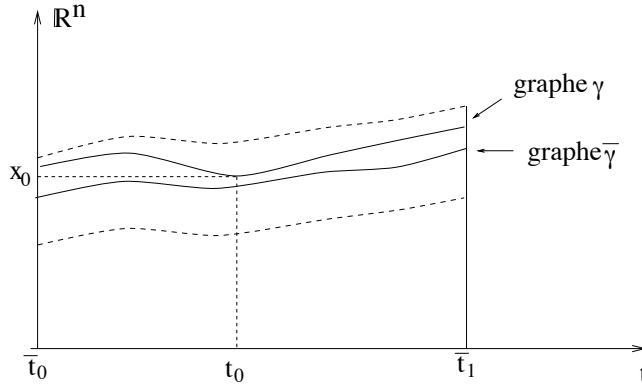
On considère l'équation différentielle (1)  $\dot{x} = f(x, t)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $t \in I$ , et on se place dans les conditions du théorème I.4.1 :  $f$  est  $k$ -lipschitzienne en  $x$ .

**Proposition.** Soit  $\bar{\gamma} : [\bar{t}_0, \bar{t}_1] \rightarrow \Omega$  la restriction d'une solution de (1) à un intervalle compact  $[\bar{t}_0, \bar{t}_1] \subset I$ .

1) Alors il existe  $\rho > 0$  ayant la propriété suivante :

Pour tout  $t_0 \in [\bar{t}_0, \bar{t}_1]$  et tout  $x_0 \in \Omega$  vérifiant  $|x_0 - \bar{\gamma}(t_0)| < \rho$ , la solution maximale  $\gamma$  de (1) de condition initiale  $(x_0, t_0)$  existe sur l'intervalle  $[\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ .

2) Si  $(x_m)$  est une suite dans  $\Omega$  tendant vers  $\bar{\gamma}(t_0)$  pour  $m \rightarrow \infty$  et si  $t_m$  tend vers  $t_0$ , la suite de solutions maximales  $(\gamma_m)$  de conditions initiales  $(x_m, t_m)$  converge uniformément vers  $\bar{\gamma}$  sur  $[\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ .



Pour  $t_0$  fixé, lorsque  $x_0$  balaye la boule ouverte de centre  $\bar{\gamma}(t_0)$  et de rayon  $\rho$ , les graphes des solutions  $\gamma$  balayent un « tube » au-dessus de  $[\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ .

Noter dans 2) que, pour  $m$  assez grand, on a  $|x_m - \bar{\gamma}(t_m)| < \rho$ , et donc d'après 1),  $\gamma_m$  existe sur  $[\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ , ce qui permet de parler de convergence uniforme.

**Démonstration.** En fait  $\bar{\gamma}$  est définie sur un intervalle ouvert contenant  $[\bar{t}_0 - \varepsilon, \bar{t}_1 + \varepsilon]$  pour un certain  $\varepsilon > 0$ . On introduit  $u(t) = \gamma(t) - \bar{\gamma}(t)$ . Il est équivalent que  $\gamma$  soit solution de (1) ou que  $u$  soit solution de l'équation différentielle (10) ci-dessous :

$$\dot{u} = f(\bar{\gamma}(t) + u, t) - f(\bar{\gamma}(t), t). \quad (10)$$

**Affirmation.** Il existe  $r > 0$  tel que, pour tout vecteur  $v \in \mathbf{R}^n$  et tout  $t \in [\bar{t}_0 - \varepsilon, \bar{t}_1 + \varepsilon]$ , on ait

$$|v| < 2r \Rightarrow \bar{\gamma}(t) + v \in \Omega.$$

Sinon, pour tout entier  $p$ , il existe  $t_p \in [\bar{t}_0 - \varepsilon, \bar{t}_1 + \varepsilon]$  et un vecteur  $v_p$  de norme  $\leq 1/p$  avec  $\bar{\gamma}(t_p) + v_p \notin \Omega$ . Comme  $[\bar{t}_0 - \varepsilon, \bar{t}_1 + \varepsilon]$  est compact, quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que la suite  $(t_p)$  a une limite  $t_\infty$ . Donc la suite  $(\bar{\gamma}(t_p) + v_p)$  converge vers  $\bar{\gamma}(t_\infty)$  et, comme le complémentaire de  $\Omega$  est un fermé, on a  $\bar{\gamma}(t_\infty) \notin \Omega$ , ce qui est absurde puisque  $\bar{\gamma}$  prend ses valeurs dans  $\Omega$ . ■

Ainsi l'équation différentielle (10) est définie sur  $B(2r) \times ]\bar{t}_0 - \varepsilon, \bar{t}_1 + \varepsilon[$ , où  $B(2r)$  est la boule ouverte de rayon  $2r$  centrée à l'origine de  $\mathbf{R}^n$ . Elle est de la forme

$$\dot{u} = g(u, t).$$

La fonction vectorielle  $g$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$  est  $k$ -lipschitzienne en  $u$  pour tout  $t \in ]\bar{t}_0 - \varepsilon, \bar{t}_1 + \varepsilon[$  et  $g(0, t) \equiv 0$ . En particulier

$$u \in B(2r), t \in ]\bar{t}_0 - \varepsilon, \bar{t}_1 + \varepsilon[ \implies |g(u, t)| \leq k|u|.$$

Une solution de (10) vérifie donc l'inéquation différentielle

$$|\dot{u}(t)| \leq k|u(t)|.$$

Sur son domaine de définition  $J$  (que l'on ne connaît pas), on a la majoration a priori suivante qui résulte de I.4.7:

$$|u(t)| \leq |u(t_0)|e^{k|t-t_0|}. \quad (11)$$

Prenons une condition initiale vérifiant  $|u(t_0)| < \frac{r}{e^{k(\bar{t}_1 - \bar{t}_0)}}$ . Supposons que la solution maximale correspondante ne soit définie que sur  $[t_0, T]$  avec  $T \leq \bar{t}_1$ . En vertu de (11), pour  $t \geq t_0$  cette solution reste dans la boule compacte  $\overline{B}(r) \subset B(2r)$ . Cela contredit la sortie des compacts prévue par I.4.5. Une contradiction analogue vaut dans le passé de  $t_0$  si la solution maximale ne se prolonge pas jusqu'à  $\bar{t}_0$  (borne comprise).

Soit alors  $\rho = \frac{r}{e^{k(\bar{t}_1 - \bar{t}_0)}}$ . Si  $|x_0 - \bar{\gamma}(t_0)| < \rho$ , d'après ce qui précède, la solution  $\gamma$  de (1) de condition initiale  $(x_0, t_0)$  est définie sur l'intervalle  $[\bar{t}_0, \bar{t}_1]$  – ce qui prouve le 1) – et vérifie :

$$|\gamma(t) - \bar{\gamma}(t)| \leq r, \quad \forall t \in [\bar{t}_0, \bar{t}_1]. \quad (12)$$

En changeant  $r$  en  $\varepsilon$ , cette dernière inégalité donne aussi la convergence uniforme d'une suite de solutions  $\gamma_m$  dont les conditions initiales  $(x_m, t_m)$  tendent vers  $(\bar{\gamma}(t_0), t_0)$ . En effet,  $|x_m - \bar{\gamma}(t_m)|$  tend vers 0 quand  $m \rightarrow \infty$ . Donc, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $m_0$  tel que, pour tout  $m \geq m_0$ , on a

$$|x_m - \bar{\gamma}(t_m)| < \frac{\varepsilon}{e^{k(\bar{t}_1 - \bar{t}_0)}}.$$

D'après (12), cette majoration implique l'inégalité qui exprime la convergence uniforme :

$$|\gamma_m(t) - \bar{\gamma}(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [\bar{t}_0, \bar{t}_1].$$

■

#### I.4.11. Remarque et exemple

L'argument précédent s'applique seulement lorsque l'intervalle de temps considéré est compact. Si  $\gamma_0$  est une solution à durée de vie infinie, il se peut que pour toute condition initiale  $(x_0, t_0)$  voisine de  $(\gamma_0(t_0), t_0)$  la durée de vie soit finie (dans le futur ou dans le passé). C'est typiquement le cas avec  $\dot{x} = x^2$  et  $\gamma_0(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ . Dans cet exemple, la solution maximale de condition initiale  $(x_0, 0)$  est donnée par la formule

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

Son domaine de définition est :

- $] -\infty, 1/x_0[$  si  $x_0 > 0$ ,
- $\mathbf{R}$  si  $x_0 = 0$ ,
- $]1/x_0, +\infty[$  si  $x_0 < 0$ .

Donc, si l'on considère l'intervalle compact  $[-T, +T] \subset \mathbf{R}$ , toutes les solutions maximales de conditions initiales  $(x_0, 0)$  sont définies sur  $[-T, +T]$  dès que  $|x_0| < 1/T$ .

Plus généralement, considérons une équation différentielle

$$\dot{x} = f(x, t)$$

définie sur  $\Omega \times \mathbf{R}$  et supposons que  $f(x_0, t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ . La fonction constante  $\gamma_0(t) = x_0$  est solution (on dit que  $x_0$  est point d'équilibre). D'après I.4.10, pour tout  $T$ ,  $0 < T < +\infty$ , il existe un voisinage  $V_T$  de  $x_0$  tel que, pour toute condition initiale  $(x, 0)$  avec  $x \in V$ , la solution maximale correspondante vive au moins jusqu'au temps  $T$ . Mais si on augmente  $T$ , en général il faut diminuer  $V_T$  et l'intersection de tous les  $V_T$  peut être réduite à  $\{x_0\}$ .

#### I.4.12. Application localement lipschitzienne

Soit  $(X, d)$  et  $(X', d')$  deux espaces métriques. Une application  $f : X \rightarrow X'$  est *localement lipschitzienne* si tout  $x_0 \in X$  a un voisinage  $V_0$  tel que  $f|V_0$  soit lipschitzienne, comme application de  $V_0$  muni de la métrique  $d$  vers  $X'$  muni de la métrique  $d'$ .

Dans le théorème de Cauchy-Lipschitz dont la conclusion est locale, il suffit bien sûr de supposer que  $f$  est *localement lipschitzienne par rapport à la variable  $x$* , ce qui veut dire que, pour tout  $(x_0, t_0) \in \Omega \times I$ , il existe un voisinage  $V_0$  de  $x_0$  dans  $\Omega$ , un voisinage  $I_0$  de  $t_0$  dans  $I$  et une constante  $k > 0$  tels que  $f|V_0 \times I_0$  soit  $k$ -lipschitzienne en  $x$ .

Pour des questions plus globales, telles que l'existence d'un tube de solutions, mais qui mettent en jeu un compact – par exemple l'arc  $\gamma([t_0, t_1])$  – on utilise le fait suivant :

*Si  $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$  est localement lipschitzienne et si  $K$  est une partie compacte de  $X$ , alors il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $K$  tel que  $f|U$  soit lipschitzienne.*

#### I.4.13. Bilan

On considère l'équation différentielle  $\dot{x} = f(x, t)$ ,  $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$ ,  $t \in I$ . On suppose  $f$  (localement) lipschitzienne par rapport à la première variable. Soit  $t \mapsto \phi(x_0, t_0; t) \in \Omega$  la solution maximale de l'équation différentielle satisfaisant  $\phi(x_0, t_0; t_0) = x_0$  ; elle est définie sur un intervalle ouvert  $J_{(x_0, t_0)}$  contenant  $t_0$ . On a les trois propriétés suivantes :

##### **Théorème.**

- 1)  $\phi$  est défini sur un ouvert de  $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  ;
- 2)  $\phi$  est continue par rapport aux trois variables ;
- 3)  $\phi(\phi(x_0, t_0; t_1), t_1; t) = \phi(x_0, t_0; t)$  et  $J_{(x_0, t_0)} = J_{(\phi(x_0, t_0; t_1), t_1)}$ .

**Démonstration.** 1) On suppose que  $\phi$  est défini en  $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{t}')$  et il s'agit de voir que  $\phi$  est défini sur tout un voisinage de ce point. Dire que  $\phi$  est défini en  $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{t}')$  signifie qu'il existe une solution maximale  $\bar{\gamma}$  définie sur  $[\bar{t}, \bar{t}']$  et vérifiant  $\bar{\gamma}(\bar{t}) = \bar{x}$ . Cette solution existe sur un intervalle ouvert, donc sur  $[\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}' + \varepsilon]$  avec  $\varepsilon > 0$ .

On applique I.4.10 à  $\bar{\gamma}|[\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}' + \varepsilon]$ . On trouve  $\rho > 0$  tel que, si  $t_0 \in [\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}' + \varepsilon]$  et  $|x_0 - \bar{\gamma}(t_0)| < \rho$ , alors la solution maximale  $\gamma$  de condition initiale  $(x_0, t_0)$  est définie sur  $[\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}' + \varepsilon]$ . Par continuité de  $\bar{\gamma}$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $|t_0 - \bar{t}| < \delta$  implique  $|\bar{\gamma}(t_0) - \bar{x}| < \rho/2$ . Finalement, pour tout  $(x_0, t_0, t'_0)$  vérifiant  $|x_0 - \bar{x}| < \rho/2$ ,  $|t_0 - \bar{t}| < \delta$ ,  $t'_0 \in [\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}' + \varepsilon]$ , il vient  $|x_0 - \bar{\gamma}(t_0)| < \rho$  et, par conséquent, il existe une solution  $\gamma$  de condition initiale  $(x_0, t_0)$  et définie sur  $[t_0, t'_0]$ . Cela prouve que  $\phi$  est définie en  $(x_0, t_0, t'_0)$  et finalement sur tout un voisinage de  $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{t}')$ .

2) Soit  $(x_m, t_m, t'_m)$  une suite de triplets tendant vers  $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{t}')$  pour  $m \rightarrow \infty$ . À partir d'un certain rang la solution maximale  $\gamma_m$  de condition initiale  $(x_m, t_m)$  est définie sur  $[\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}' + \varepsilon]$  et  $t'_m$  appartient à cet intervalle. D'après le 2) de I.4.10, la suite  $(\gamma_m)$  converge uniformément vers  $\bar{\gamma}$  sur  $[\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}' + \varepsilon]$ . En particulier  $\gamma_m(t_m) \rightarrow \bar{\gamma}(\bar{t}')$ . Comme  $\gamma_m(t'_m) = \phi(x_m, t_m; t'_m)$ , on a la continuité cherchée de  $\phi$  en  $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{t}')$ .

3) Les deux membres de l'égalité sont deux solutions maximales coïncidant en  $t = t_1$ . Donc elles coïncident partout. ■

Dans le cas particulier d'une équation différentielle linéaire  $\dot{x} = A(t)x$ , l'application  $\phi$  est liée à la résolvante par la formule

$$\phi(x, t; t') = R_t^{t'}(x).$$

Par ailleurs, l'étude de la différentiabilité de  $\phi$  et de ses applications sera l'objet du chapitre IV.

#### I.4.14. Équations différentielles dépendant d'un paramètre

On considère une famille d'équations différentielles

$$\dot{x} = f_\lambda(x, t)$$

sur  $\Omega \times I$ , dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \Lambda$  où  $\Lambda$  est un espace topologique. Notons  $f : \Lambda \times \Omega \times I \rightarrow \mathbf{R}^n$  l'application définie par  $f(\lambda, x, t) = f_\lambda(x, t)$ .

**Théorème.** *On suppose que  $f$  est continue par rapport à l'ensemble des variables et qu'elle est (localement) lipschitzienne par rapport à la variable  $x$ . Alors pour tout  $(\lambda_0, x_0, t_0)$  il existe*

- des voisinages  $\Lambda_0$  de  $\lambda_0$  dans  $\Lambda$ ,  $\Omega_0$  de  $x_0$  dans  $\Omega$ ,
- $\alpha > 0$ ,
- $\phi : \Lambda_0 \times \Omega_0 \times ]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[ \rightarrow \Omega$ ,

avec les propriétés suivantes :

- (1) pour  $(\lambda, x) \in \Lambda_0 \times \Omega_0$ , l'application  $t \mapsto \phi(\lambda, x, t)$  est solution de l'équation différentielle  $\dot{x} = f_\lambda(x, t)$  avec la condition initiale  $\phi(\lambda, x, t_0) = x$ .
- (2)  $\phi$  est continue par rapport à l'ensemble des variables.

On peut traiter les équations différentielles à paramètres en reprenant toute la théorie et en appliquant le théorème du point fixe à paramètres I.2.8. Cependant lorsque  $\Lambda$  est un ouvert  $\mathbf{R}^p$  et lorsque  $f$  est localement lipschitzienne par rapport à la variable  $(\lambda, x)$  (typiquement si  $f$  est de classe  $C^1$  par rapport à l'ensemble des variables), une astuce permet de considérer une famille d'équations différentielles comme une seule équation différentielle définie sur l'ouvert  $\Lambda \times \Omega$  de  $\mathbf{R}^{n+p}$ . On rajoute le paramètre  $\lambda$  comme une variable indépendante et on considère le système :

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = 0 \\ \dot{x} = f_\lambda(x, t) \end{cases}$$

■

#### I.4.15. Équations différentielles du second ordre

Les équations différentielles du second ordre *explicites* s'écrivent

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \tag{13}$$

où  $f$  est définie sur  $\Omega \times \mathbf{R}^n \times I$ , dans lequel  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  (affine), le second facteur est l'espace vectoriel sous-jacent et  $I$  est un intervalle de la droite du temps. Une solution est un chemin  $\gamma : J \rightarrow \Omega$  de classe  $C^2$ ,  $J \subset I$ , satisfaisant l'identité

$$\ddot{\gamma}(t) = f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)$$

où  $\dot{\gamma}(t)$  et  $\ddot{\gamma}(t)$  sont respectivement les vecteurs vitesse et accélération à l'instant  $t$ . Une astuce analogue à celle utilisée pour les équations dépendant d'un paramètre permet de ramener la résolution de (13) à une équation différentielle du premier ordre. On introduit

la vitesse comme une variable indépendante :  $\xi = \dot{x}$  et on considère l'équation du premier ordre sur  $\Omega \times \mathbf{R}^n$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = \xi \\ \dot{\xi} = f(x, \xi, t) \end{cases} \quad (14)$$

Soit  $\gamma : J \rightarrow \Omega$  et  $\Gamma : J \rightarrow \Omega \times \mathbf{R}^n$  donné par  $\Gamma(t) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ . On vérifie immédiatement que  $\gamma$  est solution de (13) si et seulement si  $\Gamma$  est solution de (14). Noter que si  $\Gamma$  est solution de (14) la première équation dit exactement que  $\Gamma$  est de la forme  $(\gamma, \dot{\gamma})$ , c.-à-d. que sa seconde composante est la dérivée par rapport à  $t$  de la première composante.

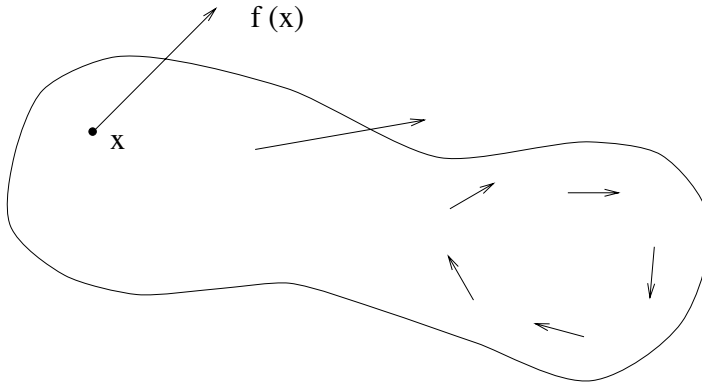
Pour une équation différentielle du second ordre où  $f$  est lipschitzienne par rapport à  $(x, \dot{x})$ , le théorème de Cauchy-Lipschitz donne une solution locale pour toute condition initiale  $(x_0, \dot{x}_0, t_0)$ .

Les équations du second ordre apparaissent naturellement en mécanique ; on y reviendra au chapitre IV. Dans le langage de la mécanique, l'espace  $\Omega$  s'appelle l'espace des *configurations* et  $\Omega \times \mathbf{R}^n$  s'appelle l'espace des *phases*.

## I.5. Équations différentielles définies par un champ de vecteurs

**I.5.1. Définition.** *Un champ de vecteurs sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$  est une application  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ , qui à chaque point de  $\Omega$  dans l'espace affine  $\mathbf{R}^n$  associe un vecteur dans l'espace vectoriel  $\mathbf{R}^n$ .*

Il est plus imagé de considérer le vecteur  $f(x)$  comme le bipoint  $(x, x + f(x))$ , c'est-à-dire de placer l'origine du vecteur  $f(x)$  au point  $x$ . Cela donne lieu à des figures comme la suivante. Il ne faut pas croire que  $x + f(x)$  ait besoin d'appartenir à  $\Omega$  ;  $f(x)$  qui est destiné à jouer le rôle de vecteur vitesse peut être arbitrairement grand en module, même pour un mobile se déplaçant dans une région bornée.



On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x) . \quad (1)$$

On dit qu'elle est *autonome* pour signifier que  $f$  est indépendant du temps. Pour pouvoir appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, on suppose que  $f$  est (localement) lipschitzienne. Dans la pratique les champs de vecteurs que l'on considèrera seront souvent  $C^1$



(mais la règle du jeu dans ce chapitre est de ne pas évoquer le calcul différentiel à plusieurs variables).

### I.5.2. Invariance par translation du temps

Soit  $\gamma : I \rightarrow \Omega$  une solution maximale de (1). Soit  $t_0 \in \mathbf{R}$  quelconque. Alors  $\tilde{\gamma} : t \mapsto \gamma(t + t_0)$ , où  $t$  parcourt  $\tilde{I} = I - t_0$ , est une solution maximale de (1).

Autrement dit, l'origine du temps ne joue aucun rôle dans le problème et cette invariance par translation du temps permet de ne considérer que les conditions initiales du type  $(x_0, 0)$ .

### I.5.3. Le flot

Si on suppose que le champ de vecteurs  $f$  est (localement) lipschitzien, le résultat de I.4.1 s'applique. Pour  $x \in \Omega$ , on note  $t \in I_x \mapsto \varphi(x, t) \in \Omega$  la solution maximale de (1) de condition initiale  $(x, 0)$  ; autrement dit :

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = x \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = f(\varphi(x, t)) \end{cases} \quad (2)$$

et  $I_x$  est le domaine de définition de cette solution maximale. L'application  $\varphi$  est appelée *le flot* du champ de vecteurs  $f$  ou de l'équation différentielle associée. Par exemple, si le champ de vecteurs est linéaire ( $\Omega = \mathbf{R}^n$ ,  $f(x) = Ax$  et  $A \in \text{End}(\mathbf{R}^n)$ ), le flot est donné par la formule suivante :

$$\varphi(x, t) = e^{At}x, \quad \forall (x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}.$$

Les propriétés suivantes du flot sont contenues dans I.4.13.

**Propriété.** Soit  $\mathcal{D} \subset \Omega \times \mathbf{R}$  le domaine de définition du flot  $\varphi$  : pour tout  $x \in \Omega$ ,  $\mathcal{D} \cap (\{x\} \times \mathbf{R}) = \{x\} \times I_x$ . Alors  $\mathcal{D}$  est un ouvert de  $\Omega \times \mathbf{R}$  et  $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \Omega$  est continue.

La propriété d'invariance I.5.2 conduit à la *formule de flot* donnée ci-dessous.

### I.5.4. Formule du flot

Si  $t_1$  appartient à  $I_x$  et si  $t_2$  appartient à  $I_{\varphi(x, t_1)}$ , alors  $t_1 + t_2$  appartient à  $I_x$  et :

$$\varphi(x, t_1 + t_2) = \varphi(\varphi(x, t_1), t_2) .$$

**Démonstration.** Considérons  $t \mapsto \varphi(x, t_1 + t)$ . Pour  $t \in I_x - t_1$ , c'est la solution maximale de (1) passant par  $\varphi(x, t_1)$  au temps 0. Donc  $I_x - t_1 = I_{\varphi(x, t_1)}$  et  $\varphi(x, t_1 + t) = \varphi(\varphi(x, t_1), t)$ . ■

**Corollaire.** Si  $t \in I_x$ , alors  $-t \in I_{\varphi(x, t)}$  et  $\varphi(\varphi(x, t), -t) = x$ .

## I.5.5. Orbites

**Définition.** L'orbite du point  $x$  est l'ensemble  $\mathcal{O}_x$  de  $\Omega$  formé par les points  $\varphi(x, t)$  pour  $t \in I_x$ . Une orbite  $\mathcal{O}_x$  est dite périodique s'il existe  $T > 0$  tel que

$$\varphi(x, T) = x. \quad (3)$$

On dit que  $x$  est un *point d'équilibre* (ou un point fixe du flot) si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est satisfaite :  $\mathcal{O}_x = \{x\}$ , ou  $\varphi(x, t) = x$  pour tout  $t \in I_x$ , ou  $f(x) = 0$ . [Noter que si  $f(x) = 0$ , alors  $t \in \mathbf{R} \mapsto x$  est une solution maximale passant par  $x$  ; d'après l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a  $I_x = \mathbf{R}$  et  $\varphi(x, t) = x$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ .]

**Lemme.** Si la borne inférieure des  $T > 0$  vérifiant (3) est nulle, alors  $x$  est un point d'équilibre.

**Démonstration.** Le point  $x$  étant fixé, on considère le sous-ensemble  $P$  de  $\mathbf{R}$  formé des solutions de l'équation  $\varphi(x, t) = x$ . D'après la formule du flot I.5.4,  $P$  est un sous-groupe additif de  $\mathbf{R}$  : si  $\varphi(x, t_1) = x$  et  $\varphi(x, t_2) = x$ , alors  $\varphi(x, t_1 + t_2) = x$ . On dit que  $P$  est le groupe des périodes. Comme il est défini par une équation continue,  $P$  est fermé dans  $\mathbf{R}$ . Par l'hypothèse du lemme, 0 n'est pas un point isolé de  $P$ . On rappelle qu'alors  $P$  est dense dans  $\mathbf{R}$ .

[Si on veut approcher  $a > 0$  par un élément de  $P$  à  $1/k$  près, on choisit  $T \in ]0, 1/k[ \cap P$ . Une solution est donnée par  $\text{Ent}(a/T)T$  où  $\text{Ent}(\cdot)$  désigne la partie entière.]

Si  $P$  est fermé et dense dans  $\mathbf{R}$ , alors  $P = \mathbf{R}$ , ce qui est la conclusion cherchée. ■

Si la borne inférieure  $T_0$  des  $T > 0$  vérifiant (3) est non nulle, on dit que  $T_0$  est la *période* de l'orbite  $\mathcal{O}_x$ . Dans ce cas on a  $\varphi(x, t + T_0) = \varphi(x, t)$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ .

**Proposition.** Les orbites forment une partition de  $\Omega$  : tout point de  $\Omega$  appartient à une orbite et deux orbites distinctes sont disjointes. Ou encore : être dans la même orbite est une relation d'équivalence.

**Démonstration.** D'après la formule du flot, si  $y \in \mathcal{O}_x$ , alors  $x \in \mathcal{O}_y$  ; en effet,  $y = \varphi(x, t_1)$  implique  $x = \varphi(y, -t_1)$ . De la même façon, si  $z$  appartient à  $\mathcal{O}_y$  avec  $y \in \mathcal{O}_x$ , alors  $z \in \mathcal{O}_x$ . ■

La partition de  $\Omega$  en orbites s'appelle le *portrait de phases* du champ de vecteurs. Des figures de portraits de phases sont montrées plus loin et au chapitre IV.

**I.5.6. Exercice.** Soit  $X$  un champ de vecteurs sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue ne s'annulant pas. Montrer que les champs de vecteurs  $X$  et  $(1/f)X$  ont les mêmes orbites. [Comme on ne change pas la direction du vecteur vitesse, il n'est pas étonnant que la courbe décrite par le mobile soit la même ; c'est seulement la loi du mouvement sur cette courbe qui est changée. On pourra commencer par comprendre le cas où  $f$  est constante.]

**Solution.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \Omega$  une solution maximale de  $\dot{x} = X(x)$ . Alors

$$F(t) = \int_0^t f \circ \gamma(s) ds$$

est une fonction strictement monotone d'un intervalle  $I$  sur un autre  $I'$ . On pose  $\theta = F(t)$  et  $\Gamma = \gamma \circ F^{-1} : I' \rightarrow \Omega$ . Par dérivation des fonctions composées (à une variable), il vient

$$\dot{\Gamma}(\theta) = \dot{\gamma}(F^{-1}(\theta)) \cdot \left( \frac{1}{\dot{F}(t)} \right) = \dot{\gamma}(t) \frac{1}{f(\gamma(t))}.$$

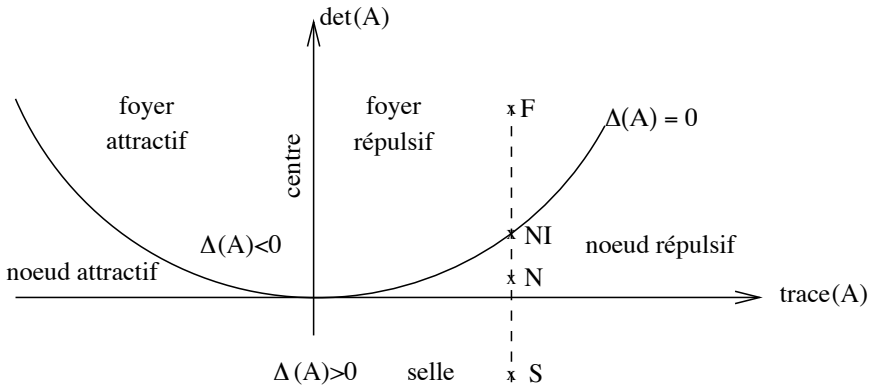
Cela montre que  $\Gamma$  est solution de  $\dot{x} = (1/f(x))X(x)$ . On a une formule du même genre qui donne une solution de  $\dot{x} = X(x)$  à partir d'une solution de  $\dot{x} = (1/f(x))X(x)$ . Il en résulte que  $\Gamma : I' \rightarrow \Omega$  est une solution maximale, sinon on pourrait prolonger  $\gamma$ .

### I.5.7. Portrait de phases des champs de vecteurs linéaires en dimension 2

On considère l'équation différentielle  $\dot{x} = Ax$ , où  $A$  est un endomorphisme linéaire de  $\mathbf{R}^2$ . Les solutions maximales sont  $\gamma(t) = e^{tA}x_0$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . L'allure du portrait de phases dépend, pour l'essentiel, du spectre de  $A$ . La figure suivante rassemble la terminologie en vigueur – qui remonte à Henri Poincaré – pour le portrait de phases correspondant à un couple  $(\text{trace}(A), \text{dét}(A))$ . La parabole correspond aux zéros du discriminant  $\Delta(A)$  de l'équation caractéristique de  $A$ :

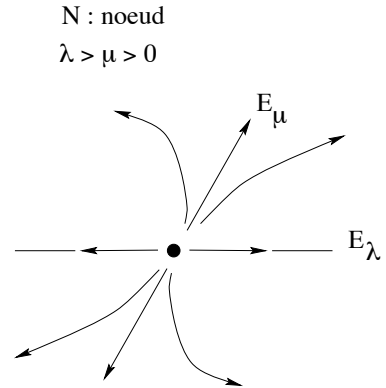
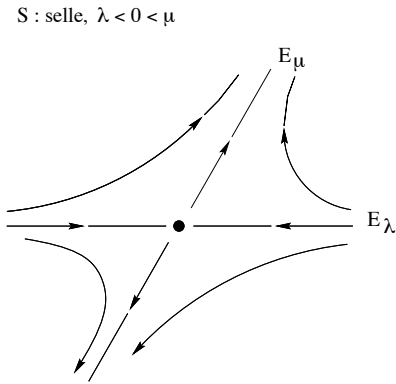
$$P_A(t) = t^2 - \text{trace}(A)t + \det(A)$$

$$\Delta(A) = (\text{trace } A)^2 - 4 \det A$$



Les figures suivantes présentent les portraits de phases pour chacun des points marqués sur la verticale en pointillés : S, N, NI, F. Plaçons-nous d'abord en S ou N. La matrice  $A$ , vue comme matrice d'un endomorphisme de  $\mathbf{R}^2$ , a deux valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  réelles et distinctes puisque  $\Delta(A) > 0$ . Dans les axes donnés par les deux espaces propres  $E_\lambda$  et  $E_\mu$ , le système différentiel admet pour *forme normale* :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \mu y \end{cases}$$



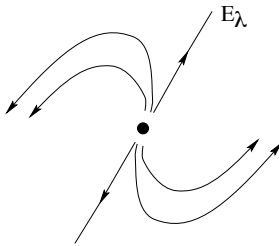
Si on se place en NI, on a une valeur propre  $\lambda$  réelle et double. *Presque surement*,  $A$  est non-diagonalisable ; cela veut dire que si  $A$  est tirée au sort parmi les matrices  $2 \times 2$  à valeur propre double, la probabilité que  $A$  soit diagonalisable est nulle. Dans ce cas, il existe des axes du plan où  $A$  est une matrice de Jordan ; le système différentiel admet alors la forme normale suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases}$$

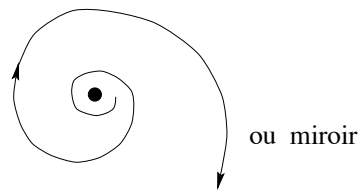
Enfin en F, on a  $\Delta(A) < 0$  et les deux valeurs propres sont complexes conjuguées :  $a \pm i\omega$ . Le système différentiel admet alors la forme normale suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \mp \omega y \\ \dot{y} = \pm \omega x + ay \end{cases}$$

NI : en général noeud impropre  
 $\lambda = \mu > 0$



F : foyer  
2 valeurs propres non réelles



Le spectre de  $A$  ne dépend pas de l'orientation du plan et donc ne détermine pas le sens de rotation des spirales d'un foyer. Aussi peut-on avoir la figure *miroir* de celle dessinée ci-dessus. La diagonalisabilité n'est pas non plus une propriété spectrale ; si la valeur propre est double, le *noeud impropre* correspond au cas non-diagonalisable. Enfin il y a quelques cas particuliers :

- si  $\text{trace}(A)=0$ , le point d'équilibre est un *centre* ; toutes les orbites, autres que 0, sont périodiques (ellipses) ;
- si  $A$  est scalaire, les orbites, autres que 0, sont les demi-droites ouvertes issues de l'origine.

1.5.8. Topologie d'une orbite

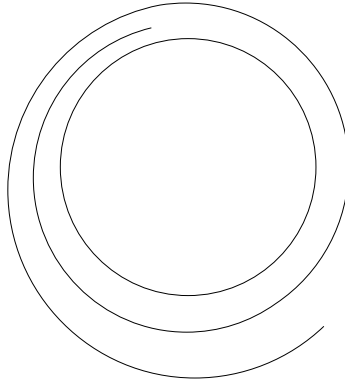
**Exercice.** Une orbite périodique  $\mathcal{O}_x$  est homéomorphe au cercle  $S^1$  (cercle unité du plan complexe). En effet on construit facilement une application continue  $S^1 \xrightarrow{h} \Omega$ , injective, d'image  $\mathcal{O}_x$ . Son image est alors compacte et  $h$  est un homéomorphisme  $S^1 \rightarrow \mathcal{O}_x$  [Mettre les détails].

Si  $x$  n'est pas un point fixe du flot et si  $\mathcal{O}_x$  n'est pas une orbite périodique, alors

$$t \in I_x \xrightarrow{h} \varphi(x, t) \in \mathcal{O}_x$$

est une bijection continue. Cette application peut ne pas être un homéomorphisme ; c'est-à-dire que la préimage par  $h$  d'une suite convergente dans  $\mathcal{O}_x$  peut ne pas être convergente dans  $I_x$ .

Dans le cas où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^2$ , un résultat remarquable, contenu dans le théorème de Poincaré-Bendixson, dit que, pour une orbite non-périodique,  $h$  est un homéomorphisme  $I_x \rightarrow \mathcal{O}_x$ . Grosso modo il n'y a pas de configuration beaucoup plus compliquée que celle donnée sur la figure suivante. Un énoncé précis du théorème de Poincaré-Bendixson est donné dans [Hirsch-Smale].



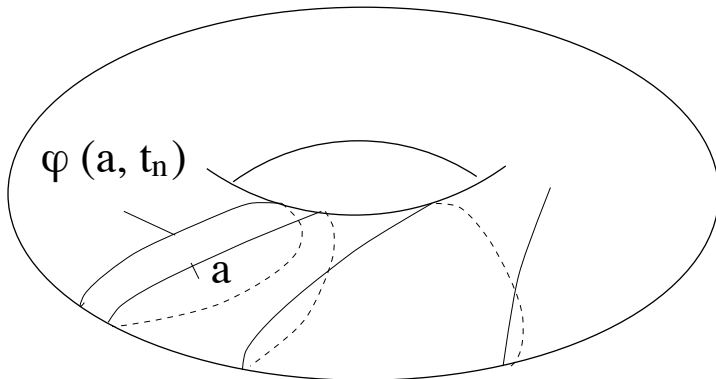
En revanche dans  $\mathbf{R}^3$ , une orbite peut être « récurrente », c'est-à-dire spiraler sur elle-même. On construit un tel exemple avec un champ de vecteurs tangent à la surface du tore  $\Sigma$  et qui dans les coordonnées angulaires du tore possède une pente irrationnelle. [Le paramétrage de  $\Sigma$  est donné par

$$(\theta, \psi) \in [0, 2\pi]^2 \xrightarrow{g} (x = (R + r \cos \psi) \cos \theta, y = (R + r \cos \psi) \sin \theta, z = r \sin \psi)$$

où  $R > r > 0$  ; le plan tangent  $T_{(\theta_0, \psi_0)}\Sigma$  au point  $a = g(\theta_0, \varphi_0)$  est engendré par les deux vecteurs  $\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta_0, \psi_0)$  et  $\frac{\partial g}{\partial \psi}(\theta_0, \psi_0)$  ; la condition demandée au champ  $f$  est

$$f(a) = \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta_0, \varphi_0) + \lambda \frac{\partial g}{\partial \psi}(\theta_0, \psi_0)$$

où  $\lambda$  est une constante irrationnelle.] Dans ce cas les orbites tracées à la surface du tore sont denses dans le tore.



De plus l'orbite  $\mathcal{O}_a$  passe une infinité de fois près de  $a$ . Plus précisément, d'une part comme  $\mathcal{O}_a$  est contenu dans  $\Sigma$  qui est compact, on a  $I_a = \mathbf{R}$ , et d'autre part il existe une suite  $t_n \rightarrow +\infty$  telle que  $h(t_n) = \varphi(a, t_n) \rightarrow a$ . Cela interdit bien que  $h^{-1}$  soit continu.

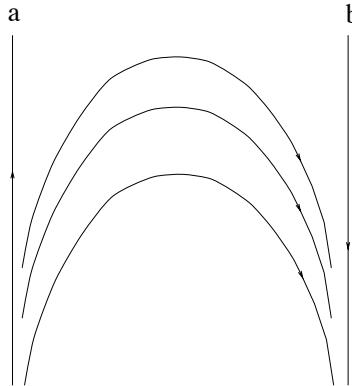
### I.5.9. Topologie de l'ensemble des orbites

L'ensemble  $\mathcal{S}$  des orbites d'un champ de vecteurs  $f$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$  reçoit une topologie naturelle pour laquelle l'application

$$x \in \Omega \mapsto \mathcal{O}_x \in \mathcal{S}$$

est continue. Par définition de cette topologie, une partie  $A$  dans  $\mathcal{S}$  est ouverte si  $\pi^{-1}(A)$  est un ouvert dans  $\Omega$ . Une autre façon de dire est la suivante : on considère une partie  $B$  de  $\Omega$  qui est à la fois ouverte et réunion d'orbites, c'est-à-dire invariante par le flot ; alors on décrète que  $\pi(B)$  est ouvert dans  $\mathcal{S}$ . [Vérifier l'équivalence des deux définitions et que l'une ou l'autre donne bien une topologie sur  $\mathcal{S}$ , c'est-à-dire qu'une intersection finie ou une union quelconque d'ouverts est ouverte.]

La topologie de l'ensemble des orbites est en général *non séparée*, en particulier non métrisable. On dit qu'une paire de points  $a, b \in \mathcal{S}$  est non séparée s'il n'existe pas d'ouverts disjoints  $U_a$  et  $U_b$  contenant respectivement  $a$  et  $b$ . On peut voir sur l'exemple du champ de vecteurs de  $\mathbf{R}^2$  dont le portrait de phase est donné sur la figure ci-dessous que les deux orbites verticales  $a$  et  $b$  forment une paire d'orbites non séparée.



### I.5.10. Champ de vecteurs complet

**Définition.** Un champ de vecteurs localement lipschitzien sur l'ouvert  $\Omega$  est complet si, pour tout  $x \in \Omega$ , l'intervalle  $I_x$  de définition de la solution maximale passant par  $x$  au temps 0 est la droite  $\mathbf{R}$ . Ou encore si le domaine de définition du flot  $\varphi$  est  $\Omega \times \mathbf{R}$ .

Par exemple si  $\Omega = \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , le champ  $f(x, y) = (1, 0)$  n'est pas complet. Pour une condition initiale sur l'axe des  $x$ , le flot n'est pas défini pour tout temps.

Le lemme de Gronwall peut servir à montrer qu'un champ de vecteurs  $f$  est complet. Par exemple si  $\Omega = \mathbf{R}^n$  et si on a une majoration  $|f(x)| \leq a|x| + b$ ,  $a, b > 0$ , alors le champ est complet. En effet, d'après Gronwall, en temps fini l'orbite reste confinée dans un compact.

A contrario, une majoration linéaire de la norme du champ n'est pas une condition nécessaire pour sa complétude.

**Exemple-exercice.** Dans  $\Omega = \mathbf{R}^2$ ,  $f(x, y) = (-(x^2 + y^2)y, (x^2 + y^2)x)$  est un champ de vecteurs complet.

Dans l'exercice suivant on montre qu'on peut rendre complet un champ de vecteurs en le multipliant par une fonction  $> 0$ . On observe qu'en multipliant un champ de vecteurs par une fonction  $> 0$  on ne change pas les orbites mais seulement la loi du mouvement sur chaque orbite.

**Exercice.** Soit  $f$  un champ de vecteurs localement lipschitzien sur  $\mathbf{R}^n$ .

1) Soit  $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue strictement positive. Soit  $\tilde{f}$  le champ de vecteurs défini par  $\tilde{f}(x) = g(x)f(x)$ . Montrer que  $\tilde{f}$  est *uniquement intégrable*, c'est-à-dire que par tout point passe une unique solution maximale de  $\dot{x} = \tilde{f}(x)$ . Montrer que les orbites de  $\tilde{f}$  sont les mêmes que les orbites de  $f$ .

2) Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées de  $x$  et  $(f_1, \dots, f_n)$  les composantes de  $f$ . Montrer que le champ de vecteurs  $F$  donné par la formule suivante est complet :

$$F(x) = e^{-[x_1 f_1(x) + \dots + x_n f_n(x)]^2} f(x).$$

[Indication pour le 2). Montrer que la dérivée de la fonction  $x_1^2 + \dots + x_n^2$  dans la direction du champ de vecteurs  $F(x_1, \dots, x_n)$  est bornée – pardon pour cette anticipation sur le chapitre suivant. Conclure grâce à Gronwall.]

Le résultat de l'exercice vaut sur tout ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$ , mais c'est plus difficile car il faut commencer par construire une fonction positive *propre*  $g_0 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^+$ , c.-à-d. telle que la préimage de tout intervalle fermé borné  $[0, A]$  soit un compact de  $\Omega$ .

**I.5.11. Proposition.** Soit  $\dot{x} = f(x)$  l'équation différentielle d'un champ de vecteurs complet. Alors pour chaque  $t \in \mathbf{R}$ , l'application  $\varphi_t : \Omega \rightarrow \Omega$  définie par  $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$  est un homéomorphisme. De plus, pour tout couple  $(t_1, t_2)$

$$\varphi_{t_1+t_2} = \varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2}. \quad (4)$$

Autrement dit,  $t \in \mathbf{R} \mapsto \varphi_t \in \text{Homéo}(\Omega)$  est un morphisme de groupes.

**Démonstration.** On sait déjà que  $\varphi_t$  est continue et que  $\varphi_{-t}$  est son inverse. La formule du flot I.5.4 donne (4). ■

### I.5.12. Équations autonomes versus non autonomes

La théorie des équations différentielles autonomes contient « presque » la théorie des équations différentielles non autonomes grâce à l'astuce qui consiste à prendre le temps comme une variable de position supplémentaire.

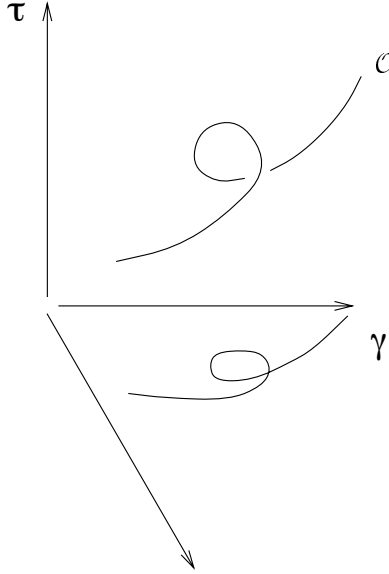
Si on a une équation différentielle

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (5)$$

avec  $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbf{R}^n$ , on peut fabriquer le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \tau) \\ \dot{\tau} = 1 \end{cases} \quad (6)$$

qui est une équation différentielle autonome donnée par un champ de vecteurs  $F : \Omega \times I \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ ,  $F(x, \tau) = (f(x, \tau), 1)$ . Si  $f$  est localement lipschitzien non seulement en  $x$  mais par rapport à l'ensemble des variables, alors le champ de vecteurs  $F$  est localement lipschitzien. Une orbite  $\mathcal{O}$  du champ  $F$  est le graphe (au-dessus d'un intervalle  $J \subset I$ , porté par l'axe vertical dans la figure) d'une solution maximale  $\gamma : J \rightarrow \Omega$ . Quant à l'image de  $\gamma$  dans  $\Omega$  on l'obtient tout simplement en projetant  $\mathcal{O}$  sur le premier facteur.



Cette projection fait comprendre pourquoi dans le cas non autonome deux solutions distinctes peuvent passer au même point à des instants différents avec éventuellement des vecteurs vitesse différents. On ne peut plus partitionner l'espace  $\Omega$  en orbites.

## I.6. Exercices corrigés

Ces exercices ont été proposés dans différents contrôles. Ils utilisent un peu de calcul différentiel à plusieurs variables, très élémentaire. Ils sont placés ici car ils illustrent bien certains points de ce chapitre.

I.6.1. **Exercice 1.** On considère dans  $\mathbf{R}^2$  l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (1)$$

Soit  $(x_0, y_0)$  un point distinct de l'origine et soit

$$\gamma : ]t_-, t_+[ \rightarrow \mathbf{R}^2$$

la solution maximale de (1) telle que  $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ . Soit  $H(x, y) = x^2 + y^2$  et  $h = H \circ \gamma$ .

1) Exprimer  $\frac{dh}{dt}$  en fonction de  $\gamma(t)$ . En déduire que  $t_- = -\infty$ .

2) Montrer que  $h$  est un difféomorphisme :

$$h : ]t_-, t_+[ \rightarrow ]u_-, u_+[ .$$

Calculer le difféomorphisme réciproque  $t = k(u)$ . Montrer que  $u_- = 0$ .

3) Montrer que  $t_+$  est fini. En déduire que  $u_+ = +\infty$ . Donner l'allure des orbites.





