

Chapitre 1

Introduction

1.1 Un exemple emprunté à la robotique

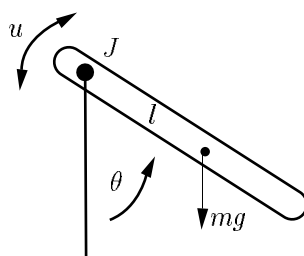


FIG. 1.1 – un bras de robot tournant dans un plan vertical autour d'un axe horizontal motorisé.

Modélisation Commençons par l'exemple de la figure 1.1 emprunté à la robotique. Il s'agit d'un bras rigide tournant dans un plan vertical autour d'un axe horizontal. Cet axe horizontal est équipé d'un moteur délivrant un couple variable u , que l'on peut choisir arbitrairement : u est la *commande* du système (on dit aussi *l'entrée*). La position géométrique du système est complètement décrite par un angle $\theta \in \mathbb{S}^1$ (l'espace des configurations géométriques du système est le cercle \mathbb{S}^1). La conservation du moment cinétique autour de l'axe horizontal permet de relier l'angle θ à la commande en couple u par l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$J\ddot{\theta}(t) + mlg \sin \theta(t) = u(t) \quad (1.1)$$

où m est la masse du bras, J son moment d'inertie par rapport à l'axe, l la distance du centre de gravité à l'axe et g l'accélération due à la pesanteur.

Forme d'état Fixons un intervalle de temps $[0, T]$. La commande $[0, T] \ni t \mapsto u(t)$ étant fixée, nous obtenons la loi horaire $[0, T] \ni t \mapsto \theta(t)$ en intégrant cette équation du second ordre à partir de conditions initiales en position $\theta(0) = \theta_0$ et en vitesse $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$. L'ensemble des conditions initiales forme l'état du système (l'espace des phases en mécanique). Cela revient en fait à réécrire cette équation scalaire du second ordre en deux équations scalaires du premier ordre :

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= u/J - (mgl/J) \sin \theta.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Les variables (θ, ω) forment alors l'état du système; le triplé $t \mapsto (\theta(t), \omega(t), u(t))$ sera dit *trajectoire* du système s'il vérifie, pour tout t , les équations différentielles (1.2).

Commandabilité La *planification de trajectoires* consiste à trouver une trajectoire du système $t \mapsto (\theta(t), \omega(t), u(t))$ partant d'un état (θ_i, ω_i) en $t = 0$ et arrivant en $t = T$ à l'état final (θ_f, ω_f) , ces deux états étant fixés par avance. Il s'agit du problème de base de la commandabilité : comment amener le système d'un endroit (d'un état) à un autre. Lorsque le système est commandable, on dispose, en général, d'une infinité de trajectoires et donc de commandes pour réaliser cette transition. Se pose alors le problème du choix entre ces diverses trajectoires : c'est en autre l'objet de la commande optimale qui sélectionne la trajectoire qui minimise un certain critère. Citons par exemple le temps minimum pour aller d'une position de repos $(\theta_i, \omega_i = 0)$ à une autre position de repos $(\theta_f, \omega_f = 0)$ sachant que la commande u reste bornée ($\forall t, |u(t)| \leq u_{max}$ où u_{max} est le couple maximum développé par le moteur). On en déduit ainsi une trajectoire de référence du système : $[0, T] \ni t \mapsto (\theta_r(t), \omega_r(t), u_r(t))$.

Bouclage Une autre question, directement liée à la première : étant donné que tout modèle est approximatif (les paramètres J et m et l sont connus avec une certaine précision), il convient d'ajuster la commande u en temps réel de façon à compenser les écarts à la trajectoire de référence, $\theta - \theta_r$ et $\omega - \omega_r$, qui peuvent apparaître. Il s'agit du *suivi de trajectoires* ("tracking" en anglais). Lorsque cette trajectoire est un point d'équilibre du système (comme, par exemple $(\theta, \omega, u) = 0$ ou $(\theta, \omega, u) = (\pi, 0, 0)$) on parle alors de *stabilisation*. Noter que la stabilisation du système autour d'une trajectoire $t \mapsto (\theta_r(t), \omega_r(t), u_r(t))$ qui n'est pas une trajectoire du système, i.e. qui ne vérifie pas les deux équations de (1.2) n'a aucun sens. En particulier, on ne peut pas parler de stabilisation autour d'un état qui n'est pas un état d'équilibre (comme, par exemple, $\theta_r = \pi/2$ et $\omega_r = 1$). Une démarche très naturelle consiste à corriger la commande de référence $u_r(t)$ par des termes du type $\theta - \theta_r(t)$ et $\omega - \omega_r(t)$. L'utilisation de ce type de terme correspond à un bouclage d'état, une boucle de rétro-action ("feedback" en anglais) qui l'on schématise souvent par le diagramme bloc de la figure 1.2. La mise en oeuvre de ce schéma revient, avec un calculateur temps-réel, à mettre à jour très rapidement (avec une période d'échantillonnage T_e bien plus rapide que les échelles de temps naturelles du système) la commande u en fonction de la trajectoire de référence et des mesures de θ et de ω .

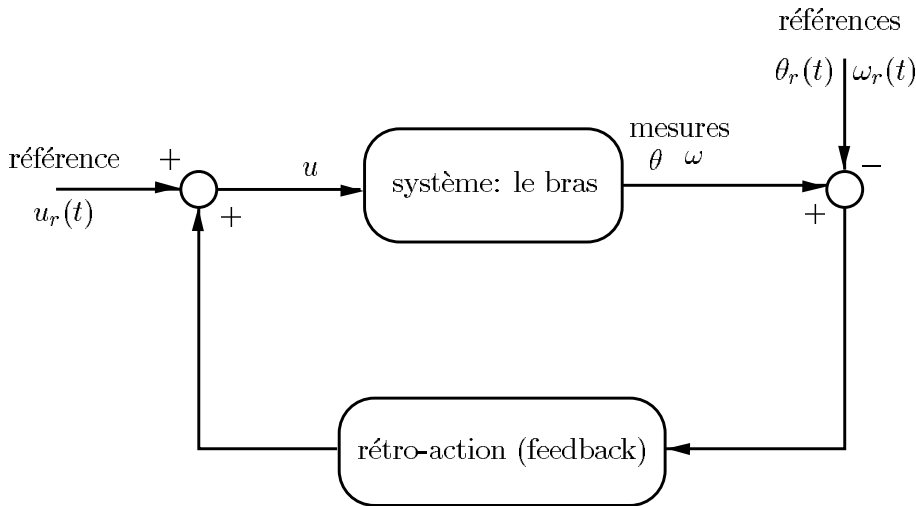


FIG. 1.2 – schéma-bloc d'une loi de rétro-action, dit aussi retour d'état ou "feedback".

Linéaire tangent Considérons, par exemple la stabilisation autour de l'équilibre instable $(\theta, \omega, u) = (\pi, 0, 0)$. Pour cela, linéarisons les équations (1.2) autour de ce point : nous faisons un développement limité des seconds membres en ne retenant que les termes d'ordre 1 (ceux d'ordre 0 sont nuls, car nous sommes autour d'un point d'équilibre). En notant $\tilde{\theta}$, $\tilde{\omega}$ et \tilde{u} les écarts, nous obtenons les équations du système *linéarisé tangent*:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\theta}} &= \tilde{\omega} \\ \dot{\tilde{\omega}} &= \tilde{u}/J + (mgl/J)\tilde{\theta}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Stabilisation Si on pose, comme loi de commande, le retour statique d'état (feedback),

$$\tilde{u} = -(Jk_2 + mgl)\tilde{\theta} - Jk_1\tilde{\omega},\tag{1.4}$$

avec k_1 et k_2 les gains du contrôleur (paramètres constants que nous choisirons ci-dessous), alors les équations du système linéaire tangent bouclé (c'est à dire avec sa boucle de rétro-action) sont

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\theta}} &= \tilde{\omega} \\ \dot{\tilde{\omega}} &= -k_2\tilde{\theta} - k_1\tilde{\omega}.\end{aligned}$$

Avec $k_1 = (1/\tau_1 + 1/\tau_2)$ et $k_2 = 1/(\tau_1\tau_2)$, où $0 < \tau_1 < \tau_2$ sont des temps caractéristiques, ce système devient *asymptotiquement stable* : pour toutes conditions initiales, ses solutions tendent vers zéro lorsque t tend vers l'infini. La convergence est même exponentielle : toute solution est une combinaison linéaire de $\exp(-t/\tau_1)$ et $\exp(-t/\tau_2)$: $-1/\tau_1$ et $-1/\tau_2$ sont appelés les *pôles* du système bouclé.

Robustesse et théorie des perturbations Ce bouclage a été réalisé sur une approximation au premier ordre du système. Se pose alors la question du comportement du système non linéaire (1.2) avec le bouclage linéaire $u = \tilde{u} = -(Jk_2 + mgl)(\theta - \pi) - Jk_1\omega$. Il est immédiat de voir que le linéarisé tangent autour de l'équilibre $(\pi, 0)$ du système non linéaire bouclé est identique au linéaire tangent bouclé. Un résultat classique sur la stabilité structurelle des points d'équilibres hyperboliques (les valeurs propres de la matrice jacobienne sont toutes à partie réelle non nulle) d'un système dynamique garantit alors la stabilité asymptotique locale du système non linéaire bouclé : cela veut dire simplement que toute trajectoire du système (1.2) avec la commande (1.4) qui démarre assez près de $(\pi, 0)$ tends vers $(\pi, 0)$ lorsque t tends vers l'infini, la convergence étant exponentielle, comme pour le linéaire tangent.

Ètant donné que τ_1 et τ_2 sont deux constantes de temps arbitraires directement liées au taux de convergence, on aura tendance à les choisir aussi proches de zéro que possible. Cependant, il convient de ne pas les choisir trop proches de zéro : en effet, le modèle sur lequel la commande est synthétisée, n'est valable que pour une certaine gamme d'échelles de temps. Le modèle n'est pas valable pour des fréquences grandes. En effet, la dynamique du moteur est négligée : pour un moteur à courant continu, la commande physique est en fait la tension U_m appliquée au moteur. Elle est reliée au couple u par une équation différentielle du type :

$$L\dot{I}_m + RI_m = U_m, \quad u = K_c I_m \quad (1.5)$$

(L est l'inductance, R la résistance, K_c la constante de couple du moteur). En pratique la dynamique du moteur est souvent négligeable par rapport à la dynamique inertielle de la barre. Ainsi la constante de temps du moteur $\tau_m = L/R$ est bien inférieure au temps caractéristique du bras $\tau_b = \sqrt{J/(mgl)}$. Aussi, a-t-on l'approximation suivante dite quasi-statique :

$$RI_m = U_m, \quad u = K_c I_m = (K_c/R)U_m$$

qui relie directement le couple u à la tension U_m . Il convient de choisir τ_1 et τ_2 du même ordre de grandeur que τ_b , et donc très supérieur à τ_m , la constante de temps de la dynamique négligée.

D'autres phénomènes peuvent apparaître vers les hautes fréquences, comme la flexibilité du bras. Nous verrons dans le chapitre 3 un résultat asymptotique (théorie de perturbations, systèmes lents/rapides) assurant qu'avec des gains k_1 et k_2 pas trop grands ($\tau_1, \tau_2 \gg \tau_m$), le système non linéaire avec la dynamique du moteur (1.5) et la commande en tension

$$U_m = -(K_c/R) ((Jk_1 - mgl)(\theta - \pi) + Jk_2\omega)$$

est localement asymptotiquement stable autour de $(\pi, 0)$, pour toute valeur strictement positive et assez petite de L .

Observabilité La loi de feedback précédente suppose que l'on mesure à chaque instant l'état complet du système θ et ω . Si nous connaissons uniquement la loi $t \mapsto$

$\theta(t)$, nous obtenons $\omega(t)$ par simple dérivation: on dit que l'état du système est *observable* à partir de la sortie θ . D'une façon plus générale, l'état x d'un système sera dit observable à partir de la *sortie* y , si l'on peut reconstruire x à partir d'un nombre fini de dérivées de y .

Pour le bras, nous pouvons dériver numériquement le signal de mesure pour en déduire ω . Cette solution fonctionne correctement si la mesure de θ n'est pas trop bruitée. Sinon, l'opération de dérivation est à éviter. Pour cela, nous pouvons utiliser la dynamique du système pour construire un observateur asymptotique, c'est à dire, reconstruire la vitesse ω du système en intégrant (on peut dire aussi en filtrant) la position θ via une équation différentielle bien choisie. On obtient alors un filtre causal qui élimine les hautes fréquences à la fois sur la mesure et ses dérivées sans introduire de retard sur la partie basse fréquence des signaux.

Plaçons nous autour du point $(\pi, 0)$ et considérons le linéaire tangent (1.3) avec comme quantités connues la commande \tilde{u} et l'angle $\tilde{\theta}$. L'objectif est de reconstruire à terme $\tilde{\omega}$ sans utiliser l'opération de dérivation très sensible au bruit. En revanche nous pouvons utiliser l'intégration et les changements de variables.

Nous allons montrer comment construire un *observateur asymptotique* (d'ordre réduit). Soit λ un paramètre que nous ajusterons plus tard. Considérons la variable $\xi = \tilde{\omega} + \lambda\tilde{\theta}$. Si l'on sait reconstruire ξ , on obtient $\tilde{\omega}$ avec $\tilde{\omega} = \xi - \lambda\tilde{\theta}(t)$. Or, grâce à (1.3), ξ vérifie

$$\dot{\xi} = \tilde{u}/J - (mgl/J)\tilde{\theta} + \lambda\tilde{\omega} = \tilde{u}/J - (mgl/J + \lambda^2)\tilde{\theta} + \lambda\xi.$$

Ainsi, en recopiant cette équation et en remplaçant la variable ξ non mesurée par $\hat{\xi}$, on obtient une équation différentielle du premier ordre dépendant des quantités connues \tilde{u} et $\tilde{\theta}$ (un filtre d'ordre 1 d'une combinaison linéaire de la mesure $\tilde{\theta}$ et de la commande \tilde{u}):

$$\dot{\hat{\xi}} = \tilde{u}(t)/J - (mgl/J + \lambda^2)\tilde{\theta}(t) + \lambda\hat{\xi} \quad (1.6)$$

Par soustraction avec l'équation différentielle satisfaite par le vrai ξ , les termes sources en \tilde{u} et $\tilde{\theta}$ disparaissent. On obtient alors une dynamique de l'erreur $\hat{\xi} - \xi$ autonome

$$\frac{d}{dt}(\hat{\xi} - \xi) = \lambda(\hat{\xi} - \xi)$$

qui converge vers zéro, quelque soit la condition initiale sur $\hat{\xi}$, dès que le paramètre $\lambda = -1/\tau_f$ est choisi négatif (τ_f est la constante de temps de l'observateur (1.6)). Là encore, le gain λ de l'observateur (1.6) doit être choisi en fonction des niveaux de bruit sur θ et surtout des échelles de temps naturelles du système (prendre, par exemple, τ_f du même ordre de grandeur que $\tau_b = \sqrt{J/(mgl)}$).

Observateur-contrôleur, principe de séparation Ainsi, en combinant l'observateur (1.6) et la commande (1.4) où $\tilde{\omega}$ est remplacé par $\hat{\xi} - \lambda\tilde{\theta}$, nous obtenons un bouclage qui stabilise localement la position inverse du pendule. Ce bouclage est un *bouclage dynamique* sur la sortie $y = \tilde{\theta}$: le terme dynamique vient du fait que la

commande u est une fonction de θ et de $\hat{\xi}$ qui est en fait une sorte “d’intégrale” de u et θ :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\xi}} &= \tilde{u}/J - (mgl/J + \lambda^2)\tilde{\theta} + \lambda\hat{\xi} \\ \tilde{u} &= -(Jk_1 + mgl)\tilde{\theta} - Jk_2(\hat{\xi} - \lambda\tilde{\theta}).\end{aligned}\tag{1.7}$$

Il est alors très simple d’utiliser ces deux équations pour obtenir un algorithme temps-réel de stabilisation. Reprenons le schéma de la figure 1.2 et intéressons nous à la boucle de rétro-action. Notons T_e la période d’échantillonnage supposée petite, \tilde{u}_n la valeur de la commande à $t = nT_e$, $\hat{\xi}_n$ la valeur de l’état interne du contrôleur et $\tilde{\theta}_n$ la mesure. Alors \tilde{u}_{n+1} et $\hat{\xi}_{n+1}$ sont obtenus par récurrence en remplaçant $\hat{\xi}$ dans (1.7) par $(\hat{\xi}_{n+1} - \hat{\xi}_n)/T_e$:

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_{n+1} &= \hat{\xi}_n + T_e(\tilde{u}_n/J - (mgl/J + \lambda^2)\tilde{\theta}_n + \lambda\hat{\xi}_n) \\ \tilde{u}_{n+1} &= -(Jk_1 + mgl)\tilde{\theta}_n - Jk_2(\hat{\xi}_n - \lambda\tilde{\theta}_n)\end{aligned}$$

Ainsi $\hat{\xi}_{n+1}$ est gardé en mémoire pour la commande suivante et \tilde{u}_{n+1} est appliquée au système.

Nous n’abordons pas ici des problèmes liés à l’échantillonnage. Nous resterons au niveau continu, sachant que la mise en oeuvre est possible dès que la période T_e est très petite devant les échelles de temps du système et que les micro-processeurs sont suffisamment rapides pour calculer la nouvelle commande en un temps inférieur à T_e .

1.2 Le plan

Cet exemple permet de se faire une idée des techniques présentées dans cette première partie du cours. Nous allons maintenant reprendre de façon plus systématique et rigoureuse les divers points évoqués ci-dessus. Le chapitre 2 est constitué de 4 études de cas. Chaque cas reprend et applique les méthodes et notions fondamentales présentées dans leur généralité au niveau les chapitres 3 et 4.

Nous abordons dans le chapitre 3 les systèmes dynamiques explicites et, sans faire toutes les démonstrations, quelques résultats sur les équations différentielles ordinaires (problème de Cauchy, perturbation régulière, singulière, systèmes lents/rapides, stabilité au sens de Lyapounov) : ces résultats sont essentiels pour bien comprendre, entre autres, les liens entre le linéaire tangent et le système non linéaire associé, les questions de robustesse par rapport aux erreurs de modèle et aux dynamiques négligées.

Dans le chapitre 4, nous abordons la commandabilité et l’observabilité des systèmes explicites $\dot{x} = f(x, u)$. Après de courtes définitions, nous étudions les systèmes linéaires stationnaires. Nous mettons l’accent sur la forme canonique de Brunovsky, la planification de trajectoires, et la stabilisation par placement de pôle. Nous aborderons ensuite l’observabilité, qui peut être vue, pour les systèmes linéaires à coefficients constants, comme le problème dual de la commandabilité, la construction de bouclages stabilisants conduisant à celle d’observateurs asymptotiques. Enfin, nous terminons ce chapitre par le principe de séparation et la synthèse d’un bouclage dynamique de sortie (on dit aussi observateur-contrôleur ou commande modale).

La présentation s'appuie souvent sur des exemples. En général, ces exemples sont représentatifs de questions préoccupant les ingénieurs. Des exercices jalonnent également l'exposé. Ils sont souvent là pour suggérer au lecteur des extensions à des situations plus générales (non linéaire, dimension infinie, systèmes discrets, ...). Les parties écrites en petits caractères peuvent être ignorées dans une première lecture : il s'agit soit de compléments, soit de prolongements.

Dans le chapitre 5 nous étudions les systèmes semi-implicites. Ce chapitre peut être sauté dans une première lecture. En général, la modélisation d'un système dynamique complexe ne conduit pas directement à des équations différentielles explicites mais à un système mixte d'équations différentielles et d'équations algébriques. Des manipulations formelles sont alors nécessaires pour mettre le système sous forme explicite. Ces manipulations utilisent des dérivations, *l'index* étant alors le nombre minimal de dérivations nécessaires. Il s'avère que les techniques utilisées ici sont très proches de celles employées pour *l'inversion*, le *découplage* et la *linéarisation entrée/sortie* : tout repose sur un algorithme d'élimination différentielle dit *algorithme de structure*. La rédaction de ce chapitre s'appuie fortement sur deux exemples clés : (5.3) page 129 et (5.5) page 138. Leur compréhension implique pratiquement celle du cas général qui n'est guère plus compliqué.

1.3 Problème

On reprend ici, sous la forme d'un problème et pour l'étendre au non linéaire, l'observateur-contrôleur que nous avons construit avec le linéaire tangent du système (1.2). L'objectif de commande est d'aller du point d'équilibre $\theta = 0$ au point d'équilibre $\theta = \pi$ pendant le temps $T > 0$ en ne mesurant que θ . Cette extension ne nécessite que très peu de calculs et reste à un niveau de complexité très élémentaire.

1. Donner une trajectoire du système $[0, t] \ni t \mapsto (\theta_r(t), \omega_r(t), u_r(t))$ qui assure cette transition.
2. Calculer le bouclage d'état qui stabilise la dynamique de l'erreur à la trajectoire $e = \theta - \theta_r(t)$ de la façon suivante :

$$\ddot{e} + \sigma_1 \dot{e} + \sigma_2 e = 0$$

avec $\sigma_1, \sigma_2 > 0$.

3. On suppose que l'on ne mesure que θ . Montrer que l'observateur non linéaire

$$\dot{\hat{\xi}} = \lambda \hat{\xi} - \lambda^2 \theta(t) + u(t)/J - (mgl/J) \sin \theta(t)$$

permet de reconstruire asymptotiquement ω par $\hat{\omega} = \hat{\xi} - \lambda \theta$, dès que $\lambda < 0$.

4. Montrer la convergence de l'observateur-contrôleur où l'on a remplacé la mesure de vitesse ω dans la question 2 par l'estimée $\hat{\omega}$ de la question 3.
5. Faire des simulations de cette manoeuvre en $T = 5$ s en prenant comme paramètres $m = 1,0$ kg, $l = 0,2$ m, $J = 0,1$ kg m² et $g = 9,81$ m/s². Tester la

robustesse de cette commande dynamique de sortie par rapport à des dynamiques négligées (rajouter une dynamique pour le moteur) et par rapport à des erreurs dans le modèle (1.2) (rajouter un petit frottement au niveau de l'axe du bras).