

Avant-Propos

Cet ouvrage a pour origine des enseignements de deuxième et troisième année à l'École polytechnique. Il propose une présentation de la relativité restreinte qui ne suppose comme connaissances préalables que des notions d'électromagnétisme et d'algèbre linéaire qui correspondent aux programmes des classes préparatoires.

Les applications à l'étude des collisions et à l'interaction des particules chargées avec les champs électromagnétiques sont développées, dans les chapitres cinq et six, en vue de l'enseignement de physique des particules de la majeure de troisième année.

L'enseignement de relativité de deuxième année est associé à un cours sur le rôle des principes variationnels en physique. Le chapitre sept résume les applications de ces principes en relativité restreinte.

Le chapitre huit est une introduction à la relativité générale, où l'on a essayé de présenter avec un minimum de formalisme un certain nombre de vérifications expérimentales récentes. Les passages plus techniques donnés en complément (petits caractères et appendices) sont destinés à préparer à des enseignements plus approfondis sur le sujet. Ils peuvent aussi être utilisés comme illustrations de l'utilisation des équations d'Euler-Lagrange.

Les paragraphes en petits caractères peuvent être sautés en première lecture ; ils sont de deux natures. Les passages en très petits caractères sont des détails de calculs ou des précisions d'ordre mathématique que le lecteur confiant peut sauter définitivement. Les autres sont des illustrations ou des compléments concernant la physique que l'on peut considérer comme des exercices corrigés.

D'autres illustrations, dont l'intérêt est le plus souvent historique, sont présentées sous la forme d'encadrés.

Chapitre 1

Introduction

Comme chacun sait, la théorie de la relativité est à l'origine de l'énergie nucléaire; elle est aussi nécessaire à la compréhension des phénomènes cosmiques. À l'échelle de la physique des particules, où les énergies mises en jeu sont beaucoup plus grandes que les masses, la description des phénomènes doit faire appel à la mécanique relativiste.

Le rôle de la relativité ne se limite cependant pas à ces domaines éloignés de l'expérience quotidienne. Elle est le cadre naturel de l'électromagnétisme, nécessaire à sa cohérence. Elle est à la base de la définition actuelle des unités de longueur et de temps et l'on verra que sa prise en compte est indispensable dans des problèmes métrologiques contemporains.

Nous donnons ici une présentation de la théorie de la relativité restreinte et de ses applications, en particulier à la cinématique des réactions entre particules et aux interactions des particules chargées avec les champs électromagnétiques. Elle est complétée par une introduction à la relativité générale, c'est à dire à la prise en compte de la gravitation dans le cadre de la relativité.

Le concept de relativité apparaît en physique avec Galilée qui l'exprime de façon imagée dans son *Dialogue*¹ publié en 1632 :

Enfermez-vous avec un ami dans la plus grande cabine sous le pont d'un grand navire [...] Quand le navire est immobile observez soigneusement [...] ; si vous lancez quelque chose à votre ami vous n'avez pas besoin de le jeter plus fort dans une direction que dans une autre lorsque les distances sont égales ; si vous sautez à pieds joints, comme on dit, vous franchirez des espaces égaux dans toutes les directions. Quand vous aurez soigneusement observé cela [...], faites aller le navire à la vitesse que vous voulez ; pourvu que le mouvement soit uniforme [...], vous ne remarquerez

¹Galileo Galilei, *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*, deuxième journée, Éditions du Seuil (1992).

pas le moindre changement dans tous les effets qu'on vient d'indiquer ; aucun ne vous permettra de vous rendre compte si le navire est en marche ou immobile : en sautant, vous franchirez sur le plancher les mêmes distances qu'auparavant, et ce n'est pas parce que le navire ira très vite que vous ferez de plus grands sauts vers la poupe que vers la proue.

En résumé, rien ne permet de distinguer l'état de repos de l'état de mouvement uniforme.

Bien que Newton postule, dans ses *Principes* (1687), l'existence d'un espace absolu, cet espace absolu n'est pas identifiable par l'expérience et le principe de relativité galiléenne s'applique à la mécanique newtonienne. Si des particules de masses m_i interagissent par des forces qui dérivent d'un potentiel $U(r_{ij})$, fonction de leurs distances, l'équation du mouvement s'écrit

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = -\vec{\nabla}_i U .$$

Dans un système de coordonnées qui se déplace à la vitesse \vec{v} on a

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{v} t , \quad (1.1)$$

d'où $r'_{ij} = r_{ij}$, et donc

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}'_i}{dt^2} = -\vec{\nabla}'_i U' \quad \text{avec} \quad U' \equiv U .$$

L'équation newtonienne du mouvement a la même forme dans les deux référentiels : l'expérience ne permet pas de distinguer le repos d'un état de mouvement uniforme.

La transformation galiléenne (1.1) affecte seulement les positions ; le temps de la mécanique newtonienne, est le même dans tous les systèmes de coordonnées² :

Le temps absolu, vrai & mathématique, sans relation à rien d'extérieur coule uniformément.

Puisque le temps est un temps absolu, la notion de simultanéité est aussi une notion absolue. De plus la force subie à un certain instant par la particule i dépend des positions des autres particules au même instant : la vitesse de propagation des interactions est infinie.

Au 19^e siècle, la découverte des lois de l'électromagnétisme qui conduit à la théorie de Maxwell remet en cause ces propriétés. En effet, comme le remarquent Voigt dès 1887 puis Larmor, Lorentz et Poincaré, les équations de Maxwell ne sont pas invariantes dans les transformations de Galilée (1.1). Elles sont invariantes dans des transformations empiriquement modifiées, les transformations de Lorentz, qui affectent aussi le temps et dont le sens physique, à l'époque, est controversé.

²Isaac Newton, *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*, traduction de la Marquise du Chastellet, Paris 1756.

La contradiction la plus manifeste entre la théorie de Maxwell et l'invariance galiléenne porte sur la vitesse de propagation des interactions. Les équations de Maxwell prédisent l'existence d'ondes électromagnétiques qui se propagent dans le vide à la vitesse

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} .$$

Cette vitesse, qui apparaît comme une constante fondamentale, est aussi la vitesse maximum de propagation des interactions électromagnétiques³. Ceci est contraire à la loi de transformation des vitesses qui se déduit de (1.1) :

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{v} .$$

Il faut donc, ou bien renoncer au principe de relativité pour l'électromagnétisme et postuler qu'il existe un référentiel privilégié où les équations de Maxwell s'appliquent, ou bien conserver le principe de relativité et admettre que, soit les équations de Maxwell, soit les lois de la mécanique classique, ne sont que des lois approchées.

Les ondes électromagnétiques sont découvertes expérimentalement par Hertz en 1888 mais, dès 1864, à partir de la coïncidence numérique de $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ avec la vitesse de la lumière, Maxwell avait démontré la nature électromagnétique des phénomènes lumineux.

Cette identification de la lumière à un phénomène électromagnétique conduisait à associer un éventuel référentiel privilégié des équations de Maxwell à l'"éther", milieu dont l'existence avait été postulée par Fresnel (1819) comme support des vibrations lumineuses. Elle permit aussi de vérifier, avec la précision des mesures interférométriques (Michelson et Morley 1887), que la vitesse de la lumière ne dépendait pas du mouvement par rapport à cet hypothétique éther. Ceci rendait difficilement tenable l'hypothèse du référentiel privilégié.

En 1905, dans un article qui a pour titre "Sur l'électrodynamique des corps en mouvement"⁴, Einstein résout les contradictions entre la mécanique newtonienne et l'électromagnétisme en formulant la théorie de la relativité. Il conserve le principe de relativité de Galilée et l'étend aux phénomènes électromagnétiques mais il renonce au temps absolu et, par conséquent, à la simultanéité absolue. La mécanique newtonienne n'est plus qu'une approximation valable pour les vitesses petites devant c et qu'il convient de modifier pour les vitesses proches de c . À partir de ces hypothèses, Einstein retrouve les transformations de Lorentz comme relations entre les mesures de positions et de temps effectuées par des observateurs en mouvement uniforme les uns par rapport aux autres et reconstruit une nouvelle mécanique qui remplace la mécanique newtonienne.

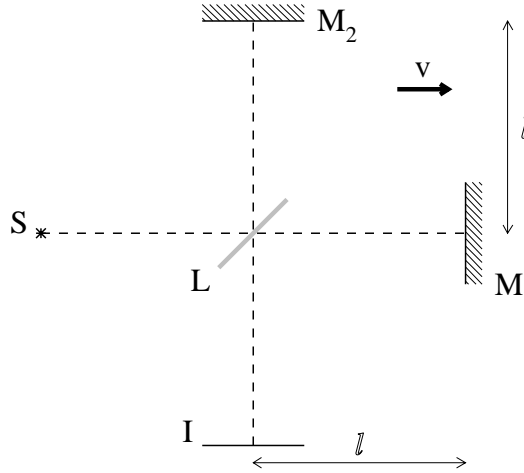
C'est ce même chemin que nous allons suivre dans les chapitres suivants. Nous justifierons les transformations de Lorentz à partir des postulats d'Einstein et nous explorerons leurs conséquences.

³Pour une démonstration, voir Courant et Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Chap. VI, Interscience 1962.

⁴Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, *Annalen der Physik*, vol. XVII, p 891.

L'expérience de Michelson et Morley

L'expérience de Michelson et Morley avait pour but la mise en évidence du mouvement de la terre par rapport à l'éther. Elle utilisait l'interféromètre de Michelson dont le schéma de principe est donné ci-dessous.



Un rayon lumineux, émis par la source S , est divisé par la lame semi-réfléchissante L en deux rayons qui, après réflexion sur les miroirs M_1 et M_2 , viennent interférer en I . Un des bras de l'interféromètre est parallèle à la vitesse de la terre par rapport à l'éther (\vec{v}) et l'autre lui est perpendiculaire.

En physique galiléenne, la vitesse de la lumière dans le référentiel de la terre est $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}$. Dans le bras parallèle à la vitesse, c'est donc $c' = c \pm v$, et le temps mis pour l'aller-retour LM_1 est

$$t = l \left(\frac{1}{c+v} + \frac{1}{c-v} \right) = \frac{2l/c}{1-v^2/c^2} \simeq 2\frac{l}{c} \left[1 + \frac{v^2}{c^2} \right].$$

Dans l'autre bras, \vec{c}' est perpendiculaire à \vec{v} et l'on a donc $c' = \sqrt{c^2 - v^2}$; le temps de l'aller-retour LM_2 est

$$t = 2\frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}} \simeq 2\frac{l}{c} \left[1 + \frac{v^2}{2c^2} \right].$$

La différence de temps de parcours entre les deux rayons qui interfèrent en I est donc

$$\Delta t = \frac{l}{c} \frac{v^2}{c^2}.$$

Pour éliminer une possible différence de construction entre les deux bras, on fait tourner l'appareil de $\pi/2$ et l'on compare les deux figures d'interférence. On attend alors un déplacement de

$$\Delta z = 2 \frac{l}{\lambda} \frac{v^2}{c^2} \quad \text{franges.}$$

La comparaison entre l'effet maximum observé et l'effet attendu est donnée dans le tableau ci-dessous, pour trois répétitions de l'expérience.

		<u>Observé</u> <u>Attendu</u>
Michelson Morley	1887	$2,5 \cdot 10^{-2}$
Joos	1930	$2,7 \cdot 10^{-3}$
Brillet Hall	1979	$5 \cdot 10^{-7}$

On voit que le résultat de l'expérience est négatif. L'effet maximum observé, de l'ordre de grandeur de l'incertitude expérimentale, est beaucoup plus petit que l'effet attendu. Celui-ci est calculé en prenant pour v la vitesse de la terre par rapport au soleil ; c'est donc une limite inférieure de l'effet maximum attendu dans l'hypothèse de l'éther, puisqu'il existe forcément une période de l'année où cette vitesse s'ajoute à celle du soleil par rapport à l'éther.

Nous introduirons ensuite le concept d'espace-temps et le langage géométrique de Minkowski. Une de ses applications importantes est la classification des grandeurs physiques comme scalaires, vecteurs et tenseurs. Cette classification permettra de rendre manifeste la covariance⁵ des équations et, dans la suite, nous utiliserons assez systématiquement le langage géométrique des quadrivecteurs et, à l'occasion, des tenseurs. C'est le langage naturel de la physique relativiste, de même que les vecteurs tridimensionnels sont le langage naturel de la physique classique, comme l'explique fort bien Maxwell lui-même⁶ :

Souvent en physique, pour raisonner, et non plus pour calculer, il est désirable d'éviter l'introduction explicite des coordonnées cartésiennes, et il est avantageux de fixer son attention sur un point de l'espace pris en lui-même, et non sur ses trois coordonnées, sur la grandeur et la direction

⁵Une grandeur est invariante si sa valeur est la même dans tous les référentiels. Une équation est covariante (on dit aussi invariante) si sa forme est la même dans tous les référentiels. La théorie de la relativité utilise aussi le terme "covariant" dans un autre sens : pour désigner un certain type de composantes des vecteurs. Le terme s'appliquant à des objets différents, le risque de confusion est heureusement assez faible. Les deux notions seront étudiées au chapitre 4.

⁶James Clerk Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford, at the Clarendon press, 1873, traduction française, Gauthier-Villars 1885.

d'une force, non sur ses trois composantes. Cette manière d'envisager les quantités géométriques et physiques est plus naturelle que l'autre.

Nous l'utiliserons, en particulier, pour introduire les principes de la mécanique relativiste dont nous décrirons un certain nombre d'applications aux réactions entre particules.

Nous montrerons ensuite que les équations de Maxwell s'expriment naturellement dans le cadre relativiste et que l'on peut utiliser la relativité pour simplifier plusieurs problèmes d'électromagnétisme.

Après avoir expliqué comment la mécanique et l'électromagnétisme relativistes s'expriment dans le formalisme lagrangien⁷, nous présenterons, à partir du principe d'équivalence, le rôle de la gravitation en relativité.

Les conséquences spectaculaires de la mécanique relativiste concernant la cinématique des particules de haute énergie et surtout l'énergie nucléaire sont vérifiées de façon tellement indiscutable qu'il ne semble plus utile, aujourd'hui, de décrire toutes les expériences historiques⁸ qui ont marqué la création de la relativité ni de retracer les polémiques qui ont accompagné leur interprétation. Nous donnerons, par contre, quand l'occasion s'en présentera, les résultats d'expériences modernes dont la précision est bien supérieure et dont l'interprétation nécessite l'utilisation de la relativité.

Dans les cinq chapitres qui suivent et les exercices qui sont proposés nous décrivons un nombre important d'applications de la relativité restreinte. Ses lois fondamentales, par contre, peuvent se résumer à la définition de la transformation de Lorentz et à l'identification du mode de transformation des différentes grandeurs physiques. Ce résumé est donné en un tableau, page 62.

⁷Pour plus d'information sur le formalisme lagrangien, voir J.-L. Basdevant, *Principes variationnels et dynamique*, École polytechnique 2001.

⁸L'expérience de Michelson et Morley est présentée page 10. On trouvera dans H.P. Robertson, *Reviews of Modern Physics* 21 (1949) 378 et R. S. Shankland et al. *Reviews of Modern Physics* 27 (1955) 167, une discussion des expériences historiques ; dans A. Brillet et J.L. Hall, *Phys. Rev. Lett.* 42 (1979) 549, celle d'une expérience moderne utilisant les techniques laser.

Pour l'histoire des idées et pour des informations biographiques, on peut consulter le remarquable ouvrage d'A. Pais, '*Subtle is the Lord...*', *The Science and the the Life of Albert Einstein*, Oxford 1982 et le serveur d'histoire des sciences de l'université de St Andrews (www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/).