

Chapitre 1

ANALYSE DIMENSIONNELLE

Tout vous est aquilon, tout me semble zéphyr.

Jean de la Fontaine, Le chêne et le roseau, 1668.

Si tous les mouvements de l'univers se produisaient deux ou trois fois plus vite, il n'y aurait rien à modifier à nos formules, ni aux nombres que nous y faisons entrer. La conscience aurait une impression indéfinissable, et en quelque sorte qualitative de ce changement.

Henri Bergson, Essai sur les données immédiates de la conscience, 1889.

La variété des situations évoquées précédemment montre la nécessité d'une approche systématique permettant de les classer en fonction de paramètres physiques. En Mécanique des fluides, l'analyse dimensionnelle est utilisée couramment pour déterminer quelle modélisation (fluide parfait, fluide incompressible, ...) est applicable à une situation donnée. Les nombres de Reynolds ou de Mach sont d'usage courant. En Mécanique des solides, l'analyse dimensionnelle est moins explicitement utilisée. On conçoit bien qu'une telle démarche de classement soit très utile en Mécanique des interactions fluide-structure, où le nombre de paramètres physiques est augmenté par la juxtaposition de deux systèmes.

Nous allons en premier lieu dans ce chapitre montrer comment on peut construire les paramètres sans dimension de la modélisation d'un problème couplé en partant de ceux associés aux modélisations respectives de Mécanique des fluides et de Mécanique des solides. Nous appliquerons ensuite cette démarche aux exemples proposés dans l'introduction.

Nous écrirons enfin les lois de conservation et conditions d'interface de l'ensemble fluide-solide, en faisant apparaître ces paramètres adimensionnels.

1.1 Paramètres sans dimension

La démarche de construction de nombres adimensionnels est simple, décrite dans la plupart des cours de Mécanique des fluides et dans de nombreux ouvrages généraux [13], [7], [9], [18], [25]. Nous utiliserons dans ce chapitre les notations, terminologies et surtout l'approche du cours de Mécanique des fluides de P. Huerre [18]. La modélisation du solide se réfère plus particulièrement au cours de Mécanique des milieux continus de J. Salençon [23].

1.1.1 Hypothèses simplificatrices

La démarche proposée ci-dessous a un caractère systématique et s'applique aux cas les plus généraux. Pour alléger sa description nous ferons cependant les hypothèses simplificatrices suivantes :

- (a) Le fluide et le solide sont contenus dans deux domaines disjoints.
- (b) Il n'y a pas d'échange de masse entre ces deux milieux.
- (c) La température y est uniforme et constante dans le temps.

La première hypothèse exclut les interactions dans les milieux continus qui représentent un solide poreux en présence d'un fluide, telle une éponge. La deuxième hypothèse exclut notamment la dissolution ou la solidification à l'interface. La troisième permet de s'affranchir de toutes considérations de thermique.

1.1.2 Variables et paramètres

Les variables **indépendantes** seront ici les coordonnées du point courant, $\underline{x} = (x, y, z)$, et le temps t . On notera que dans ce chapitre le point courant peut aussi bien être celui de la configuration de référence (représentation Lagrangienne) que celui de la configuration actuelle (représentation Eulerienne).

Les variables **dépendantes**, ou fonctions de champ, sont bien sûr différentes selon le milieu considéré. Dans le fluide nous considérerons la vitesse \underline{U} , la pression p et la masse volumique ρ_F . Dans le solide, on prend comme variables le déplacement $\underline{\xi}$, la contrainte de Cauchy $\underline{\sigma}$ et la masse volumique ρ_S .

Les **paramètres physiques et les données** doivent être regroupés selon leur signification propre. Nous ferons l'hypothèse que seuls interviennent les paramètres suivants :

- Paramètres physiques propres au fluide : μ , la viscosité dynamique et c_0 , la vitesse du son. .
- Paramètres physiques propres au solide : E , module d'Young et ν , coefficient de Poisson.
- Données communes au fluide et au solide : une dimension caractéristique du domaine, L et la gravité g .
- Données propres au fluide : U_0 une vitesse de référence (par exemple en amont), ρ_F^0 une masse volumique de référence et p_0 une pression de référence.
- Données propres au solide : ξ_0 un déplacement de référence et ρ_S^0 une masse volumique de référence.

Cette liste fixe donc l'ensemble des grandeurs qui peuvent intervenir dans les problèmes d'interaction fluide-solide que nous allons considérer.

Il faut bien noter que les paramètres ou données cités plus haut sont soit connus, par exemple dans une condition aux limites, soit estimés par l'intermédiaire d'autres données. Dans ce cas, une vérification a posteriori de cette estimation est nécessaire. Par exemple, si aucune condition aux limites ne donne directement un ordre de grandeur ξ_0 du déplacement dans le solide, on peut l'estimer à partir des conditions aux limites en effort et de la rigidité de la structure, ou tout simplement par l'intuition.

1.1.3 Analyse découplée

Avant d'aborder le cas général, faisons ici l'hypothèse simplificatrice de découplage :

“Les variables dépendantes définies pour chaque milieu ne dépendent que des paramètres et des données définies pour ce milieu.”

Selon cette hypothèse, le déplacement dans le solide ne dépendrait pas de la vitesse du fluide et une modification de module d'Young n'aurait aucune influence sur l'écoulement.

La vitesse du fluide s'écrit alors sous la forme

$$\underline{U} = f_U(\underline{x}, t; g, \mu, c_0, L; U_0, p_0, \rho_F^0). \quad (1.1)$$

De même, la pression et la masse volumique s'écrivent

$$p = f_p(\underline{x}, t; g, \mu, c_0, L; U_0, p_0, \rho_F^0), \quad (1.2)$$

$$\rho_F = f_{\rho_F}(\underline{x}, t; g, \mu, c_0, L; U_0, p_0, \rho_F^0). \quad (1.3)$$

L'utilisation du théorème de Vaschy-Buckingham, ou théorème π , permet de réduire ces relations à des relations entre un nombre réduit de combinaisons de ces paramètres, uniquement à partir de considérations sur leurs dimensions physiques.

Le nombre total de grandeurs physiques, noté $N + 1$, vaut ici 10. Le rang de la matrice des exposants aux dimensions est $r = 3$, comme on peut le voir en formant le tableau suivant.

	\underline{U}	\underline{x}	t	μ	c_0	L	g	U_0	p_0	ρ_F^0
Longueur	1	1	0	-1	1	1	1	1	-1	-3
Masse	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
Temps	-1	0	1	-1	-1	0	-2	-1	-2	0

La relation (1.1) est donc réductible à une relation entre $N + 1 - r = 7$ paramètres adimensionnels, par exemple

$$\frac{\underline{U}}{U_0} = F_U\left(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{U_0 t}{L}, \frac{\rho_F^0 U_0^2}{p_0}, \frac{\rho_F^0 U_0 L}{\mu}, \frac{U_0}{\sqrt{Lg}}, \frac{U_0}{c_0}\right). \quad (1.4)$$

De même, p et ρ_F peuvent s'exprimer en fonction des 6 nombres adimensionnels arguments de F_U , eux-mêmes étant adimensionnés :

$$\frac{p}{p_0} = F_p\left(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{U_0 t}{L}, \frac{\rho_F^0 U_0^2}{p_0}, \frac{\rho_F^0 U_0 L}{\mu}, \frac{U_0}{\sqrt{Lg}}, \frac{U_0}{c_0}\right), \quad (1.5)$$

$$\frac{\rho_F}{\rho_F^0} = F_{\rho_F}\left(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{U_0 t}{L}, \frac{\rho_F^0 U_0^2}{p_0}, \frac{\rho_F^0 U_0 L}{\mu}, \frac{U_0}{\sqrt{Lg}}, \frac{U_0}{c_0}\right). \quad (1.6)$$

On retrouve les nombres adimensionnels classiques et leurs interprétations :

(a) La quantité $U_0 t / L = t / T_{Fluide}$ est le temps réduit où $T_{Fluide} = L / U_0$ est l'ordre de grandeur du temps de passage du fluide le long de la distance caractéristique L et donc l'échelle de temps naturelle du point de vue du fluide.

(b) La quantité $\Pi = \rho_F^0 U_0^2 / p_0$ est la pression dynamique réduite, inverse du nombre d'Euler.

(c) La quantité $R_E = \rho_F^0 U_0 L / \mu$ est le nombre de Reynolds qui mesure l'importance relative des vitesses de convection et de diffusion visqueuse.

(d) La quantité $F_R = U_0 / \sqrt{Lg}$ est le nombre de Froude qui mesure l'importance relative des forces d'inerties et de pesanteur.

(e) La quantité $M_{ach} = U_0 / c_0$ est le nombre de Mach, mesure de l'effet de compressibilité.

De façon similaire, on écrit que le déplacement dans le solide ne dépend que des grandeurs qui sont reliées au solide :

$$\underline{\xi} = f_\xi(\underline{x}, t; g, E, \nu, L; \xi_0, \rho_S^0) \quad (1.7)$$

et des relations de même forme pour $\underline{\sigma}$ et ρ_F . Le théorème de Vaschy-Buckingham donne ici une réduction de 9 à 6 du nombre de paramètres pour chaque relation, soit par exemple :

$$\frac{\underline{\xi}}{\xi_0} = F_\xi\left(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{t \sqrt{E/\rho_S^0}}{L}; \nu, \frac{\xi_0}{L}, \frac{\rho_S^0 g L}{E}\right). \quad (1.8)$$

De même, on peut exprimer $\underline{\sigma}$ et ρ_S en fonction de ces paramètres :

$$\frac{\underline{\sigma}}{E} = F_\sigma\left(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{t \sqrt{E/\rho_S^0}}{L}; \nu, \frac{\xi_0}{L}, \frac{\rho_S^0 g L}{E}\right), \quad (1.9)$$

$$\frac{\rho_S}{\rho_S^0} = F_{\rho_S}\left(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{t \sqrt{E/\rho_S^0}}{L}; \nu, \frac{\xi_0}{L}, \frac{\rho_S^0 g L}{E}\right). \quad (1.10)$$

Ces variables et nombres adimensionnels sont moins classiques :

(a) La quantité $t\sqrt{E/\rho_S^0}/L = t/T_{Solide}$ est le temps réduit où $T_{Solide} = L/\sqrt{E/\rho_S^0}$ est le temps caractéristique de passage des ondes élastiques sur la longueur L , lesquelles ont une célérité d'ordre de grandeur $c_s = \mathcal{O}(\sqrt{E/\rho_S^0})$. C'est une échelle de temps de la dynamique du solide.

(b) La quantité $\mathcal{D} = \xi_0/L$ est une mesure d'effets de grands déplacements que nous dénommerons *déplacement réduit*.

(c) La quantité $\mathcal{G} = \rho_S^0 g L / E$ est une mesure des déformations induites par le poids propre dans la structure. En effet les contraintes associées aux forces de gravité ont pour ordre de grandeur

$$\sigma = \mathcal{O}\left(\frac{Force}{Section}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_S^0 g Volume}{Section}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_S^0 g L^3}{L^2}\right) = \mathcal{O}(\rho_S^0 g L). \quad (1.11)$$

Les déformations associées ont donc pour ordre de grandeur

$$\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{\sigma}{E}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_S^0 g L}{E}\right) = \mathcal{O}(\mathcal{G}). \quad (1.12)$$

Nous dénommerons cette grandeur *nombre de gravité*.

1.1.4 Analyse couplée

Faisons maintenant l'hypothèse de couplage qui s'écrit :

“Les variables dépendantes définies pour chaque milieu dépendent des paramètres et des données relatives aux deux milieux.”

Ainsi, sans en préciser le mode, nous admettons par exemple que la viscosité du fluide peut influencer sur le déplacement du solide. La relation (1.1) est maintenant remplacée par une forme plus générale :

$$\underline{U} = g_U(\underline{x}, t; g, \mu, c_0, L; U_0, p_0, \rho_F^0; E, \nu, \xi_0, \rho_S^0), \quad (1.13)$$

et de même pour p , ρ_F , $\underline{\xi}$, $\underline{\sigma}$, ρ_S . L'analyse des dimensions de ces variables et paramètres donne $N + 1 = 14$, $r = 3$ et donc la possibilité d'exprimer ces relations en fonction de 11 nombres adimensionnels. Prenons par exemple :

$$\frac{\underline{U}}{U_0} = G_U\left(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{U_0 t}{L}; \frac{\rho_F^0 U_0^2}{p_0}, \frac{\rho_F^0 U_0 L}{\mu}, \frac{U_0}{\sqrt{Lg}}, \frac{U_0}{c_0}; \nu, \frac{\xi_0}{L}, \frac{\rho_S^0 g L}{E}; \mathbf{A}\right) \quad (1.14)$$

où \mathbf{A} est un **nouveau nombre adimensionnel**. Le choix de ce nombre adimensionnel n'est pas unique. On pourrait prendre entre autres :

(a) Le nombre de masse $\mathcal{M} = \rho_F^0 / \rho_S^0$, rapport des masses volumiques.

(b) Le nombre de Cauchy $C_Y = \rho_F^0 U_0^2 / E$, qui mesure l'ordre de grandeur des déformations consécutives à la pression dynamique $\rho_F^0 U_0^2$. En effet, les efforts appliqués sur le solide ont pour ordre de grandeur

$$F = \mathcal{O}(\rho_F^0 U_0^2 L^2), \quad (1.15)$$

les contraintes

$$\sigma = \mathcal{O}\left(\frac{F}{L^2}\right) = \mathcal{O}(\rho_F^0 U_0^2), \quad (1.16)$$

et les déformations

$$\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{\sigma}{E}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_F^0 U_0^2}{E}\right). \quad (1.17)$$

Il peut être plus pertinent, comme on le verra dans les chapitres suivants, de choisir dans la relation (1.14) d'autres nombres adimensionnels, qui seront évidemment des combinaisons de ceux utilisés ici. Ainsi, on pourrait remplacer le nombre

$$\mathcal{G} = \frac{\rho_S^0 g L}{E} \quad (1.18)$$

par le produit

$$U_R = F_R \sqrt{\mathcal{G}} = \frac{U_0}{\sqrt{E/\rho_S^0}} = \frac{U_0}{c_S}. \quad (1.19)$$

Ce nombre appelé vitesse réduite est un rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse des ondes élastiques dans le solide. Par ailleurs, nous avons

choisi dans (1.14) une réduction du temps sous la forme de $U_0 t/L$, qui pourrait être remplacée par $t \sqrt{E/\rho_S^0}/L$.

On retiendra principalement que l'analyse dimensionnelle du système couplé fait apparaître : les nombres adimensionnels propres à la description de l'écoulement du fluide (R_E , F_R , M_{ach} , Π), les nombres adimensionnels propres à la description du mouvement du solide (ν , \mathcal{D} , \mathcal{G}), et un nouveau nombre adimensionnel (par exemple C_Y).

Dans l'expression (1.14), le couplage fluide-structure se traduit essentiellement par l'influence possible des quatre nombres adimensionnels ν , \mathcal{D} , \mathcal{G} et \mathbf{A} , qui différencient l'équation (1.14) de la relation (1.4). Ainsi, le nombre adimensionnel \mathbf{A} , qui est le seul à combiner des grandeurs caractéristiques du fluide et du solide ne résume pas, à lui seul, l'ensemble des interactions. De la même façon, pour le solide, le déplacement s'écrit

$$\frac{\xi}{\xi_0} = G_\xi\left(\frac{x}{L}, \frac{U_0 t}{L}; \frac{\rho_F^0 U_0^2}{p_0}, \frac{\rho_F^0 U_0 L}{\mu}, \frac{U_0}{\sqrt{Lg}}, \frac{U_0}{c_0}; \nu, \frac{\xi_0}{L}, \frac{\rho_S^0 g L}{E}; \mathbf{A}\right). \quad (1.20)$$

Le couplage fluide-structure se traduit par la présence des nombres Π , R_E , F_R , M dans la relation (1.20), à la différence de la relation (1.8).

1.1.5 Application

Pour les six exemples décrits dans l'introduction, on peut tenter de donner un ordre de grandeur des différents paramètres physiques. Le tableau ci-dessous donne *en puissances de 10* ces valeurs.

	g	μ	c_0	L	U_0	ρ_F	E	ξ_0	ρ_S
Aileron du F 117	1	-5	2	0	2	0	11	-1	4
Barrage souple	1	-3	3	1	-2	3	9	0	3
Tête de lecture	1	-5	2	-7	1	0	11	-9	4
Peau de dauphin	1	-3	3	0	1	3	8	-3	3
Effet "Castafiore"	1	-5	2	-3	-2	0	10	-6	3
Pont de Tacoma	1	-5	2	1	1	0	11	0	4

Nous pouvons alors estimer les nombres adimensionnels que nous avons mis en évidence dans ce chapitre, également en puissances de 10.

	R_E	M	F_R^2	U_R^2	C_Y	\mathcal{M}	\mathcal{G}	\mathcal{D}
Aileron du F 117	7	0	3	-3	-7	-4	-6	-1
Barrage souple	1	-5	-6	-10	-10	0	-4	-1
Tête de lecture	-1	-1	8	-5	-9	-4	-13	-2
Peau de dauphin	7	-2	1	-3	-3	0	-4	-3
Effet "Castafiore"	0	-4	-2	-11	-14	-3	-9	-3
Pont de Tacoma	7	-1	0	-5	-9	-4	-5	-1

Les valeurs sont très sensiblement différentes d'un cas à l'autre. Sans formaliser plus loin une procédure de classement de ces exemples, on peut dire que leurs signatures en terme de paramètres adimensionnels sont différentes, et qu'ils relèveront donc de modélisations assez différentes.

1.1.6 Autres nombres adimensionnels

Dans ces quelques exemples, il apparaît que la liste des données et paramètres proposée plus haut est parfois mal adaptée. Ainsi, la raideur de l'aile du F117 n'est pas seulement liée au module d'Young du matériau qui le constitue mais aussi à celle du système de commande. De même, le pont de Tacoma a de toute évidence plusieurs dimensions caractéristiques qui interviennent dans son comportement au vent : sa largeur, la hauteur de son profil et la longueur du tablier.

L'introduction d'une autre longueur h , par exemple une dimension dans la direction transverse à l'écoulement, amènerait un autre nombre adimensionnel, l'élanement $\mathcal{E} = L/h$ et donc d'autres combinaisons possibles de ces nombres. Le choix d'utiliser alors h ou L dans la définition des nombres faisant intervenir une longueur R_E, \mathcal{G}, \dots dépend des phénomènes qu'ils représentent. Ainsi, pour un écoulement transverse à une structure élancée on utilisera plutôt un nombre de Reynolds défini avec la dimension transverse, soit

$$R_E = \frac{\rho_F^0 U_0 h}{\mu}. \quad (1.21)$$

Par contre, le nombre de Cauchy n'exprime l'ordre de grandeur des déformations induites par la pression dynamique dans le solide que si celui-ci est massif. Pour un écoulement transverse à une structure élancée, on aurait plutôt des déformations de l'ordre de

$$\varepsilon = \mathcal{O}\left[\frac{\rho_F U_0^2}{E} \left(\frac{L}{h}\right)^2\right] = \mathcal{O}(C_Y \mathcal{E}^2). \quad (1.22)$$

Par contre les déplacements varient comme

$$\frac{\xi}{L} = \mathcal{O}(C_Y \mathcal{E}^3). \quad (1.23)$$

Par ailleurs, notre description du solide s'est limitée à une modélisation de type Milieu Continu. On peut sans difficulté de principe l'étendre à des modélisations plus adaptées à la description de milieux élancés, telles les poutres. Plus généralement, il suffit de savoir décrire la dynamique du solide par des paramètres $q_i(t)$ comme par exemple dans la dynamique d'un solide rigide ou dans la décomposition modale d'un mouvement. Il faut alors redéfinir la vitesse des ondes élastiques et la rigidité [26]. Par exemple, si l'on modélise le solide par un simple système masse-ressort, comme nous le ferons souvent par la suite, son élasticité est définie par une raideur K dont la dimension est $[MT^{-2}]$ et par une masse M , $[M]$. Il suffit alors de remplacer dans la définition des nombres

adimensionnels E par K/L et ρ_S par M/L^3 . La vitesse des ondes élastiques $c_s = \sqrt{E/\rho_S}$ devient $c_s = L\sqrt{K/M}$. L'équation d'évolution de la variable $q(t)$ en l'absence de couplage,

$$\frac{q}{L} = F_q\left(t\sqrt{\frac{K}{M}}, \frac{q_0}{L}, \frac{Mg}{KL}\right) \quad (1.24)$$

devient ainsi

$$\frac{q}{L} = G_q\left(\frac{U_0 t}{L}, \Pi, R_E, F_R, M_{ach}, \frac{q_0}{L}, \frac{Mg}{KL}, \mathbf{A}\right) \quad (1.25)$$

avec les nombres de masse et de Cauchy $\mathcal{A} = \mathcal{M} = \rho_F^0 L^3/M$ ou $\mathcal{A} = C_Y = \rho_F^0 U_0^2 L/K$.

Enfin, si d'autres échelles de temps sont présentes par exemple du fait de périodicités de l'écoulement ou de forces extérieures, on définit alors le nombre de Strouhal, ou fréquence réduite

$$S = \frac{fL}{U_0} \quad (1.26)$$

où f est la fréquence de ces fluctuations. Ce nombre exprime donc le rapport entre le temps caractéristique de convection L/U_0 et celui des fluctuations.

1.2 Analyse dimensionnelle des équations

L'analyse effectuée dans les sections précédentes a permis de mettre en évidence quelques paramètres pertinents. Il est possible d'aller plus loin dans l'analyse du problème grâce à la connaissance que nous avons des équations qui décrivent les liens entre toutes les variables utilisées plus haut. Comme en Mécanique des fluides, seule l'analyse dimensionnelle des équations de conservation permet de dégager l'influence réelle de chaque nombre adimensionnel.

1.2.1 Hypothèses complémentaires

Pour simplifier l'exposé, diminuons le nombre de paramètres en faisant quelques hypothèses.

On suppose tout d'abord que le fluide est incompressible. On connaît bien le lien entre la valeur du nombre de Mach et le domaine de validité de cette hypothèse, en écoulement stationnaire [24]. En présence d'un solide vibrant, une analyse dimensionnelle du même type que celle du Chapitre 2 montre que la compressibilité peut jouer un rôle même à vitesse moyenne nulle : c'est là tout le domaine de la vibro-acoustique que nous n'aborderons pas dans ce cours [26, 11]. On remplace donc ici la variable dépendante $\rho_F(\underline{x}, t)$ et la donnée ρ_F^0 par un seul paramètre physique noté ρ_F .

On suppose ensuite que le solide est en transformation infinitésimale. On rappelle que cette hypothèse, qui porte sur le gradient du champ de déplacement,

$$\|\nabla \underline{\xi}\| \ll 1, \quad (1.27)$$

implique celle des déformations infinitésimales [23]. Une conséquence directe en est que l'on peut écrire

$$\rho_S \simeq \rho_S^0 \quad (1.28)$$

et donc, comme pour le fluide mais pour des raisons différentes, nous remplaçons la variable dépendante $\rho_S(\underline{x}, t)$ et la donnée ρ_S^0 par un seul paramètre physique ρ_S . Par contre nous ne faisons pas à priori l'hypothèse de petits déplacements

$$\mathcal{D} = \frac{\xi_0}{L} \ll 1 \quad (1.29)$$

et nous distinguerons la configuration actuelle de la configuration de référence.

1.2.2 Équations de conservation et d'interface

On considère un fluide homogène, newtonien, incompressible et de viscosité constante et uniforme μ . On écrit alors [18] la conservation de la masse

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad (1.30)$$

et la conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_F \frac{d \underline{U}}{d t} = -\rho_F g \underline{e}_z - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \underline{U}, \quad (1.31)$$

où \underline{e}_z est le vecteur unitaire vertical.

Pour le solide, outre l'hypothèse de petites transformations, nous supposerons le matériau élastique linéaire et isotrope et les forces de volume nulles en dehors de la pesanteur. Les variables $\underline{\xi}(\underline{X}, t)$ (description Lagrangienne) et $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$ sont reliées par la conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_S \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} = -\rho_S g \underline{e}_z + \operatorname{div} \underline{\sigma} \quad (1.32)$$

avec la loi de comportement élastique

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\sigma} - \frac{\nu}{E} \operatorname{Tr}(\underline{\sigma}) \underline{1} \quad (1.33)$$

où

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla^t \underline{\xi} + \nabla \underline{\xi}). \quad (1.34)$$

Les équations de champ que nous venons d'écrire doivent être complétées par des conditions initiales et des conditions aux limites pour chaque domaine. On peut séparer ces dernières en deux groupes :

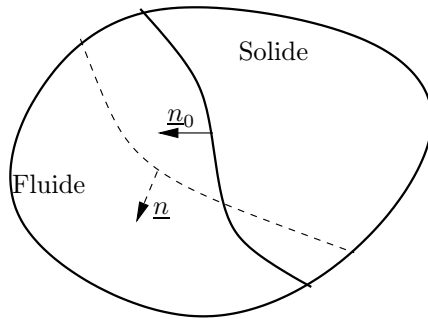


FIG. 1.1 : Déplacement de l'interface entre le fluide et le solide.

(a) celles qui s'appliquent aux *frontières externes* du domaine total.
 (b) celles qui s'appliquent à *l'interface* entre le fluide et le solide.
 Elles contiennent une condition cinématique qui exprime la continuité du vecteur vitesse au passage de l'interface et une condition dynamique qui exprime la continuité du vecteur contrainte. Elles s'expriment respectivement par

$$\underline{U}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{\xi}(\underline{X}, t)}{\partial t} \quad (1.35)$$

et

$$[-p(\underline{x}, t)\underline{1} + 2\mu \underline{d}(\underline{x}, t)] \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) = \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) \quad (1.36)$$

où

$$\underline{d} = \frac{1}{2}(\nabla^t \underline{U} + \nabla \underline{U}). \quad (1.37)$$

Ces conditions d'interface sont bien sûr vérifiées sur la configuration actuelle. Ainsi, la normale à l'interface \underline{n} est en général différente de la normale initiale \underline{n}_0 , figure (1.1). Dans la suite de ce texte, la normale \underline{n} sera orientée du solide vers le fluide.

1.2.3 Analyse découplée

Supposons tout d'abord l'absence de couplage mécanique entre les milieux, par exemple en bloquant l'interface avec une condition

$$\underline{U}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{\xi}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \underline{0}. \quad (1.38)$$

Les équations fondamentales du fluide peuvent s'adimensionner à l'aide des variables suivantes [18]

$$\tilde{\underline{x}} = \frac{\underline{x}}{L}; \quad \tilde{t} = \frac{U_0 t}{L}; \quad \tilde{\underline{U}} = \frac{\underline{U}}{U_0}; \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho_F U_0^2}. \quad (1.39)$$

Elles deviennent

$$\text{div } \tilde{\underline{U}} = 0 \quad (1.40)$$

et

$$\frac{d \tilde{U}}{d \tilde{t}} = -\frac{1}{F_R^2} \underline{e}_z - \underline{grad} \tilde{p} + \frac{1}{R_E} \Delta \tilde{U}. \quad (1.41)$$

où les dérivations spatiales sont par rapport à $\tilde{\underline{x}}$. Dans la suite, la notation $\tilde{()}$ fera toujours référence aux échelles du fluide. Les conditions initiales et les conditions aux limites sont elles-mêmes adimensionnées. La forme ci-dessus fait clairement apparaître la signification des nombres de Froude et de Reynolds, et leur influence pour des valeurs limites $F_R \rightarrow \infty$ ou $R_E \rightarrow \infty$. Le nombre adimensionnel restant, $\Pi = \rho_F U_0^2 / p_0$ n'apparaît pas explicitement, la pression n'intervenant que par son gradient.

Dans le solide, on définit également des variables adimensionnelles qui ne sont pas a priori liées aux précédentes. Nous les notons $\bar{()}$ pour les distinguer de $\tilde{()}$ pour le fluide. On peut prendre par exemple :

$$\bar{\underline{x}} = \frac{\underline{x}}{L}; \quad \bar{t} = \frac{t \sqrt{E/\rho_S}}{L}, \quad \bar{\underline{\xi}} = \frac{\underline{\xi}}{\underline{\xi}_0}; \quad \bar{\underline{\sigma}} = \frac{\underline{\sigma}}{E}. \quad (1.42)$$

Avec ce changement de variables les équations (1.32) à (1.34) deviennent

$$\mathcal{D} \frac{\partial^2 \bar{\underline{\xi}}}{\partial \bar{t}^2} = -\mathcal{G} \underline{e}_z + \text{div} \bar{\underline{\sigma}} \quad (1.43)$$

et

$$\mathcal{D} \frac{1}{2} (\nabla^t \bar{\underline{\xi}} + \nabla \bar{\underline{\xi}}) = (1 + \nu) \bar{\underline{\sigma}} - \nu \text{Tr}(\bar{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}. \quad (1.44)$$

Les nombres adimensionnels obtenus plus haut pour le solide seul apparaissent clairement : ν, \mathcal{D} et \mathcal{G} .

1.2.4 Analyse couplée

Si l'on considère maintenant *l'ensemble* du système fluide-solide, on peut également chercher à construire une forme adimensionnelle de l'ensemble des équations de conservation et des conditions d'interfaces.

Pour la variable d'espace, nous utilisons la même définition dans les deux milieux, soit

$$\bar{\underline{x}} = \tilde{\underline{x}} = \frac{\underline{x}}{L}. \quad (1.45)$$

Pour la variable temps il nous faut choisir entre \tilde{t} , qui est à l'échelle de temps du fluide et \bar{t} qui est à l'échelle de la dynamique du solide. Nous choisirons ici cette dernière

$$\bar{t} = \frac{t \sqrt{E/\rho_S}}{L} = \frac{\sqrt{E/\rho_S}}{U_0} \tilde{t}. \quad (1.46)$$

On voit apparaître la vitesse réduite déjà évoquée plus haut, rapport des deux échelles de temps

$$U_R = \frac{U_0}{\sqrt{E/\rho_S}}. \quad (1.47)$$

Les autres variables se définissent naturellement selon le milieu où elles sont définies

$$\underline{\tilde{U}} ; \tilde{p} ; \underline{\tilde{\xi}} ; \underline{\tilde{\sigma}}. \quad (1.48)$$

Avec ces changements de variables on obtient pour le fluide

$$\text{div } \underline{\tilde{U}} = 0 \quad (1.49)$$

et

$$\frac{1}{U_R} \frac{d \underline{\tilde{U}}}{d t} = -\frac{1}{F_R^2} e_z - \text{grad } \tilde{p} + \frac{1}{R_E} \Delta \underline{\tilde{U}}. \quad (1.50)$$

Pour le solide, les équations sont inchangées, mais nous pouvons remplacer le nombre \mathcal{G} par U_R^2/F_R^2 , soit

$$\mathcal{D} \frac{\partial^2 \underline{\tilde{\xi}}}{\partial \bar{t}^2} = -\frac{U_R^2}{F_R^2} e_z + \text{div } \underline{\tilde{\sigma}} \quad (1.51)$$

et

$$\mathcal{D} \frac{1}{2} (\nabla^t \underline{\tilde{\xi}} + \nabla \underline{\tilde{\xi}}) = (1 + \nu) \underline{\tilde{\sigma}} - \nu \text{Tr}(\underline{\tilde{\sigma}}) \underline{\mathbb{1}}. \quad (1.52)$$

On doit également écrire les conditions d'interfaces avec ces variables, en explicitant les coordonnées $\underline{x} = \underline{X} + \underline{\xi}$. La condition cinématique s'écrit

$$U_R \underline{\tilde{U}}(\underline{\tilde{x}}) = \mathcal{D} \frac{\partial \underline{\tilde{\xi}}}{\partial t}(\underline{\tilde{X}}, t) \quad (1.53)$$

et la condition dynamique

$$C_Y [-\tilde{p}(\underline{\tilde{x}}) \underline{\mathbb{1}} + \frac{2}{R_E} \underline{\tilde{d}}(\underline{\tilde{x}})] \cdot \underline{n}(\underline{\tilde{x}}) = \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{\tilde{x}}) \cdot \underline{n}(\underline{\tilde{x}}) \quad (1.54)$$

où il faut noter que

$$\underline{\tilde{x}} = \underline{\tilde{X}} + \mathcal{D} \underline{\tilde{\xi}}. \quad (1.55)$$

On voit là encore apparaître les nouveaux paramètres identifiés dans la première partie de ce chapitre, U_R et C_Y . L'interprétation de leur rôle est plus complexe, comme on le verra par la suite. On peut cependant déjà voir que si le nombre de Cauchy est très faible (solide très rigide ou fluide peu dense), la condition (1.54) est à peu près équivalente à une condition de frontière libre

$$\underline{\tilde{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0}, \quad (1.56)$$

sur le solide qui ne "voit" donc pas le fluide.

1.3 Conclusion

Il apparaît que les nombres adimensionnels permettant d'analyser un problème d'interaction fluide-solide sont nombreux. Les hypothèses très

simplificatrices que nous avons faites sur le comportement du fluide et du solide nous ont amenés à considérer :

(a) ceux propres au fluide (ici le nombre de Reynolds R_E et le nombre de Froude F_R),

(b) ceux propres au solide (ici le nombre de déplacement $\mathcal{D} = \xi_0/L$ et le nombre de gravité $\mathcal{G} = \rho_S^0 g L / E$),

(c) des nombres propres à l'interaction (ici le nombre de masse $\mathcal{M} = \rho_F^0 / \rho_S^0$).

Ces nombres varient donc a priori dans un espace de dimension cinq, au lieu de deux pour le fluide et deux le solide s'ils n'interagissaient pas. Dans les chapitres qui suivent, on va explorer certaines zones de cette espace, où des modélisation simples et utiles peuvent se construire.

Nous travaillerons essentiellement par la suite avec le nombre de Reynolds R_E , le nombre de Froude F_R , le nombre de déplacement \mathcal{D} , le nombre de masse \mathcal{M} , la vitesse réduite U_R et le nombre de Cauchy C_Y . Nous allons principalement étudier l'influence de la vitesse U_R .