Préface

Ce livre est une deuxième édition de notre étude sur l'*Invariante Variationsprobleme* d'Emmy Noether, son contexte et son influence.

La traduction de l'article d'allemand en français a été révisée afin de la rendre plus juste et plus proche de l'original. Le commentaire historique et scientifique a été enrichi de deux nouvelles annexes : les traductions d'une carte postale et d'une lettre de Noether à Felix Klein, avec la transcription et la reproduction de ces documents manuscrits. Datant de l'hiver 1918, quatre mois avant l'achèvement du travail de Noether et six mois avant la soumission de son article aux *Göttinger Nachrichten*, ils éclairent la genèse de sa pensée : nous montrons au paragraphe 1.4 qu'ils contiennent en germe les idées essentielles qu'elle développera dans sa publication. Diverses modifications ont été apportées au texte de la première édition : quelques corrections, des changements de style, et surtout des précisions supplémentaires sur divers points. En particulier, le paragraphe 2.2 concernant le deuxième théorème de Noether a été revu et augmenté, ainsi que le paragraphe 6 traitant du problème de l'énergie en relativité géneŕale et des théories de jauge. Grâce à la disponibilité des *Collected Papers of Albert Einstein*, nous avons pu ajouter de courtes citations provenant de sa correspondance d'Einstein avec David Hilbert et Felix Klein qui éclairent le rôle de Noether et montrent à quel point Einstein fut impressionné par ses travaux.

Certes les livres et articles classiques n'ont pas besoin de mise à jour, mais chaque année le nombre de publications – de mathématiques, de mécanique et de physique – qui se réfèrent à l'un ou l'autre des deux théorèmes que Noether a démontrés en 1918 s'accroît considérablement, et la littérature secondaire s'enrichit rapidement. Nous avons essayé d'en tenir compte dans le commentaire et la bibliographie.

Paris, avril 2006

Préface de la première édition (2004)

Nous présentons dans ce livre un texte fondamental où sont énoncés deux théorèmes et leurs réciproques, qui ont établi le lien entre symétries et lois de conservation des problèmes variationnels. Ces théorèmes, d'une portée restée longtemps méconnue, eurent une influence considérable sur le développement de la physique théorique moderne, et touchent à de très nombreuses questions d'histoire de la relativité générale, des mathématiques et de la mécanique. Ce texte est l'article d'Emmy Noether, « Invariante Variationsprobleme », qui fut publié en 1918 dans les *Göttingen Nachrichten*, et dont nous donnons ici la première traduction française.

L'article original en traduction est suivi d'une étude détaillée du contexte de cette œuvre de Noether, ainsi que de sa réception dans la communauté scientifique, dont l'histoire est étonnante. Nous étudions d'abord les origines du problème dans la théorie des invariants et les travaux de mécanique du début du XX^e siècle, puis nous évoquons l'atmosphère scientifique à Göttingen lors des débuts de la Relativité Générale en 1915. Nous donnons ensuite un précis de l'article en termes modernisés, puis une étude détaillée de l'appréciation du travail de Noether par ses contemporains, Klein, Hilbert, Weyl et Pauli, et retraçons les détours du curieux destin tant du premier que du second théorème. Enfin nous montrons qu'à partir des années soixante-dix, des développements mathématiques vraiment nouveaux ont prolongé l'œuvre de Noether dans le domaine du calcul des variations sur les variétés et dans celui des systèmes intégrables.

« Ce qui suit repose sur une combinaison du calcul des variations formel et de la théorie des groupes de Lie » (Noether, 1918)

INVARIANCE ET LOIS DE CONSERVATION AU XX^{e} SIÈCLE

Le contexte et la fortune des théorèmes de Noether

Résumé Les deux théorèmes d'Emmy Noether sur le lien entre symétries et lois de conservation des problèmes variationnels, publiés en 1918, sont fondamentaux en mécanique et en théorie des champs, classiques et quantiques. Après avoir esquissé le développement des travaux de théorie des invariants et de mécanique qui ont précédé les siens, et l'atmosphère scientifique à Göttingen lors des débuts de la Relativité Générale (1915-1918), nous analysons l'*Invariante Variationsprobleme*, décrivons sa réception lors de sa publication, puis à la mort de Noether en 1935, et nous suivons la fortune tant du premier que du second théorème, assez curieuse dans chacun des cas. Nous donnons quelques indications sur les développements mathématiques qui depuis 1970 ont prolongé l'œuvre de Noether dans le domaine du calcul des variations sur les variétés, après une saga d'oublis et de re-découvertes.

Abstract Emmy Noether's two theorems on the relation between the symmetries and conservation laws of variational problems, published in 1918, are fundamental in mechanics and field theory, classical and quantum. After sketching the development of the relevant results in the theory of invariants and mechanics which preceded her work, and the scientific atmosphere in Göttingen when General Relativity was created (1915-1918), we analyze the *Invariante Variationsprobleme*, we describe its reception at the time of its publication and subsequently, at the time of Noether's death in 1935, and we follow the rather strange fortune of both the first and the second theorem. We outline some of the mathematical developments dealing with the variational calculus on manifolds, that appeared after 1970 and generalized Noether's results, which had been repeatedly forgotten and re-discovered.

Mots-clés : théorèmes de Noether, symétries, lois de conservation, problèmes variationnels, relativité générale, théories de jauge, invariants, histoire des mathématiques, histoire de la physique, histoire de la mécanique.

Keywords : Noether's theorems, symmetries, conservation laws, variational problems, general relativity, gauge theories, invariants, history of mathematics, history of physics, history of mechanics.

Classification MSC : 01A60, 49-03, 49S05, 70H33, 70S10, 70S15, 83C40, 81-03.

Introduction

Si la vie et l'œuvre d'Emmy Noether ont fait l'objet de nombreux travaux, aucun d'eux, selon nous, ne rend compte de l'importance de son article de 1918, *Invariante Variationsprobleme* [1918c], de sa profondeur et de la diversité de ses applications.

Deux théorèmes. Cet article comporte deux théorèmes qui sont presque tombés dans l'oubli peu après leur publication, mais dont l'influence à partir de 1950 fut énorme. Le premier concerne l'invariance d'un problème variationnel sous l'action d'un groupe de Lie à un nombre fini de générateurs indépendants, situation qui est fondamentale en mécanique classique et en relativité restreinte(1). Noether énonce ici en toute généralité la correspondance entre symétries d'un problème variationnel et lois de conservation pour l'équation aux variations associée. Ce théorème a servi de guide dans la correspondance qui, en mécanique quantique, associe à une invariance une quantité conservée, et il est à la base de la théorie des courants.

Son deuxième théorème concerne l'invariance d'une intégrale d'action sous l'action d'un groupe de Lie de dimension infinie, ce qui est fondamental en relativité générale et dans les théories de jauge.

Une généralité remarquable. Noether formule son premier théorème dans un cadre d'une généralité remarquable. D'une part, comme elle considère non pas un groupe de symétries globales, mais les générateurs infinitésimaux, au sens de Sophus Lie, de ces symétries, elle introduit une notion très générale de symétrie infinitésimale, et anticipe ainsi d'un demi-siècle l'introduction des champs de vecteurs généralisés(2). D'autre part, elle

(1)Les équations de la mécanique et de la physique classique et relativiste sont des équations variationnelles, obtenues en exprimant que l'intégrale d'action, associée au lagrangien décrivant le phénomène, est extrémale. De telles équations traduisent la nullité de la dérivée variationnelle – aussi nommée dérivée d'Euler-Lagrange – du lagrangien, et elles sont appelées équations aux variations ou équations d'Euler-Lagrange.

(2)Ceux-ci sont encore appelés symétries de Lie-Bäcklund – à tort, car ils n'ont que peu de rapports avec les transformations de Bäcklund –, et jouent un rôle essentiel dans la théorie des systèmes hamiltoniens complètement intégrables (voir *infra* paragraphe 7).

combine les méthodes du calcul des variations formel, qui sera réinventé et développé dans les années 1970, avec celles de la théorie des groupes de Lie, qui en 1918 était encore pratiquement inconnue des physiciens. Il faudra attendre le grand développement de la mécanique quantique vers la fin des années vingt, avec les articles puis les livres de Hermann Weyl en 1928 et de Eugene Wigner en 1931, suivis de celui de Bartel van der Waerden en 1932, pour que les physiciens fassent vraiment usage de la théorie des groupes de Lie. Noether démontre que tout problème variationnel invariant par un groupe de symétries dépendant de fonctions arbitraires possède seulement des lois de conservation « impropres », et elle conclut son article par une phrase où elle précise et démontre une affirmation de David Hilbert concernant la nature de la loi de conservation de l'énergie particulière à la théorie de la relativité générale. Elle place cette affirmation dans un cadre beaucoup plus général, l'étendant aux groupes d'invariance dépendant de n fonctions arbitraires, et fait suivre la conclusion de son texte d'une note finale, bien dans l'esprit du programme d'Erlangen, où elle cite Felix Klein [1910], pour qui le terme de « relativité » doit être remplacé plus généralement par l'« invariance par rapport à un groupe ». Dans cet article, Noether met en évidence une différence essentielle entre relativité restreinte et relativité générale, et montre quelle est la propriété mathématique de chacune de ces théories qui entraîne que l'un ou l'autre des théorèmes qu'elle a démontrés s'applique.

Noether et la relativité générale. La loi de conservation de l'énergie. Les deux théorèmes de Noether ne peuvent être pris hors de leur contexte historique, celui des débuts de la théorie de la relativité générale à une époque de grande effervescence intellectuelle en Allemagne et à Göttingen en particulier, que de nombreux textes(3) et en particulier le bel article de David Rowe [1999] examinent en détails. Nous nous bornerons ici à signaler qu'elle dit très explicitement dans son article que les questions

(3)Pour cette période de l'histoire de la physique et des mathématiques, on pourra consulter, outre les notes historiques des *Collected Papers of Albert Einstein*, les articles de Norton [1984] et Stachel [1989], ainsi que les autres articles contenus dans le volume des *Einstein Studies* édité par Howard et Stachel [1989], ou encore Rowe [2001], et les nombreuses références qui sont données dans ces études.

soulevées par la théorie de la relativité générale sont à l'origine de son travail, et que celui-ci vise à éclairer le problème posé par la nature de la loi de conservation de l'énergie dans la nouvelle théorie. Dans leurs articles de 1917 et 1918, concernant les fondements de la physique et en particulier les lois de conservation, Klein et Hilbert écrivent clairement qu'ils ont demandé l'aide de Noether sur ces questions(4) et qu'elle a démontré un résultat qui avait été affirmé sans démonstration par Hilbert ; ils reconnaissent que les conséquences de ses deux théorèmes élucident un point délicat de la théorie de la relativité générale. Mais si le lien historique avec la relativité générale a persisté dans la transmission du deuxième théorème, il a été complètement perdu dans la transmission du premier.

La fortune des théorèmes de Noether. Le destin des théorèmes de Noether est fort curieux : quelques rares références à ses résultats se trouvent dans les œuvres de Klein, de Hilbert et de Weyl, mais on constate ensuite un manque presque total de références jusque dans les années 1950, sauf chez quelques physiciens russes. Nous montrerons l'existence de références à Noether de plus en plus directes et nombreuses à partir de 1965 environ, avec, de nos jours, des citations de son article en nombre toujours croissant. Mais, jusque dans les années 1980 et même après, les citations sont presque toutes sous une forme partielle, tronquée, qui montre que les auteurs qui la citent ne l'ont pas lue. On peut désigner pour cela « un coupable » : l'article de vulgarisation d'Edward L. Hill [1951]. En voulant simplifier l'exposé de Noether, Hill dénature complètement ses résultats, néglige de mentionner son deuxième théorème et ne présente le premier que dans le cas particulier le plus simple. Dès sa publication et longtemps après, cet article resta la référence par laquelle les physiciens croyaient avoir connaissance du contenu si riche de l'article de Noether.

Les résultats de Noether étant valables seulement pour les équations dérivant d'un principe variationnel, on peut penser que leur diffusion serait liée à l'évolution du rôle des principes variationnels – encore appelés principes d'action – en physique mathématique. Hilbert tenait la notion de principe variationnel pour fondement essentiel des lois de la physique, mais son point de vue fut contesté par Klein, puis par Wolfgang Pauli,

(4) Voir le paragraphe 3.1 ci-dessous.

et ne prévalut pas à court terme[(5)]. Le 23 juillet 1916, Einstein écrit à Théophile de Donder, « Je dois admettre que, contrairement à la plupart de nos collègues, je ne suis pas du tout d'avis que toute théorie doive être mise sous la forme d'un principe variationnel »[(6)], et plus tard Pauli déclare « qu'il n'est pas du tout évident du point de vue de la physique que les lois de la physique doivent pouvoir être déduites d'un principe d'action »[(7)], alors qu'une phrase presque identique se trouve sous la plume de Weyl dans une lettre à Klein du 28 décembre 1920[(8)]. Lorsque les principes variationnels devinrent la base des théories physiques contemporaines[(9)], l'importance de cette partie presque oubliée de l'œuvre de Noether fut reconnue, son article fut cité et son nom fut donné aux théorèmes qu'elle avait démontrés.

Après 1970. C'est à partir des années soixante-dix que le nom de Noether apparaît de plus en plus fréquemment dans la littérature de mathématiques, de mécanique et de physique. D'autre part, les symétries généralisées qu'elle avait introduites sont redécouvertes puis étudiées dans le cadre de la théorie géométrique des systèmes intégrables. Enfin, alors que des résultats partiels déjà contenus dans l'article de Noether avaient été souvent publiés comme de nouvelles découvertes, à partir de ce moment de vrais prolongements mathématiques de ses travaux sont apparus.

La littérature secondaire. Les articles sur Noether parus après sa mort, même les plus détaillés et élogieux, ainsi que les encyclopédies et les manuels d'histoire des mathématiques, négligent en général cette partie de son œuvre pour ne retenir que son grand rôle dans le développement de l'algèbre abstraite. De même, plusieurs des articles historiques et biographiques qui lui ont été consacrés plus récemment présentent encore des

---

(5) Voir Rowe [1999], p. 201-202, et voir aussi quelques considérations sur ce point dans Anderson [1967], p. 344.

(6) *Collected Papers* 8A, no. 240, p. 318-320 ; 8 (anglais), p. 235-236.

(7) Pauli [1921], p. 769, [1958], p. 201.

(8) Cette lettre est citée par Erhard Scholz [1999b], p. 272.

(9) Pour le rôle des intégrales d'action en physique classique et en physique quantique, où elles sont appelées intégrales de chemins ou intégrales de Feynman, voir par exemple DeWitt [1957].

versions incomplètes de ses résultats sur les symétries et lois de conservation dans le calcul des variations, et ne signalent pas l'influence de cet article sur l'ensemble de la physique mathématique contemporaine.

Nous espérons que les pages qui suivent permettront une première approche de l'étude de la nature et de l'influence des travaux de Noether publiés dans l'*Invariante Variationsprobleme* en 1918.

1. Les circonstances de la composition de l'article de Noether

Les théorèmes d'Emmy Noether sur la relation entre symétries et lois de conservation furent énoncés en réponse aux problèmes mathématiques qui se posèrent lorsque Einstein établissait les équations généralement covariantes de la relativité générale, et que Hilbert et Klein consacraient leurs recherches aux nouvelles théories de la physique, et servirent inversement à élucider le problème de la conservation du tenseur d'énergie-impulsion, et à réconcilier des formulations *a priori* distinctes de cette loi de conservation. Ils présentent aussi une vaste généralisation des théorèmes de conservation connus à l'époque en mécanique classique et en relativité restreinte. Ils reposent sur l'application de la théorie des invariants différentiels aux équations variationnelles de la physique. Noether atteint un très grand degré de généralité en appliquant au problème posé la théorie des groupes de transformations continus de Lie.

1.1. De la théorie des invariants à la relativité restreinte. — Le milieu du XIX^e^ siècle est l'époque de la naissance de la théorie des invariants. Celle-ci trouve son origine dans des problèmes de géométrie projective : rechercher une fonction, un polynôme, plus généralement une quantité définie sur l'espace projectif et invariante par tout changement projectif de coordonnées, c'est rechercher une fonction, un polynôme, plus généralement une quantité ayant une signification géométrique(10). Le prototype d'invariant algébrique est le discriminant d'un polynôme

(10)Voir Weitzenböck [1923], Weyl [1939], chap. 2, Dieudonné et Carrell [1971], Hawkins [1998], Procesi [1999], Olver [1999]. Ce dernier ouvrage contient 240 références à des travaux sur les invariants dont plus de cinquante antérieurs à 1900. Pour l'histoire de la théorie des invariants, voir par exemple l'article de Charles S. Fisher [1966] et le texte de Karen Hunger Parshall [1989].

quadratique, quantité qui reste identique lorsqu'on effectue un changement de base unimodulaire, c'est-à-dire conservant les volumes. La nullité de ce déterminant correspond à la dégénérescence de la quadrique associée. Pour Weyl, le « Mémoire sur les hyperdéterminants » de Cayley [1846] constitue l'acte de naissance de la théorie des invariants algébriques(11). On trouve dans Sylvester [1851] le cadre dans lequel se faisait alors la recherche des invariants : étant donnée une « forme », c'est-à-dire un polynôme homogène à plusieurs variables, et une « forme associée », c'est-à-dire le polynôme tel que sa valeur sur les variables ayant subi une transformation linéaire ou projective, selon les cas, soit égale au polynôme donné évalué sur les variables non transformées, Sylvester se propose de chercher des quantités qui demeurent inchangées par cette transformation, autrement dit, des invariants. Il introduit les notions de substitution covariante et contravariante pour exprimer les deux manières selon lesquelles les coefficients du polynôme peuvent être transformés dans la forme associée, selon que l'on voit cette « forme » comme tenseur covariant ou contravariant, pour utiliser un langage plus moderne(12). Dans la préface de son livre [1923], Roland Weitzenböck écrit « Tenseur n'est finalement plus qu'un autre nom pour ce que l'on a appelé jusqu'ici 'forme' ».

Ainsi définie, la recherche des invariants d'une forme de degré déterminé devint un problème purement formel. Étant donnée une classe particulière de formes (par exemple les formes quadratiques binaires, *i.e.*, les polynômes homogènes quadratiques en deux variables), il s'agissait de donner la liste complète de tous les invariants algébriques d'une forme de cette classe en fonction de ses coefficients. Siegfried Aronhold dès 1858, Alfred Clebsch à partir de 1861 et Paul Gordan à partir de 1868, puis Heinrich Maschke [1900] [1903] et d'autres mathématiciens, en particulier en Italie, développèrent une méthode algorithmique dite méthode symbolique, basée sur la considération des éléments décomposables dans les produits tensoriels(13), dont le but était d'obtenir, à partir d'un invariant

(11)Weyl [1939], chap. 2.

(12)Weitzenböck [1923], chap. 1, §15, parle déjà de *covariants* et de *contravariants.*

(13)Weyl [1939], p. 20. On trouvera un exposé moderne de la méthode symbolique dans Howe [1988] et des indications dans Hawkins [1998]. Pour des exemples de cette connu pour une forme d'une classe donnée, les autres invariants de cette même forme.

Les efforts se tournèrent alors vers la recherche des invariants d'une forme différentielle, dont les coefficients sont des fonctions. Les coefficients de ces formes n'étant pas constants, leurs dérivées intervenaient dans les expressions transformées, et les invariants recherchés furent nommés *invariants différentiels*. La méthode symbolique s'adaptait également à ce type d'invariant(14), mais ne rendait pas compte des enjeux de ce problème d'apparence calculatoire, ni des perspectives qu'il ouvrait. En effet, d'une part il amenait naturellement au « calcul différentiel absolu », au calcul tensoriel et à la dérivation covariante de Gregorio Ricci et Tullio Levi-Civita(15) sur les variétés(16), car définir un tenseur sur une variété revient à le définir localement dans une formulation invariante par changements de cartes. Plus tard, cette méthode fut adaptée à la recherche des invariants intégraux d'Henri Poincaré et Élie Cartan(17), auxquels

méthode, voir les ouvrages cités ci-dessus, en particulier Weitzenböck [1923], chap. 1, paragraphes 8, 10, 13, et voir Study [1923].

(14)Voir Wright [1908].

(15)Un article de Ricci, résumant trois de ses publications antérieures, parut au *Bulletin des sciences mathématiques* en 1892 (2e série, 16, p. 167-189). Ensuite furent publiés aux *Annali di Matematica*, Série II, vol. 24 (1896), p. 254-300, un article de Levi-Civita, cité par Wright, puis le grand article de Ricci et Levi-Civita aux *Mathematische Annalen* en 1901 (vol. 54, p. 125-201), réimprimé en 1954 dans les *Œuvres* de Levi-Civita. Voir Weitzenböck [1923], chap. 13.

(16)On lit dans Poincaré [1899], note 1, p. 6 : « Le mot *variété* est maintenant assez usité pour que je n'aie pas cru nécessaire d'en rappeler la définition. On appelle ainsi tout ensemble continu de points (ou de systèmes de valeurs) : c'est ainsi que dans l'espace à trois dimensions, une surface quelconque est une variété à deux dimensions et une ligne quelconque, une variété à une dimension ». Mais en 1928, Élie Cartan, qui avait suivi les cours de Poincaré, écrit dans ses *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, « La notion générale de variété est assez difficile à définir avec précision ». Sur l'histoire du concept de variété, voir Scholz [1999a].

(17)Poincaré [1899], Cartan [1922]. Dans l'introduction à son livre sur les invariants intégraux, rédaction d'un cours professé en 1920-1921, Cartan écrit, p. ix : « Plusieurs chapitres sont consacrés aux règles de calcul des formes différentielles qui se présentent sous les signes d'intégration multiple [...] Je propose de les appeler s'appliquaient les techniques du calcul variationnel[18]. D'autre part, la recherche des invariants différentiels menait à des équations différentielles invariantes sous l'action d'un groupe ; on pouvait donc lui appliquer la théorie de Lie des groupes continus de transformations[19] qui permet d'exprimer l'invariance d'une équation par rapport à un tel groupe, ou plutôt à un germe de groupe. Lie travaillait en effet de façon locale, par l'annulation des dérivées vectorielles, appelées depuis dérivées de Lie[20], dans les directions données par le groupe infinitésimal sous-jacent, c'est-à-dire l'algèbre de Lie du groupe de Lie[21]. Ce point de vue fut utilisé

formes différentielles à multiplication extérieure, ou, plus brièvement, formes différentielles extérieures, parce qu'elles obéissent aux règles de la multiplication extérieure de H. Grassmann ».

[18] Voir Weitzenböck [1923], chap. 14.

[19] Lie et Engel [1893]. Les groupes continus sont appelés aujourd'hui groupes de Lie. À notre connaissance, la première mention française de l'expression « groupes de Lie » se trouve dans la thèse d'Arthur Tresse [1893], Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations, soutenue à Paris le 30 novembre. Tresse, qui était l'élève de Lie, écrit dans son introduction : « Je rappelle les propositions générales de M. Lie, sur les groupes définis par des systèmes d'équations aux dérivées partielles, groupes que j'appelle *groupes de Lie* ». On a conservé des lettres de Tresse à Lie datant de 1892, où il proposait déjà ce terme (voir Stubhaug [2000], traduction anglaise, p. 370). Un peu plus tôt, Léon Autonne (1859-1916) avait intitulé une note aux *Comptes rendus*, Sur une application des groupes de M. Lie [1891]. En anglais, l'expression *Lie groups* n'apparaît pas à l'époque de Tresse. Wright dans son livre [1908] parle encore de *the theory of groups of Lie*. Sur la naissance et l'évolution de la théorie des groupes de Lie, il faut consulter Hawkins [2000].

[20] Jan Arnoldus Schouten [1954], note 1, p. 104, définit les *dérivées de Lie* et indique que le terme a été employé pour la première fois par David van Dantzig dans deux notes aux comptes rendus de l'Académie d'Amsterdam [1932]. En effet, dans sa seconde note, van Dantzig définit l'opérateur de dérivation de Lie sur les tenseurs, mais il attribue sa première introduction à Władisław Ślebodziński [1931] et il ajoute qu'il est redevable de la définition qu'il présente à Schouten et Egbert R. van Kampen qui l'ont introduite dans un travail non encore publié (lequel sera publié à Varsovie dans *Prac Matematyczno-Fizycznych* en 1933). Notons que l'article III, suite de ces deux articles de 1932, parut en 1934 dans le même journal en anglais, et non plus en allemand, ce qui marque de manière flagrante l'impact qu'eut sur le monde scientifique la prise du pouvoir par les Nazis.

[21] Il est bien connu que le terme de « groupe infinitésimal » utilisé par Lie n'a reçu son nom moderne d'« algèbre de Lie » que dans les années trente. On lit dans la préface

par Joseph Edmund Wright [1908] dans la recherche des invariants des formes différentielles quadratiques.

Le lien entre la recherche des invariants différentiels et celle des quantités conservées dans le temps pour les équations d'évolution de la physique apparut graduellement et, en toute généralité, seulement après les travaux d'Emmy Noether : c'est une conséquence de son premier théorème dans le cas d'une équation dérivant d'un principe variationnel en une variable indépendante. Edmund T. Whittaker, dans son traité de dynamique [1917], attribue la découverte de la loi de conservation du moment linéaire (p. 59) et du moment angulaire (p. 60) à Newton qui, d'une part, avait observé que, en l'absence de forces extérieures, le centre de gravité d'un système mécanique est au repos ou se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme et, d'autre part, avait généralisé la loi des aires de Képler. Pour ce qui est de la loi de conservation de l'énergie, Whittaker reconnaît le rôle de Joseph-Louis Lagrange (p. 62). D'après Aurel Wintner(22), Lagrange connaissait les conséquences de l'invariance galiléenne des équations du mouvement dès 1777. En effet, pour obtenir les lois de conservation connues, celui-ci donne une méthode nouvelle dans ses « Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse du carré des distances »(23).

du livre de Nathan Jacobson [1962], p. v, « il faut remarquer aussi que dans ces conférences [à l'Institute for Advanced Study à Princeton en 1933-1934], le Professeur Weyl, bien que traitant principalement de la théorie de Lie des groupes continus, introduisit l'étude des algèbres de Lie comme théorie indépendante en utilisant pour la première fois le terme 'algèbre de Lie' au lieu de 'groupe infinitésimal', qui avait été exclusivement employé jusqu'alors ». D'après A. John Coleman [1997], ce terme, proposé par Jacobson et adopté par Weyl après certaines hésitations, fut d'abord utilisé par Richard Brauer dans la rédaction des notes du deuxième semestre de 1934-1935 du cours de Weyl, mais ne devint courant qu'après 1935. Weyl [1939], p. 260, écrit : « En hommage à Sophus Lie, une telle algèbre est appelée aujourd'hui 'algèbre de Lie' ». Dans la bibliographie du livre de Jacobson, on voit que l'expression *Lie Ring* ou *Liescher Ring* (anneau de Lie) a été employée dans les articles en allemand, dès 1935 par Walter Landherr, puis par Ernst Witt en 1937 et par Hans Zassenhaus en 1939.

(22)Wintner [1941], p. 426.

(23)Lagrange [1777], *Œuvres*, vol. 4, p. 406.

Dans la deuxième édition de la *Mécanique analytique* [1811-1815], Lagrange observe une corrélation entre symétries et principes de conservation de certaines quantités, et cela est surtout net pour la conservation de l'énergie. Dans la première section de la deuxième partie consacrée à la dynamique, il présente l'historique détaillé des divers « principes ou théorèmes » découverts par Galilée, Huyghens, Newton, Daniel Bernoulli, Euler, d'Alembert et quelques autres. À propos de la conservation des moments de rotation, il écrit : « Dans le mouvement de plusieurs corps autour d'un centre fixe, la somme des produits de la masse de chaque corps par sa vitesse de circulation autour du centre, et par sa distance au même centre [...] se conserve la même tant qu'il n'y a aucune action ni aucun obstacle extérieur »[(24)]. À l'article 7 de la quatrième section, il introduit (p. 288) l'énergie cinétique, $T = \frac{1}{2} m \sum \left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 \right)$, et, dans le cas où la force dérive d'un potentiel[(25)], qu'il note V, il écrit, pour le « lagrangien », $T - V$, les « équations d'Euler-Lagrange » (article 10, p. 290) par la méthode du calcul des variations qu'il avait introduite comme méthode fondamentale dès avant 1760. Puis il énonce à l'article 14 :

> Une intégration qui a toujours lieu lorsque les forces sont des fonctions de distances [*i.e.*, ne dépendent pas des vitesses], et que les fonctions T, V, L, M, etc.[(26)], ne contiennent pas la variable finie t, est celle qui donne le principe de conservation des forces vives (p. 295).

À l'aide de la relation qui intervient dans la formule d'intégration par parties, il démontre alors ce « principe », c'est-à-dire le théorème énonçant que l'énergie totale, $T + V$, reste constante[(27)]. Pour les autre intégrales premières déjà connues, il est beaucoup moins précis, disant : « Les autres

---

[(24)] Nous citons le premier volume de l'édition de 1965, p. 227. Nous remercions MM. Jean-Marie Souriau et Patrick Iglésias d'avoir attiré notre attention sur certains passages de Lagrange. Sur cet aspect de l'œuvre de Lagrange, voir Vizgin [1972].

[(25)] La notation moderne a conservé la lettre V pour le potentiel qui est l'opposé de la fonction de forces.

[(26)] $L = 0, M = 0$, etc. désignent les équations des contraintes.

[(27)] Sur les conceptions de la conservation de l'énergie avant Hermann von Helmholtz [1887] et celle de Lagrange en particulier, on pourra consulter Elkana [1974].

intégrales dépendront de la nature des équations différentielles de chaque problème, et l'on ne saurait donner de règle générale pour les trouver » (p. 297).

Plus tard, Jacobi dans ses *Vorlesungen über Dynamik*, leçons données à l'université de Königsberg en 1842-43[28], mit en évidence le lien entre l'invariance euclidienne du lagrangien en mécanique sous l'action des translations et des rotations, et les lois de conservation des moments linéaire et angulaire. Les troisième, quatrième et cinquième chapitres de son cours portent sur le principe de conservation du mouvement du centre de gravité, de la force vive et des aires, respectivement.

En 1897, Ignaz R. Schütz, alors membre de l'institut de physique théorique de Göttingen, étudia le principe de conservation de l'énergie et montra que celui-ci était largement indépendant du principe énoncé par Newton de l'égalité de l'action et de la réaction, dériva ensuite la loi de conservation de l'énergie à partir des équations du mouvement pour un point pesant isolé, puis pour un système matériel.

C'est en utilisant la théorie des groupes de Lie et, en particulier, la notion de transformation infinitésimale, que Georg Hamel[29] se propose d'établir des relations entre la mécanique et d'autres domaines des mathématiques, en particulier le calcul des variations. Il publie sa thèse d'habilitation [1904a], puis un article « Sur les déplacements virtuels en mécanique » [1904b], où il étudie l'équivalence de diverses formes des équations de la mécanique et l'effet des déplacements virtuels sur celles-ci. À cette fin, il utilise le crochet de Lie des symétries infinitésimales (p. 425), qu'il appelle « symbole de Jacobi », et les constantes de structure du groupe de Lie considéré (p. 428). Il énonce finalement l'équivalence de deux formes des équations de la mécanique en présence de n déplacements virtuels correspondant aux transformations infinitésimales d'un groupe à n paramètres.

[28] Ce cours de Jacobi [1866] fut édité après sa mort par Alfred Clebsch.

[29] Hamel était élève de Hilbert et soutint sa thèse en 1901. Il est l'auteur de plusieurs traités de mécanique importants. Il nomme un groupe de Lie *Liesche Gruppe*, p. 4, note 4 de [1904a].

Puis, Gustav Herglotz [1911] étudie diverses questions de mécanique des corps solides du point de vue de la théorie de la relativité (restreinte, bien sûr). Il considère donc le groupe d'invariance de la relativité restreinte, à dix paramètres(30), agissant sur l'espace-temps à quatre dimensions, appelé espace-temps de Minkowski. Dans le paragraphe 9 (p. 511-513), par une méthode de calcul variationnel qui sera celle employée par Noether, il dérive dix lois de conservation associées aux dix transformations infinitésimales du groupe de Poincaré. Ce paragraphe sera cité par Noether [1918c] puis par Klein [1926-1927].

En 1916 parut dans les *Göttinger Nachrichten* une lettre [1916] que Friedrich Engel avait adressée à Klein. Engel remarquait dans cet article que l'on peut, à partir du résultat de Herglotz et en faisant tendre la vitesse de la lumière vers l'infini, retrouver les dix intégrales bien connues de la mécanique non relativiste. Il se proposait alors d'obtenir ce résultat directement, sans passage à la limite, en utilisant la théorie de Lie. Utilisant le formalisme hamiltonien et l'invariance du hamiltonien sous l'action des dix transformations infinitésimales du groupe à dix paramètres, appelé aujourd'hui groupe de Galilée, il obtenait les dix lois de conservation de la mécanique du problème à n corps, et retrouvait en particulier le résultat de Schütz de 1897 sur la conservation de l'énergie totale du système. Dans une deuxième lettre [1917], Engel montra comment utiliser les quantités conservées pour l'intégration des équations de la mécanique suivant la méthode de Lie, mais il n'utilisa pas non plus de méthode variationnelle.

On peut donc dire que les éléments pour une théorie générale reliant propriétés d'invariance et quantités conservées apparaissaient à travers

(30)C'est Poincaré qui donne leur nom aux transformations de Lorentz (voir Wigner [1967], p. 5, Pais [1982], p. 21). Le groupe de Lie de dimension 10, produit semi-direct du groupe des transformations de Lorentz à 6 paramètres et du groupe des translations à 4 paramètres, est désigné par *die zehn gliedrige Gruppe der „Bewegungen"* (le groupe des « mouvements » à dix termes) par Herglotz. Il est souvent appelé aussi groupe de Lorentz, ou, plus précisément, groupe de Lorentz inhomogène, et sera appelé groupe de Poincaré pour la première fois seulement en 1939 par Wigner (voir Mehra [1974], note 128, p. 70). On lit dans Wigner [1967], p. 18, « J'aime appeler le groupe formé de ces invariances [en anglais, *invariables*] le groupe de Poincaré », et il donne des références aux travaux de Poincaré de 1905 et 1906.

les diverses publications des prédécesseurs de Noether, sans que l'essentiel de ses résultats ne se trouve chez aucun de ceux-ci. Nous pensons au contraire que Noether a considérablement généralisé des résultats épars concernant la mécanique et la relativité restreinte, qui devinrent après 1918 des cas particuliers de son premier théorème, et mis en œuvre une méthode originale. Engel, dans la conclusion de sa lettre de 1916, soulignait que le détour par la considération du groupe de Lorentz (inhomogène) était nécessaire pour justifier l'existence de l'intégrale des forces vives et de la deuxième intégrale du centre de gravité qui auparavant « tombaient du ciel ». C'est Noether qui non seulement montrera que la considération d'un groupe de symétrie bien adapté au problème rend naturelles les lois de conservation connues, mais encore donnera une méthode générale pour calculer les lois de conservation à partir des symétries d'un problème variationnel, et inversement.

1.2. La théorie de la relativité générale et le problème de la conservation de l'énergie. — L'histoire des débuts de la relativité générale a été amplement étudiée, en particulier récemment dans les ouvrages de la série des *Einstein Studies* et dans les articles cités dans l'introduction, auxquels nous renvoyons pour un historique détaillé. Nous ne résumerons ici que quelques faits essentiels pour la compréhension du rôle de Noether.

Dès 1907, dans un article sur les conséquences du principe de relativité [1907], Einstein constate que les lois de la physique ne permettent pas de distinguer un référentiel soumis à un champ gravitationnel constant d'un référentiel en accélération uniforme, et pose la question d'une extension du principe de relativité à cette situation plus générale. Après 1912, il cherche pour les lois de la gravitation une expression qui soit invariante par un groupe de transformations des coordonnées plus grand que celui composé des transformations de Lorentz et des translations, et si possible invariante par des changements arbitraires de coordonnées.

Après plusieurs essais dans cette direction ainsi que des échanges avec Max Abraham et Gunnar Nordström en particulier(31), Einstein entreprend, avec l'aide de son ami, le mathématicien Marcel Grossmann,

(31)Pour le compte-rendu détaillé de cette période, voir Mehra [1974], Pais [1982], p. 208-216 et 229, Rowe [1999] [2001], et les nombreuses références qui y sont citées.

l'étude du calcul différentiel absolu de Ricci et Levi-Civita, afin de donner un cadre mathématique à l'extension du principe de relativité. Il cherche à mettre les lois de la gravitation sous la forme d'équations différentielles du second ordre, généralement covariantes, c'est-à-dire indépendantes du système de coordonnées choisi, à partir d'une métrique $g_{\mu\nu}$ non constante décrivant le potentiel de gravitation. Après des tentatives infructueuses, Einstein renonce temporairement à la covariance générale des équations de gravitation, en particulier afin de pouvoir garder une loi de conservation de l'énergie(32). Il se limite d'abord aux transformations linéaires, puis il introduit la notion de systèmes de coordonnées adaptées, bientôt reconnus comme étant des systèmes de coordonnées reliés entre eux par des transformations unimodulaires, c'est-à-dire à jacobien égal à un. Cette première version de relativité généralisée est connue sous le nom de *Entwurf*, elle ne constitue qu'un « brouillon » de la future théorie de la relativité générale.

En se limitant à ces changements de coordonnées, Einstein réussit en novembre 1915 à établir des équations de la gravitation. Mieux encore, il constate qu'après une légère modification, ces équations sont tensorielles, donc généralement covariantes. Les 4, 11 et 18 novembre 1915, il présente ses conclusions à l'Académie de Berlin [1915].

Ces nouvelles équations créaient toutefois un redoutable problème (33), car la loi de conservation de l'énergie impliquait que, lorsque l'on prenait un système de coordonnées bien adaptées, ce qui était permis par la covariance générale, le tenseur d'énergie-impulsion s'annulait en tout point

(32)La question de la conservation de l'énergie fut au premier plan des préoccupations d'Einstein tout au long de sa vie, comme en témoignent ses articles sur l'inertie de l'énergie en 1906 et 1907 aux *Annalen der Physik*, ainsi que ses lettres à Michele Besso (Einstein et Besso [1972]). Voir plus particulièrement celles datées d'Ahrenshoop du 29 juillet 1918, où il écrit que l'énergie totale d'un système est un « invariant *intégral* auquel ne correspond aucun invariant *différentiel* », et du 20 août 1918, où il réfute une hypothèse de Weyl, et où il revient sur la question de l'énergie, en insistant sur la nécessité d'introduire « le tenseur de tension (*Spannungstensor*) pour le champ statique de gravitation ». Dans son introduction à cette correspondance, Pierre Speziali signale aussi les lettres des 28 juillet (de Genève) et 2 août 1925 (de Berne), mais en fait dans cette correspondance Einstein parle du tenseur d'énergie dès la fin de 1913 (lettre de Zürich).

(33)Voir Earman et Glymour [1978].

de l'espace. Ceci sous-entendait que l'énergie scalaire était constante. Mais cette hypothèse n'est vérifiée que pour un champ gravitationnel homogène. En fait, il manquait à ces équations le fameux terme de trace, qu'Einstein introduisit dans son article du 25 novembre 1915, et avec lequel les équations de la gravitation trouvaient leur expression définitive. Il restait pourtant un point encore non satisfaisant : la loi de conservation de l'énergie ne semblait pas être une conséquence directe des équations de la gravitation, et il n'apparaissait pas clairement que celle-ci avait une justification mathématique.

D'autres travaux, certains par des physiciens réputés, tels Paul Ehrenfest et Hendrik A. Lorentz, contribuèrent à éclairer la question de la conservation de l'énergie(34), et plusieurs sont les prédécesseurs directs dont Noether a pu s'inspirer. En 1916, paraît dans les comptes rendus de l'Académie d'Amsterdam, un article de Paul Ehrenfest où il calcule les invariants d'un problème variationnel. Dans le même volume, Lorentz propose un lagrangien et établit les équations de la relativité générale à partir du principe variationnel correspondant, puis dérive la loi de conservation du moment et de l'énergie, mais il s'agit encore de la première version de la théorie de la relativité générale. Son élève, Adriaan Daniel Fokker publie en 1917 une méthode invariante pour obtenir ces résultats, et il discute les conséquences du principe variationnel, et ce peu avant Weyl [1917] qui effectue la dérivation du théorème de l'énergie-impulsion à partir d'un principe de Hamilton. En 1917 encore, Nordström, citant Einstein [1916a], Herglotz [1916] et les travaux de Lorentz de 1915, calcule à son tour le « tenseur d'énergie-tension ». De mars à juin 1916, Lorentz fait une série de conférences à Leyde sur la théorie d'Einstein, et publie la même année et au début de 1917 une série de quatre articles [1916] où il présente une théorie géométrique invariante de la relativité générale. L'historique de ces découvertes, avec une analyse de ces publications, a été développé dans les articles de Michel Janssen [1992] et de Anne J. Kox [1992]. Noether citera « Lorentz et ses élèves (par exemple

(34)Sur le contexte historique, voir Pais [1987], Sauer [1999], Cattani et De Maria [1993], et voir Trautman [1962] pour un exposé très clair des difficultés posées par le problème de la conservation de l'énergie en relativité générale. Sur des développements ultérieurs voir par exemple Havas [1990].

Fokker) », en donnant la référence à l'article de Fokker de 1917, ainsi que Weyl, sans préciser de référence à ce dernier. Le deuxième théorème de Noether unifie certains des résultats de ces recherches intensives, et c'est elle qui met en évidence le phénomène nouveau qui apparaît avec un groupe de symétrie de dimension infinie, tel que le groupe des transformations de la variété de la relativité générale.

1.3. Les publications de Hilbert et de Klein sur la relativité générale. — À partir du milieu de l'année 1915[35], Hilbert travailla intensément à comprendre les travaux d'Einstein et chercha à déduire d'un nombre limité d'axiomes les lois de la physique sous forme généralement covariante, en combinant la théorie de l'électromagnétisme de Gustav Mie et les idées d'Einstein sur la gravitation. D'une part, Hilbert avait démontré plusieurs théorèmes fondamentaux de la théorie des invariants. D'autre part, la relativité rejoignait les interrogations sur la géométrie que Hilbert partageait avec Klein. Dans le programme d'Erlangen de 1872[36], ce dernier avait défini une géométrie comme la donnée d'une variété et d'un groupe de transformations sur cette variété, groupe de difféomorphismes dans un langage plus moderne, identifiant l'étude d'une géométrie à la recherche des invariants du groupe. Hilbert voyait donc un lien entre la théorie des invariants et la géométrie, d'une part, et le problème de l'extension de la théorie de la relativité restreinte, d'autre part.

Durant les mois d'octobre et novembre 1915, Hilbert et Einstein entretinrent une abondante correspondance où ils développaient, chacun à leur tour, leurs très proches théories. L'examen des épreuves de l'article de Hilbert [1915] a montré que la priorité des équations d'Einstein revenait bien à Einstein lui-même. Dans son article daté du 20 novembre 1915, Hilbert introduisait deux axiomes et une fonction généralement invariante dont il déduisait dix équations de gravitation et quatre équations

[35] Nous ne rappelons ici que quelques faits. Sur cette période et les rapports scientifiques entre Einstein, Hilbert, Klein et Noether, voir Rowe [1999], où l'on trouvera une analyse détaillée à partir des documents d'archives. Voir aussi la correspondance d'Einstein, *Collected Papers* 8A.

[36] Une traduction anglaise parut dans le *Bulletin of the American Mathematical Society* en 1893 (vol. 2, p. 215-249).

d'électromagnétisme, toutes covariantes par changements de coordonnées quelconques. Ces équations étaient en fait celles d'Einstein [1915], dont Hilbert avait eu connaissance par une lettre de celui-ci, reçue alors que son article était en épreuves[37]. À la différence d'Einstein, Hilbert utilisait un principe variationnel pour obtenir les équations de champ[38]. D'autre part, l'article de Hilbert différait de celui d'Einstein sur un autre point : en appliquant un théorème qu'il énonçait sans en donner de démonstration, Hilbert obtenait directement une loi de conservation du tenseur d'énergie-impulsion qui, à première vue, était différente de celle d'Einstein.

Tout au long des années 1917 et 1918, Klein et Einstein échangèrent une correspondance suivie, dans laquelle le problème de la conservation de l'énergie était le sujet de nombreux commentaires et demandes d'explications, précédant ou suivant les publications de l'un et de l'autre, les articles [1918a,b,c] de Klein et ceux d'Einstein [1916b] [1918]. On sait que Klein discuta le problème de la conservation de l'énergie non seulement avec Noether mais aussi avec Carl Runge au printemps 1918,et qu'il entreprit une étude systématique de la bibliographie sur ce sujet avec ce dernier. Runge fit le 8 mars 1918 une communication à la Société scientifique de Göttingen, « Sur le théorème de conservation de l'énergie en théorie de la gravitation ». Dans sa lettre à Einstein du 20 mars 1918[39], Klein mentionne les résultats que vient d'obtenir Runge, et annonce que sa communication et celle de Runge sont justement en voie d'achèvement

[37] Voir Corry, Renn et Stachel [1997]. Les problèmes de priorité des découvertes et les relations entre Hilbert et Einstein ont été d'abord examinés par Mehra [1974], puis par Earman et Glymour [1978], Pais [1982], p. 257 *et seq.* et p. 274-275, Vizgin [1994], chap. 2. Voir aussi Rowe [1999], p. 199-205, et [2001], et les notes historiques des *Collected Papers of Albert Einstein.*

[38] Un manuscrit d'Einstein, intitulé « Appendice : formulation de la théorie à partir d'un principe variationnel », a été publié pour la première fois dans les *Collected Papers* 6, no. 31, p. 340-346. D'après les éditeurs, ce texte, antérieur au 20 mars 1916, aurait été prévu comme dernier paragraphe ou comme appendice du grand article d'Einstein [1916a]. C'est à la fin de 1916 qu'Einstein publie un article sur une formulation variationnelle de la relativité générale [1916b]. Sur les formulations variationnelles des équations d'Einstein, voir Kishenassamy [1993].

[39] Einstein, *Collected Papers* 8A, no. 487, p. 685-690 ; 8 (anglais), p. 503-507.

pour publication, mais le 24 mars Einstein réfute les idées de Runge(40), ce qui convainc Klein et Runge de renoncer à publier leurs articles en préparation, « avant d'avoir une meilleure vue d'ensemble de la littérature existante »(41). Début juin, Klein projette d'exposer l'article qu'Einstein publie alors sur « Le théorème de conservation de l'énergie en relativité générale »(42), mais il y renonce finalement car il ne peut se persuader de sa validité.

Au début de 1918, Klein publie un article(43) en forme d'échange de lettres avec Hilbert où il simplifie l'argument de Hilbert et émet une critique voilée de la note décrite ci-dessus. En février et mars 1918, Klein écrit encore deux fois à Hilbert au sujet de la loi de conservation de l'énergie, et celui-ci lui répond brièvement(44). Dans sa lettre du 5 mars, Klein signale que Runge a repris son idée sur le bilan énergétique du champ gravitationnel et qu'il la développera le vendredi suivant [8 mars 1918] à la Société scientifique de Göttingen.

Les incertitudes sur les rapports entre les théories d'Einstein et de Hilbert, et en particulier sur les lois de conservation associées, furent finalement levées par Klein dans deux articles de 1918, « Sur les lois différentielles pour la conservation de l'impulsion et de l'énergie dans la théorie de la gravitation d'Einstein » [1918b] et « Sur la forme intégrale des lois de conservation et la théorie de l'univers spatialement fermé »

(40)Einstein, *Collected Papers* 8A, no. 492, p. 697-699 ; 8 (anglais), p. 512-514.

(41)Lettre du 18 mai 1918 de Klein à Einstein (*Collected Papers* 8A, no. 540, p. 761-762 ; 8 (anglais), p. 559). Des versions préliminaires de la communication que préparait Klein, mais qu'il renonça à publier, et les notes de ses discussions avec Runge se trouvent dans les archives de Göttingen (voir dans Einstein, *Collected Papers* 7, p. 76, la note 5 sur l'article d'Einstein [1918]). Runge, qui publia sur des sujets très divers, ne publiera jamais rien sur cette question, après les objections d'Einstein.

(42)Einstein [1918]. Dans sa lettre du 9 juin 1918, Einstein écrit à Klein : « Je suis très heureux que vous fassiez un exposé sur mon article sur l'énergie. Je vous donne maintenant la démonstration complète du caractère tensoriel (pour les transformations linéaires) de J_σ. » (*Collected Papers* 8B, no. 561, p. 791-794 ; 8 (anglais), p. 581-583).

(43)Bien que paru dans le volume daté 1917, l'article de Klein [1918a] fut en fait communiqué le 25 janvier 1918.

(44)Ces lettres sont publiées dans Hilbert et Klein [1985].

[1918c], où il élucidait, utilisant les théorèmes de Noether de manière essentielle, la dérivation des lois de conservation obtenues par Einstein et par Hilbert, ainsi que le caractère vectoriel des quantités introduites par Hilbert. Mais la difficulté majeure, qui consistait à expliquer la différence de nature entre les lois de conservation de la mécanique classique et de la relativité restreinte, d'une part, et celles de la relativité générale, d'autre part, avait en fait été résolue par Noether au cours du printemps 1918, et l'explication en était contenue dans son article [1918c] soumis en juillet de cette année. Or le 13 mars, Einstein écrivait encore dans une lettre à Klein(45) : « Les relations ici [en relativité générale] sont exactement analogues à celles des théories non relativistes ». Nous verrons que vers cette date, Noether (qui se trouvait à Erlangen) avait écrit à Klein sur ce point, ce qui explique que le 20 mars Klein affirme à Einstein qu'il n'en est rien. Et pourtant le 24 mars, Einstein lui répond encore que l'on peut considérer le fait que les intégrales $\int(\mathfrak{T}_\sigma^4 + \mathfrak{t}_\sigma^4)\,\mathrm{d}V$ sont constantes au cours du temps « comme entièrement analogue et équivalent à la loi de conservation du moment et de l'énergie en mécanique classique »(46). L'apport de Noether sur la question du vecteur d'énergie de Hilbert fut essentiel aussi, comme le souligne explicitement Klein dans sa lettre à Einstein du 10 novembre 1918(47), qui est d'ailleurs la seule de sa correspondance avec Einstein où il cite le nom de Noether et l'importance de son rôle.

Beaucoup plus tard, en 1924, ce furent Schouten et Dirk Struik qui remarquèrent que, dans le cas particulier du lagrangien de la relativité générale, les identités obtenues à partir du deuxième théorème de Noether étaient aussi une conséquence des identités de Bianchi, bien connues en

(45) *Collected Papers* 8A, no. 480, p. 573-675 ; 8 (anglais), p. 494-495.

(46) Lettre citée dans la note 40. Les symboles $\mathfrak{t}_\sigma^4$ désignent les composantes temporelles des quantités $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$, celles qu'Einstein a introduites dans son article [1916b] et dont il se plaint dans sa lettre à Hilbert du 12 avril 1918 (*Collected Papers* 8A, no. 503, p. 714-716 ; 8 (anglais), p. 525-526) que « tout le monde [les] rejette comme non cacher [c'est-à-dire inadaptées, impropres à la consommation] » !

(47) Einstein, *Collected Papers* 8B, no. 650, p. 942-944 ; 8 (anglais), p. 692-693.

géométrie riemannienne, exprimant la nullité de la dérivée covariante de la courbure de la connexion de Levi-Civita associée à une métrique[(48)].

1.4. Emmy Noether à Göttingen. — Emmy Amalie Noether (1882-1935), *bayerische-Staatsangehörigkeit und israelitische-Konfession*[(49)], fille du mathématicien Max Noether, avait achevé sa thèse de doctorat en 1907 à Erlangen sous la direction de Paul Gordan, l'un des grands spécialistes des invariants. Elle y subit aussi l'influence de Ernst Fischer[(50)]. Sa thèse, *Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form* (Sur la construction du système des formes d'une forme biquadratique ternaire), dont un extrait avait paru dès 1907 (Noether [1907]) et qui fut publiée dans le journal de Crelle [1908], portait sur la recherche des invariants d'une forme biquadratique ternaire, c'est-à-dire d'un polynôme homogène de degré 4 en 3 variables. Elle étudia ensuite le cas des formes (polynômes homogènes) à n variables dans *Zur Invariantentheorie der Formen von n Variabeln*, paru également au journal de Crelle en 1911 mais déjà annoncé dans Noether [1910], puis les corps de fonctions rationnelles dans *Körper und Systeme rationaler Funktionen* (Corps et systèmes de fonctions rationnelles) [1915], annoncé dans Noether [1913]. En 1909 elle était devenue membre de la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* ou DMV (Société mathématique allemande).

En 1916, dans le volume 77 des *Mathematische Annalen*, Noether publia une série de trois articles [1916a,b,c], puis un quatrième [1916d], sur les invariants algébriques. Concernant ses articles sur les invariants des

(48) Voir Pais [1982], chap. 15c. En fait, Levi-Civita avait appliqué les identités de Bianchi contractées à la théorie de la gravitation dans l'article de 1917 où il introduisit la notion de déplacement parallèle, et avait correspondu avec Einstein à ce sujet. Voir Cattani et De Maria [1993] et Rowe [2002].

(49) C'est ainsi qu'elle se qualifie, « de nationalité bavaroise et de confession israélite », au début de son *Curriculum vitæ* manuscrit, écrit vers 1907, reproduit en première page de ses *Œuvres*. La mention de la religion faisait partie de l'état-civil en Allemagne à cette époque. Pour une biographie d'Emmy Noether, voir Dick [1970] [1981], voir aussi Kimberling [1981], Srinivasan et Sally [1983]. On trouvera sous forme électronique une bibliographie assez complète des articles concernant la vie ou l'œuvre de Noether, ainsi que des liens vers d'autres sites, sur le site de l'association Femmes et Mathématiques.

(50) Sur ce point, voir Weyl [1935a].

groupes finis[(51)] et sur la recherche de bases d'invariants fournissant des développements à coefficients entiers ou rationnels [1916a,b], Weyl dit en 1935 :

> Elle donne la preuve de la finitude pour les invariants d'un groupe fini (sans utiliser le théorème général de Hilbert sur les bases d'idéaux), pour les invariants en restriction aux coefficients entiers, et finalement elle attaque la même question, ainsi que la question d'une base minimale constituée d'éléments indépendants, pour les corps de fonctions rationnelles[(52)].

Dans son livre sur les groupes classiques[(53)], Weyl fait un résumé de la démonstration contenue dans Noether [1916a], et plus tard, dans son analyse de l'œuvre de Hilbert, il écrit en note, en citant encore cet article :

> Une preuve élémentaire directe du premier théorème principal pour les groupes finis, qui n'utilise pas le principe (A) de Hilbert, a été donnée par E. Noether[(54)].

La publication suivante de Noether [1918a] traite des équations à groupe de Galois prescrit et prolonge son article de 1915[(55)].

En 1915, Noether fut appelée à Göttingen par Klein et Hilbert pour les aider dans l'élaboration de la théorie de la relativité générale. La liste des thèmes du séminaire de Klein est imprimée dans ses *Œuvres*

[(51)] Voir dans Smith [2000] un exposé moderne des résultats de cet article et des développements récents de cette théorie, et dans Fogarty [2001] l'extension au cas de la caractéristique p de son résultat sur la borne des degrés des générateurs de l'anneau des invariants polynomiaux des groupes finis.

[(52)] Weyl [1935a], p. 206, *Œuvres* 3, p. 430. Ce discours de Weyl en anglais est reproduit dans Dick [1970], p. 53, et [1981], p. 112.

[(53)] Weyl [1939], p. 275. Il donne la référence à Noether dans la note 19 du chapitre 8, p. 314.

[(54)] Weyl [1944], p. 621, *Œuvres* 4, p. 139, note 2. Reid [1970], p. 245-283, reproduit une version abrégée du texte de Weyl de 1944 y compris (p. 249) la note sur Noether.

[(55)] D'après l'algébriste Paul Dubreil [1986], ce problème avait été posé par Richard Dedekind (1831-1916). Des travaux modernes utilisant les résultats et conjectures de Noether sur cette question ont été analysés par Richard G. Swan sous le titre *Galois Theory* dans la section *Noether's Mathematics* de Brewer et Smith [1981], p. 115-124.

(3, Supplément, p. 11). Nous en extrayons les titres suivants, traduits en français,

– Été 1916, Théorie des invariants des transformations linéaires,

– Hiver 1916/17, Théorie de la relativité restreinte sur une base invariante,

– Été 1917, Théorie des invariants des transformations ponctuelles générales,

– Été 1918-Hiver 1918/19 jusqu'à Noël, Théorie de la relativité générale sur une base invariante, [...]

– Hiver 1920/21 jusqu'à Noël, Principes variationnels de la mécanique classique et de la relativité générale.

L'étude des archives de Göttingen(56) montre que Noether prenait une part active à ce séminaire. Peu après son arrivée à Göttingen, elle aborde le problème des invariants des équations différentielles et en 1918 elle publiera sur ce sujet les articles *Invarianten beliebiger Differentialausdrücke* (Invariants d'expressions différentielles quelconques) [1918b] et *Invariante Variationsprobleme* (Problèmes variationnels invariants) [1918c]. C'est ce dernier que nous étudions ici(57). Elle y reprend les travaux de Hamel [1904a,b] et Herglotz [1911]. À la demande de Hilbert, elle avait étudié dès 1916 divers problèmes issus de la formulation de la relativité générale et l'on sait que, au printenps 1916, elle rédige des notes à ce sujet. En effet, le 27 mai, dans une lettre à Einstein(58), Hilbert écrit : « Ma loi [de conservation] de l'énergie est probablement liée à la vôtre ; j'ai déjà donné cette question à étudier à Mlle Noether ». Dans la phrase suivante, il explique pourquoi les vecteurs a^l et b^l considérés par Einstein ne peuvent s'annuler dans le cas limite où les coefficients de la métrique sont constants, puis il annonce que, pour remplacer de longues explications, il ajoute à sa lettre « la note jointe de Mlle Noether ». Mais il ne semble pas que de telles notes ont été conservées. Le 30 mai, Einstein répond à Hilbert par une courte lettre ; « [...] Tout dans votre article m'est maintenant compréhensible, sauf le théorème de l'énergie ». Déduisant

(56)Voir Rowe [1999].

(57)Le volume de 1918 des *Nachrichten* de Göttingen qui contient ces articles de Noether est accessible sur le site http ://www.emani.org (SUB Göttingen).

(58)Einstein, *Collected Papers* 8A, no. 222, p. 290-292 ; 8 (anglais), p. 215-216.

de l'équation proposée par Hilbert une conséquence apparemment absurde « qui priverait le théorème de son sens », il demande : « Comment clarifier cela ? » et il poursuit : « Il suffirait bien sûr que vous chargiez Mlle Noether de m'éclairer »[59]. Cette phrase montre que l'expertise de Noether dans ce domaine des débats sur la relativité générale était reconnue par Hilbert et Einstein dès sa première année à Göttingen.

Alors que son travail au sujet du vecteur d'énergie introduit par Hilbert date de 1916[60], c'est en hiver et au printemps de l'année 1918 que Noether perçoit la raison profonde des difficultés rencontrées dans l'interprétation des lois de conservation en relativité générale. Ces considérations seront très clairement énoncées dans l'article *Invariante Variationsprobleme*, qui comporte deux théorèmes sur les rapports entre le groupe de transformations laissant invariante l'intégrale d'action d'un système lagrangien et les lois de conservation, l'un sur le cas d'un groupe d'invariance à un nombre fini de paramètres (le cas de la mécanique classique et de la relativité restreinte), et l'autre sur celui d'un groupe d'invariance du même type que celui de la relativité générale, une théorie généralement covariante, c'est-à-dire dont les équations de champ sont invariantes par tout changement de coordonnées. Ce qui distingue les deux cas est la présence dans le second d'un groupe d'invariance dépendant de fonctions arbitraires.

C'est au verso d'une carte postale[61], adressée d'Erlangen à Klein à Göttingen, le 15 février 1918, que Noether esquisse son deuxième théorème. La formule de la ligne 8,

$$\delta f - \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_i \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial z_i}{\partial x_1}} \delta z_i - \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} \sum_i \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial z_i}{\partial x_n}} \delta z_i = - \sum_i \psi_i(z)\, \delta z_i \ ,$$

est, à de très légers changements de notation près, la formule (5) de son article, mais le signe adopté ici pour les quantités ψ_i est l'opposé de celui qui sera adopté dans l'article. Dans son article, on trouve d'abord la relation

[59] Einstein, *Collected Papers* 8A, no. 223, p. 293-294 ; 8 (anglais), p. 216-217.

[60] Voir aussi les passages de Klein et de Hilbert que nous citons au paragraphe 3.1 ci-dessous, ainsi que Mehra [1974], note 129a, p. 70, et Rowe [1999], p. 213.

[61] Voir la reproduction p. 2, ainsi que la transcription et une traduction à l'Annexe I, p. 148.

(3), laquelle définit les composantes ψ_i de la dérivée d'Euler-Lagrange du lagrangien f, qu'elle appelle les « expressions lagrangiennes », et introduit le terme Div$A$, puis la formule (5) qui donne l'expression explicite de la quantité A dans le cas de n variables indépendantes et d'un lagrangien du premier ordre.

Plus bas, la grande relation sur deux lignes correspond au cas de l'invariance par chacune des translations sur un espace de dimension n qui, dans le cas de la relativité restreinte, est l'espace de Minkowski à $n = 4$ dimensions. Noether considère donc, pour chaque $\kappa = 1, 2, \ldots, n$, la variation $\delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial x_\kappa}$, ce qui entraîne, si f ne dépend pas explictement de x_κ, que la variation de f est la dérivée totale de f par rapport à x_κ. Elle obtient « les n identités » qui figurent sur deux lignes au milieu de la page,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\sum_i \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial z_i}{\partial x_1}} \frac{\partial z_i}{\partial x_\kappa})+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_\kappa}(\sum_i \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial z_i}{\partial x_\kappa}} \frac{\partial z_i}{\partial x_\kappa}-f)+\cdots \frac{\partial}{\partial x_n}(\sum_i \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial z_i}{\partial x_n}} \frac{\partial z_i}{\partial x_\kappa})$$
$$= \sum_i \psi_i(z) \frac{\partial z_i}{\partial x_\kappa} \; ; (\kappa = 1, 2 \ldots n) \; .$$

Elle a ainsi déterminé les n composantes des n courants conservés, c'est-à-dire champs de vecteurs qui sont à divergence nulle lorsque les équations d'Euler-Lagrange sont satisfaites, associés aux n directions d'espace[(62)]. Dans le cas de la relativité restreinte, ces $n^2 = 16$ composantes sont celles du tenseur d'énergie-impulsion.

Mais dans une théorie généralement covariante sur un espace de dimension n qui, dans le cas de la relativité générale, est l'espace-temps courbe à $n = 4$ dimensions, l'espace-temps admet tous les changements de coordonnées où x'_κ est une fonction arbitraire des x_λ, ce qui correspond

[(62)]Si l'on introduit la notation abrégée z^i_λ pour $\frac{\partial z_i}{\partial x_\lambda}$, les composantes du courant conservé associé à la symétrie infinitésimale $\frac{\partial}{\partial x_\kappa}$ sont donc $N_1^{(\kappa)}, \ldots, N_n^{(\kappa)}$, où

$$N_\lambda^{(\kappa)} = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial z^i_\lambda} z^i_\kappa + f\delta_{\kappa\lambda} \; .$$

(On a posé $\delta_{\kappa\lambda} = 1$ si $\kappa = \lambda$ et 0 sinon.) Dans son article [1918c], Noether introduit la variation $\bar{\delta} z_i$ qui est dans ce cas $-\frac{\partial z_i}{\partial x_\kappa}$, puisque le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_\kappa}$ a pour composantes $\delta_{\kappa\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, n$.

à une symétrie infinitésimale où $\frac{\partial}{\partial x_\kappa}$ est multiplié par une fonction arbitraire des x_λ. Noether en déduit que, dans le cas généralement covariant, les identités

$$\sum_i \psi_i(z)\frac{\partial z_i}{\partial x_\kappa} = 0 \ ; \ (\kappa = 1, 2 \ldots n)$$

sont satisfaites par les expressions lagrangiennes, c'est-à-dire les membres de gauche des équations d'Euler-Lagrange, ce qui montre que « les ρ équations $\psi_i = 0$ sont équivalentes à $\rho - n$ [équations] ». On peut lire ces identités quatre lignes avant la fin de sa carte postale. Comme nous le soulignons plus loin (p. 68), ces identités sont des cas particuliers de la formule générale (16) établie au paragraphe 4 de son article. Elle annonce ici qu'elle « espère pouvoir régler de façon analogue le cas général, où les scalaires z_α sont remplacés par les tenseurs $g_{\mu\nu}$ », ce qui signifie que la résolution du problème posé par la relativité générale est déjà en vue.

Un mois plus tard, dans une lettre à Klein du 12 mars(63), elle formule l'idée fondamentale que l'absence de théorème de l'énergie en relativité générale provient du fait que les groupes d'invariance que l'on considère sont des sous-groupes d'un groupe infini, conduisant à des identités satisfaites par les expressions lagrangiennes : « Par mes recherches additionnelles, j'ai maintenant vu que la loi [de conservation] de l'énergie n'est pas valable dans le cas de l'invariance par tout *groupe étendu engendré par la transformation induite des z* »(64). Ici le symbole z désigne l'ensemble des variables dépendantes et il faut comprendre « les transformations des z induites par *toutes* les transformations des variables indépendantes ». Il faut comparer cette phrase aussi avec le langage du paragraphe 6 de Noether [1918c]. C'est donc une première formulation de la conséquence essentielle de son deuxième théoreme.

Le 23 juillet 1918, Noether fait un exposé à la Société mathématique de Göttingen(65), intitulé *Invariante Variationsprobleme*, dont le résumé commence ainsi, « En connexion avec les recherches sur le vecteur énergie de Hilbert, l'auteur [*die Referentin*, forme féminine du mot] a énoncé les

(63) Voir à l'Annexe II, p. 150, les reproductions de ce document, ainsi que la transcription et une traduction de cette lettre.
(64) Ce passage est cité par Rowe [1999], p. 218, avec une traduction différente.
(65) *Mathematische Gesellschaft zu Göttingen.* Voir Annexe IV.

théorèmes généraux suivants »[66]. À la séance du 26 juillet 1918 de la Société royale scientifique de Göttingen[67], Klein présente un mémoire de Noether du même titre sur les invariants des systèmes d'équations qui dérivent d'un lagrangien. L'article *Invariante Variationsprobleme* [1918c] paraîtra la même année, avec la mention « la version définitive du manuscrit ne fut envoyée que fin septembre ». Noether résume elle-même aussitôt son article pour le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, recueil annuel de comptes rendus, ancêtre de *Zentralblatt* et de *Mathematical Reviews*. Ce résumé est constitué de l'énoncé des deux théorèmes et porte le même titre que l'article[68].

L'*Invariante Variationsprobleme* fut soumis par Noether avec l'appui de Hilbert et de Klein en vue de son habilitation. Celle-ci ne lui fut finalement accordée qu'en 1919, après des péripéties bien connues[69], et après la fin de la guerre[70] et la proclamation de la République de Weimar. On lit dans la liste *Habilitationen* du *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* de 1919 : « Fräulein Dr. Emmy Noether a été habilitée comme *Privatdozentin* de mathématiques à l'Université de Göttingen »[71]. Après avoir esquissé le contenu de ses publications antérieures, Noether résume ainsi son article en vue de l'habilitation :

---

(66) *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 27, 2e partie (1918), p. 47. Voir Dick [1970], p. 15 et [1981], p. 33, Rowe [1999], p. 221.

(67) *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.*

(68) *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, 46 (1916-1918), p. 770 (section Analyse, chapitre Calcul des variations).

(69) Voir l'étude détaillée par Cordula Tollmien [1991] et l'article de Tilman Sauer [1999].

(70) On peut voir que la guerre suspendit les travaux universitaires des jeunes hommes car, en lisant la liste des élèves de Hilbert dans ses *Œuvres* 3, p. 433, l'on constate qu'en fait aucune thèse ne fut soutenue entre le 21 décembre 1914 et le 5 juin 1918, puis ensuite aucune avant le 7 juillet 1920. D'après la liste parue dans ses *Œuvres* 3, p. 11-13, Klein, quant à lui, n'eut plus d'élèves après 1911.

(71) Vol. 28, 2e partie (1919), p. 35-36. On notera la forme féminine du titre. Un *privatdozent* était un maître de conférences, poste non rémunéré par l'université, seulement par les étudiants eux-mêmes.

> Les deux derniers travaux que nous mentionnerons concernent les invariants différentiels et les problèmes variationnels, et sont en partie le résultat de l'aide que j'ai apportée à Klein et à Hilbert dans leur travail sur la théorie de la relativité générale d'Einstein. [...] Le deuxième, *Invariante Variationsprobleme*, que j'ai choisi de présenter pour ma thèse d'habilitation, traite de groupes continus, au sens de Lie, arbitraires, finis ou infinis, et montre les conséquences de l'invariance d'un problème variationnel par un tel groupe. Ces résultats généraux contiennent, comme cas particuliers, les théorèmes concernant les intégrales premières connus en mécanique, et de plus les théorèmes de conservation et les relations de dépendance entre les équations de champ en théorie de la relativité, tandis que, d'autre part, la réciproque de ces théorèmes est également donnée [...](72).

Elle reviendra sur la théorie des invariants, algébriques cette fois, lors d'un exposé à la Société mathématique de Göttingen le 5 novembre 1918 sur les invariants des formes binaires(73), suivi un an plus tard d'un article sur ce sujet [1919]. En 1922 paraîtra le tome III.3 de l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*(74), consacré à la géométrie différentielle, contenant la section 10, encore désignée par III E 1, *Neuere Arbeiten der algebraischen Invariantentheorie. Differentialinvarianten* (Nouveaux travaux de la théorie des invariants algébriques. Invariants différentiels), écrite par Weitzenböck et terminée en mars 1921. Dans la deuxième partie *Differentialinvarianten*, section C, *Theorie der Differentialformen*, le

(72) L'original allemand est reproduit dans Dick [1970], p. 16 ; il est traduit en anglais dans Dick [1981], p. 36, et, avec des inexactitudes, dans Kimberling [1981], p. 15.

(73) *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 28, 2e partie (1918-1919), p. 29.

(74) Leipzig : B. G. Teubner, 1902-1927. Cette encyclopédie publiée en allemand à partir de 1898 sous la direction de Klein fut traduite en français et publiée par Gauthier-Villars, sous le titre *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, au fur et à mesure de sa publication en Allemagne, mais à cause de la guerre la traduction fut arrêtée à partir de 1916, c'est-à-dire avant la parution du tome III.3.

dernier paragraphe (no. 28, p. 68-71) est intitulé *Formale Variationsrechnung und Differentialinvarianten* (Calcul des variations formel et invariants différentiels) et porte en note, *Diese Nr. rührt von E. Noether her* (Ce paragraphe provient d'E. Noether), bien que le nom de Noether ne figure ni à la table des matières, pages 1 et 2, ni dans la bibliographie donnée à la page 3. Ce paragraphe de deux pages, qui est bien du style de Noether, est inclus dans la liste de ses œuvres dressée par Auguste Dick(75) [1970] [1981] et fut réimprimé dans les *Œuvres* de Noether en 1983, probablement sur la base du témoignage de van der Waerden, car dans les deux cas cette liste est basée sur celle publiée à la suite de l'éloge qu'il écrivit après la mort de Noether ([1935], p. 475). C'est dans ce court résumé que, dans un dernier paragraphe de quinze lignes, après un rappel des références aux travaux antérieurs déjà contenues dans l'*Invariante Variationsprobleme*, auxquelles s'ajoute la référence à Klein [1918a], sont cités ses deux importants théorèmes publiés trois ans plus tôt, avec la référence à l'article :

> La version fondamentale d'E. Noether montre que, à l'invariance de J par un G_ρ (groupe fini avec ρ paramètres essentiels), correspondent ρ divergences linéairement indépendantes ; à l'invariance par un groupe infini qui contient ρ fonctions arbitraires et leurs dérivées jusqu'à l'ordre σ, correspondent ρ dépendances entre les expressions lagrangiennes et leurs dérivées jusqu'à l'ordre σ. Dans les deux cas, la réciproque est valable.

On trouve à la fin du paragraphe un résumé du paragraphe 5 de son article, « Étant donné que les expressions lagrangiennnes sont des invariants (relatifs) du groupe, on a en même temps un processus qui engendre des invariants ». La référence à l'*Invariante Variationsprobleme* contenue dans ce paragraphe est la seule que nous avons trouvée dans les œuvres de Noether postérieures à 1918, comme si elle n'attachait plus guère d'importance, depuis son habilitation, aux résultats de cet article.

(75)Dick (1910-1993), titulaire d'un doctorat de mathématiques de l'Université de Vienne, fut professeur de lycée. Elle publia plusieurs travaux sur Emmy Noether et collabora à l'édition des œuvres d'Erwin Schrödinger.

Elle fit en 1922 à Leipzig, lors de la réunion annuelle de la Société mathématique allemande, un rapport sur « Invariants algébriques et différentiels »[76]. Enfin, et ce sera son dernier article sur ces sujets, elle publie en 1923 *Algebraische und Differentialinvarianten* où elle revient sur ces questions. Au début[77] elle y indique que la période « naïve et formelle » se termine, pour les invariants algébriques, avec Hilbert et l'utilisation des méthodes arithmétiques de l'algèbre, et que, pour les invariants différentiels, « cette période critique est caractérisée [...] en ce qui concerne les invariants différentiels, par le nom de Riemann, ou plus précisément, [...] par les méthodes du calcul des variations formel », mais elle cite seulement, parmi ses articles antérieurs, ceux de 1915 sur l'existence de bases rationnelles, de 1916 sur l'existence d'une base finie d'invariants pour les groupes finis [1916a], de 1918 sur les invariants des équations différentielles [1918b], et de 1919 sur les invariants des formes binaires. Elle y fait d'autre part référence, à la dernière page[78], à Weyl et à Schouten ; les travaux ultérieurs de celui-ci porteront sur les concommittants différentiels.

À partir de cette époque, Noether oriente ses recherches vers l'algèbre abstraite et la théorie des représentations. Privée de son emploi par les Nazis le 25 avril 1933, en vertu de la loi du 7 avril, elle quitte Göttingen peu après, trouve refuge aux États-Unis et, jusqu'à sa mort prématurée en 1935, enseigne à Bryn Mawr College, université alors réservée aux jeunes filles, située près de Philadelphie, tout en participant très activement à la vie mathématique de l'Institute for Advanced Study de Princeton, situé non loin. À sa mort, Jacobson la remplaça à Bryn Mawr pendant l'année 1935-1936[79]. De nombreux ouvrages et articles retracent sa vie et son œuvre d'algébriste[80].

1.5. Le jubilé de Klein. — L'*Invariante Variationsprobleme* est dédié à F. Klein à l'occasion de son jubilé académique. Fêter le jubilé

[76] Voir Dick [1970], p. 10, et [1981], p. 20.
[77] Noether [1923], p. 177, *Œuvres*, p. 436.
[78] Noether [1923], p. 184, *Œuvres*, p. 443.
[79] *Notices of the American Mathematical Society*, Octobre 2000, p. 1061.
[80] Voir Dick [1970] [1981], Kimberling [1981], Srinivasan et Sally [1983], Teicher [1999], etc.

scientifique, *das golden Doktorjubiläum*, c'est-à-dire le cinquantième(81) anniversaire du doctorat d'un éminent mathématicien, était chose assez courante : celui de Max Noether, le père d'Emmy, fut célébré le 5 mars 1918 ; l'article de Hilbert auquel celui de Noether [1916b] fait suite dans les *Göttinger Nachrichten* avait paru dans le *Festschrift* pour le jubilé académique de Hermann Amandus Schwarz. Il s'agit ici du cinquantième anniversaire du doctorat de Klein, obtenu le 12 décembre 1868 à l'Université de Bonn, qui fut fêté à l'Université de Göttingen le 10 décembre 1918(82), et à la Société mathématique de Göttingen le 12 décembre, avec une conférence de Paul Koebe sur ses travaux scientifiques, en particulier ceux touchant la théorie des fonctions automorphes(83).

2. Les théorèmes de Noether

Le présent paragraphe donne un bref compte-rendu des résultats de Noether(84).

L'originalité de Noether consistait à englober dans ses résultats à la fois la mécanique classique et le formalisme de la relativité générale. Nous insistons sur le fait, ignoré par la plupart des auteurs qui la citent, que Noether considère un problème d'une très grande généralité : un problème lagrangien d'ordre arbitraire, à un nombre arbitraire de variables

(81) Jubilé (en hébreu, *yovel*, corne ou trompe) au sens biblique signifie la dernière année d'une période de cinquante ans, annoncée par la sonnerie d'une trompe.

(82) Ce fait est mentionné dans la préface de ses *Œuvres*, vol. 1, p. III, et le texte non signé du discours prononcé à cette occasion est imprimé dans les pages qui suivent la préface. Notons aussi que les éditeurs des *Œuvres* (octobre 1920), vol. 1, p. V, indiquent qu'ils ont reçu l'aide de Mlle E. Noether pour la correction des épreuves.

(83) *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 28, 2e partie (1919), p. 30. Voir aussi, dans le tome 27, 2e partie (1918), la lettre de félicitations de la DMV, p. 59-60, et p. 63, l'annonce de l'institution d'une fondation par ses élèves et amis scientifiques, seulement un très petit nombre d'entre eux étant présents en raison des circonstances, et une autre lettre de vœux à l'occasion du 12 décembre 1918.

(84) Pour des exposés plus mathématiques on pourra consulter Kosmann-Schwarzbach [1985] [1987] et Olver [1986a], ainsi que les nombreuses références qui y sont citées.