

Chapitre 1

Lois de bilan pour le milieu fluide

1.1 Introduction

Soit un fluide en mouvement par rapport à un référentiel \mathcal{R} lié à un observateur. Comme son nom l'indique, la Mécanique des Milieux continus choisit de décrire cet écoulement à une échelle spatiale macroscopique L pour laquelle le fluide se contente bien de l'approximation de matière continue. Ainsi, si ℓ est le libre parcours moyen typique des constituants microscopiques du fluide, il faut respecter dans ce cadre la condition $\ell \ll L$. Dans un tel cas, le Mécanicien donne un sens à la notion de particule fluide au point (\underline{x}, t) de l'espace-temps en associant à (\underline{x}, t) une particule dotée de propriétés thermomécaniques macroscopiques obtenues en moyennant, à l'instant t et sur un voisinage du point \underline{x} de taille caractéristique ε avec $\ell \ll \varepsilon \ll L$, les propriétés associées des constituants microscopiques. Si l'hypothèse $\ell \ll L$ n'est pas satisfaite, c'est-à-dire si le souci de la description spatiale descend à des échelles comparables voire inférieures au libre parcours moyen, la modélisation de l'écoulement relève de la Physique statistique. Cette situation échappant au domaine de prédiction de la Mécanique des Milieux continus se rencontre notamment pour l'étude de l'écoulement d'un gaz très dilué autour d'un obstacle de dimension typique $L < \ell$. Ce cours écarte de telles circonstances et conserve l'hypothèse $\ell \ll L$. Dans ce cadre, le mouvement du milieu continu par rapport à \mathcal{R} est caractérisé par la donnée à tout instant t (du domaine temporel d'écoulement) du champ Eulérien $\underline{U}(\underline{x}, t)$ des vitesses de ses particules fluides.

Les relations entre les différentes grandeurs macroscopiques du fluide en écoulement proviennent de l'application des lois fondamentales de bilan de la thermomécanique classique : la conservation de la masse, la loi fondamentale de la dynamique et les deux principes de la thermodynamique. Ce chapitre présente les équations régis-

sant l'écoulement en soulignant les hypothèses de régularité sous-jacentes et la dualité entre forme globale de bilan et le couple constitué du bilan local et de la relation bilan (ou inéquation) de saut. Une attention particulière est portée à l'expression et aux conséquences du second principe de la thermodynamique. En effet, si ce principe d'évolution semble souvent difficile à manier voire inutile dans la mesure où le cas de l'écoulement continu en fait une apparente économie, la suite du cours montrera le rôle capital qu'il détient dans le traitement des surfaces de discontinuité traversées par la matière.

1.2 Expressions d'une loi de bilan

Cette partie est consacrée aux deux formes alternatives et duales du bilan d'une grandeur thermomécanique : le bilan global d'une part et d'autre part la combinaison du bilan local et de la relation de saut associée.

1.2.1 Formes globales de la loi de bilan

Dans toute la suite le mot domaine pour l'ensemble \mathcal{D} désigne un ouvert convexe et connexe de \mathbb{R}^3 à frontière $\partial\mathcal{D}$ admettant presque partout une normale sortante \underline{n} continue par morceaux sur $\partial\mathcal{D}$ (voir Figure 1 ci-dessous).

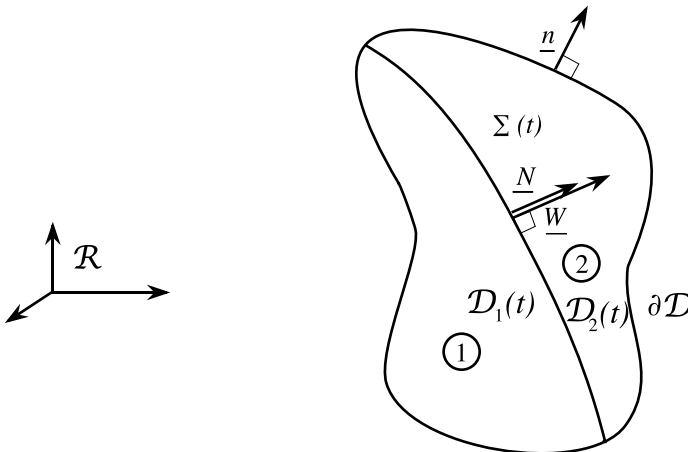


Figure 1 : *Domaine employé pour le bilan.*

Soit une grandeur physique \mathcal{F} extensive (par rapport au volume) donc modélisable par une densité volumique (intensive) $F(\underline{x}, t)$. Pour \mathcal{D} domaine fixe de \mathcal{R}

$$\mathcal{F}(t) = \int_{\mathcal{D}} F(\underline{x}, t) d\Omega \quad (1.1)$$

est ainsi la quantité de la grandeur \mathcal{F} contenue, à l'instant t , dans le domaine fixe \mathcal{D} . On suppose à ce stade que la densité $F(\underline{x}, t)$ est dérivable par rapport au temps t mais peut admettre des surfaces de discontinuité (spatiale) mobiles ayant une trace, à l'instant t , dans \mathcal{D} . La Figure 1 choisit le cas d'une seule surface de discontinuité dans \mathcal{D} , désignée par $\Sigma(t)$ et dotée de sa vitesse normale propre \underline{W} .

Le bilan global de la quantité \mathcal{F} entre les instants t et $t + dt$ dans le domaine fixe \mathcal{D} s'écrit $\mathcal{F}(t + dt) - \mathcal{F}(t) = \{I(t) + S(t)\}dt$ où $I(t)$ et $S(t)$ désignent les termes de production (algébrique) de la grandeur \mathcal{F} respectivement intérieurs à \mathcal{D} et de frontière (c'est-à-dire sur $\partial\mathcal{D}$). On ajoute traditionnellement les hypothèses suivantes :

- $I(t)$ est modélisable par une densité volumique, soit $I(t) = \int_{\mathcal{D}} P_F(\underline{x}, t)d\Omega$. Ainsi, aucune surface intérieure à \mathcal{D} ne peut produire (au sens algébrique) de la quantité \mathcal{F} . En particulier la surface $\Sigma(t)$ de discontinuité admise dans \mathcal{D} doit rester *inerte* vis-à-vis de la propriété \mathcal{F} dont on fait le bilan. Cette restriction ne permet pas de modéliser certains phénomènes d'interface (comme celui de tension superficielle) pour lesquels il faut doter l'interface $\Sigma(t)$ de propriétés thermomécaniques propres.
- $S(t)$ s'écrit $S(t) = \int_{\partial\mathcal{D}} E(\underline{x}, t, \underline{n})da$ où da est l'élément d'aire sur $\partial\mathcal{D}$. Ainsi, aucune contribution linéique n'est tolérée sur $\partial\mathcal{D}$ et la densité surfacique E ne dépend que du plan tangent (normal à \underline{n}) en \underline{x} sur $\partial\mathcal{D}$.

Avec ce jeu d'hypothèses le bilan global s'écrit, pour tout domaine \mathcal{D} fixe compris dans le domaine d'écoulement à l'instant t ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} F(\underline{x}, t)d\Omega = \int_{\mathcal{D}} P_F(\underline{x}, t)d\Omega + \int_{\partial\mathcal{D}} E(\underline{x}, t, \underline{n})da \quad (1.2)$$

et reste valable même si la densité volumique $F(\underline{x}, t)$ admet des discontinuités à la traversée de surfaces intérieures à \mathcal{D} si ces dernières demeurent toutefois inertes vis-à-vis de la grandeur physique \mathcal{F} .

Si, à l'instant t , $E(\underline{x}, t, \underline{n})$ est une fonction continue de $(\underline{x}, \underline{n})$ au voisinage de \underline{x} la propriété d'additivité du bilan entraîne que $E(\underline{x}, t, \underline{n}) = -E(\underline{x}, t, -\underline{n})$. Ce résultat combiné avec le raisonnement dit du petit tétraèdre (voir J. Salençon, tome 1) conduit à $E(\underline{x}, t, \underline{n}) = -\underline{J}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}$ où \underline{J} est un vecteur flux. De plus, une part de l'échange de frontière provient manifestement du mouvement macroscopique des particules fluides qui traversent la frontière immobile $\partial\mathcal{D}$ en emportant ou amenant de la quantité \mathcal{F} . Cette considération incite à décomposer \underline{J} sous la forme ci-après

$$\underline{J}(\underline{x}, t) = F(\underline{x}, t)\underline{U}(\underline{x}, t) - \underline{A}(\underline{x}, t) \quad , \quad (1.3)$$

où le premier terme est le flux de convection (qui s'annule avec le mouvement macroscopique) et le terme résiduel $-\underline{A}(\underline{x}, t)$, signature à l'échelle macroscopique et pour ce bilan de l'agitation microscopique des constituants, porte le nom de flux de diffusion. Ainsi, (1.2) prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} F(\underline{x}, t)d\Omega = \int_{\mathcal{D}} P_F(\underline{x}, t)d\Omega - \int_{\partial\mathcal{D}} (F\underline{U} - \underline{A})(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} da \quad . \quad (1.4)$$

Ce bilan global et fondamental (1.4) privilégie des domaines \mathcal{D} fixes, à savoir le référentiel \mathcal{R} de l'observateur. Un tel bilan est alors aussi dit bilan de type conservatif.

Cependant, les bilans fondamentaux de la Mécanique des Milieux continus trouvent leur formulation naturelle dans le cas de systèmes matériels donnés et en mouvement. Plus précisément, un tel système φ est par définition constitué d'un ensemble donné de particules fluides et il faut écrire le bilan de la grandeur \mathcal{F} en suivant ces particules fluides dans leur mouvement. Si le système matériel φ occupe à l'instant t le domaine $\mathcal{D}(t)$ il occupera à l'instant ultérieur t' le domaine $\mathcal{D}(t')$ image de $\mathcal{D}(t)$ dans le mouvement de champ de vitesses macroscopique $\underline{U}(\underline{x}, t)$. Il est donc utile d'exprimer la dérivée par rapport à son unique argument t de la fonction $\mathcal{F}(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega$ lorsque le domaine $\mathcal{D}(t)$, variable, est animé cette fois d'un mouvement propre de champ de vitesse $\underline{V}(\underline{x}, t)$. Une telle dérivée est notée

$$\frac{\delta}{\delta t_{\underline{V}}} \int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega \quad (1.5)$$

et le cas $\underline{V} = \underline{U}$ permettra, en suivant un système matériel, d'expliciter facilement les lois fondamentales de bilan de la Mécanique des Milieux continus. Le résultat central dans ce sens est le suivant (pour une justification consulter P. Germain et P. Muller ou J. Kerbrat) :

Si \underline{V} est continue dans $\mathcal{D}(t)$, continue par morceaux sur $\partial\mathcal{D}(t)$ et F est continue dans $\mathcal{D}(t) \cup \partial\mathcal{D}(t)$, continûment dérivable par morceaux par rapport aux variables (\underline{x}, t) dans $\mathcal{D}(t)$ alors :

$$\frac{\delta}{\delta t_{\underline{V}}} \int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(\underline{x}, t) d\Omega + \int_{\partial\mathcal{D}(t)} F \underline{V}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} da \quad , \quad (1.6)$$

où \underline{n} demeure la normale extérieure à $\partial\mathcal{D}(t)$.

L'hypothèse large de continuité de \underline{V} par morceaux sur $\partial\mathcal{D}(t)$ procure immédiatement un résultat valable pour un jeu d'hypothèses plus faibles. En effet, si \underline{V} est continue par morceaux sur $\partial\mathcal{D}(t)$ mais $\mathcal{D}(t)$ comporte cette fois une surface $\Sigma(t)$ mobile et de vitesse propre normale \underline{W} , continue par morceaux sur $\Sigma(t)$, telle que \underline{V} et F sont respectivement continu et continûment différentiables de l'argument (\underline{x}, t) dans $\mathcal{D}(t) \setminus \Sigma(t)$ et F continue sur $\partial\mathcal{D}(t) \setminus (\partial\mathcal{D}(t) \cap \Sigma(t))$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t_{\underline{V}}} \left[\int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega \right] &= \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(\underline{x}, t) d\Omega + \int_{\partial\mathcal{D}(t)} (F \underline{V})(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} da \\ &\quad - \int_{\Sigma(t)} [F] \underline{W} \cdot \underline{N} da \quad , \end{aligned} \quad (1.7)$$

où $[F] := F(2) - F(1)$ si \underline{N} est la normale unitaire à $\Sigma(t)$ orientée dans le sens de $\textcircled{1}$ vers $\textcircled{2}$ et $F(i)$ désigne le prolongement par continuité et du coté (i) de F sur $\Sigma(t)$. La preuve consiste à scinder le domaine $\mathcal{D}(t)$ en deux sous-domaines $\textcircled{1} = \mathcal{D}_1(t)$ et $\textcircled{2} = \mathcal{D}_2(t)$ (voir Figure 1) pour lesquels on applique séparément le résultat (1.6) en remarquant qu'il est possible de définir pour chaque domaine $D_i(t)$ une vitesse \underline{V}_i par $\underline{V}_i := \underline{V}$ sur $\mathcal{D}_i(t) \cup (\partial\mathcal{D}_i(t) \setminus \Sigma(t))$ et $\underline{V}_i := \underline{W}$ sur $\Sigma(t)$. Le résultat découle alors de la relation

$$\frac{\delta}{\delta t_{\underline{V}}} \int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega = \frac{\delta}{\delta t_{\underline{V}_1}} \int_{\mathcal{D}_1(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega + \frac{\delta}{\delta t_{\underline{V}_2}} \int_{\mathcal{D}_2(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega \quad , \quad (1.8)$$

où, pour chaque terme du second membre, les conditions d'application de (1.6) sont satisfaites. La formule (1.7) suggère plusieurs remarques :

- Manifestement ce résultat s'applique au cas $\underline{V} = \underline{0}$ et F continue sur $\mathcal{D}(t) \cup \partial\mathcal{D}(t) \setminus \Sigma(t)$, continûment différentiable sur $\mathcal{D}(t) \setminus \Sigma(t)$. Dans ce cas, avec \mathcal{D} fixe, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} F(\underline{x}, t) d\Omega = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial t}(\underline{x}, t) d\Omega - \int_{\Sigma(t)} [F] \underline{W} \cdot \underline{N} da \quad . \quad (1.9)$$

- Les quantités $F(i)$ obtenues en prolongeant par continuité F du côté \mathcal{I} étant elles-mêmes continues sur $\Sigma(t)$, $[F]$ est continue sur $\Sigma(t)$.

Notons que dans (1.7) seule la discontinuité éventuelle de F à la traversée de $\Sigma(t)$ intervient (pas celles de \underline{V} ou des dérivées partielles en espace de F !). Cette caractéristique admet deux conséquences :

- L'expression (1.6) demeure valable si \underline{V} est supposée seulement continue par morceaux dans $\mathcal{D}(t)$ au lieu de continue dès lors que F reste continue dans $\mathcal{D}(t)$.
- Si le champ \underline{h} est continu par morceaux sur $\partial\mathcal{D}(t)$, continu sur $\mathcal{D}(t) \setminus \Sigma(t)$ et \underline{V} et F vérifient les hypothèses requises par l'égalité (1.7) alors :

$$\frac{\delta}{\delta t \underline{V}} \int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega = \frac{\delta}{\delta t \underline{h}} \int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega + \int_{\partial\mathcal{D}(t)} F(\underline{V} - \underline{h}) \cdot \underline{n} da \quad . \quad (1.10)$$

Le lien (1.10) reste donc valable qu'il y ait ou non des surfaces de discontinuités dans $\mathcal{D}(t)$. Il permet également en choisissant $\underline{h} = \underline{0}$ et en employant la forme globale de bilan (1.4) d'écrire le bilan lorsqu'on suit $\mathcal{D}(t)$ avec le champ des vitesses \underline{V} continu par morceaux sur $\partial\mathcal{D}(t)$ et presque partout dans $\mathcal{D}(t)$. Plus précisément, il vient :

$$\frac{\delta}{\delta t \underline{V}} \int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} P_F(\underline{x}, t) d\Omega - \int_{\partial\mathcal{D}(t)} [F(\underline{U} - \underline{V}) - \underline{A}] \cdot \underline{n} da \quad , \quad (1.11)$$

et cela même si F et \underline{V} admettent dans $\mathcal{D}(t)$ des surfaces de discontinuité dotées de leur mouvement propre mais inertes vis-à-vis de la propriété \mathcal{F} . L'expression du terme de frontière dans (1.11) comporte deux contributions :

- un flux de convection $-F(\underline{U} - \underline{V})$ par rapport à la frontière mobile $\partial\mathcal{D}(t)$;
- un flux de diffusion, $-\underline{A}$, qui demeure celui obtenu pour le domaine fixe \mathcal{D} .

Le cas particulier $\underline{V} = \underline{U}$ fournit la dérivée dite particulière de la quantité $\int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega$. Rappelons simplement que pour une grandeur scalaire $f(\underline{x}, t)$ différentiable au voisinage de (x, t) , nous avons :

$$\frac{\delta}{\delta t \underline{V}} f := \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x} + \underline{V} dt, t + dt) - f(\underline{x}, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{\text{grad}} f \cdot \underline{V}; \quad \frac{df}{dt} := \frac{\delta}{\delta t \underline{U}} f \quad . \quad (1.12)$$

1.2.2 Lien entre le bilan global et le duo : bilan local-relation de saut

Comme leur nom l'indique les formes globales de bilan (1.4) ou (1.11) conviennent pour accéder à des informations intégrées. Elles permettent également, moyennant des hypothèses de régularité adéquates, d'obtenir les équations aux dérivées partielles portant sur les grandeurs locales. À ce propos il faut remarquer que la signification de l'adjectif local dépend de la finesse de la modélisation adoptée. Par exemple, si ce terme sous-entend souvent une description tridimensionnelle avec une dépendance en (\underline{x}, t) , un modèle unidimensionnel qui ignore délibérément la dépendance en fonction de deux des trois coordonnées spatiales entre aussi dans le cadre de la description locale. Dans chaque cas l'écriture locale est obtenue dans le respect des équations (1.4) ou (1.11) en choisissant des volumes élémentaires compatibles avec la modélisation décrétée (voir à ce propos le cas de l'approximation unidimensionnelle au chapitre 2). Si $\partial F/\partial t$, P_F sont continus et $F, \underline{U}, \underline{A}$ continûment différentiables dans un domaine fixe \mathcal{D} à l'instant t alors l'équation de bilan (1.4) conduit, en tout point de \mathcal{D} , à l'équation locale de bilan sous forme conservative

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div} (F\underline{U} - \underline{A}) = P_F \quad (1.13)$$

ou à sa forme alternative exprimée à l'aide de la dérivée particulaire de la grandeur F :

$$\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} (\underline{U}) = P_F + \operatorname{div} \underline{A} \quad . \quad (1.14)$$

Le résultat découle de la relation $\int_{\mathcal{D}'} In(\underline{x}, t) d\Omega = 0$ valable, à l'instant t , pour tout sous-domaine \mathcal{D}' de \mathcal{D} et pour un intégrand $In(\underline{x}, t) := \frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div} (F\underline{U} - \underline{A}) - P_F$ continu dans \mathcal{D} si on a remarqué (pour appliquer (1.4) à \mathcal{D}') qu'ici la continuité de F (voir (1.9)) permet de rentrer la dérivation sous le signe intégral.

Noter que les formes locales (1.13) ou (1.14) sont obtenues en autorisant des volumes élémentaires "tridimensionnels" $d\Omega = dx dy dz$ pour le passage au local.

Si à présent \underline{U} et \underline{A} demeurent continues à l'instant t dans \mathcal{D} excepté à la traversée d'une surface mobile $\Sigma(t)$ animée d'une vitesse propre normale $\underline{W} = W\underline{N}$ continue sur $\Sigma(t)$, pour F continûment différentiable dans $\mathcal{D}(t) \setminus \Sigma(t)$ l'équation de bilan (1.11) mène à la relation de compatibilité suivante

$$[F(\underline{U} - \underline{W}) - \underline{A}] \cdot \underline{N} = 0 \quad \text{sur } \Sigma(t), \quad (1.15)$$

où $[[a]] = a_2 - a_1$ si \underline{N} est dirigée du côté ① vers ② et a_i est la valeur obtenue en prolongeant par continuité sur $\Sigma(t)$ et du côté i la valeur de a .

En effet, choisissons un domaine \mathcal{D}' inclus dans \mathcal{D} et contenant une portion $\Sigma'(t)$ de $\Sigma(t)$. Considérons alors un champ cinématique \underline{V} continu par morceaux sur $\mathcal{D}' \cup \partial\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}'(t)$ le domaine mobile coïncidant à l'instant t avec \mathcal{D}' et animé de la vitesse \underline{V} . Ce domaine $\mathcal{D}'(t)$ est alors partagé par $\Sigma'(t)$ en deux sous-domaines $\mathcal{D}'_1(t)$ et $\mathcal{D}'_2(t)$ (voir Figure 1, aux notations près) et pour deux nouveaux champs de vitesses \underline{V}_1 et \underline{V}_2 tels que $\underline{V}_i := \underline{V}$ dans $\mathcal{D}'_i(t)$ et sur $\partial\mathcal{D}'(t) \cap \partial\mathcal{D}'_i(t)$ et $\underline{V}_i := \underline{W}$

sur $\Sigma'(t)$ nous pouvons écrire :

$$\frac{\delta}{\delta t} \underline{V} \left[\int_{\mathcal{D}'(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega \right] = \frac{\delta}{\delta t} \underline{V}_1 \left[\int_{\mathcal{D}'_1(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega \right] + \frac{\delta}{\delta t} \underline{V}_2 \left[\int_{\mathcal{D}'_2(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega \right] . \quad (1.16)$$

Le bilan (1.11) s'applique séparément à chaque terme de cette relation (1.16) et en remarquant que la normale sortante \underline{n}_i à $\mathcal{D}'_i(t)$ sur $\Sigma'(t)$ s'écrit $\underline{n}_i = (-1)^{i+1} \underline{N}$ il conduit simplement à :

$$\int_{\Sigma'(t)} \left[F(\underline{U} - \underline{W}) - \underline{A} \right] \cdot \underline{N} da = 0 . \quad (1.17)$$

Selon les hypothèses, les fonctions $F(i)$, $\underline{U}(i)$, $\underline{A}(i)$ et \underline{W} sont continues sur $\Sigma(t)$. Ainsi, (1.17) a lieu non seulement pour tout sous-ensemble $\Sigma'(t)$ de $\Sigma(t)$ mais pour un intégrand continu sur $\Sigma(t)$ ce qui entraîne (1.15).

La relation de compatibilité (1.15), dite aussi relation de saut, invite à plusieurs commentaires :

- Elle ne dépend pas de la convention choisie pour le saut $[[\]]$ vis-à-vis de l'orientation de \underline{N} .
- Elle n'implique pas le terme de production volumique : $P_F(\underline{x}, t)$.
- Elle s'obtient de manière mnémotechnique en disant que le flux (relatif de F à travers la surface mobile $\Sigma(t)$, voir (1.11)) admet une *composante normale* continue à la traversée de $\Sigma(t)$. Des discontinuités des composantes tangentielles restent possibles.
- Enfin, la surface de discontinuité $\Sigma(t)$ est supposée *inerte* vis-à-vis de la propriété \mathcal{F} dont on fait le bilan.

Dans ce cours la relation de saut (1.15) occupe une place importante puisque certains des écoulements étudiés présenteront des surfaces de discontinuité (traversées par de la matière).

1.3 Application aux principes fondamentaux de la thermomécanique

Dans cette partie nous appliquons aux lois de la dynamique et de la thermodynamique les équations de bilan présentées dans les paragraphes précédents. Plus précisément, on écrit pour certaines grandeurs $F(\underline{x}, t)$ le bilan (1.11) avec $\underline{V} = \underline{U}$ pour un système matériel φ (ensemble donné de particules fluides) occupant le domaine $\mathcal{D}(t)$ à l'instant t . Dans chaque cas non seulement la forme globale exprimant $\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega$ est donnée (sauf mention explicite pour \underline{U} continue par morceaux sur $\mathcal{D}(t) \cup \partial\mathcal{D}(t)$ et F continûment différentiable par morceaux dans $\mathcal{D}(t)$) mais aussi (moyennant les hypothèses de régularité associées) les formes locales (1.13), (1.14) et la relation de saut (1.15).

1.3.1 Bilan de masse

La masse de tout système *matériel* φ est conservée au cours de son mouvement si aucun dispositif n'injecte ou ne consomme de la matière au sein de l'écoulement. Ainsi, en choisissant $F(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}, t)$, masse volumique du milieu continu, il vient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\underline{x}, t) d\Omega = 0 \quad , \quad (1.18)$$

où $\mathcal{D}(t)$ décrit le domaine occupé à l'instant t par le système matériel φ . Par suite, dans la forme de bilan (1.11) $P_\rho(\underline{x}, t) = 0$ et $\underline{A} = \underline{0}$: il n'y a pas de production volumique de masse par unité de temps ni de flux de diffusion. Le bilan global (1.4) pour un domaine \mathcal{D} fixe s'écrit donc

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} \rho(\underline{x}, t) d\Omega = - \int_{\partial\mathcal{D}} \rho \underline{U} \cdot \underline{n} da \quad (1.19)$$

même en présence éventuelle d'une surface de discontinuité de ρ . Les équations locales et la relation de saut deviennent dans ce cas :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{U}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\underline{U}) = 0 \quad , \quad (1.20)$$

$$\llbracket \rho(\underline{U} - \underline{W}) \rrbracket \cdot \underline{N} = 0 \quad , \quad \text{sur } \Sigma(t) \quad . \quad (1.21)$$

L'équation (1.20) porte le nom d'équation de continuité .

Ainsi si $\operatorname{div}(\underline{U}) = 0$, la masse volumique reste conservée sur chaque trajectoire et l'écoulement est dit incompressible. Noter dans ce cas que ρ peut cependant varier d'une trajectoire à l'autre (fluide inhomogène). Grâce au bilan local (1.20) et pour une densité massique (ou spécifique) f telle que $F = \rho f$ alors si f, ρ et \underline{U} sont continûment différentiables dans $\mathcal{D}(t)$ la relation utile suivante s'obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho f d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{df}{dt} d\Omega \quad . \quad (1.22)$$

- Dans certaines situations rarissimes, de la matière peut être injectée (ou retirée) au sein de l'écoulement. La modélisation alors retenue ajoute au bilan de masse un terme de production P_ρ et (1.20) devient :

$$\frac{d\rho}{dt} = P_\rho - \rho \operatorname{div}(\underline{U}) \quad . \quad (1.23)$$

Dans un tel cas le caractère incompressible : $d\rho/dt = 0$ (pas de variation de masse volumique sur la trajectoire) réclame $P_\rho = \rho \operatorname{div}(\underline{U})$.

- En appliquant par exemple (1.7) pour $\underline{V} = \underline{U}$ à la grandeur continue $F = 1$ et pour un domaine matériel élémentaire $\mathcal{D}(t)$ de volume $d\Omega$ le lecteur retrouvera la relation classique

$$\frac{d(d\Omega)}{dt} = d\Omega[\operatorname{div}(\underline{U})] \quad (1.24)$$

donnant la dérivée partielle du volume occupé par une particule fluide élémentaire. Ainsi, la propriété $\operatorname{div}(\underline{U}) = 0$ est attachée au caractère isochore de l'écoulement et dans le cas unique où $P_\rho = 0$ cette propriété s'identifie alors au caractère incompressible.

1.3.2 Bilan de quantité de mouvement : loi fondamentale de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système matériel φ occupant à l'instant t le domaine $\mathcal{D}(t)$ s'écrit, pour la résultante des quantités de mouvement de densité massique \underline{U} ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{U} d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{F} d\Omega + \int_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} da \quad , \quad (1.25)$$

où \underline{F} représente la densité massique des efforts extérieurs (comprenant les forces massiques d'inertie d'entraînement et de Coriolis si le référentiel d'étude \mathcal{R} s'avère non Galiléen) et $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes de Cauchy qui modélise les forces de contact exercées sur la frontière $\partial\mathcal{D}(t)$ par l'extérieur. La description des efforts extérieurs retenue ne comporte de plus aucune densité massique ou surfacique de couples et le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ s'avère alors symétrique : ${}^t\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}$. Cette dernière relation assure automatiquement la deuxième partie du principe fondamental de la dynamique, à savoir le bilan suivant pour le moment cinétique du système matériel φ par rapport à tout point O fixe de \mathcal{R} :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} (\underline{OM} \wedge \rho \underline{U}) d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} (\underline{OM} \wedge \rho \underline{F}) d\Omega + \int_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{OM} \wedge (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) da \quad . \quad (1.26)$$

L'équation (1.25) autorise également l'écriture ci-dessous, pour un domaine fixe \mathcal{D} ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{U} d\Omega = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{F} d\Omega - \int_{\partial\mathcal{D}} \rho (\underline{U} \cdot \underline{n}) \underline{U} da + \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} da \quad . \quad (1.27)$$

La forme locale associée à (1.27) s'obtient immédiatement en travaillant par exemple composante par composante dans un repère orthonormé direct. Ainsi, il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{U}) + \operatorname{div} (\rho \underline{U} \otimes \underline{U}) = \rho \underline{F} + \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} \quad , \quad (1.28)$$

où le tenseur symétrique $\underline{U} \otimes \underline{U}$ obéit à : $(\underline{U} \otimes \underline{U}) \cdot \underline{n} := (\underline{U} \cdot \underline{n}) \underline{U}$ et par définition même de la divergence d'un tenseur T d'ordre quelconque (mais différentiable) :

$$\int_{\partial\mathcal{D}} T \cdot \underline{n} da = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} T d\Omega, \forall \mathcal{D} \quad . \quad (1.29)$$

En tenant compte du bilan de masse (plus précisément de la propriété (1.22)), le bilan global (1.25) conduit (sous des conditions de régularité adéquates) à la forme alternative :

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \rho \underline{F} + \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \rho \left\{ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{\operatorname{grad}} \left(\frac{U^2}{2} \right) + \underline{\operatorname{rot}}(\underline{U}) \wedge \underline{U} \right\} \quad . \quad (1.30)$$

La dernière égalité (où U désigne le module de la vitesse \underline{U}) découle d'une expression souvent précieuse de l'accélération $d\underline{U}/dt$ de la particule fluide. Enfin, la relation de saut associée prend la forme :

$$\llbracket \rho \underline{U} (\underline{U} - \underline{W}) \cdot \underline{N} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{N} \rrbracket = \underline{0}, \text{ sur } \Sigma(t) \quad . \quad (1.31)$$

Le bilan local de l'énergie cinétique spécifique s'obtient en multipliant (1.30) scalairement par \underline{U} , soit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{U^2}{2} \right) = \underline{F} \cdot \underline{U} + \frac{1}{\rho} (\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{U} \quad . \quad (1.32)$$

Précisons que le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ admet pour un fluide la décomposition suivante

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\tau}} \quad (1.33)$$

où $\underline{\underline{\tau}}$ est le tenseur des contraintes visqueuses fonction du seul gradient du champ \underline{U} , s'annulant avec celui-ci, et p est la pression *mécanique* observée au sein du fluide.

1.3.3 Premier principe de la thermodynamique

En thermodynamique classique ce principe attache à un système φ donné une énergie interne macroscopique E , fonction de l'état du système et dont les variations entre deux états d'*équilibre macroscopique*, vérifient dans toute évolution infinitésimale

$$dE = \delta W + \delta Q \quad (1.34)$$

si δW et δQ désignent respectivement le travail et la chaleur élémentaires reçus par φ de la part de l'extérieur. Ainsi, la thermodynamique classique étudie des situations d'équilibre macroscopique (le système est au repos macroscopique) et s'apparente donc plutôt à une thermostatique.

Dans le cas d'un milieu continu en écoulement, les principes de la thermodynamique portent sur des systèmes en mouvement. Nous supposons cependant que les relations d'état entre grandeurs thermodynamiques (ou leur définition même) établies dans le cadre de la thermodynamique classique subsistent pour le milieu continu en écoulement. Ainsi, le temps caractéristique d'ajustement des diverses propriétés reste négligeable par rapport au temps caractéristique de l'écoulement. En dehors de situations exotiques mettant en jeu des processus d'écoulements particulièrement "brefs" cette hypothèse s'avère parfaitement légitime et porte le nom d'*hypothèse de l'équilibre local*. En particulier la pression thermodynamique (définie ci-après par (1.45)) sera assimilée à la pression mécanique répondant à (1.33).

Dans le cas du milieu continu en mouvement l'énergie à considérer pour appliquer le premier principe au système matériel φ comporte deux contributions distinctes : l'énergie interne et l'énergie cinétique. Ici, la transcription de (1.34) porte naturellement sur la dérivée particulière de l'énergie du système φ : matière donnée occupant à l'instant t le domaine $\mathcal{D}(t)$. Ainsi,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} (\rho \underline{F} \cdot \underline{U} + r_c) d\Omega + \int_{\partial \mathcal{D}(t)} ((\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{U} - \underline{q} \cdot \underline{n}) da \quad , \quad (1.35)$$

où e désigne l'énergie interne spécifique, r_c le taux volumique de chaleur échangée avec l'extérieur et \underline{q} le vecteur flux de chaleur reçue à la frontière $\partial\mathcal{D}(t)$. Grâce au caractère symétrique de $\underline{\underline{\sigma}}$ (soit $(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{U} = (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{U}) \cdot \underline{n}$) le bilan de l'énergie de type (1.4) s'écrit pour un domaine *fixe* \mathcal{D} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} \rho \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) d\Omega = \\ \int_{\mathcal{D}} (\rho \underline{F} \cdot \underline{U} + r_c) d\Omega - \int_{\partial\mathcal{D}} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) \underline{U} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{U} + \underline{q} \right] \cdot \underline{n} da \end{aligned} \quad (1.36)$$

Les deux équations locales alternatives et la relation de saut suivantes s'en déduisent aussitôt :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) = \rho \underline{F} \cdot \underline{U} + r_c + \operatorname{div} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{U} - \underline{q}) \quad , \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) \right] + \operatorname{div} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) \underline{U} \right] = \rho \underline{F} \cdot \underline{U} + r_c + \operatorname{div} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{U} - \underline{q}) \quad , \quad (1.38)$$

$$\left[\rho \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) (\underline{U} - \underline{W}) - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{U} + \underline{q} \right] \cdot \underline{N} = 0 \quad , \quad \text{sur } \Sigma(t) \quad . \quad (1.39)$$

Le premier principe permet aussi de donner le bilan attaché à une quantité physique importante pour ce cours : l'enthalpie totale du système matériel φ , de densité massique $H := h + \frac{U^2}{2}$ où $h = e + p/\rho$ désigne l'enthalpie thermodynamique spécifique de la matière, c'est-à-dire construite avec la pression thermodynamique p . En effet l'équivalence pression thermodynamique-pression mécanique donne en combinant (1.33) et (1.36) pour le domaine *fixe* \mathcal{D} le bilan global

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} \rho H d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} p d\Omega + \int_{\mathcal{D}} (\rho \underline{F} \cdot \underline{U} + r_c) d\Omega \\ - \int_{\partial\mathcal{D}} (\rho H \underline{U} - \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{U} + \underline{q}) \cdot \underline{n} da \end{aligned} \quad (1.40)$$

valable avec \underline{U} continue par morceaux sur $\partial\mathcal{D} \cup \mathcal{D}$ et ρH admettant d'éventuelles surfaces de discontinuité mobiles dans \mathcal{D} . En supposant que p est continue dans \mathcal{D} ou indépendante du temps, il vient $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} p d\Omega = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega$ et sous réserve d'une régularité adéquate le bilan local de l'enthalpie totale (spécifique) H s'écrit :

$$\rho \frac{dH}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \underline{F} \cdot \underline{U} + r_c + \operatorname{div} (\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{U} - \underline{q}) \quad . \quad (1.41)$$

Ce résultat local découle aussi de la combinaison de (1.37) et (1.32), de la définition de H et enfin du bilan local de masse (1.20). De même l'association de (1.32) et (1.37) procure :

$$\rho \frac{de}{dt} = r_c + \operatorname{div} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{U} - \underline{q}) - (\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{U} \quad . \quad (1.42)$$

Dans ce cours nous aurons souvent $dH/dt = 0$ c'est-à-dire la conservation de l'enthalpie spécifique totale sur toute trajectoire. On parle alors d'écoulement isoénergétique. Si de plus l'enthalpie totale H ne dépend pas de la trajectoire, l'écoulement est dit homoénergétique.

1.3.4 Le second principe de la thermodynamique

En thermodynamique classique, le second principe porte en fait sur les deux points suivants :

1. L'introduction pour un système matériel et supposé ici divariant (d'état macroscopique repéré par deux variables d'état, par exemple E et V le volume) d'une grandeur température absolue T , variable intensive positive, et d'une fonction d'état extensive (par rapport à la masse) S dite entropie telle que dans toute évolution infinitésimale réversible ou non du système de volume V on ait :

$$dE = TdS - pdV. \quad (1.43)$$

2. L'adjonction d'un principe d'évolution qui stipule que pour un système fermé (n'échangeant pas de constituants avec l'extérieur) pour toute évolution *possible* (autorisée) satisfait

$$dS \geq \sum_{i \in J} \frac{\delta Q_i}{T_i}, \quad (1.44)$$

où J désigne l'ensemble des différentes sources i de température propre T_i qui fournissent au système la chaleur δQ_i . L'égalité intervient uniquement à la réversibilité et en dehors de ce cas la température T_i n'a pas lieu d'être la température du système en contact avec la source i .

La relation (1.43) définit immédiatement la température et la pression thermodynamique p_{th} (assimilée à la pression mécanique p) par :

$$T := \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V \quad ; \quad p_{th} = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S. \quad (1.45)$$

Pour le milieu continu le caractère extensif de la fonction S suggère d'introduire une densité spécifique d'entropie $s(\underline{x}, t)$, fonction d'état. Ainsi, pour un système matériel φ occupant à l'instant t le domaine $\mathcal{D}(t)$ son entropie $S(t)$ s'écrit :

$$S(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho s(\underline{x}, t) d\Omega. \quad (1.46)$$

Pour un système matériel élémentaire occupant à l'instant t le volume élémentaire $d\Omega$ autour du point \underline{x} , la relation (1.43) s'applique en suivant l'évolution (dérivée particulière) de ce système avec $E = \rho e d\Omega$, $S = \rho s d\Omega$ et $V = d\Omega$. Sachant que la masse $dm = \rho d\Omega$ de ce système est conservée, (1.43) procure l'importante relation de Gibbs :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \rho \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \quad (1.47)$$

Cette dernière montre que le bilan local de l'entropie spécifique dépend des bilans de masse (qui procure $d\rho/dt$) et de la combinaison du premier principe et de la loi fondamentale de la dynamique (qui fournit de/dt). Plus précisément, selon (1.42) et (1.47), il vient :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = r_c + tr(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\text{grad}U}}) - \text{div}(\underline{q}) \quad . \quad (1.48)$$

Cette relation locale ne peut avoir lieu que dans un domaine où la régularité sous-entendue par son écriture même est vérifiée. Dans le cas particulier où $r_c = 0$, $\underline{q} = \underline{0}$ et $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{0}}$ alors

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

ce qui veut dire que l'entropie massique est préservée sur toute trajectoire. La terminologie consacrée parle dans ce cas d'écoulement isentropique. Si de plus la valeur de l'entropie spécifique ne varie pas d'une trajectoire à l'autre alors l'écoulement est dit homoentropique.

L'équation (1.48) conduit immédiatement au bilan global ci-dessous

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho s d\Omega &= \int_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{r_c + tr(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\text{grad}U}})}{T} - \frac{\underline{q}}{T^2} \cdot \underline{\underline{\text{grad}T}} \right] d\Omega \\ &\quad - \int_{\partial\mathcal{D}(t)} \frac{\underline{q}}{T} \cdot \underline{n} da \quad , \end{aligned} \quad (1.49)$$

valable pour des grandeurs continues (voire continûment différentiables pour $\rho, s, T, \underline{U}$ et \underline{q}) dans $\mathcal{D}(t)$. Ainsi, à ce stade les formes (1.48) ou (1.49) de bilan de l'entropie sont déjà contenues dans l'association des bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Le second principe vient apporter une restriction aux évolutions possibles en n'autorisant que celles qui vérifient l'équivalent de la propriété (1.44) pour le milieu continu. Pour le système matériel φ occupant à l'instant t le domaine $\mathcal{D}(t)$ le passage au milieu continu (voir J. Salençon, tome 2) se traduit pour toute évolution thermodynamique admissible par l'inégalité :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho s(\underline{x}, t) d\Omega \geq \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{r_c}{T} d\Omega - \int_{\partial\mathcal{D}(t)} \frac{\underline{q} \cdot \underline{n}}{T} da \quad ; \quad (1.50)$$

l'égalité étant atteinte si et seulement si l'évolution est réversible.

Dans l'inégalité (1.50) la température T est celle du milieu continu. Ce résultat découle de l'application de (1.44) si on distingue deux types de sources de chaleur :

- La source de chaleur intérieure (caractérisée par r_c) et supposée en équilibre thermique avec le fluide.
- La source de frontière supposée en équilibre thermique avec le fluide.

Ainsi, (1.50) s'applique en fait dans l'hypothèse d'une température T continue presque partout sur $\partial\mathcal{D}(t)$ et dans $\mathcal{D}(t)$.

Si on admet une discontinuité éventuelle des grandeurs ρ, s, \underline{W} et \underline{q}/T uniquement à la traversée de $\Sigma(t)$ incluse dans $\mathcal{D}(t)$, mobile et de vitesse normale propre \underline{W} , et enfin de bonnes propriétés de régularité dans $\mathcal{D}(t) \setminus \Sigma(t)$, (1.50) s'écrit également

$$\int_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{ds}{dt} d\Omega + \int_{\Sigma(t)} \llbracket \rho s(\underline{U} - \underline{W}) \rrbracket \cdot \underline{N} da \geq \int_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{r_c - \operatorname{div}(\underline{q})}{T} + \frac{\underline{q}}{T^2} \cdot \underline{\operatorname{grad}} T \right] d\Omega + \int_{\Sigma(t)} \left[-\frac{\underline{q}}{T} \right] \cdot \underline{N} da \quad ; \quad (1.51)$$

en conservant la définition $\llbracket \mathbf{a} \rrbracket := \mathbf{a}(2) - \mathbf{a}(1)$ si \underline{N} dirigé de ① vers ②. L'inégalité (1.51) ayant lieu pour tout sous-domaine $\mathcal{D}'(t)$ de $\mathcal{D}(t)$ coupant $\Sigma(t)$ et pour des intégrands continus dans $\mathcal{D}(t)$ et sur $\Sigma(t)$, elle conduit aisément aux deux inégalités (locales) ci-dessous :

$$\frac{\phi}{T} := \rho \frac{ds}{dt} - \left\{ \frac{r_c - \operatorname{div}(\underline{q})}{T} + \frac{\underline{q}}{T^2} \cdot \underline{\operatorname{grad}} T \right\} \geq 0; \quad \text{dans } \mathcal{D}(t) \setminus \Sigma(t) \quad , \quad (1.52)$$

$$\llbracket \rho s(\underline{U} - \underline{W}) + \frac{\underline{q}}{T} \rrbracket \cdot \underline{N} \geq 0; \quad \text{sur } \Sigma(t) \quad , \quad (1.53)$$

qui explicitent localement le second principe pour le milieu continu.

En effet, il suffit de remarquer que si \underline{a} est continûment différentiable dans $\mathcal{D}(t) \setminus \Sigma(t)$ alors

$$\int_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{a} \cdot \underline{n} da = \int_{\mathcal{D}(t)} \operatorname{div} \underline{a} d\Omega + \int_{\Sigma(t)} \llbracket \underline{a} \rrbracket \cdot \underline{N} da \quad (1.54)$$

avec la convention précédente pour $\llbracket \mathbf{a} \rrbracket$ et $a(i)$ en prolongeant par continuité a sur $\Sigma(t)$ à partir du coté ②. Noter que ce résultat permet d'obtenir comme restriction de (1.6) (en ajoutant aux hypothèses initiales de validité de (1.6) la continue différentiabilité, comme pour F , de \underline{V} sur $\mathcal{D}(t) \setminus \Sigma(t)$) :

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega = \int_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}(F \underline{V}) \right] d\Omega + \int_{\Sigma(t)} \llbracket F(\underline{V} - \underline{W}) \rrbracket \cdot \underline{N} da \quad . \quad (1.55)$$

On applique alors (1.54) à $\underline{a} = \underline{q}/T$ et (1.55) à $F = \rho s$ et $\underline{V} = \underline{U}$ pour transformer (1.50) en (1.51).

La fonction ϕ introduite par (1.52) porte le nom de dissipation volumique. Elle s'annule à la réversibilité et reste strictement positive (puisque $T > 0$) dans le domaine dans toute transformation irréversible admissible. Sa valeur est reliée aux sources d'irréversibilité. Plus précisément, en tenant compte de (1.48) la définition (1.52) conduit à :

$$\phi = \operatorname{tr}(\underline{\tau} \cdot \underline{\operatorname{grad}} U) - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \underline{\operatorname{grad}} T \geq 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}(t) \setminus \Sigma(t) \quad . \quad (1.56)$$

Ainsi, la dissipation volumique comporte la dissipation intrinsèque volumique

$$\phi_1 := \operatorname{tr}(\underline{\tau} \cdot \underline{\operatorname{grad}} U) \quad , \quad (1.57)$$

associée à la production d'entropie par le phénomène irréversible de frottement visqueux et la dissipation thermique volumique

$$\phi_2 := -\underline{q} \cdot \underline{\operatorname{grad}}(T)/T \quad (1.58)$$

associée quant à elle à la production d'entropie par les échanges thermiques irréversibles.

En pratique la condition (1.56) est assurée dès le choix des lois de comportement pour q et $\underline{\tau}$ en fonction de $\underline{\text{grad}}U$ pour le fluide.

En définitive, ce paragraphe relatif au second principe peut laisser le lecteur perplexe dans la mesure où il a peut-être lui-même déjà résolu des problèmes de Mécanique en faisant l'économie apparente de ce principe. Effectivement une partie du second principe, l'inégalité (1.56), est automatiquement satisfaite lors du choix de la loi de comportement, étape qui revient très rarement au lecteur. Cette partie s'avère suffisante dans le cas d'un écoulement continu, c'est-à-dire bien souvent. Toutefois un détail apparent doit être gardé à l'esprit : il faut sur chaque surface de discontinuité assurer l'inéquation de saut (1.53). Cette relation est la trace du principe d'évolution dans le cadre d'une modélisation d'une zone de faible épaisseur (où les quantités thermomécaniques varient abruptement) par une surface géométrique, lieu de discontinuités. Pour l'application correcte de l'inégalité (1.53) noter cette fois l'importance du choix de la définition du saut $\llbracket a \rrbracket$ en adéquation avec l'orientation de \underline{N} . À plusieurs reprises ce cours rencontrera des écoulements présentant des surfaces de discontinuité ce qui fournira l'occasion de montrer le rôle crucial joué par l'apport de l'inégalité (1.53) aux autres relations de saut associées aux bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Plus généralement, le principe d'évolution sous sa forme (1.53) permettra pour une surface de discontinuité traversée par le fluide de choisir la solution parmi celles autorisées par le jeu des relations de saut associées aux autres bilans.

1.4 Fermeture du système différentiel. Fluides Newtonien et parfait.

1.4.1 Détermination de l'écoulement : récapitulatif

Supposons qu'à tout instant t l'ensemble ouvert $\xi(t)$ occupé par le fluide soit la réunion de :

1. Un nombre fini N de régions ouvertes et disjointes $\mathcal{P}_n(t)$ avec $1 \leq n \leq N$. Dans chaque ouvert $\mathcal{P}_n(t)$ les fonctions r_c et \underline{F} sont continues tandis que les grandeurs $\rho, p, e, \underline{U}, q$ et $\underline{\tau}$ sont continûment différentiables.
2. Un nombre fini (éventuellement nul) M de surfaces de discontinuité, mobiles, éventuellement sécantes et ne coupant pas les ensembles $\mathcal{P}_n(t)$ précédents. Si $M = 0$ il n'y a pas de telles surfaces et si $M \geq 1$ chaque surface est notée $\Sigma_m(t)$ avec $1 \leq m \leq M$.

À titre d'exemple, la Figure 2 montre le cas d'un écoulement bidimensionnel autour d'un obstacle hachuré de contour \mathcal{L}_i . Le fluide occupe l'ouvert délimité par les contours \mathcal{L}_i et \mathcal{L}_e . Dans ce cas $N = 3$, $M = 2$ avec ici deux lignes de discontinuité $\Sigma_1(t)$ et $\Sigma_2(t)$, sécantes au point I .

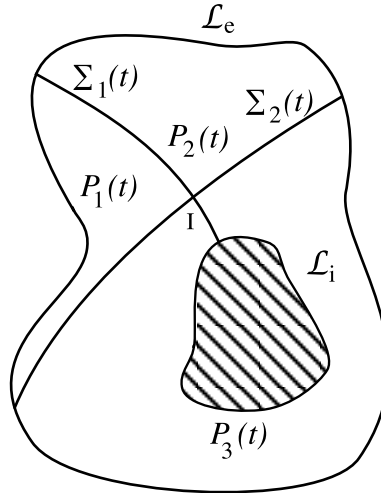


Figure 2.

La détermination de l'écoulement à l'instant t repose sur les étapes suivantes :

1. Donnée des conditions initiales soit de l'écoulement à l'instant origine t_0 .
2. Écriture aux instants ultérieurs t d'un ensemble d'équations ou inéquations locales et de conditions aux limites. Plus précisément, il faut :
 - 2.1 Assurer dans chaque ouvert $\mathcal{P}_n(t)$ les trois équations locales de bilan (ici écrites sous forme conservative) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{U}) = 0 \quad , \quad (1.59)$$

$$\frac{\partial \rho \underline{U}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{U} \otimes \underline{U}) = \rho \underline{F} - \underline{\operatorname{grad}} p + \operatorname{div}(\underline{\tau}) \quad , \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) \right] + \operatorname{div} \left(\left[\rho \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) + p \right] \underline{U} \right) \\ = \rho \underline{F} \cdot \underline{U} + r_c + \operatorname{div}(\underline{\tau} \cdot \underline{U} - \underline{q}) \quad , \end{aligned} \quad (1.61)$$

et l'inéquation locale, transcription du principe d'évolution,

$$\phi = \operatorname{tr}(\underline{\tau} \cdot \underline{\operatorname{grad}} U) - \frac{q}{T} \cdot \underline{\operatorname{grad}} T \geq 0 \quad (1.62)$$

Le jeu d'équation (1.59), (1.60) et (1.61) peut être remplacé par tout jeu obtenu par des combinaisons. En particulier, on remplace souvent l'équation (1.61) associée au bilan d'énergie par le bilan local d'entropie massique (1.48) :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = r_c + \operatorname{tr}(\underline{\tau} \cdot \underline{\operatorname{grad}} U) - \operatorname{div}(\underline{q}) \quad . \quad (1.63)$$

2.2 Assurer presque partout sur chaque surface de discontinuité $\Sigma_m(t)$ les relations de saut (1.21), (1.31) et (1.39) associées aux bilans locaux (1.59), (1.60) et (1.61) et l'inéquation de saut (1.53), inhérente au second principe. Par presque partout nous entendons en tout point de $\Sigma_m(t)$ qui n'appartient pas à une autre surface de discontinuité (condition nécessaire d'application du raisonnement qui mène à la relation de saut).

2.3 Assurer sur la frontière $\partial\xi(t)$ de la région d'écoulement (pour la Figure 2 sur la paroi \mathcal{L}_i de l'obstacle et sur \mathcal{L}_e) des conditions aux limites adéquates.

Ainsi, si r_c et \underline{F} sont connus et pour un fluide divariant (en particulier $p = p(\rho, e)$), nous avons à ce stade cinq équations locales scalaires (1.59), (1.60) et (1.61) et l'inéquation (1.62) pour les inconnues $\rho, e, \underline{U}, \underline{q}$ et $\underline{\tau}$.

1.4.2 La loi de comportement

Pour un fluide, la loi de comportement fixe une relation instantanée (pas d'effet mémoire) entre $(\underline{q}, \underline{\tau})$ et le jeu (ρ, e, \underline{U}) . Ainsi, on décide d'écrire

$$\underline{\tau} = \underline{A}(\rho, e, \underline{U}) \quad , \quad \underline{q} = \underline{B}(\rho, e, \underline{U}) \quad (1.64)$$

en choisissant d'emblée les fonctions \underline{A} et \underline{B} de manière à assurer dans toute évolution de la matière l'inégalité (1.62). Le cas particulier du fluide Newtonien usuel (matière isotrope) obéit (voir le cours de P. Huerre) aux lois constitutives suivantes

$$\underline{\tau} = \lambda \operatorname{div} \underline{U} \underline{1} + \mu (\underline{\operatorname{grad}} \underline{U} + {}^t \underline{\operatorname{grad}} \underline{U}) \quad , \quad \underline{q} = -K \underline{\operatorname{grad}} T \quad (1.65)$$

où le triplet (λ, μ, K) est une fonction de l'état thermodynamique du fluide assujettie selon (1.62) (qui induit ici $\phi_1 \geq 0$ et $\phi_2 \geq 0$; voir (1.57) et (1.58)) à satisfaire les conditions $\mu \geq 0$, $3\lambda + 2\mu \geq 0$ et $K \geq 0$. Les fonctions λ et μ sont les deux coefficients de viscosité de Lamé et la forme de $\underline{\tau}$ (dite loi de Navier-Stokes) fournie par (1.65) suffit pour déclarer Newtonien le fluide. L'expression de \underline{q} dans (1.65) porte le nom de loi de Fourier, la fonction K celui de coefficient de conductivité thermique. En général (λ, μ, K) ne dépend que de la variable T . Dans le cas d'un gaz monoatomique la théorie cinétique des gaz prédit la relation de Stokes : $3\lambda + 2\mu = 0$. Pour un tel fluide newtonien les équations locales à assurer deviennent (sous une forme faisant apparaître cette fois les dérivées particulières et le tenseur des taux de dilatation \underline{d} tel que $2\underline{d} := \underline{\operatorname{grad}} \underline{U} + {}^t \underline{\operatorname{grad}} \underline{U}$)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad , \quad (1.66)$$

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \rho \underline{F} - \underline{\operatorname{grad}} p + \underline{\operatorname{grad}} [\lambda \operatorname{div}(\underline{U})] + 2 \operatorname{div} [\mu \underline{d}] \quad , \quad (1.67)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{U} + \lambda [\operatorname{div}(\underline{U})]^2 + 2\mu \underline{d} : \underline{d} + \operatorname{div} [K \underline{\operatorname{grad}}(T)] + r_c \quad , \quad (1.68)$$

puisque (1.62) est satisfaite automatiquement via la loi de comportement. Le jeu (1.66), (1.67), (1.68) associé aux lois $p = p(\rho, e)$ et (λ, μ, K) fonction de (ρ, e) constituent les équations de Navier-Stokes.

1.4.3 Les conditions aux limites

Ces conditions (voir 2.3 du paragraphe 1.4.1) conditionnent la nature et l'existence de la solution. Malheureusement ces informations cruciales restent souvent délicates à modéliser et à imposer à la frontière $\partial\xi(t)$ de la région d'écoulement. Dans le cas général les échanges thermiques entre une paroi et le fluide s'étendent dans une couche limite thermique au voisinage de la paroi et sont ainsi gouvernés par l'écoulement dans cette zone. Par suite, il faut normalement écrire sur les frontières des conditions couplées pour la vitesse et la température et ce point épineux admet souvent une approche satisfaisante comme fruit d'une démarche microscopique : utilisation d'un modèle microscopique de l'écoulement (par exemple celui de la théorie cinétique des gaz, celui de l'équation de Boltzmann en atmosphère raréfiée etc ...). Nous nous contentons dans ce cours de rappeler et d'utiliser des conditions classiques et découpées pour le couple (\underline{U}, T) en renvoyant par exemple au cours de P. Huerre pour plus de détails.

Ainsi, pour un fluide visqueux, l'adhésion à une paroi P imperméable (non traversée par le fluide) et dotée de sa vitesse propre \underline{U}_P s'écrit en tout point M de P :

$$\underline{U}(M) = \underline{U}_P(M) \quad . \quad (1.69)$$

Pour la condition thermique seuls deux cas idéalisés seront envisagés :

- le cas isotherme pour lequel la température du fluide est celle de la paroi ;
- le cas de la paroi athermane pour laquelle si \underline{n} est un vecteur normal à P

$$\underline{q} \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } P \quad .$$

1.4.4 Le cas limite du fluide parfait

Le modèle fluide parfait consiste à décréter que $\lambda = \mu = K = 0$ pour le fluide Newtonien précédent. Dans ce cas les équations locales retenues peuvent être :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{U}) = 0 \quad , \quad (1.70)$$

$$\frac{\partial \rho \underline{U}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{U} \otimes \underline{U}) = \rho \underline{F} - \underline{\operatorname{grad}} p \quad , \quad (1.71)$$

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\partial \rho s}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \underline{U}) = \frac{r_c}{T} \quad , \quad (1.72)$$

et portent le nom d'équations d'Euler tandis que l'inéquation de saut associée au second principe devient

$$[[\rho s(\underline{U} - \underline{W})]] \cdot \underline{N} \geq 0, \quad \text{sur } \Sigma(t) \quad . \quad (1.73)$$

La condition à la paroi (1.69) doit alors être remplacée par la condition de glissement

$$\underline{U} \cdot \underline{n} = \underline{U}_P \cdot \underline{n} \quad \text{sur } P. \quad (1.74)$$

Dans ce modèle la dissipation volumique ϕ , donnée par (1.56), s'annule. Ainsi aucune source d'irréversibilité n'existe dans un domaine où l'écoulement est régulier. L'écoulement, comme le montre (1.72) (si $r_c \neq 0$) n'est pas pour autant isentropique ou a fortiori homoentropique.

En ce qui concerne l'inéquation (1.73) la relation de saut (1.21) et un choix adéquat de \underline{N} (donc de la position des domaines ① et ② par rapport à $\Sigma(t)$) permettent d'écrire $m := \rho_1(\underline{U}_1 - \underline{W}) \cdot \underline{N} = \rho_2(\underline{U}_2 - \underline{W}) \cdot \underline{N} \geq 0$ et deux cas se présentent :

- si $m = 0$, l'inéquation (1.73) est automatiquement satisfaite (avec le signe égal), la matière ne traverse par $\Sigma(t)$ et aucune conclusion n'intervient quant à la position relative de s_1 et s_2 .
- si $m > 0$, le fluide traverse $\Sigma(t)$ dans le sens de ① vers ② et l'inégalité (1.73) devient (en tenant compte de la définition de $\llbracket a \rrbracket$) :

$$s_2 - s_1 \geq 0 \quad . \quad (1.75)$$

En réalité (voir chapitre 2) $s_2 - s_1 > 0$, c'est-à-dire que la traversée de $\Sigma(t)$ s'accompagne de phénomènes irréversibles pour les particules fluides. En effet, le cas idéalisé de la surface géométrique de discontinuité $\Sigma(t)$ modélise une région de faible épaisseur macroscopique où les grandeurs thermomécaniques (en particulier \underline{U} et T) présentent des variations abruptes. Dans cette zone, la loi de comportement (1.65) montre que \underline{q} et $\underline{\tau}$, donc les dissipations volumiques ϕ_1 et ϕ_2 , ne peuvent être négligés même pour des valeurs très faibles (mais non nulles) des fonctions thermodynamiques λ , μ et K .

Pour terminer ce chapitre ajoutons que le modèle du fluide parfait permet d'obtenir des théorèmes d'application très pratique : le théorème de Crocco, le théorème de Kelvin et le théorème de Lagrange. Le théorème de Crocco ne nécessite aucune hypothèse supplémentaire et sa présentation intervient au chapitre 3 pour lequel il s'avère fondamental. Les deux autres théorèmes exploitent la notion d'écoulement barotrope : écoulement en tout point duquel ρ est seulement fonction de la pression thermodynamique p . Par exemple, un écoulement homoentropique est barotrope (fluide divariant). Nous nous contentons de donner les énoncés (pour une démonstration qui repose sur (1.71) consulter, par exemple, le cours de P. Huerre).

Énoncé de Kelvin :

Dans un fluide parfait en écoulement barotrope soumis à des forces massiques extérieures \underline{F} dérivant d'un potentiel, la circulation le long de toute courbe matérielle fermée se conserve lorsqu'on la suit dans son mouvement.

Énoncé de Lagrange :

Si un écoulement barotrope de fluide parfait soumis à des forces massiques extérieures \underline{F} dérivant d'un potentiel est irrotationnel à un instant particulier il demeure irrotationnel à tout instant.