# Groupes et symétries

## Groupes finis, groupes et algèbres de Lie, représentations

*Sophus Lie (1842-1899), vers 1865, à la fin de ses études à l'Université de Christiana (Oslo), environ sept ans avant ses premiers travaux sur les groupes continus, appelés plus tard « groupes de Lie ».*

*(Photo Frederik Klem/Joronn Vogt, avec l'aimable autorisation de Joronn Vogt et Arild Stubhaug)*

# Groupes et symétries

## Groupes finis, groupes et algèbres de Lie, représentations

Yvette Kosmann-Schwarzbach

DEUXIÈME ÉDITION

LES ÉDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

91128 Palaiseau Cedex

# Table des matières

# Introduction

Les symétries des figures géométriques, des cristaux et de tous les autres objets de la physique macroscopique font l'objet depuis des siècles d'observations et d'études. En termes modernes, les symétries d'un objet donné forment un groupe. La notion abstraite de groupe n'a émergé que lentement vers le milieu du dix-neuvième siècle. Mais depuis, quel essor ! Avec Sophus Lie (1842-1899), Georg Frobenius (1849-1917), Wilhelm Killing (1847-1923), Élie Cartan (1869-1951), Issai Schur (1875-1941), Hermann Weyl (1885-1955) et beaucoup, beaucoup d'autres, la théorie des groupes a pris une extension énorme, et ses applications à la mécanique quantique et à la théorie des particules élémentaires se sont développées tout au long du vingtième siècle. Si cette histoire vous intéresse, il faut lire l'introduction au livre de Shlomo Sternberg (1994) cité dans la bibliographie, et consulter les trois livres récents de Charles Curtis[1], Thomas Hawkins[2] et Armand Borel[3], ou encore les études et comptes rendus de tables rondes entre physiciens et mathématiciens dans le volume *Symmetries in Physics*[4].

Dans une lettre de 1877 au mathématicien Adolph Mayer, Sophus Lie écrit qu'il a « créé la théorie des groupes » en janvier 1873. Il s'agit bien sûr des groupes qu'il appelait « groupes continus » et qui sont appelés « groupes de Lie » depuis longtemps[5]. Lie cherchait à étendre l'usage des groupes du domaine des équations algébriques, où Évariste Galois les avait introduits, à celui des équations différentielles. Inspiré par les travaux de Camille Jordan et par sa collaboration avec Felix Klein, Lie publia l'article intitulé *Über Gruppen von Transformationen* en 1874. Dès 1871, la notion de générateur infinitésimal d'un groupe à un paramètre de transformations était apparue dans son œuvre[6] ; c'est l'ensemble des générateurs infinitésimaux des sous-groupes à un paramètre d'un groupe continu qui forme ce que l'on appelle aujourd'hui une

[1] *Pioneers of Representation Theory*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[2] *Emergence of the Theory of Lie Groups*, Springer, New York, 2000.

[3] *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[4] *Symmetries in Physics (1600-1980)*, M. G. Doncel, A. Armin, L. Michel and A. Pais, eds., Seminari d'Història de les Ciències, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, 1987.

[5] Le terme apparaît en français en 1893 dans la thèse de son élève Arthur Tresse.

[6] Ce point de vue fut essentiel dans l'article d'Emmy Noether de 1918 établissant la relation entre symétries d'un problème variationnel et lois de conservation. Quelque dix ans plus tard, Noether publiait un très important article plaçant la théorie des représentations des groupes finis et des algèbres dans le cadre général de la théorie des anneaux non commutatifs.

algèbre de Lie[7]. Killing établit entre 1888 et 1890 une classification des algèbres de Lie simples sur le corps des complexes, qui fut corrigée et complétée par Cartan dans sa thèse en 1894. Cartan classifiera les algèbres de Lie simples sur le corps des réels, problème plus difficile, en 1914.

Cependant Frobenius, répondant à une question posée par Dirichlet, avait inventé en 1896 la théorie des caractères des groupes finis, et Schur développait la théorie des représentations des groupes finis et infinis. Ils publièrent conjointement *Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen* en 1906. Et la théorie des caractères fut utilisée par William Burnside dans la deuxième édition de son traité *Theory of Groups of Finite Order* parue en 1911.

Ce furent Eugene Wigner et Weyl qui montrèrent le rôle prééminent de la théorie des groupes, et de leurs représentations en particulier, dans la nouvelle mécanique quantique que développaient Heisenberg et Dirac. Wigner le premier introduisit la théorie des groupes dans deux articles du *Zeitschrift für Physik* en 1927. Son livre *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*, qui parut en 1931, fut suivi en 1939 d'un très important article dans les *Annals of Mathematics* où il déterminait les représentations du groupe de Poincaré. Weyl publia d'abord un article au *Zeitschrift für Physik* en 1928 et la même année le livre *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. En 1932 parut le livre de Bartel van der Waerden, *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*. Ces trois livres marquent le début de l'interpénétration de la théorie des groupes et de la physique théorique ; cette coexistence dure toujours. Voici ce que déclarait Wigner en 1983 :

> En ce qui concerne la théorie des représentations, je comprenais qu'il devait exister une telle théorie mais je n'en avais pas connaissance. Dr. von Neumann, à qui je soumis le problème (et à qui je présentai les représentations des groupes de permutations sur trois et quatre éléments car je pouvais établir celles-ci par des calculs explicites) me donna un tiré à part de l'article de Frobenius et Schur [de 1906]. Et ce fut merveilleux ![8]

Abraham Pais, ayant interrogé Wigner vers la fin des années cinquante, raconte ce point d'histoire un peu différemment : lorsque Wigner avait posé sa question à von Neumann, celui-ci s'était dirigé vers un coin de la pièce, s'était tourné vers le mur et s'était mis à marmonner. Au bout d'un moment il s'était retourné et avait dit : « Vous avez besoin de la théorie des caractères des groupes », puis était aussitôt allé voir Schur et avait obtenu des tirés à part de deux de ses articles [1905 et 1908] qu'il avait donnés à Wigner[9]. La scène se passait en 1926 à Berlin.

On peut considérer la théorie des représentations de groupes comme une vaste généralisation de l'analyse de Fourier. Son développement est continu et elle a, depuis

[7] Ce nom fut proposé beaucoup plus tard, au cours de l'année 1933-1934, par Weyl dans ses conférences à l'Institute for Advanced Study de Princeton.

[8] Traduit de Doncel *et al.*, eds., page 633.

[9] « Johnny walked to a corner of the room, faced the wall, and started mumbling to himself. After a while he turned around and said : 'You need the theory of group characters.'[...] Whereupon von Neumann went to Issai Schur, obtained reprints of two of his papers and gave them to Wigner » (A. Pais, *The Genius of Science*, Oxford University Press, Oxford, 2000, p. 335).

le milieu du vingtième siècle, des applications innombrables en géométrie différentielle, en théorie ergodique, en théorie des probabilités, en théorie des nombres, dans la théorie des formes automorphes, dans celle des systèmes dynamiques ainsi qu'en physique, chimie, biologie moléculaire et traitement du signal. À l'heure actuelle, des branches entières des mathématiques et de la physique en dépendent.

***

L'objet de ce cours est d'introduire et d'illustrer les notions les plus fondamentales concernant les groupes finis et, plus généralement, les groupes topologiques compacts, d'introduire la notion d'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, tout au moins dans le cas des groupes de Lie linéaires (sous-groupes fermés des groupes linéaires), d'étudier en détails les groupes de Lie SO(3) et SU(2) et, ensuite, le groupe SU(3) avec application à la théorie des quarks. C'est la notion de représentation d'un groupe, action sur un espace vectoriel par transformations linéaires, qui joue le rôle fondamental dans cette étude.

Au chapitre 1, on rappelle quelques généralités sur les groupes et les actions de groupes, et l'on donne des exemples de groupes finis et infinis.

Pour étudier les représentations des groupes finis, on exploite les propriétés des caractères de ces représentations, c'est-à-dire des traces des transformations linéaires qui définissent la représentation considérée. C'est ce qui est fait au chapitre 2. On définit les notions de représentation irréductible et d'opérateur d'entrelacement, et l'on énonce le lemme de Schur qui, fort simple, servira à démontrer d'importantes conséquences telles que l'orthogonalité des caractères des représentations irréductibles. On étudie la représentation régulière. Un bref paragraphe introduit les représentations induites.

Le chapitre 3 étend aux groupes compacts certains résultats démontrés pour les groupes finis, grâce à l'existence d'une mesure invariante sur le groupe, la mesure de Haar. Dans ce chapitre, d'assez nombreux résultats de nature topologique ou analytique sont admis sans démonstration. Un tableau résume les propriétés des représentations des groupes compacts.

Le début du chapitre 4 comporte une introduction à la notion générale d'algèbre de Lie et des rappels sur l'application exponentielle des matrices. On aborde ensuite l'étude de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie linéaire, c'est-à-dire l'ensemble des générateurs infinitésimaux des sous-groupes à un paramètre, muni du commutateur des matrices, et l'on montre le lien entre les représentations d'un groupe de Lie et celles de son algèbre de Lie.

Au chapitre 5, on étudie les groupes de Lie SO(3) et SU(2), montrant la propriété fondamentale : SU(2) est le revêtement universel du groupe des rotations.

C'est au chapitre 6 que l'on détermine toutes les représentations irréductibles, d'abord de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, puis de SU(2) et de SO(3). Ces résultats sont essentiels tant pour la théorie générale des représentations de groupes et d'algèbres de Lie que pour la mécanique quantique.

Le chapitre 7 comporte l'étude des harmoniques sphériques qui apparaissent dans la théorie des représentations du groupe des rotations de l'espace euclidien à trois dimensions. C'est une toute première approche de la théorie des fonctions spéciales.

Au chapitre 8, on commence l'étude des représentations irréductibles de SU(3) sur des exemples, et l'on montre que la théorie des quarks apparaît comme conséquence des propriétés mathématiques de ce groupe. C'est dans ce chapitre que l'on introduit les notions de racines et de poids qui sont, plus généralement, à la base de la théorie des représentations des algèbres de Lie dites semi-simples.

***

Des démonstrations complètes des résultats énoncés sont données, sauf dans les chapitres 3 et 8. Le symbole $\square$ marque la fin d'une démonstration. À la fin de chaque chapitre, quelques lignes indiquent à quels ouvrages de la bibliographie on pourra se reporter pour « en savoir plus », et des références supplémentaires sont indiquées. Une série d'exercices de difficulté variable termine chaque chapitre. Le cours est suivi d'une série de problèmes avec leurs corrigés détaillés et d'une bibliographie.

***

Ce livre est une introduction qui, nous l'espérons, servira à faciliter la lecture de traités plus avancés et incitera le lecteur à approfondir et utiliser les notions esquissées ici. La bibliographie qui termine l'ouvrage est volontairement limitée et composée seulement de cours et de quelques livres sur divers aspects de la théorie des groupes et de leurs représentations, choisis dans la très vaste littérature disponible sur ces sujets. Parmi ces ouvrages, on a distingué ceux qui vont, parfois malgré leur titre, « au-delà d'une introduction ». Nous espérons que les lecteurs et lectrices y trouveront instruction et plaisir.

Paris, Septembre 2005

Cette nouvelle édition a été révisée. Elle a bénéficié des remarques en automne 2005 des polytechniciens de la majeure 1 de mathématiques, que je remercie.

Paris, Juin 2006

## *Remerciements*

Je remercie chaleureusement Alain Guichardet pour ses nombreuses remarques sur les notes polycopiées qui ont précédé ce livre, qu'il a bien voulu lire au fur et à mesure de leur écriture, et relire encore lors de leur révision, ainsi qu'André Rougé pour ses précisions sur l'histoire de « la voie octuple » et ses critiques judicieuses. Je remercie également mes collègues, Nicole Berline et Pascale Harinck, ainsi que Jean-Paul Blaizot et Jean-Claude Tolédano, pour leurs encouragements et leurs commentaires utiles. J'ai profité des remarques de plusieurs promotions de polytechniciens et polytechniciennes de la « majeure 1 de mathématiques », et je les en remercie vivement. Ma gratitude va aussi à Shlomo Sternberg, dont le livre sur la théorie des groupes et la physique m'a beaucoup inspirée, à Adrien Ocneanu, professeur à Pennsylvania State University, qui m'a communiqué des diagrammes illustrant la théorie des racines des algèbres de Lie, dont l'un paraît sur la couverture, ainsi qu'aux institutions et aux collègues qui m'ont aimablement autorisée à reproduire les portraits de mathématiciens et de physiciens qui illustrent ce livre. Enfin, je suis très reconnaissante à Claudine Harmide qui a transformé en fichier LaTeX une première version de ce cours, et à toute l'équipe du Centre Poly-Média de l'École Polytechnique qui a réalisé le présent ouvrage.

*Wilhelm Killing (1847-1923) vers 1890, peu après ses travaux novateurs sur les propriétés des isométries infinitésimales des « formes d'espace », espaces généralisant l'espace euclidien. Cette étude le conduisit à la notion de ce qui fut appelé beaucoup plus tard « algèbre de Lie ». Il établit ensuite la classification des algèbres de Lie simples.*

*(Collection de portraits, Universitäts- und Landesbibliothek Münster)*

# Chapitre 1

# Généralités sur les groupes

## 1 Rappel de quelques définitions

Un *groupe* est un ensemble muni d'une loi de composition associative, possédant un élément neutre et telle que chaque élément possède un inverse. L'élément neutre, encore appelé élément unité, est diversement noté $e$, 1 ou souvent I s'il s'agit d'un groupe de matrices.

Un groupe est dit *commutatif* ou *abélien* si la loi de composition est commutative. Dans ce cas la composition est en général notée + et l'élément neutre est en général noté 0.

On notera $|X|$ le cardinal d'un ensemble fini, $X$. L'*ordre d'un groupe fini*, $G$, est le nombre, $|G|$, d'éléments du groupe. Un élément $g \in G$ est dit d'ordre $n$ ($n \geqslant 2$) si

$$g^n = e \quad \text{et} \quad g^m \neq e \text{ pour } 1 \leqslant m \leqslant n-1 \ .$$

*Exemple.* Une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ est un élément d'ordre $n$ du groupe des rotations du plan.

Un *sous-groupe* $H$ de $G$ est un sous-ensemble satisfaisant les conditions : $e \in H$ ; $g \in H$ implique $g^{-1} \in H$ ; $g \in H$ et $g' \in H$ implique $gg' \in H$.

Le *sous-groupe engendré* par un sous-ensemble d'un groupe $G$ est le plus petit sous-groupe de $G$ contenant ce sous-ensemble.

Un groupe est dit *cyclique* s'il est engendré par un seul élément. Un tel groupe est donc abélien.

Soit $H$ un sous-groupe de $G$. Les *classes à gauche* suivant $H$ sont les $gH$, $g \in G$. L'ensemble des classes à gauche suivant $H$ est l'ensemble quotient noté $G/H$. Les *classes à droite* suivant $H$, sont les $Hg$, $g \in G$. L'ensemble des classes à droite suivant $H$ est l'ensemble quotient noté $H\backslash G$. Le groupe $G$ est réunion des classes à gauche (resp., à droite) suivant $H$ qui ont chacune $|H|$ éléments. On en déduit que l'ordre de $H$ divise l'ordre de $G$ et que le nombre de classes à gauche suivant $H$ est égal au nombre de classes à droite suivant $H$, et l'on peut énoncer le résultat suivant.

**Théorème 1.1 (Théorème de Lagrange).** *Soit $G$ un groupe fini et $H$ un sous-groupe de $G$. Alors, $|H|$ divise $|G|$ et*

$$|G|/|H| = |H\backslash G| = |G/H| \ .$$

L'entier $|G|/|H|$ s'appelle l'*indice* de $H$ dans $G$.

Un *morphisme* de groupes $\varphi : G_1 \to G_2$ est une application d'un groupe $G_1$ dans un groupe $G_2$ telle que pour tous $g, g' \in G_1, \varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g')$, ce qui implique $\varphi(e_1) = e_2$, où $e_i$ est l'élément neutre de $G_i$ $(i = 1, 2)$, et $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$. Remarquons que la plupart des auteurs utilisent le terme *homomorphisme*.

Un *isomorphisme de groupes* est une bijection qui est de plus un morphisme. Son inverse est alors aussi un morphisme.

Un *automorphisme de groupe* est un isomorphisme d'un groupe sur lui-même. En particulier, pour chaque $g \in G$ on appelle *automorphisme intérieur* ou *conjugaison* défini(e) par $g$ l'isomorphisme, $\mathcal{C}_g$, de $G$,

$$\mathcal{C}_g : h \mapsto ghg^{-1} \ .$$

Un sous-groupe $H$ de $G$ est dit *distingué* ou *normal* ou *invariant* s'il est stable par conjugaison par tous les éléments de $G$. Le noyau d'un morphisme est un sous-groupe distingué.

Le *centre* de $G$ est, par définition, l'ensemble $\{h \in G \mid \forall\, g \in G, hg = gh\}$. Le centre de $G$ est un sous-groupe distingué de $G$.

Si $G_1$ et $G_2$ sont des groupes, leur *produit direct* est le produit $G_1 \times G_2$ avec la loi de groupe $(g_1, g_2).(g_1', g_2') = (g_1 g_1', g_2 g_2')$.

La notion de *produit semi-direct* de groupes est introduite dans l'exercice 1.4.

# 2 Exemples de groupes finis

## 2.1 Groupe cyclique d'ordre $n$

Les groupes suivants sont isomorphes et sont appelés *groupe cyclique* d'ordre $n$ :

• $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, en particulier $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, noté additivement $\{0, 1\}$ ou multiplicativement $\{1, -1\}$.

• Le groupe des rotations du plan de centre O, d'angles $\frac{2k\pi}{n}, 0 \leqslant k \leqslant n-1$, pour la composition.

• Le groupe des nombres complexes, $\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$, pour la multiplication.

• Le sous-groupe $\{1, g, g^2, \cdots, g^{n-1}\}$ si $g$ est un élément d'ordre $n$ dans un groupe $G$.

## 2.2 Groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$

Le groupe des permutations d'un ensemble de cardinal $n$ est noté $\mathfrak{S}_n$ et appelé *groupe symétrique sur $n$ éléments*. L'ordre de $\mathfrak{S}_n$ est $n!$.

Tout élément de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit comme un produit de transpositions. À tout élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on associe le nombre égal à 1 ou $-1$ suivant la parité du nombre de transpositions (cette parité est indépendante de la décomposition). Ce nombre est noté $(-1)^\sigma$ et appelé *signature* de $\sigma$. L'application $\sigma \in \mathfrak{S}_n \mapsto (-1)^\sigma \in \mathbb{Z}_2$ est un morphisme de groupes.

Le *groupe alterné* $\mathfrak{A}_n$ est le noyau du morphisme de signature. Si $n \geqslant 2$, c'est un sous-groupe distingué d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$.

### 2.3 Groupe diédral

Le *groupe diédral*, $\mathcal{D}_n$, est le groupe des rotations et symétries du plan conservant un polygone régulier à $n$ sommets ($n \geqslant 3$). C'est un sous-groupe d'ordre $2n$ de $\mathfrak{S}_n$. (Certains auteurs emploient la notation $\mathcal{D}_{2n}$ pour ce groupe.)

### 2.4 Autres exemples

On désigne par O(3) le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$, et par SO(3) le groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$, qui est le sous-groupe distingué de O(3), noyau de l'application *déterminant*. Pour chaque polyèdre régulier (tétraèdre, cube, octaèdre, icosaèdre (fullerènes), dodécaèdre), on définit les groupes de symétries correspondants, c'est-à-dire le sous-groupe de SO(3) et le sous-groupe de O(3) laissant le solide globalement invariant. Ce sont des groupes finis, appelés *groupes cristallographiques*. Le premier est d'indice 2 dans le second.

| | SO(3) | O(3) |
|---|---|---|
| tétraèdre | $\mathfrak{A}_4$ ordre 12 | $\mathfrak{S}_4$ ordre 24 |
| cube | $\mathfrak{S}_4$ ordre 24 | $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}_2$ ordre 48 |
| octaèdre | $\mathfrak{S}_4$ ordre 24 | $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}_2$ ordre 48 |
| icosaèdre | $\mathfrak{A}_5$ ordre 60 | $\mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}_2$ ordre 120 |
| dodécaèdre | $\mathfrak{A}_5$ ordre 60 | $\mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}_2$ ordre 120 |

La classification de tous les sous-groupes finis de SO(3) et de O(3), qui est connue, est d'une grande importance en physique, en particulier en cristallographie.

## 3 Exemples de groupes infinis

Parmi les groupes ayant une infinité d'éléments, il y a des *groupes discrets*, par exemple, le groupe abélien $\mathbb{Z}$. Mais nous nous intéresserons surtout à des groupes dits « groupes continus », dont voici des exemples.

Désignons par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On désigne par $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ le groupe des isomorphismes linéaires de $\mathbb{K}^n$, appelé *groupe linéaire* en dimension $n$. C'est le groupe des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, inversibles. On considère divers sous-groupes de celui-ci. On désigne par ${}^tA$ la transposée d'une matrice $A$. Une barre désigne la conjugaison complexe.

• Groupe spécial linéaire,

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \mid \det A = 1\} \ .$$

• Groupe orthogonal,

$$\mathrm{O}(n,\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \mid A\ {}^tA = I\} \ .$$

On appelle plus particulièrement *groupe orthogonal*, le groupe orthogonal réel, et on le note simplement $\mathrm{O}(n)$.

• Groupe spécial orthogonal,

$$\mathrm{SO}(n,\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{O}(n,\mathbb{K}) \mid \det A = 1\} \ .$$

On appelle plus particulièrement *groupe spécial orthogonal*, le groupe spécial orthogonal réel, et on le note simplement $\mathrm{SO}(n)$.

Plus généralement, si $p+q = n$, on désigne par $J_{pq}$ la matrice diagonale comportant sur la diagonale $p$ fois 1 suivi de $q$ fois $-1$, et l'on pose

$$\mathrm{O}(p,q) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid A\ J_{pq}\ {}^tA = J_{pq}\}$$

et

$$\mathrm{SO}(p,q) = \{A \in \mathrm{O}(p,q) \mid \det A = 1\} \ .$$

En particulier $\mathrm{O}(3,1)$, qui est le groupe des isométries de l'espace de Minkowski, est appelé le *groupe de Lorentz*.

• Groupe unitaire,

$$\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid A\ {}^t\overline{A} = I\} \ .$$

La matrice ${}^t\overline{A}$ est l'adjointe de la matrice $A$, encore notée $A^*$.

• Groupe spécial unitaire,

$$\mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{U}(n) \mid \det A = 1\} \ .$$

**Définition 3.1.** *On appelle* groupe topologique *un groupe $G$ qui est un espace topologique séparé tel que la multiplication $(g,g') \mapsto gg'$ est une application continue de $G \times G$ dans $G$ et le passage à l'inverse $g \mapsto g^{-1}$ est une application continue de $G$ dans $G$.*

Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ muni de sa topologie usuelle (comme ouvert de l'espace $\mathbb{K}^{n^2}$) est un groupe topologique localement compact, et chacun des groupes ci-dessus est un sous-groupe fermé d'un groupe linéaire. Les groupes $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{U}(n)$ ainsi que $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$ sont compacts.

Nous donnons ci-dessous la définition des groupes de Lie réels et complexes, qui fait intervenir la notion de *variété*, version abstraite de la notion de sous-variété d'un espace cartésien.

Un *groupe de Lie (réel)* de dimension (réelle) $N$ est un groupe qui est une variété (réelle) de classe $C^\infty$ de dimension $N$ telle que la multiplication et le passage à l'inverse sont des applications différentiables de classe $C^\infty$.

Un *groupe de Lie complexe* de dimension complexe $N$ est un groupe qui est une variété analytique complexe de dimension complexe $N$ telle que la multiplication et le passage à l'inverse sont des applications analytiques.

On montre que les sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ sont des groupes de Lie réels appelés *groupes de Lie linéaires.* Ce sont les seuls dont nous parlerons et nous les appellerons simplement *groupes de Lie.* Tous les exemples énumérés ci-dessus sont donc des exemples de groupes de Lie. Il y a d'autres exemples de groupes de Lie : les groupes symplectiques, $\mathrm{Sp}(n)$ et $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$, les groupes spinoriels, etc. Dans ce cours, nous ferons une étude détaillée des groupes de Lie $\mathrm{SO}(3)$ et $\mathrm{SU}(2)$.

*Remarque.* Tout groupe de Lie complexe de dimension complexe $N$ est un groupe de Lie réel de dimension réelle $2N$. Certains sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ sont aussi des groupes de Lie complexes. C'est le cas pour $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$ et $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$, mais pas pour $\mathrm{U}(n)$ ni $\mathrm{SU}(n)$ qui sont seulement des groupes de Lie réels.

# 4 Actions de groupes, classes de conjugaison

**Définition 4.1.** *Soit $G$ un groupe et $M$ un ensemble. Une* action *de $G$ sur $M$ est une application $\alpha : G \times M \to M$, notée $(g, m) \mapsto g \cdot m$, telle que pour tout $m \in M, e \cdot m = m$ et pour tous $g$ et $g' \in G$, $g \cdot (g' \cdot m) = gg' \cdot m$. On dit alors que $G$ agit sur $M$.*

En d'autres termes, $\alpha$ définit un morphisme de groupes de $G$ dans le groupe des bijections de $M$ sur lui-même.

Si $G$ est un groupe topologique et si $M$ est un espace topologique, on supposera l'action $\alpha$ de $G$ sur $M$ continue. (Si $G$ est un groupe de Lie et si $M$ est une variété de classe $C^\infty$, on supposera de même l'application $\alpha$ différentiable de classe $C^\infty$.)

L'*orbite* de $m \in M$ sous l'action de $G$ est l'ensemble $\{g \cdot m \mid g \in G\}$. Les orbites définissent une partition de $M$.

*Exemples.*

• L'action triviale de $G$ sur un ensemble, $M$, consiste à envoyer tout élement du groupe sur l'application identique de $M$ sur lui-même. Dans ce cas, les orbites sont les points de $M$.

• Dans l'action de $G = \mathrm{O}(2)$ sur la sphère unité, $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$, par rotations d'axe $Oz$, l'orbite de $m \in S^2$ est un point si $m$ est le pôle nord ou le pôle sud, c'est un petit cercle d'axe $Oz$ (sous-variété de dimension 1) dans tous les autres cas.

• L'action de $G$ sur $G$ par translation à gauche (resp., droite) est l'action

$$(g, m) \in G \times G \mapsto gm \in G$$

(resp., $(g, m) \in G \times G \mapsto mg^{-1} \in G$). En d'autres termes, à $g \in G$, on associe la translation à gauche (resp., droite) $l_g$ (resp., $r_{g^{-1}}$) dans $G$, ce qui définit bien un morphisme de $G$ dans les bijections de $G$ sur $G$ (mais non dans les automorphismes de $G$).

Remarquons que la classe à gauche de $g \in G$, $gH$, suivant un sous-groupe $H$ de $G$ est l'orbite de $g$ sous l'action de $H \subset G$ agissant par translation à droite.

• L'action de $G$ sur $G$ par conjugaison, notée $(g,h) \mapsto \mathcal{C}_g(h)$ et définie par

$$\mathcal{C}_g(h) = ghg^{-1}$$

est une action par automorphismes. L'orbite de $g_0 \in G$,

$$C_{g_0} = \{gg_0g^{-1} \mid g \in G\} \ ,$$

est appelée la *classe de conjugaison* de $g_0$.

*Exemples.*

• La classe de conjugaison de $e$ est $\{e\}$.

• Si $G$ est abélien, la classe de conjugaison de $g \in G$ est $\{g\}$. C'est le cas pour SO(2) par exemple.

• Dans $\mathfrak{S}_n$, le nombre de classes de conjugaison est le nombre de partitions de $n$ (voir l'exercice 1.3).

• Dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, la classe de conjugaison d'une matrice $A$ est l'ensemble $\{PAP^{-1} \mid P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})\}$ des matrices qui lui sont semblables.

• Dans SO(3), deux rotations sont conjuguées par une rotation si et seulement si elles ont même angle. Les classes de conjugaison sont en correspondance bijective avec le cercle unité $S^1$. En effet, par changement de base orthonormale directe, toute rotation peut s'écrire $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

# 5 Références

Pour la classification des sous-groupes finis de SO(3), voir par exemple Sternberg (1994) ou Simon (1996). Sternberg traite aussi les sous-groupes de O(3) et indique pour chacun d'eux un cristal possédant cette symétrie.

On trouvera une introduction à la théorie des variétés différentielles et des groupes de Lie dans le livre de Pichon (1973) et, avec des applications à la mécanique, dans Marsden-Ratiu (1999), ou dans le livre de Rossmann (2002). Pour l'etude de la géométrie différentielle des groupes de Lie comme variétés voir, par exemple, Warner (1983).

# 6 Exercices

**Exercice 1.1** *Application du théorème de Lagrange.*

Montrer que dans un groupe fini $G$ d'ordre $n$, pour tout élément $a \in G$, $a^n = e$. En déduire que tout morphisme de $G$ dans le groupe $\mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ prend ses valeurs dans les racines $n^{\mathrm{e}}$ de l'unité.

**Exercice 1.2** *Centre de $\mathfrak{S}_n$.*

Montrer que pour $n \geqslant 3$, le centre du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est réduit à l'identité.

**Exercice 1.3** *Classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$.*

On appelle *cycle* de longueur $k$ ($1 \leqslant k \leqslant n$) une permutation de $\mathfrak{S}_n$ qui est une permutation circulaire de $k$ éléments et laisse fixe les $n-k$ autres.

a) Montrer que toute permutation est la composition de cycles disjoints. Cette décomposition est-elle unique ?

b) Montrer que dans $\mathfrak{S}_n$ deux éléments sont conjugués si et seulement s'ils ont la même décomposition en cycles. En déduire que le nombre de classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ est le nombre de partitions de l'entier $n$, c'est-à-dire de suites d'entiers, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell$, tels que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_\ell > 0$ , et $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = n$ .

**Exercice 1.4** *Produits semi-directs de groupes.*

Si un groupe $H$ agit sur un groupe $N$ par automorphismes de groupe, on définit sur $G = N \times H$ la multiplication

$$(n,h)(n',h') = (n(h \cdot n'), hh') \ .$$

a) Montrer que $G$ est alors un groupe. Ce groupe, noté $N \rtimes H$, est appelé le *produit semi-direct* de $N$ et de $H$. Quel est l'inverse de $(n,h)$ dans $G$ ? Montrer que $N$ est un sous-groupe distingué de $G$.

b) Montrer que le groupe $\mathfrak{S}_3$ est produit semi-direct du groupe alterné $\mathfrak{A}_3$ par $\mathbb{Z}_2$. Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est-il produit semi-direct du groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ par $\mathbb{Z}_2$, pour $n \geqslant 3$ ?

c) Chercher les définitions du groupe de Galilée et du groupe de Poincaré. Montrer que chacun d'eux est un produit semi-direct.

**Exercice 1.5** *Groupe des isométries du plan.*

a) Montrer que le groupe $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ agit par automorphismes de groupe sur $\mathrm{SO}(2)$ par $\varepsilon \cdot g = g^\varepsilon$, où $\varepsilon = \pm 1$. Montrer que $\mathrm{O}(2)$ est le produit semi-direct $\mathrm{SO}(2) \rtimes \mathbb{Z}_2$.

b) Déterminer les classes de conjugaison de $\mathrm{SO}(2)$ et de $\mathrm{O}(2)$.

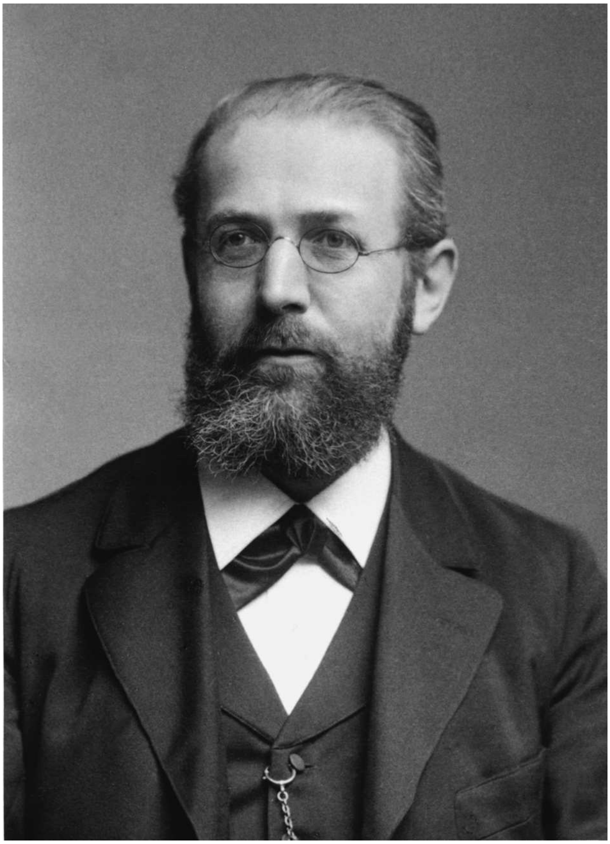
**Exercice 1.6** *Le groupe diédral $\mathcal{D}_n$.*

On considère le groupe diédral $\mathcal{D}_n$, d'ordre $2n$, groupe des rotations et des symétries du plan qui laissent invariant un polygone régulier à $n$ sommets ($n \geqslant 3$).

a) Montrer que $\mathcal{D}_n = \Gamma_n \rtimes \mathbb{Z}_2$ où $\Gamma_n$ est le groupe cyclique d'ordre $n$ et où le groupe $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ agit sur $\Gamma_n$ par $\varepsilon \cdot g = g^\varepsilon$, où $\varepsilon = \pm 1$.

b) Montrer que $\mathcal{D}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$ si et seulement si $n = 3$.

c) L'ensemble $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, avec la loi de multiplication $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, est un groupe, appelé *groupe des quaternions*. Montrer que $\mathcal{D}_4$ n'est pas isomorphe au groupe des quaternions.



*Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), qui créa la théorie des représentations des groupes finis vers 1896, fut professeur à Berlin et à Zürich.*

*(Collection de l'Institut Mittag-Leffler, Académie royale des Sciences de Suède)*

# Chapitre 2

# Représentations des groupes finis

En mathématiques et en physique, la notion de représentation d'un groupe est fondamentale. Il s'agit d'étudier les différentes manières de faire agir des groupes sur des espaces vectoriels par des *transformations linéaires.*

*Dans ce chapitre, nous supposons que les groupes considérés sont finis, et nous nous limiterons au cas où les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels complexes, de dimension finie, sauf mention contraire explicite.*

## 1 Représentations

### 1.1 Généralités

Si $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on désigne par $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des isomorphismes $\mathbb{K}$-linéaires de $E$.

**Définition 1.1.** *Une* représentation *d'un groupe $G$ est la donnée d'un espace vectoriel complexe de dimension finie, $E$, et d'un morphisme de groupes, $\rho : G \to \mathrm{GL}(E)$.*

Donc, pour tous $g, g' \in G$,

$$\rho(gg') = \rho(g)\rho(g') \ , \quad \rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1} \ , \quad \rho(e) = \mathrm{Id}_E \ .$$

La dimension de $E$ s'appelle la *dimension de la représentation.* On désigne une telle représentation par $(E, \rho)$ ou simplement $\rho$.

Si en particulier, $E = \mathbb{C}^n$, on dit que la représentation est une *représentation matricielle* de dimension $n$.

On appelle *représentation triviale* toute représentation telle que $\rho(g) = \mathrm{Id}_E$ pour tout $g \in G$.

**Exemple 1.2.** Voici un premier exemple de représentation d'un groupe non abélien. Soit $t \in \mathfrak{S}_3$ la transposition $123 \mapsto 132$ et $c$ la permutation circulaire $123 \mapsto 231$ qui engendrent $\mathfrak{S}_3$. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On peut représenter $\mathfrak{S}_3$ dans $\mathbb{C}^2$ en posant

$$\rho(e) = I \ , \quad \rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \rho(c) = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix} \ .$$

**Définition 1.3.** *Soit* $(\ \mid\ )$ *un produit scalaire sur* $E$*. On dit que la représentation* $\rho$ *est* unitaire *si* $\rho(g)$ *est unitaire pour tout* $g$*, c'est-à-dire,*

$$\forall\, g \in G, \forall\, x, y \in E, \ \ (\rho(g)x \mid \rho(g)y) = (x \mid y) \ .$$

Une représentation $(E, \rho)$ est dite *unitarisable* s'il existe un produit scalaire sur $E$ tel que $\rho$ soit unitaire.

Pour démontrer le théorème suivant, ainsi que beaucoup d'autres propositions, nous utiliserons une propriété fondamentale :

**Lemme 1.4.** *Soit* $G$ *un groupe fini. Pour toute fonction* $\varphi$ *sur* $G$ *à valeurs dans un espace vectoriel,*

$$\forall\, g \in G, \quad \sum_{h \in G} \varphi(gh) = \sum_{h \in G} \varphi(hg) = \sum_{k \in G} \varphi(k) \ . \tag{1.1}$$

*Démonstration.* En effet, $g$ étant fixé, tout élement de $G$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $gh$ (resp., $hg$), où $h \in G$. □

**Théorème 1.5.** *Toute représentation d'un groupe fini est unitarisable.*

*Démonstration.* Soit $(E, \rho)$ une représentation d'un groupe fini, $G$, et soit $(\ \mid\ )$ un produit scalaire sur $E$. Considérons

$$(x \mid y)' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g)x \mid \rho(g)y) \ ,$$

qui est un produit scalaire sur $E$. En effet, supposons $(x \mid x)' = 0$, c'est-à-dire $\sum_{g \in G} (\rho(g)x \mid \rho(g)x) = 0$. Alors, pour tout $g \in G$, $(\rho(g)x \mid \rho(g)x) = 0$ et, en particulier $(x \mid x) = 0$, d'où $x = 0$.

Ce produit scalaire sur $E$ est invariant par $\rho$. En effet,

$$(\rho(g)x \mid \rho(g)y)' = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} (\rho(h)\rho(g)x \mid \rho(h)\rho(g)y)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} (\rho(hg)x \mid \rho(hg)y) = (x \mid y)' \ ,$$

où nous avons utilisé la relation fondamentale (1.1), valable pour toute fonction $\varphi$ sur $G$. Donc $\rho$ est une représentation unitaire de $G$ dans $(E, (\ \mid\ )')$. □

## 1.2 Représentations irréductibles

Soit $(E, \rho)$ une représentation de $G$. Un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est dit *invariant* (ou *stable*) par $\rho$ (ou par $G$, si le nom de la représentation est sous-entendu) si, pour tout $g \in G$, $\rho(g)F \subset F$, ce qui entraîne $\rho(g)F = F$. On peut alors parler de la représentation $\rho$ restreinte à $F$ qui est une représentation de $G$ dans $F$. On la note $\rho|_F$. Une telle représentation restreinte à un sous-espace invariant s'appelle aussi une *sous-représentation.*

**Définition 1.6.** *Une représentation $(E, \rho)$ de $G$ est dite* irréductible *si $E \neq \{0\}$ et si les seuls sous-espaces vectoriels de $E$ invariants par $\rho$ sont $\{0\}$ et $E$ tout entier.*

*Exemple.* La représentation de dimension 2 de $\mathfrak{S}_3$ définie dans l'exemple 1.2 est irréductible, car les sous-espaces propres de $\rho(t)$ et de $\rho(c)$ sont d'intersection nulle.

**Proposition 1.7.** *Toute représentation irréductible d'un groupe fini est de dimension finie.*

*Démonstration.* Soit $(E, \rho)$ une représentation irréductible d'un groupe fini $G$ et soit $x \in E$. Le sous-ensemble $\{\rho(g)x \mid g \in G\}$ étant fini, il engendre un sous-espace vectoriel de dimension finie de $E$. Si $x \neq 0$, ce sous-espace vectoriel de $E$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Comme ce sous-espace est invariant par $\rho$, il coïncide avec $E$, qui est donc de dimension finie. $\square$

## 1.3 Somme directe de représentations

**Définition 1.8.** *Soient $(E_1, \rho_1)$ et $(E_2, \rho_2)$ des représentations de $G$. Alors*

$$(E_1 \oplus E_2, \rho_1 \oplus \rho_2) \ ,$$

*où $(\rho_1 \oplus \rho_2)(x_1, x_2) = (\rho_1(x_1), \rho_2(x_2))$, est une représentation de $G$ appelée* somme directe *des représentations $(E_1, \rho_1)$ et $(E_2, \rho_2)$.*

Évidemment une somme directe de représentations de dimensions strictement positives, même irréductibles, n'est jamais irréductible. Pour des représentations matricielles, $\rho_1$ et $\rho_2$, les matrices de la représentation somme directe de $\rho_1$ et $\rho_2$ sont des matrices diagonales par blocs,

$$\begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix} \ .$$

Plus généralement, si $m$ est un entier strictement positif, on définit par récurrence la somme directe de $m$ représentations, $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_m$. Si $(E, \rho)$ est une représentation de $G$ on notera $m\rho$ la représentation $\rho \oplus \ldots \oplus \rho$ (somme directe de $m$ termes) sur l'espace vectoriel $E \oplus \cdots \oplus E$ ($m$ termes).

Une représentation est dite *complètement réductible* si elle est somme directe de représentations irréductibles.

**Lemme 1.9.** *Soit $\rho$ une représentation unitaire de $G$ dans $(E, (\ \mid\ ))$. Si $F \subset E$ est invariant par $\rho$, alors $F^\perp = \{y \in E \mid \forall\, x \in F, (x \mid y) = 0\}$ est aussi invariant par $\rho$.*

*Démonstration.* Soit $y \in F^\perp$. Alors, pour tout $x \in F, (x \mid \rho(g)y) = (\rho(g^{-1})x \mid y) = 0$, puisque $F$ est invariant par $\rho$. Donc $\rho(g)y \in F^\perp$. □

**Théorème 1.10 (Théorème de Maschke).** *Toute représentation de dimension finie d'un groupe fini est complètement réductible.*

*Démonstration.* Soit $(E, \rho)$ une représentation de $G$. D'après le théorème 1.5, on peut la supposer unitaire. Si $\rho$ n'est pas irréductible, soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ invariant par $\rho$, tel que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. Alors, $E = F \oplus F^\perp$, où $F$ (par hypothèse) et $F^\perp$ (d'après le lemme 1.9) sont invariants par $\rho$, et $\dim F < \dim E$, $\dim F^\perp < \dim E$. Par récurrence sur la dimension de $E$, on obtient le résultat. □

En fait, ce théorème est vrai sous des hypothèses plus générales (voir l'étude des groupes compacts au chapitre 3).

## 1.4 Opérateurs d'entrelacement, lemme de Schur

**Définition 1.11.** *Soient $(E_1, \rho_1)$ et $(E_2, \rho_2)$ des représentations de $G$. On dit qu'une application linéaire, $T : E_1 \to E_2$,* entrelace *$\rho_1$ et $\rho_2$ si*

$$\forall\, g \in G,\ \ \rho_2(g) \circ T = T \circ \rho_1(g)\ ,$$

*et $T$ s'appelle alors* opérateur d'entrelacement *entre $\rho_1$ et $\rho_2$.*

La définition exprime la commutativité du diagramme suivant, pour tout $g \in G$,

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{T} & E_2 \\ {\scriptstyle \rho_1(g)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho_2(g)} \\ E_1 & \xrightarrow{T} & E_2 \end{array}$$

Les expressions suivantes sont diversement utilisées pour exprimer cette même propriété :

- $T$ est un opérateur d'entrelacement (en anglais, *intertwining operator*) entre $\rho_1$ et $\rho_2$,
- $T$ est équivariant pour $\rho_1$ et $\rho_2$,
- $T$ est un morphisme de $G$-espaces vectoriels,
- $T$ est un $G$-morphisme,
- $T \in \mathrm{Hom}_G(E_1, E_2)$.

Si $E_1 = E_2 = E$ et si $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, un opérateur qui entrelace $\rho_1$ et $\rho_2$ est simplement un opérateur qui *commute* avec $\rho$.

**Définition 1.12.** *Les représentations $\rho_1$ et $\rho_2$ sont dites* équivalentes *s'il existe un opérateur d'entrelacement* bijectif *entre $\rho_1$ et $\rho_2$.*

Si $T$ est un tel opérateur d'entrelacement bijectif,

$$\forall\, g \in G,\ \ \rho_2(g) = T \circ \rho_1(g) \circ T^{-1}.$$

L'équivalence au sens précédent est une relation d'équivalence sur les représentations, d'où la notion de *classe d'équivalence de représentations*. On notera $\sim$ cette relation d'équivalence.

Des représentations $(E_1, \rho_1)$ et $(E_2, \rho_2)$ sont équivalentes si et seulement s'il existe une base $B_1$ de $E_1$ et une base $B_2$ de $E_2$ telles que, pour tout $g \in G$, la matrice de $\rho_1(g)$ dans la base $B_1$ soit égale à la matrice de $\rho_2(g)$ dans la base $B_2$. En particulier, si des représentations $(E_1, \rho_1)$ et $(E_2, \rho_2)$ sont équivalentes, alors $E_1$ est isomorphe à $E_2$.

Pour des représentations matricielles, on obtient donc des *matrices semblables* : si $E_1 = E_2 = \mathbb{C}^n$, et si $\rho_1$ et $\rho_2$ sont équivalentes, alors les matrices $\rho_1(g)$ et $\rho_2(g)$ sont semblables, avec même matrice de passage pour tout $g$.

Si $\rho_0$ est une représentation de $G$ dans $E$ de dimension $n$, le choix d'une base $(e_i)$ de $E$ donne une représentation matricielle $(\mathbb{C}^n, \rho)$ ; par changement à une base $(e'_i)$ avec la matrice de passage $T$, on obtient la représentation équivalente $(\mathbb{C}^n, \rho')$,

$$\rho'(g) = T \circ \rho(g) \circ T^{-1}\ .$$

**Lemme 1.13.** *Si $T$ entrelace $\rho_1$ et $\rho_2$, le noyau de $T$,* $\mathrm{Ker}\, T$*, est invariant par $\rho_1$, et l'image de $T$,* $\mathrm{Im}\, T$*, est invariante par $\rho_2$.*

*Démonstration.* Si $x \in E_1$ et $Tx = 0$, alors $T(\rho_1(g)x) = \rho_2(g)(Tx) = 0$. Donc Ker $T$ est un sous-espace de $E_1$, invariant par $\rho_1$.

Soit $y \in \mathrm{Im}\, T$. Il existe $x \in E_1$ tel que $y = Tx$. Alors $\rho_2(g)y = \rho_2(g)(Tx) = T(\rho_1(g)x)$, donc $\mathrm{Im}\, T$ est un sous-espace de $E_2$, invariant par $\rho_2$. □

**Lemme 1.14.** *Si $T$ commute avec $\rho$, tout sous-espace propre de $T$ est invariant par $\rho$.*

*Démonstration.* En effet si $Tx = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}$, alors $T(\rho(g)x) = \lambda\rho(g)x$. Donc le sous-espace propre de $T$ correspondant à la valeur propre $\lambda$ est invariant par $\rho$. □

**Théorème 1.15 (Lemme de Schur).** *Soit $T$ un opérateur entrelaçant des représentations irréductibles de $G$, $(E_1, \rho_1)$ et $(E_2, \rho_2)$.*

- *Si $\rho_1$ et $\rho_2$ ne sont pas équivalentes, alors $T = 0$.*
- *Si $E_1 = E_2 = E$ et $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, alors $T$ est un multiple scalaire de l'identité de $E$.*

*Démonstration.* Si $\rho_1$ et $\rho_2$ ne sont pas équivalentes, $T$ n'est pas bijectif, donc ou bien $\mathrm{Ker}\, T \neq \{0\}$, ou bien $\mathrm{Im}\, T \neq E_2$. D'après le lemme 1.13, $\mathrm{Ker}\, T$ est invariant par $\rho_1$. Comme $\rho_1$ est irréductible, si $\mathrm{Ker}\, T \neq \{0\}$, alors $\mathrm{Ker}\, T = E_1$, donc $T = 0$. D'après le lemme 1.13, $\mathrm{Im}\, T$ est invariante par $\rho_2$. Comme $\rho_2$ est irréductible, si $\mathrm{Im}\, T \neq E_2$, alors $\mathrm{Im}\, T = \{0\}$, donc $T = 0$.

Si $E_1 = E_2 = E$ et $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, alors, pour tout $g \in G, \rho(g) \circ T = T \circ \rho(g)$, et $T$ commute avec la représentation $\rho$. Soit $\lambda$ une valeur propre de $T$, qui existe car $T$ est un endomorphisme de $E$, espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et soit $E_\lambda$ le sous-espace propre associé à $\lambda$. D'après le lemme 1.14, $E_\lambda$ est invariant par $\rho$. Par hypothèse $E_\lambda$ est non nul, donc, comme $\rho$ est irréductible, $E_\lambda = E$, ce qui signifie que $T = \lambda\,\mathrm{Id}_E$. Remarquons que cette deuxième partie de la démonstration utilise l'hypothèse que l'espace de la représentation considérée est un espace vectoriel complexe. □

Réciproquement, si tout opérateur qui commute avec la représentation $\rho$ est un multiple scalaire de l'identité, alors $\rho$ est irréductible. En effet, si $\rho$ n'était pas irréductible, la projection sur un sous-espace vectoriel invariant non trivial serait un opérateur non scalaire qui commute avec $\rho$.

*Remarque.* Le lemme 1.14 a de très importantes conséquences en mécanique quantique. En effet, les opérateurs de symétrie d'un système, représenté par un hamiltonien $\widehat{H}$ opérant sur un espace de Hilbert, sont des opérateurs qui commutent avec $\widehat{H}$. À chaque niveau d'énergie, c'est-à-dire valeur propre du hamiltonien, correspond un sous-espace propre du hamiltonien. Le lemme 1.14 implique que chaque sous-espace propre est un espace de représentation du groupe de symétries du système. Le *principe de Wigner* affirme qu'à chaque niveau d'énergie correspond une représentation irréductible du plus grand groupe de symétries du système. La dimension de la représentation correspondant à un niveau d'énergie donné est appelée le degré de *dégénérescence* du niveau d'énergie.

# 2 Caractères et relations d'orthogonalité

## 2.1 Fonctions sur un groupe, coefficients matriciels

On désignera par $\mathcal{F}(G)$, ou parfois par $\mathbb{C}[G]$, l'espace vectoriel des fonctions sur $G$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Lorsque cet espace vectoriel est muni du produit scalaire défini ci-dessous, on désigne l'espace hilbertien ainsi défini par $L^2(G)$ (concept qui sera étendu aux groupes compacts).

**Définition 2.1.** *Sur $L^2(G)$, le produit scalaire est défini par*

$$(f_1 \mid f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g) \ .$$

On va s'intéresser aux coefficents matriciels des représentations.

**Définition 2.2.** *Si $\rho$ est une représentation de $G$ dans $\mathbb{C}^n$, pour tout couple $(i,j)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, la fonction $\rho_{ij} \in L^2(G)$ qui associe à $g \in G$ le coefficient de la matrice $\rho(g)$ situé sur la $i^{\mathrm{e}}$ ligne et la $j^{\mathrm{e}}$ colonne, $(\rho(g))_{ij} \in \mathbb{C}$, est appelée un* coefficient matriciel *de $\rho$.*

Pour une représentation $\rho$ dans un espace vectoriel $E$, on définit les coefficients matriciels $\rho_{ij}$ relativement à une base $(e_i)$, qui vérifient

$$\rho(g)e_j = \sum_i \rho_{ij}(g) e_i$$

($i$ est l'indice de ligne et $j$ est l'indice de colonne). Si $\rho$ est une représentation unitaire dans un expace de Hilbert de dimension finie, alors

$$\rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1} = {}^t\overline{(\rho(g))},$$

d'où, dans une base orthonormale,

$$\rho_{ij}(g^{-1}) = \overline{\rho_{ji}(g)}$$

et, en particulier, les coefficients diagonaux de $\rho(g)$ et $\rho(g^{-1})$ sont des nombres complexes conjugués.

## 2.2 Caractère d'une représentation, relations d'orthogonalité

On désigne par Tr la trace d'un endomorphisme.

**Définition 2.3.** *Soit $(E, \rho)$ une représentation de $G$. On appelle* caractère *de $\rho$ la fonction $\chi_\rho$ sur $G$ à valeurs complexes définie par*

$$\forall\, g \in G,\ \ \chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g)) \ .$$

Des représentations équivalentes ont même caractère.

Pour une représentation matricielle de dimension $n$,

$$\chi_\rho(g) = \sum_{i=1}^{n} (\rho(g))_{ii} \ . \tag{2.1}$$

Sur chaque classe de conjugaison de $G$, la fonction $\chi_\rho$ est constante.

**Définition 2.4.** *On appelle* fonction centrale *sur $G$ une fonction constante sur chaque classe de conjugaison.*

Les caractères sont donc des fonctions centrales sur le groupe.

**Proposition 2.5.** *Les propriétés élémentaires des caractères sont les suivantes :*

- $\chi_\rho(e) = \dim \rho$.
- $\forall\, g \in G,\ \ \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ .
- *Le caractère d'une somme directe de représentations est la somme des caractères,* $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$.

*Démonstration.* La première propriété est conséquence de la formule (2.1). Pour démontrer la seconde formule, on peut supposer que $\rho$ est unitaire pour un certain produit scalaire et choisir une base orthonormale. La propriété des sommes directes est évidente. $\square$

Si $(E_1, \rho_1)$ et $(E_2, \rho_2)$ sont des représentations d'un même groupe $G$, on définit leur *produit tensoriel* $(E_1 \otimes E_2, \rho_1 \otimes \rho_2)$ par

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g) \ ,$$

pour $g \in G$ (voir l'exercice 2.5 pour un rappel des définitions). Une propriété importante des caractères est la suivante.

**Proposition 2.6.** *Le caractère d'un produit tensoriel de représentations est le produit des caractères,*

$$\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1}\ \chi_{\rho_2}\ . \tag{2.2}$$

*Démonstration.* La relation suit du fait que la trace d'un produit tensoriel de matrices est le produit des traces. □

On a, d'après la proposition 2.5, pour des représentations $\rho_1$ et $\rho_2$ de $G$,

$$(\chi_{\rho_1} \mid \chi_{\rho_2}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho_1}(g^{-1}) \chi_{\rho_2}(g)\ . \tag{2.3}$$

On va montrer que les caractères de représentations irréductibles inéquivalentes sont orthogonaux et que le caractère d'une représentation irréductible est de norme 1.

**Proposition 2.7.** *Soient $(E_1, \rho_1)$ et $(E_2, \rho_2)$ des représentations de $G$ et soit $u : E_1 \to E_2$, une application linéaire. Alors l'application linéaire de $E_1$ dans $E_2$,*

$$T_u = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_2(g)\ u\ \rho_1(g)^{-1}\ , \tag{2.4}$$

*entrelace $\rho_1$ et $\rho_2$.*

*Démonstration.* Calculons

$$\begin{aligned} \rho_2(g)\ T_u &= \tfrac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho_2(gh)\ u\ \rho_1(h^{-1}) \\ &= \tfrac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \rho_2(k)\ u\ \rho_1(k^{-1} g)\ , \end{aligned}$$

d'après la relation fondamentale (1.1). D'où,

$$\rho_2(g)\ T_u = T_u\ \rho_1(g)\ .$$

L'opérateur $T_u$ est donc un opérateur d'entrelacement entre $\rho_1$ et $\rho_2$. □

**Proposition 2.8.** *Soient $(E_1, \rho_1)$ et $(E_2, \rho_2)$ des représentations irréductibles de $G$ et $u : E_1 \to E_2$ une application linéaire, et soit $T_u$ défini par la formule* (2.4).
*(i) Si $\rho_1$ et $\rho_2$ sont inéquivalentes, alors $T_u = 0$.*
*(ii) Si $E_1 = E_2 = E$ et $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, alors*

$$T_u = \frac{\mathrm{Tr}\ u}{\dim E}\ \mathrm{Id}_E\ .$$

*Démonstration.* La première assertion est claire d'après le lemme de Schur (théorème 1.15). Pour la deuxième, il faut seulement calculer $\lambda$ sachant que $T_u = \lambda\ \mathrm{Id}_E$ . Or $\mathrm{Tr}\ T_u = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}\ u = \mathrm{Tr}\ u$, donc $\lambda = \frac{\mathrm{Tr}\ u}{\dim E}$ . □

**Proposition 2.9.** *Soient $(E_1, \rho_1)$ et $(E_2, \rho_2)$ des représentations irréductibles de $G$. On choisit des bases dans $E_1$ et $E_2$.*
*(i) Si $\rho_1$ et $\rho_2$ sont inéquivalentes,*

$$\forall\ i, j, k, l, \quad \sum_{g \in G} (\rho_2(g))_{k\ell} (\rho_1(g^{-1}))_{ji} = 0 \ .$$

*(ii) Si $E_1 = E_2 = E$ et $\rho_1 = \rho_2 = \rho$,*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g))_{k\ell} (\rho(g^{-1}))_{ji} = \frac{1}{\dim E} \delta_{ki} \delta_{\ell j} \ .$$

*Démonstration.* Utilisons une base $(e_j)$ de $E_1$, $1 \leqslant j \leqslant \dim E_1$, et une base $(f_\ell)$ de $E_2$, $1 \leqslant \ell \leqslant \dim E_2$. Pour $u : E_1 \to E_2$, $T_u$ est défini par (2.4). On a, pour $1 \leqslant i \leqslant \dim E_1, 1 \leqslant k \leqslant \dim E_2$,

$$(T_u)_{ki} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{m=1}^{\dim E_1} \sum_{p=1}^{\dim E_2} (\rho_2(g))_{kp}\ u_{pm}\ (\rho_1(g^{-1}))_{mi} \ .$$

Choisissons, pour application linéaire $u$, l'application $u_{(\ell j)} : E_1 \to E_2$ définie par $u_{(\ell j)}(e_k) = \delta_{jk} f_\ell$. Alors

$$(u_{(\ell j)})_{mp} = \delta_{m\ell} \delta_{pj} \ ,$$

et par conséquent

$$(T_{u_{(\ell j)}})_{ki} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho_2(g))_{k\ell} (\rho_1(g^{-1}))_{ji} \ .$$

On applique maintenant la proposition 2.8.

Si $\rho_1$ et $\rho_2$ sont inéquivalentes, $T_{u_{(\ell j)}}$ est toujours nul, d'où (i).

Si $E_1 = E_2 = E$ et $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, alors

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g))_{k\ell} (\rho(g^{-1}))_{ji} = (T_{u_{(\ell j)}})_{ki} = \frac{\mathrm{Tr}\ u_{(\ell j)}}{\dim E} \delta_{ki} = \frac{\delta_{ki} \delta_{\ell j}}{\dim E} \ .$$

ce qui démontre (ii). □

**Corollaire 2.10.** *Soient $(E_1, \rho_1)$ et $(E_2, \rho_2)$ des représentations unitaires irréductibles de $G$. On choisit des bases orthonormales dans $E_1$ et $E_2$.*
*(i) Si $\rho_1$ et $\rho_2$ sont inéquivalentes, pour tous $i, j, k, l$,*

$$((\rho_1)_{ij} \mid (\rho_2)_{k\ell}) = 0 \ .$$

*(ii) Si $E_1 = E_2 = E$ et $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, pour tous $i, j, k, l$,*

$$(\rho_{ij} \mid \rho_{k\ell}) = \frac{1}{\dim E} \delta_{ik} \delta_{j\ell} \ .$$

*Démonstration.* En effet, si $\rho_1$ est unitaire pour un produit scalaire sur $E_1$ et si la base choisie dans $E_1$ est orthonormale,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho_2(g))_{k\ell}(\rho_1(g^{-1}))_{ji} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho_2(g))_{k\ell}\overline{(\rho_1(g))_{ij}} = ((\rho_1)_{ij} \mid (\rho_2)_{k\ell}) \ .$$

La proposition 2.9 entraîne donc (i) et (ii). □

**Théorème 2.11 (Relations d'orthogonalité).** *(i) Si $\rho_1$ et $\rho_2$ sont des représentations irréductibles inéquivalentes de $G$,*

$$(\chi_{\rho_1} \mid \chi_{\rho_2}) = 0 \ .$$

*(ii) Si $\rho$ est une représentation irréductible de $G$,*

$$(\chi_\rho \mid \chi_\rho) = 1 \ .$$

*Démonstration.* D'après la relation (2.3) et la proposition précédente, si $\rho_1$ et $\rho_2$ sont des représentations irréductibles inéquivalentes, alors $(\chi_{\rho_1} \mid \chi_{\rho_2}) = 0$ . Si $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)_{ii}\rho(g^{-1})_{jj} = \frac{\delta_{ij}}{\dim E}$, d'où $(\chi_\rho \mid \chi_\rho) = 1$ . □

On appelle *caractères irréductibles* de $G$ l'ensemble des caractères des représentations irréductibles inéquivalentes de $G$. On note $\chi_{\rho_i}$ ou souvent $\chi_i$ le caractère d'une représentation irréductible $\rho_i$. Les résultats précédents s'énoncent alors ainsi :

**Théorème 2.12.** *Les caractères irréductibles de $G$ forment un système orthonormal dans $L^2(G)$.*

**Corollaire 2.13.** *Les représentations irréductibles inéquivalentes d'un groupe fini $G$ sont en nombre fini.*

On désigne par $\widehat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de $G$.

## 2.3 Table de caractères

On appelle ainsi la table dont les colonnes correspondent aux classes de conjugaison d'un groupe et dont les lignes correspondent aux représentations irréductibles inéquivalentes de ce groupe. À l'intersection de la ligne et de la colonne on inscrit la valeur du caractère de la représentation, évalué sur un élément (quelconque) de la classe de conjugaison. Soit $N$ le nombre de classes de conjugaison (nombre de colonnes ; on démontrera que c'est aussi le nombre de lignes). Soit $g_i$ un élément de $G$, appartenant à la classe de conjugaison, $C_{g_i}$, $1 \leqslant i \leqslant N$, qui comporte $|C_{g_i}|$ éléments. Soient $\rho_k$ et $\rho_\ell$ des représentations irréductibles. Alors

$$(\chi_{\rho_k} \mid \chi_{\rho_\ell}) = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{N}|C_{g_i}| \ \overline{\chi_{\rho_k}(g_i)} \ \chi_{\rho_\ell}(g_i) = \delta_{k\ell} \ .$$

Cette formule exprime le résultat suivant.

**Proposition 2.14.** *La $i^{\text{e}}$ colonne ayant pour poids $|C_{g_i}|$, les lignes de la table de caractères sont orthogonales et de norme* $1$.

On écrira une table de caractères sous la forme suivante :

| | $\|C_{g_1}\|$ | $\cdots\cdots$ | $\|C_{g_N}\|$ |
|---|---|---|---|
| | $g_1$ | $\cdots\cdots$ | $g_N$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots\cdots$ | $\cdots$ |
| $\chi_{\rho_i}$ | $\chi_{\rho_i}(g_1)$ | $\cdots\cdots$ | $\chi_{\rho_i}(g_N)$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots\cdots$ | $\cdots$ |
| $\chi_{\rho_j}$ | $\chi_{\rho_j}(g_1)$ | $\cdots\cdots$ | $\chi_{\rho_j}(g_N)$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots\cdots$ | $\cdots$ |

## 2.4 Application à la décomposition des représentations

Désignons par $\rho_1, \cdots, \rho_N$ les représentations irréductibles inéquivalentes de $G$. (Nous verrons au corollaire 3.7 que ce nombre $N$ est bien égal au nombre de classes de conjugaison.) Plus précisément, on a fait choix dans chacune des classes d'équivalence de représentations de $G$ d'un représentant que l'on désigne par $\rho_i$.

Dans les relations ci-dessous, le signe d'égalité entre représentations désigne en fait l'appartenance à une même classe d'équivalence.

**Théorème 2.15.** *Soit $\rho$ une représentation quelconque de $G$ et soit $\chi_\rho$ son caractère. Alors*

$$\rho = \overset{N}{\underset{i=1}{\oplus}} m_i \rho_i \ ,$$

*où*

$$m_i = (\chi_{\rho_i} \mid \chi_\rho) \ .$$

*Démonstration.* On sait, d'après le théorème 1.10, que $\rho$ est somme directe de représentations irréductibles. On peut grouper les termes correspondant à une même classe d'équivalence de représentations irréductibles, $\rho_i$, d'où $\rho = \overset{N}{\underset{i=1}{\oplus}} m_i \rho_i$. On a alors $\chi_\rho = \sum_{i=1}^N m_i \ \chi_{\rho_i}$, d'où, par orthogonalité, $(\chi_{\rho_i} \mid \chi_\rho) = m_i \, (\chi_{\rho_i} \mid \chi_{\rho_i}) = m_i$. $\square$

**Définition 2.16.** *Si $\rho$ admet la décomposition*

$$\rho = m_1 \rho_1 \oplus m_2 \rho_2 \oplus \cdots \oplus m_N \rho_N \ ,$$

*l'entier $m_i$ est la* multiplicité *de $\rho_i$ dans $\rho$, et $m_i \rho_i$ est la* composante isotypique *de type $\rho_i$ de $\rho$.*

**Corollaire 2.17.** *La décomposition en composantes isotypiques est unique à l'ordre près.*

**Corollaire 2.18.** *Deux représentations ayant le même caractère sont équivalentes.*

D'après le théorème précédent,

$$(\chi_\rho \mid \chi_\rho) = \sum_{i=1}^{N} m_i^2 \ .$$

D'où

**Théorème 2.19 (Critère d'irréductibilité).** *Pour qu'une représentation, $\rho$, soit irréductible, il faut et il suffit que $(\chi_\rho \mid \chi_\rho) = 1$ .*

# 3 La représentation régulière

## 3.1 Définition

De manière générale, si un groupe $G$ agit sur un ensemble $M$, alors $G$ agit linéairement sur l'espace des fonctions sur $M$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, $\mathcal{F}(M)$, par $(g, f) \in G \times \mathcal{F}(M) \mapsto g \cdot f \in \mathcal{F}(M)$ , où

$$\forall\, x \in M,\ (g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x) \ .$$

On vérifie immédiatement que l'on obtient ainsi une représentation de $G$ dans $\mathcal{F}(M)$.

Prenons $M = G$, le groupe agissant sur lui-même par multiplication à gauche. On obtient une représentation $R$ de $G$ dans $\mathcal{F}(G)$ appelée *représentation régulière gauche* ou simplement *représentation régulière* de $G$. Donc, par définition,

$$\forall\, g, h \in G, (R(g)f)(h) = f(g^{-1}h) \ .$$

On peut définir de même la *représentation régulière droite* $R'$, associée à l'action à droite de $G$ sur lui-même, par $(R'(g)f)(h) = f(hg)$. Les représentations régulières droite et gauche sont équivalentes. Pour un groupe fini, $G$, l'espace vectoriel $\mathcal{F}(G)$ des applications de $G$ dans $\mathbb{C}$ est de dimension finie $|G|$. La représentation régulière est donc de dimension $|G|$.

On utilise la base $(\epsilon_g)_{g \in G}$ de $\mathcal{F}(G)$ définie par :

$$\epsilon_g : G \to \mathbb{C} \begin{cases} \epsilon_g(g) & = 1, \\ \epsilon_g(h) & = 0, \ \text{si } h \neq g. \end{cases}$$

La représentation régulière de $G$ est telle que

$$\forall\, g, h \in G,\ R(g)(\epsilon_h) = \epsilon_{gh} \ .$$

En effet, pour tout $k \in G$, $(R(g)\epsilon_h)(k) = \epsilon_h(g^{-1}k)$, et $\epsilon_h(g^{-1}k) = 1$ si $g^{-1}k = h$, c'est-à-dire si $k = gh$, tandis que $\epsilon_h(g^{-1}k) = 0$ sinon. (Dans la représentation régulière droite $\epsilon_h \mapsto \epsilon_{hg^{-1}}$.)

**Proposition 3.1.** *Sur $L^2(G) = \mathcal{F}(G)$ muni du produit scalaire $(\ \mid\ )$, la représentation régulière est unitaire.*

*Démonstration.* Pour $f_1$ et $f_2 \in L^2(G)$, on a pour tout $g \in G$,

$$(R(g)f_1 \mid R(g)f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \overline{(R(g)f_1)(h)}(R(g)f_2)(h)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \overline{f_1(g^{-1}h)} f_2(g^{-1}h) = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \overline{f_1(k)} f_2(k) = (f_1 \mid f_2) \ .$$

L'opérateur $R(g)$ est donc unitaire, pour tout $g \in G$. □

## 3.2 Caractère de la représentation régulière

D'une part,

$$\chi_R(e) = \mathrm{Tr}(R(e)) = \dim \mathcal{F}(G) = |G| \ .$$

D'autre part, si $g \neq e$, alors

$$\chi_R(g) = \mathrm{Tr}(R(g)) = 0 \ ,$$

car, dans ce cas, pour tout $h \in G$ , $R(g)\epsilon_h \neq e_h$.

La représentation régulière, $R$, est réductible car $\sum_{g \in G} \epsilon_g$ engendre un sous-espace vectoriel $W$ de $\mathcal{F}(G)$ de dimension 1 qui est invariant par $R$. En effet, pour tout $g \in G$, $R(g)(\sum\limits_{h \in G} \epsilon_h) = \sum\limits_{h \in G} \epsilon_{gh} = \sum\limits_{k \in G} \epsilon_k$. De plus $R \mid_W$ est équivalente à la représentation triviale puisque, pour tout $x \in W$, $R(g)(x) = x$. Nous allons montrer qu'en fait la représentation régulière contient chaque représentation irréductible de $G$ avec une multiplicité égale à sa dimension.

**Exemple 3.2.** La représentation régulière de $\mathfrak{S}_3$ dans $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$ est de dimension 6. Elle se décompose en la somme directe de la représentation triviale de dimension 1, la représentation signature de dimension 1 et deux copies de la représentation irréductible de dimension 2 étudiée dans l'exemple 1.2.

## 3.3 Décomposition en composantes isotypiques

On reprend les notations du paragraphe 2.4.

**Proposition 3.3.** *La décomposition de la représentation régulière en composantes isotypiques est* $R = \bigoplus\limits_{i=1}^{N} n_i \rho_i$ , *où* $n_i = \dim \rho_i$ .

*Démonstration.* On sait que

$$\chi_R(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = e, \\ 0 & \text{si } g \neq e, \end{cases}$$

d'où $(\chi_{\rho_i} \mid \chi_R) = \chi_{\rho_i}(e) = \dim \rho_i$ . □

**Théorème 3.4.** *On a*

$$\sum_{i=1}^{N} (n_i)^2 = |G| \ ,$$

*où* $n_i = \dim \rho_i$ .

*Démonstration.* On a $|G| = \chi_R(e) = \sum_{i=1}^{N} n_i \chi_{\rho_i}(e) = \sum_{i=1}^{N} (n_i)^2$ . □

La relation $\sum_{i=1}^{N} (n_i)^2 = |G|$ est très souvent utilisée, par exemple pour déterminer la dimension d'une représentation irréductible « manquante » lorsqu'on connaît déjà $N-1$ représentations.

## 3.4 Base de l'espace vectoriel des fonctions centrales

L'espace vectoriel des fonctions centrales sur $G$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ a pour dimension le nombre de classes de conjugaison de $G$. On va montrer que c'est aussi le nombre de classes d'équivalence de représentations irréductibles.

Soit $(E, \rho)$ une représentation de $G$, et $f$ une fonction sur $G$. On considère l'endomorphisme $\rho_f$ de $E$ défini par

$$\rho_f = \sum_{g \in G} f(g) \rho(g) \ . \tag{3.1}$$

Donc, par définition, pour tout $x \in E$, $\rho_f(x) = \sum_{g \in G} f(g)\rho(g)(x)$.

**Lemme 3.5.** *L'endomorphisme $\rho_f$ possède les propriétés suivantes.*
*(i) Si $f$ est centrale, $\rho_f$ commute avec $\rho$.*
*(ii) Si $f$ est centrale et si $\rho$ est irréductible,*

$$\rho_f = \frac{|G|(\overline{f} \mid \chi_\rho)}{\dim \rho} \, \mathrm{Id}_E \ .$$

*Démonstration.* Pour toute fonction $f$, on a

$$\begin{aligned} \rho_f \circ \rho(g) &= \textstyle\sum_{h \in G} f(h)\rho(h)\rho(g) = \sum_{h \in G} f(h)\rho(hg) \\ &= \textstyle\sum_{k \in G} f(kg^{-1})\rho(k) = \sum_{h \in G} f(ghg^{-1})\rho(gh) \ . \end{aligned}$$

Comme $f$ est supposée centrale, on obtient

$$\rho_f \circ \rho(g) = \rho(g) \sum_{h \in G} f(h)\rho(h) = \rho(g) \circ \rho_f \ .$$

Montrons (ii). D'après (i) et le lemme de Schur (théorème 1.15), il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\rho_f = \lambda \, \mathrm{Id}_E$. D'autre part, $\mathrm{Tr}\, \rho_f = \sum_{g \in G} f(g) \, \mathrm{Tr}\, \rho(g) = \sum_{g \in G} f(g) \chi_\rho(g) = |G|(\overline{f} \mid \chi_\rho)$, d'où le résultat. □

**Théorème 3.6.** *Les caractères irréductibles forment une base orthonormale de l'espace vectoriel des fonctions centrales.*

*Démonstration.* On sait que les caractères des représentations irréductibles inéquivalentes de $G$, $\rho_1, \dots, \rho_N$, forment un système orthonormal dans $L^2(G)$ (théorème 2.12). Montrons que ce système est complet dans le sous-espace vectoriel des fonctions centrales. Soit $f$ une fonction *centrale* telle que, pour $1 \leqslant i \leqslant N$, $(f \mid \chi_{\rho_i}) = 0$. Considérons $(\rho_i)_{\overline{f}} = \sum_{g \in G} \overline{f}(g)\rho_i(g)$. D'après le lemme précédent, $(\rho_i)_{\overline{f}} = 0$ et l'on en déduit, par décomposition, que pour toute représentation, $\rho$, on a $\rho_{\overline{f}} = 0$. En particulier, $R_{\overline{f}} = 0$, où $R$ est la représentation régulière. Or,

$$R_{\overline{f}}(\epsilon_g) = \sum_{h \in G} \overline{f}(h) R(h)(\epsilon_g) = \sum_{h \in G} \overline{f}(h)\epsilon_{hg} \ ,$$

et, en particulier,

$$R_{\overline{f}}(\epsilon_e) = \sum_{h \in G} \overline{f}(h)\epsilon_h = \overline{f} \ ,$$

donc $f = 0$. □

**Corollaire 3.7.** *Le nombre de classes d'équivalence de représentations irréductibles d'un groupe fimi est égal au nombre de ses classes de conjugaison.*

En d'autres termes, *la table de caractères est carrée.*

**Proposition 3.8.** *Les colonnes de la table de caractères d'un groupe fini $G$ sont orthogonales et de norme $\sqrt{\frac{|G|}{|C_g|}}$, où $|C_g|$ désigne le nombre d'éléments de la classe de conjugaison de $g$. Explicitement,*

- $$\sum_{i=1}^{N} \overline{\chi_{\rho_i}(g)}\chi_{\rho_i}(g') = 0 \ , \ \textit{si } g \textit{ et } g' \textit{ ne sont pas conjugués.}$$

- $$\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{N} \overline{\chi_{\rho_i}(g)}\chi_{\rho_i}(g) = \frac{1}{|C_g|} \ .$$

En particulier, quand $g = e$, on retrouve la relation $\sum_{i=1}^{N}(\dim \rho_i)^2 = |G|$.

*Démonstration.* D'après le théorème 3.6, si $f$ est une fonction centrale, alors

$$f = \sum_{i=1}^{N} (\chi_{\rho_i} \mid f)\chi_{\rho_i} \ .$$

Soit $g \in G$. On considère la fonction centrale $f_g$ qui vaut 1 en $g$ et 0 sur les autres classes de conjugaison de $G$. On a

$$(\chi_{\rho_i} \mid f_g) = \frac{1}{|G|}\sum_{h \in G} \overline{\chi_{\rho_i}(h)} f_g(h) = \frac{|C_g|}{|G|}\overline{\chi_{\rho_i}(g)} \ ,$$

donc $f_g = \frac{|C_g|}{|G|} \sum_{i=1}^{N} \overline{\chi_{\rho_i}(g)} \chi_{\rho_i}$ . En particulier, si $g' \notin C_g$ , alors

$$0 = f_g(g') = \frac{|C_g|}{|G|} \sum_{i=1}^{N} \overline{\chi_{\rho_i}(g)} \chi_{\rho_i}(g') \ ,$$

ce qui démontre la première formule, et donc l'orthogonalité des colonnes de la table de caractères. D'autre part, $1 = f_g(g) = \frac{|C_g|}{|G|} \sum_{i=1}^{N} \overline{\chi_{\rho_i}(g)} \chi_{\rho_i}(g)$ , ce qui démontre la deuxième formule. □

# 4 Opérateurs de projection

Nous allons mettre en évidence des opérateurs de projection sur les composantes isotypiques dans la décomposition de l'espace vectoriel support d'une représentation quelconque. Soit $(E, \rho)$ une représentation de $G$ et soit $\rho = \bigoplus_{i=1}^{N} m_i \rho_i$ la décomposition de $\rho$ en composantes isotypiques. Le support de la composante isotypique, $m_i \rho_i$, est $m_i E_i = E_i \oplus \cdots \oplus E_i$ ($m_i$ termes). On désigne ce sous-espace vectoriel de $E$ par $V_i$. On écrira

$$V_i = \bigoplus_{j=1}^{m_i} E_{i,j} \ ,$$

où chaque $E_{i,j}$, $1 \leqslant j \leqslant m_i$, est égal à $E_i$. On a donc $E = \bigoplus_{i=1}^{N} V_i$.

**Théorème 4.1.** *Pour tout $i$, $1 \leqslant i \leqslant N$, on pose*

$$P_i = \frac{\dim \rho_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \rho(g) \ .$$

*(i) $P_i$ est le projecteur de $E$ sur $V_i$ dans la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{N} V_i$.*

*(ii) $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant N$, $1 \leqslant j \leqslant N$.*

*(iii) Si $\rho$ est unitaire, $P_i$ est hermiten, ${}^t\overline{P_i} = P_i$.*

*Démonstration.* Choisissons $i_0$, $1 \leqslant i_0 \leqslant N$, et montrons que $P_{i_0}\big|_{V_{i_0}} = \mathrm{Id}_{V_{i_0}}$ et que, si $i \neq i_0$ , $P_{i_0}\big|_{V_i} = 0$ . Soit $x = \sum_{i=1}^{N} x_i$ , où $x_i \in V_i$ , et $x_i = \sum_{j=1}^{m_i} x_{i,j}$, où $x_{i,j} \in E_{i,j}$ , d'où $x = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m_i} x_{i,j}$ . Alors

$$P_{i_0}(x) = \frac{\dim \rho_{i_0}}{|G|} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{i_0}(g)} \rho(g) x_{i,j} = \frac{\dim \rho_{i_0}}{|G|} \sum_{i,j} \left( \sum_{g \in G} \overline{\chi_{i_0}(g)} \rho_i(g) \right) x_{i,j} \ .$$

Sachant que $\chi_{i_0}$ est une fonction centrale, et que $\rho_i$ est irréductible, on applique le lemme 3.5 et l'on obtient

$$\sum_{g\in G} \overline{\chi_{i_0}(g)}\rho_i(g) = \rho_{i,\overline{\chi_{i_0}}} = \frac{|G|}{\dim \rho_i}(\chi_{i_0} \mid \chi_i)\,\mathrm{Id}_{E_i} = \frac{|G|}{\dim \rho_{i_0}}\delta_{ii_0}\,\mathrm{Id}_{E_{i_0}} \ ,$$

pour obtenir finalement,

$$P_{i_0}(x) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i} \delta_{i_0 i} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{m_{i_0}} x_{i_0,j} = x_{i_0} \ .$$

Les relations $P_iP_j = 0$ si $i \neq j$, $P_i^2 = P_i$ sont des conséquences de (i).

Si $\rho$ est unitaire, alors

$${}^t\overline{\rho_{\overline{\chi_i}}} = \sum_g \chi_i(g)\ {}^t\overline{\rho(g)} = \sum_g \chi_i(g)\rho(g^{-1}) = \sum_g \chi_i(g^{-1})\rho(g) = \sum_g \overline{\chi_i(g)}\rho(g),$$

ce qui est égal à $\rho_{\overline{\chi_i}}$ , ce qui démontre (iii). □

La décomposition $E = \overset{N}{\underset{i=1}{\oplus}} V_i$ est unique à l'ordre près. Par contre, la décomposition $V_i = \overset{m_i}{\underset{j=1}{\oplus}} E_{i,j}$ n'est pas unique en général. Par exemple, si $\rho = \mathrm{Id}_E$, alors $\rho$ peut s'écrire d'une infinité de façons comme somme directe de représentations de dimension 1.

# 5 Représentations induites

L'induction est une opération qui associe à une représentation d'un sous-groupe $H$ d'un groupe $G$ une représentation du groupe $G$ lui-même. La représentation induite d'une représentation irréductible n'est pas, en général, irréductible.

## 5.1 Définition

Soit donc $G$ un groupe fini et $H$ un sous-groupe. Soit $(F,\pi)$ une représentation de $H$. On définit l'espace vectoriel

$$E = \{\varphi\ : G \to F \mid \forall\, h \in H, \varphi(gh) = \pi(h^{-1})\varphi(g)\} \ , \tag{5.1}$$

et l'on définit une représentation $\rho = \pi^{\uparrow G}$ de $G$ dans $E$ par

$$\forall\, \varphi \in E \quad , \quad (\rho(g_0)\varphi)(g) = \varphi(g_0^{-1}g) \ , \tag{5.2}$$

pour tout $g_0 \in G$ et pour tout $g \in G$. On vérifie que $\rho(g_0)\varphi$ appartient à $E$ puisque

$$(\rho(g_0)\varphi)(gh) = \varphi(g_0^{-1}gh) = \pi(h^{-1})\varphi(g_0^{-1}g) = \pi(h^{-1})\left((\rho(g_0)\varphi)(g)\right) \ ,$$

et d'autre part on vérifie que $g \mapsto \rho(g)$ est un morphisme de groupes de $G$ dans $\mathrm{GL}(E)$. La représentation de $G$ dans $E$, $\rho = \pi^{\uparrow G}$, est appelée la *représentation induite* de $\pi$ de $H$ à $G$.

Par exemple, si $H = \{e\}$ et si $\pi$ est la représentation triviale de $H$ dans $\mathbb{C}$, alors l'espace vectoriel $E$ est égal à $\mathbb{C}[G]$ et la représentation induite de $\pi$ de $H$ à $G$ est la représentation régulière de $G$.

### 5.2 Interprétation géométrique

On peut interpréter l'espace vectoriel $E$ comme l'espace des sections d'un « fibré vectoriel ». Considérons le produit cartésien $G \times F$ et introduisons la relation d'équivalence

$$(g, x) \sim (gh, \pi(h^{-1})x), \ \forall\, h \in H \ . \tag{5.3}$$

Soit $G \times_\pi F$ le quotient de $G \times F$ par cette relation d'équivalence et soit

$$q : G \times_\pi F \to G/H$$

la projection qui envoie la classe de $(g, x)$ sur $gH$ (qui est bien définie puisque, si $(g', x') \sim (g, x)$, alors $g' = gh$, pour un $h \in H$). On appelle $G \times_\pi F$ un *fibré vectoriel* de base $G/H$ car l'image réciproque par la projection $q$ d'un point quelconque de $G/H$ est isomorphe à l'espace vectoriel $F$.

Une *section* de la projection $q : G \times_\pi F \to G/H$ (ou du fibré $G \times_\pi F$) est, par définition, une application $\psi$ de $G/H$ dans $G \times_\pi F$ telle que $q \circ \psi = \mathrm{Id}_{G/H}$.

Montrons que $E$ n'est autre que l'espace vectoriel des sections de la projection $q$. À $\varphi \in E$ et $g \in G$ associons la classe d'équivalence de $(g, \varphi(g))$. Le résultat ne dépend que de la classe de $g$ modulo $H$. En effet, si $g' = gh$, avec $h \in H$, on obtient la classe de $(gh, \varphi(gh))$ qui est égale à la classe de $(g, \pi(h)\varphi(gh)) = (g, \varphi(g))$, car $\varphi \in E$. On définit donc ainsi une section de $q : G \times_\pi F \to G/H$. D'autre part, étant donné une section de $q$, on peut lui associer un élément de $E$ (en considérant la deuxième composante de la classe d'équivalence associée à un élément de $G/H$). Cette construction étant inverse de la précédente, on a donc obtenu un isomorphisme de $E$ sur l'espace vectoriel des sections du fibré vectoriel $G \times_\pi F$.

La notion de représentation induite peut être définie dans des situations plus générales que celle des groupes finis, et comporte de nombreuses applications en mathématiques et en physique.

## 6 Références

Les représentations des groupes finis sont l'objet du livre de Serre (1967), dont la partie I est un exposé des résultats fondamentaux. Elles sont étudiées dans Simon (1996) et Sternberg (1994). On pourra consulter aussi les premiers chapitres de Fulton-Harris (1991), qui traite ensuite les représentations d'algèbres de Lie, ou le cours de

Rauch (2000), orienté vers l'arithmétique. Les représentations induites sont traitées dans tous ces ouvrages. Pour les applications à la physique, voir Ludwig-Falter (1996) ou Blaizot-Toledano (1997).

Pour des compléments sur l'algèbre tensorielle et extérieure voir W. Greub, *Multilinear Algebra*, Springer, Berlin, 1967, ou encore Warner (1983), Sternberg (1994) ou Knapp (2002).

La théorie des caractères a été créée par Frobenius dans une série d'articles publiés à partir de 1896 dans les comptes rendus de l'Académie de Berlin. On y voit de belles tables de caractères. On trouvera une analyse historique et mathématique de cette théorie dans le livre de Curtis (1999) cité dans l'introduction. Voir aussi Rossmann (2002).

# 7 Exercices

**Exercice 2.1** *Le groupe symétrique* $\mathfrak{S}_3$.

On note $c$ la permutation circulaire (123) et $t$ la transposition (23). Montrer que $\{c, t\}$ engendre $\mathfrak{S}_3$, et que $tc = c^2t$, $ct = tc^2$. Déterminer les classes de conjugaison du groupe $\mathfrak{S}_3$.

**Exercice 2.2** *Représentations de* $\mathfrak{S}_3$.

a) Trouver les représentations de dimension 1 du groupe $\mathfrak{S}_3$.

b) Soit $e_1$, $e_2$, $e_3$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Pour $g \in \mathfrak{S}_3$, on pose $\sigma(g)e_i = e_{g(i)}$. Montrer qu'on définit ainsi une représentation, $\sigma$, de $\mathfrak{S}_3$ de dimension 3 (*représentation de permutation*) et que $V = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$ est invariant par $\sigma$.

On désigne par $\rho$ la restriction à $V$ de la représentation $\sigma$.

c) Montrer qu'il existe une base $(u_1, u_2)$ de $V$ telle que $\rho(t)u_1 = u_2$, $\rho(t)u_2 = u_1$, $\rho(c)u_1 = ju_1$, $\rho(c)u_2 = j^2u_2$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. La représentation $\rho$ est-elle irréductible ?

d) Établir la table de caractères de $\mathfrak{S}_3$.

e) Quelle est l'interprétation géométrique de $\mathfrak{S}_3$ comme groupe de symétries ? Quelle est l'interprétation géométrique de la représentation $\rho$ ?

**Exercice 2.3** *Groupe symétrique* $\mathfrak{S}_4$.

Déterminer les classes de conjugaison du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ et sa table de caractères.

**Exercice 2.4** *Groupe alterné* $\mathfrak{A}_4$.

Déterminer la table de caractères de $\mathfrak{A}_4$. Quelles représentations de $\mathfrak{A}_4$ sont la restriction d'une représentation de $\mathfrak{S}_4$ ? Quelles représentations de $\mathfrak{S}_4$ ont une restriction à $\mathfrak{A}_4$ irréductible ? réductible ?

**Exercice 2.5** *Produits tensoriels d'espaces vectoriels et de représentations.*

Si $E$ et $F$ sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie, on peut définir le produit tensoriel $E \otimes F$ comme l'espace vectoriel des applications bilinéaires de $E^* \times F^*$ dans le corps de base. Pour $x \in E$, $y \in F$, on définit l'élément $x \otimes y \in E \otimes F$ par

$$(x \otimes y)(\xi, \eta) =< \xi, x >< \eta, y > ,$$

pour tous $\xi \in E^*$, $\eta \in F^*$.

a) Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de $F$. Montrer que $(e_i \otimes f_j)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ est une base de $E \otimes F$.

b) On appelle tenseur (ou tenseur contravariant) d'ordre 2 sur $E$ un élément de $E \otimes E$. Tout tenseur d'ordre 2 sur $E$ s'écrit $T = \sum_{i,j=1}^{n} T^{ij} e_i \otimes e_j$, où les $T^{ij}$ sont des scalaires. Quelles sont les composantes de $T$ après changement de base ?

c) À $\xi \otimes y \in E^* \otimes F$, on associe l'application linéaire $u$ de $E$ dans $F$ définie par $u(x) =< \xi, x > y$, pour $x \in E$. Montrer que l'on définit ainsi un isomorphisme de $E^* \otimes F$ sur l'espace vectoriel des applications linéaires de $E$ dans $F$, $\mathcal{L}(E, F)$.

d) Montrer que si $u : E \to E$ et $v : F \to F$ sont des applications linéaires, il existe un unique endomorphisme $u \otimes v$ de $E \otimes F$ satisfaisant $(u \otimes v)(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y)$, pour tous $x \in E$, $y \in F$. Dans $E \otimes F$, on choisit pour base

$$(e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_1 \otimes f_p, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, \dots, e_2 \otimes f_p, \dots, e_n \otimes f_1, \dots, e_n \otimes f_p) .$$

Écrire la matrice de $u \otimes v$, où $u$ (resp., $v$) est un endomorphisme de $E$ (resp., $F$), de matrice $A = (a_{ij})$ (resp., $B = (b_{ij})$) dans les bases choisies.

e) Si $(E_1, \rho_1)$ et $(E_2, \rho_2)$ sont des représentations d'un groupe $G$, on pose

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g) .$$

Montrer que l'on définit ainsi une représentation $\rho_1 \otimes \rho_2$ de $G$ dans $E_1 \otimes E_2$. Que peut-on dire du caractère de $\rho_1 \otimes \rho_2$ ? Si $\rho_1$ et $\rho_2$ sont irréductibles, la représentation $\rho_1 \otimes \rho_2$ est-elle irréductible ?

**Exercice 2.6** *Représentation contragrédiente.*

Soit $(E, \pi)$ une représentation d'un groupe $G$. Pour $g \in G$, $\xi \in E^*$, $x \in E$, on pose $< \pi^*(g)(\xi), x > = < \xi, \pi(g^{-1})(x) >$.

a) Montrer que l'on définit ainsi une représentation $\pi^*$ de $G$ dans $E^*$. La représentation $\pi^*$ est appelée la *contragrédiente* de $\pi$.

b) Montrer que si $(E, \pi)$ et $(F, \rho)$ sont des représentations d'un groupe $G$, alors $g.u = \rho(g) \circ u \circ \pi(g^{-1})$, pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in G$, définit une représentation de $G$ dans $\mathcal{L}(E, F)$, équivalente à $\pi^* \otimes \rho$.

**Exercice 2.7** *Produit extérieur et produit symétrique.*

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, de base $(e_1, \cdots, e_n)$. On désigne par $\bigwedge^2 E$ (resp., $S^2E$) le sous-espace vectoriel de $E \otimes E$ engendré par $e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ (resp., $e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$). Ces définitions ne dépendent pas de la base choisie et $E \otimes E = \bigwedge^2 E \oplus S^2E$ . L'espace $\bigwedge^2 E$ est la *puissance antisymétrique* (ou *extérieure*) d'ordre 2 de $E$, et l'espace $S^2E$ est la *puissance symétrique* d'ordre 2 de $E$.

a) Si $(E, \rho)$ est une représentation d'un groupe $G$, $\bigwedge^2 E$ et $S^2E$ sont stables par $\rho \otimes \rho$. On désignera les restrictions par $\bigwedge^2 \rho$ et $S^2\rho$, respectivement. On suppose $G$ fini. Montrer que les caractères de ces représentations vérifient, pour tout $g \in G$,

$$\chi_{\wedge^2\rho}(g) = \frac{1}{2}\left((\chi_\rho(g))^2 - \chi_\rho(g^2)\right) \ , \ \ \chi_{S^2\rho}(g) = \frac{1}{2}\left((\chi_\rho(g))^2 + \chi_\rho(g^2)\right) \ .$$

b) Si $\rho$ est la représentation irréductible de dimension 2 de $\mathfrak{S}_3$, déterminer $\chi_{\wedge^2\rho}$ et $\chi_{S^2\rho}$. Décomposer $\rho \otimes \rho$ en somme directe de représentations irréductibles.

**Exercice 2.8** *Équivalence des représentations régulières gauche et droite.*

Montrer que les représentations régulières gauche et droite d'un groupe fini sont équivalentes.

**Exercice 2.9** *Représentations des groupes abéliens, représentations des groupes cycliques.*

a) Montrer que toute représentation irréductible d'un groupe fini est de dimension 1 si et seulement si le groupe est abélien.

b) Déterminer toutes les représentations irréductibles inéquivalentes du groupe cyclique d'ordre $n$.

**Exercice 2.10** *Utilisation des relations d'orthogonalité.*

Soient $\rho_i$ et $\rho_j$ des représentations irréductibles d'un groupe fini $G$. Soit $\chi_i = \chi_{\rho_i}$ et $\chi_j = \chi_{\rho_j}$. Montrer que, pour tout $h \in G$,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\chi_j(g^{-1}h) = \frac{1}{\dim\, \rho_i} \chi_i(h)\delta_{ij} \ .$$

**Exercice 2.11** *Représentation régulière de $\mathfrak{S}_3$.*

Décomposer la représentation régulière de $\mathfrak{S}_3$ en somme directe de représentations irréductibles.

Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels invariants de dimension 1 et un projecteur sur le sous-espace de la représentation $2\rho$, où $\rho$ est la représentation irréductible de dimension 2.

**Exercice 2.12** *Représentations réelles, représentations complexifiées.*

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension $n$. Un morphisme d'un groupe fini $G$ dans $\mathrm{GL}(E)$ est appelé une *représentation réelle* de $G$, de dimension (réelle) $n$.

On considère $E^{\mathbb{C}} = E \oplus iE = E \otimes \mathbb{C}$, espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension complexe $n$, appelé *complexifié* de $E$.

a) Montrer que toute représentation réelle de $G$ dans $E$ se prolonge de manière unique en une représentation (complexe) de $G$ dans $E^{\mathbb{C}}$. Cette représntation est appelée *complexifiée* de la représentation réelle.

b) On fait agir le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathbb{R}^2$ par rotations d'angles $\frac{2k\pi}{3}$ et symétries. Montrer que la complexifiée de cette représentation est équivalente à la représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathbb{C}^2$.

c) On fait agir le groupe cyclique d'ordre 3 sur $\mathbb{R}^2$ par rotations d'angles $\frac{2k\pi}{3}$. Cette représentation réelle est-elle irréductible ?

d) Toutes les représentations réelles irréductibles des groupes abéliens sont-elles de dimension 1 ?

**Exercice 2.13** *Représentations du groupe diédral.*

a) Montrer que, si $H$ est un sous-groupe abélien d'ordre $p$ d'un groupe fini $G$ d'ordre $n$, alors toute représentation irréductible de $G$ est de dimension $\leqslant \frac{n}{p}$.

b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 3$, toute représentation irréductible du groupe diédral $\mathcal{D}_n$ est de dimension 1 ou 2.

**Exercice 2.14** *Théorème de Peter-Weyl pour les groupes finis.*

Soient $\rho^1, \rho^2, \ldots, \rho^N$ des représentations unitaires d'un groupe fini $G$, choisies dans chaque classe de représentations irréductibles inéquivalentes.

Montrer que les coefficients matriciels dans des bases orthonormales des représentations $\rho^k$, $k = 1, \ldots, N$, forment une base orthogonale de $L^2(G)$. En déduire que toute fonction $f \in L^2(G)$ a un « développement de Fourier »,

$$f = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{\dim \rho_k} d_k \, (\rho^k_{ij} \mid f) \, \rho^k_{ij} \ ,$$

où les $d_k$ sont des entiers que l'on précisera.

**Exercice 2.15** *Représentation de* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ *dans les polynômes de degré* 2.

Soit $G$ un groupe et soit $\rho$ une représentation de $G$ dans $V = \mathbb{C}^n$. Soit $P^{(k)}(V)$ l'espace vectoriel des polynômes complexes sur $V$ homogènes de degré $k$.

a) Pour $f \in P^{(k)}(V)$, on pose $\rho^{(k)}(g)(f) = f \circ \rho(g^{-1})$. Montrer que l'on définit ainsi une représentation $\rho^{(k)}$ de $G$ dans $P^{(k)}(V)$.

b) Comparer $\rho^{(1)}$ et la représentation contragrédiente de $\rho$.

c) On suppose que $G = \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, $V = \mathbb{C}^2$ et $\rho$ est la représentation standard. Soit $k = 2$. À $f \in P^{(2)}(\mathbb{C}^2)$ défini par $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, on associe le vecteur $v_f = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ . Écrire la représentation $\tilde{\rho}$ de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^3$ définie par $\rho^{(2)}$ et l'isomorphisme ci-dessus. Déterminer la contragrédiente de $\tilde{\rho}$.

**Exercice 2.16** *Convolution.*

Soit $G$ un groupe fini et soit $\mathbb{C}[G]$ l'*algèbre du groupe*, c'est-à-dire l'espace vectoriel $\mathcal{F}(G)$ muni de la multiplication définie par $\epsilon_g \epsilon_{g'} = \epsilon_{gg'}$ et prolongée par linéarité.

a) Montrer que le produit de deux fonctions $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[G]$ est le produit de convolution $(f_1 * f_2)(g) = \sum_{h\in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g)$ .

b) Soit $\rho$ une représentation de $G$ et $f \in \mathbb{C}[G]$. On pose $\rho_f = \sum_{g\in G} f(g)\rho(g)$ . Montrer que $\rho_{f_1 * f_2} = \rho_{f_1} \circ \rho_{f_2}$ .

c) Montrer que $f \in \mathbb{C}[G]$ est une fonction centrale si et seulement si $f$ est dans le centre de l'algèbre $\mathbb{C}[G]$ munie du produit de convolution (c'est-à-dire commute au sens de la convolution avec toute fonction sur $G$).

**Exercice 2.17** *Sur l'application $f \mapsto \rho_f$.*

Pour toute représentation $(E,\rho)$ de $G$, et toute fonction $f$ sur $G$, on considère l'endomorphisme $\rho_f$ de $E$ défini par

$$\rho_f = \sum_{g\in G} f(g)\rho(g) \ .$$

a) Soit $R$ la représentation régulière de $G$. Étudier $R_f(\epsilon_g)$, pour $g \in G$. Montrer que $R_f(\epsilon_e) = f$. L'application $f \in \mathbb{C}[G] \mapsto R_f \in \mathrm{End}\,\mathbb{C}[G]$ est-elle injective ?

b) Soient $\rho_i$ et $\rho_j$ des représentations irréductibles de $G$ et soit $\chi_i$ (resp. $\chi_j$) le caractère de $\rho_i$ (resp. $\rho_j$). Évaluer $\rho_f$ pour $\rho = \rho_j$ et $f = \overline{\chi_i}$.

**Exercice 2.18** *Produits tensoriels de représentations.*

Soit $\rho$ la représentation irréductible de dimension 2 du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$. On pose $\rho = \rho^{\otimes 1}$ et l'on définit par récurrence, pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\rho^{\otimes k} = \rho^{\otimes (k-1)} \otimes \rho \ .$$

a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, décomposer $\rho^{\otimes k}$ en somme directe de représentations irréductibles.

b) Soit $\mathfrak{A}_3 \subset \mathfrak{S}_3$ le groupe alterné. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, décomposer en somme directe de représentations irréductibles la restriction de $\rho^{\otimes k}$ à $\mathfrak{A}_3$.