Mécanique des milieux continus

Tome II
Thermoélasticité

Jean Salençon

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

LES ÉDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Ce logo a pour objet d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, tout particulièrement dans le domaine universitaire, le développement massif du « photocopillage ».
Cette pratique qui s'est généralisée, notamment dans les établissements d'enseignement, provoque une baisse brutale des achats de livres, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que la production et la vente sans autorisation, ainsi que le recel, sont passibles de poursuites.
Les demandes d'autorisation de photocopier doivent être adressées à l'éditeur ou au Centre français d'exploitation du droit de copie :
20, rue des Grands-Augustins , 75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70.

Du même auteur

Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols
© Eyrolles - 1974 - 178 pages

Application of the theory of plasticity in soil mechanics
© John Wiley and Sons Ltd - 1977 - 158 pages - ISBN 0-47174984-2

Viscoélasticité - © Presses de l'École nationale des ponts et chaussées
1983 - 92 pages - ISBN 2-85978-051-3

Calcul à la rupture et analyse limite - © Presses de l'École nationale des ponts et chaussées
1983 - 366 pages - ISBN 2-85978-059-9

Élastoplasticité - (B. Halphen et J. Salençon)
© Presses de l'École nationale des ponts et chaussées - 1987 - 448 pages - ISBN 2-85978-094-7

Mécanique des milieux continus - © Ellipses - 1988
Tome 1 - Concepts généraux - 270 pages - ISBN 2-7298-8854-3
Tome 2 - Élasticité - Milieux curvilignes - 316 pages - ISBN 2-7298-8863-2

Mécanique du continu - © Ellipses - 1995
Tome 1 - Concepts généraux - 352 pages - ISBN 2-7298-4551-8
Tome 2 - Thermoélasticité - 286 pages - ISBN 2-7298-4565-8
Tome 3 - Milieux curvilignes - 192 pages - ISBN 2-7298-5527-0

Mécanique des milieux continus © Éditions de l'École Polytechnique - 2005
Tome 1 - Concepts généraux - 360 pages - ISBN 2-7302-1245-0
Mécanique des milieux continus © Éditions de l'École Polytechnique - 2002
Tome 2 - Thermoélasticité - 316 pages - ISBN 2-7302-0961-1
Tome 3 - Milieux curvilignes - 152 pages - ISBN 2-7302-0962-X

Handbook of Continuum Mechanics © Springer - 2001
804 pages - ISBN 3-540-41443-6

de l'Élasto-plasticité au Calcul à la rupture © Éditions de l'École polytechnique - 2002
262 pages - ISBN 2-7302-0915-8

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

© Éditions de l'École polytechnique - Novembre 2007
91128 Palaiseau Cedex

Mécanique des milieux continus

Tome I. Concepts généraux

Avant-propos

Chapitre I. *Le milieu continu : une modélisation*

Chapitre II. *Étude des déformations du milieu continu*

Chapitre III. *Cinématique du milieu continu*

Chapitre IV. *Les puissances virtuelles et la modélisation des efforts*

Chapitre V. *Modélisation des efforts pour le milieu continu*

Chapitre VI. *Étude des contraintes*

Annexe I. *Éléments de calcul tensoriel*

Annexe II. *Opérateurs différentiels : formules essentielles*

Index alphabétique

Tome II. Thermoélasticité

Chapitre VII. *Le comportement thermoélastique*

Chapitre VIII. *Évolutions et équilibres thermoélastiques*

Chapitre IX. *Quelques thèmes classiques en élasticité tridimensionnelle*

Chapitre X. *Approches variationnelles en thermoélasticité linéarisée*

Annexe III. *Éléments d'élasticité plane*

Bibliographie

Index alphabétique

Tome III. Milieux curvilignes

Chapitre XI. *Statique des milieux curvilignes*

Chapitre XII. *Structures curvilignes thermoélastiques*

Glossaire

Bibliographie

Index alphabétique

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Sommaire

VII Le comportement thermoélastique **7**
1 De l'expérience à la loi de comportement . . . 13
2 Constatations expérimentales . . . 13
3 Éléments de thermodynamique des milieux continus . . . 18
4 Loi de comportement thermoélastique . . . 26
5 Thermoélasticité linéaire en l'absence de liaisons internes . . . 38
6 Aperçu historique . . . 55
Récapitulatif des formules essentielles . . . 59
Exercices . . . 62

VIII Évolutions et équilibres thermoélastiques **71**
1 Évolution thermoélastique quasi-statique . . . 79
2 Linéarisation du problème d'évolution thermoélastique quasi-statique 88
3 Équilibre thermoélastique linéarisé . . . 94
4 Résolution du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé . . . 100
5 Méthode des déplacements . . . 107
6 Méthode des contraintes . . . 111
7 Torsion d'une barre cylindrique . . . 118
8 Principe de Saint Venant . . . 131
Récapitulatif des formules essentielles . . . 136
Exercices . . . 140

IX Quelques thèmes classiques en élasticité tridimensionnelle **145**
1 Présentation générale . . . 151
2 Traction-compression d'une barre cylindrique . . . 152
3 Flexion normale d'une barre cylindrique . . . 158
4 Flexion déviée d'une barre cylindrique . . . 165
5 Flexion composée d'une barre cylindrique . . . 168
6 Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression . . . 172
7 Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression . . . 177
Récapitulatif des formules essentielles . . . 181
Exercices . . . 183

X Approches variationnelles en thermoélasticité linéarisée **197**
1 Méthodes directes et méthodes variationnelles . . . 205
2 Minimum de l'énergie potentielle . . . 214

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

3 Minimum de l'énergie complémentaire 220
4 Approches variationnelles 227
5 État initial naturel, équilibre isotherme 234
6 Champs d'autocontrainte. Théorème du potentiel minimum 242
7 Problème paramétré 247
8 Théorèmes de l'énergie pour les problèmes paramétrés 256
9 Pour conclure 265
10 Note historique 266
Récapitulatif des formules essentielles 269
Exercices 274

Annexe

III Éléments d'élasticité plane **287**
1 Problèmes plans 293
2 Équilibre thermoélastique en déformation plane 293
3 Équilibre thermoélastique en contrainte plane 306
Récapitulatif des formules essentielles 315

Bibliographie **317**

Index alphabétique **325**

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Chapitre VII

Le comportement thermoélastique

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MOTS CLÉS

Loi de comportement. Principe d'action locale.
Énergie interne. Équation de l'énergie.
Entropie. Énergie libre. Dissipation.
Inégalité de Clausius-Duhem.
Potentiel thermodynamique.
Symétries de la matière. Isotropie.
Linéarisation.
Coefficients de Lamé. Module de cisaillement.
Module de Young. Coefficient de Poisson
État initial naturel. État initial précontraint.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En bref...

L'expérience met en évidence le comportement thermoélastique des matériaux, caractérisé par la *réversibilité* (section 2).

La construction du modèle correspondant s'appuie sur les principes généraux qui s'imposent à toute loi de comportement, parmi lesquels les principes de la thermodynamique des milieux continus exprimés par : l'*équation de l'énergie* pour le premier principe, l'*inégalité fondamentale* pour le deuxième principe (section 3).

Le modèle de comportement thermoélastique est obtenu à partir de l'hypothèse que les valeurs actuelles de la température et du tenseur des déformations de l'élément de matière suffisent à définir l'état de celui-ci. L'inégalité fondamentale fournit alors la loi de comportement thermoélastique en représentation lagrangienne. L'énergie libre apparaît comme le *potentiel thermodynamique*, fonction des valeurs actuelles de la température et du tenseur des déformations. Le tenseur des contraintes s'en déduit par dérivation par rapport au tenseur des déformations (section 4).

Lorsque la *déformation* est *infinitésimale* et la variation de température *petite*, cette loi de comportement peut être linéarisée : c'est la linéarisation physique de la relation entre contraintes, déformations et variation de température. Si, de plus, la *transformation* est *infinitésimale*, la linéarisation peut être poursuivie : c'est la linéarisation géométrique. Elle aboutit à une relation linéaire entre le tenseur des contraintes de Cauchy, le tenseur des déformations linéarisé et la variation de température (section 5).

La loi de comportement linéarisée fait intervenir des *modules* élastiques et des *coefficients de dilatation thermique*, caractéristiques physiques intrinsèques du matériau, dont le nombre est réduit par les *symétries matérielles* et qui vérifient la condition de *stabilité* du matériau. La thermoélasticité linéaire du matériau isotrope est ainsi caractérisée par *deux* modules élastiques et *un* coefficient de dilatation thermique (section 5).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Principales notations

Notation	Signification	1ère formule
$r(\underline{x},t)$	densité volumique de chaleur reçue	(3.2)
$\boldsymbol{E}$	énergie interne du système	(3.5)
$\overset{\circ}{Q}$	taux de chaleur reçue	(3.5)
$\boldsymbol{e}(\underline{x},t)$	énergie interne massique	(3.8)
$\underline{q}(\underline{x},t)$	courant de chaleur sortant dans κ_t	(3.13)
$T(\underline{x},t)$	température absolue	(3.22)
$\boldsymbol{S}$	entropie du système	(3.22)
$\boldsymbol{s}(\underline{x},t)$	entropie massique	(**??**)
ψ	énergie libre massique	(3.26)
Φ	dissipation volumique	(3.28)
$\underline{q}_0(\underline{X},t)$	courant de chaleur sortant dans κ_0	(3.32)
ψ^*	transformée de Legendre-Fenchel de ψ	(4.21)
$\varphi_p(\underline{\underline{e}})$	$=0$, liaison interne	(4.29)
η_p	multiplicateur de Lagrange associé à une liaison interne	(4.37)
I'_1, I'_2, I'_3	invariants de $\underline{\underline{e}}$	(4.43)
$\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$	tenseur d'élasticité	(5.3)
$\underline{\underline{k}}$	tenseur des coefficients thermiques	(5.3)
τ	variation de température	(5.3)
λ	constante de Lamé	(5.12)
μ, G	module de cisaillement	(5.12)
E	module de Young	(5.15)
ν	coefficient de Poisson	(5.15)
α	coefficient de dilatation thermique linéique	(5.15)
K	module élastique de compression	(5.39)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 De l'expérience à la loi de comportement 13
2 Constatations expérimentales 13
2.1 Généralités 13
2.2 Expérience de traction simple 15
2.3 Autres résultats expérimentaux 16
2.4 Commentaires 17
3 Éléments de thermodynamique des milieux continus . . 18
3.1 Description des échanges 18
3.2 Premier principe : équation de l'énergie 19
3.3 Deuxième principe : inégalité fondamentale et inégalité de Clausius-Duhem 22
3.4 Expressions lagrangiennes 24
4 Loi de comportement thermoélastique 26
4.1 Hypothèses de l'élasticité 26
4.2 Loi de comportement thermoélastique 27
4.3 Loi de comportement thermoélastique avec liaisons internes 32
4.4 Respect des symétries de la matière 35
4.5 Matériau thermoélastique isotrope dans la configuration de référence 36
4.6 Les liaisons internes du point de vue eulérien 37
5 Thermoélasticité linéaire en l'absence de liaisons internes 38
5.1 Présentation 38
5.2 Linéarisation physique 38
5.3 Matériau thermoélastique linéaire isotrope 42
5.4 Transformation infinitésimale : linéarisation géométrique 44
5.5 Stabilité du matériau thermoélastique 50
5.6 Quelques valeurs typiques pour des matériaux usuels . . 52
5.7 Exemples de matériaux thermoélastiques anisotropes . . 53
6 Aperçu historique 55
Récapitulatif des formules essentielles 59
Exercices 62

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Le comportement thermoélastique

1 De l'expérience à la loi de comportement

Le comportement thermoélastique des matériaux nous est révélé par des expériences quotidiennes : dilatations ou contractions linéiques et volumiques sous l'effet de variations de température, utilisation des propriétés élastiques des métaux, mais aussi de polymères, pour la fabrication de ressorts, clavettes et « clips » en tous genres ... Ainsi, du point de vue phénoménologique, le concept de thermoélasticité est-il associé à une notion de réversibilité : la réponse du matériau à la sollicitation thermique et mécanique qui lui est imposée est instantanée et l'annulation de la sollicitation entraîne le retour du matériau à son état initial sans aucun effet rémanent.

L'objet du présent chapitre est, dans le cadre de la modélisation du milieu continu classique construite dans les chapitres précédents, de formuler pour un milieu tridimensionnel les relations existant ***localement*** entre le champ de déformation, le champ des efforts intérieurs et le champ de température, lorsque le matériau considéré est thermoélastique. En d'autres termes on se propose d'écrire la ***loi de comportement du matériau thermoélastique.***

On a déjà évoqué, au chapitre VI (§ 4.2), certains principes qui régissent l'écriture des lois de comportement : isotropie de l'espace, respect des symétries de la matière ; mais l'énoncé précédent fait maintenant apparaître un principe essentiel, le ***principe d'action locale*** : les efforts intérieurs représentés dans la modélisation par les contraintes, qui correspondent à des actions purement locales (cf. chapitre V, § 3.4), ne sont reliés par la loi de comportement thermoélastique qu'à des grandeurs qui ne font intervenir que la particule considérée et les particules voisines.

En outre il ne va pas du tout de soi que la formulation de la loi de comportement thermoélastique, comme celle de toute loi de comportement, devra être en accord avec les principes de la thermodynamique, c'est-à-dire avec l'inégalité introduite par le second principe. Pour mettre à profit cette information on introduira quelques notions sur la thermodynamique des milieux continus, renvoyant le lecteur à des ouvrages plus spécialisés pour l'approfondissement de ce domaine.

2 Constatations expérimentales

2.1 Généralités

Même si, comme on vient de le rappeler, elle doit obéir à des principes généraux qui en codifient, en quelque sorte, l'écriture, une loi de comportement est avant tout issue de constations expérimentales.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On a vu au chapitre V (§ 3.3) que les équations de la dynamique s'écrivent comme :

- trois équations aux dérivées partielles du 1er ordre pour les équations de champs,
- trois équations au contour qui fournissent les conditions aux limites sur la frontière du système,

alors que la détermination de $\underline{\underline{\sigma}}$ correspond à celle de six champs scalaires indépendants (composantes indépendantes de $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},\underline{t})$ symétrique). On voit que ces équations, en supposant les champs $\underline{F}$, $\underline{a}$, $\underline{T}_\Omega$ connus, par exemple dans le cas de la statique (ou quasi-statique) où $\underline{a}(\underline{x},\underline{t}) = 0\,, \forall \underline{x} \in \Omega_t$, ne permettent pas de déterminer le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ dans le système étudié (éprouvette ou corps d'épreuve). De la même façon d'ailleurs, les conditions aux limites imposées en déplacements ne permettent pas d'y déterminer le champ de déformation.

Ainsi le problème posé n'est pas, à proprement parler, celui de la détermination de la loi de comportement à partir de l'expérience, mais se présente plus précisément comme l'***identification*** d'une loi locale, dans le cadre d'une modélisation géométrique et mécanique, fondée sur des résultats expérimentaux à caractère global. Il apparaît dans toute sa généralité, d'une très grande complexité, sinon inextricable. Aussi l'on cherche, dans la pratique, à réaliser des expériences où l'on puisse retenir l'hypothèse d'homogénéité des champs concernés. L'homogénéité, ***à l'échelle macroscopique considérée***, du matériau constitutif du corps d'épreuve doit évidemment être assurée et, par des conditions au contour suffisamment contraignantes, notamment par la géométrie choisie pour l'éprouvette, et par la forme des sollicitations, on espère imposer l'homogénéité du champ de contrainte et du champ de déformation ou, du moins, ne leur permettre que de faibles variations autour de l'état homogène. Par exemple, dans cet esprit, de nombreuses expériences classiques essaient de réaliser des champs de contraintes homogènes dans lesquels l'état de contrainte en chaque point est un des états simples étudiés au chapitre VI, § 3.5 : expériences de traction simple, de compression simple ou de cission simple.

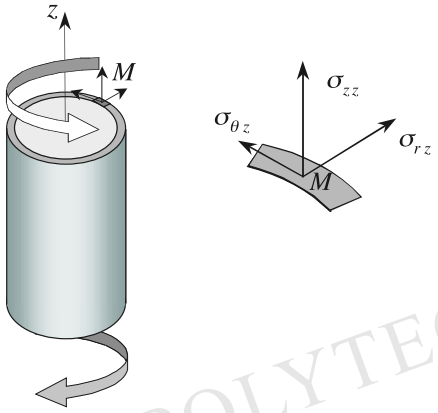


Figure 1 – Torsion d'un tube mince

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L'expérience de torsion d'un ***tube mince*** de section circulaire (figure 1) vise ainsi à réaliser en chaque point de l'éprouvette un état de cission simple dont les composantes dans la base orthonormée des coordonnées cylindriques soient constantes [1] : $\sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} =$ constante, autres $\sigma_{ij} = 0$. Des champs de contrainte plus complexes peuvent aussi être obtenus : expérience de traction-torsion d'un tube mince par exemple (figure 4).

À noter que l'on doit, dans toutes ces expériences, porter attention aux conditions thermiques. En règle générale on considère que les expériences sont faites à température constante dans le temps et homogène dans l'éprouvette.

2.2 Expérience de traction simple

La figure 2 représente une éprouvette typique constituée d'un métal homogène pour une expérience de traction simple. Elle est caractérisée par :

- des extrémités surdimensionnées (pour éviter les « effets d'extrémités »),
- des congés de raccordement entre la partie médiane et les extrémités (pour éviter les effets de concentration de contrainte que provoquent les angles vifs),
- une partie médiane cylindrique dans laquelle le champ de contrainte est supposé homogène, de traction simple parallèlement à l'axe de l'éprouvette [2].

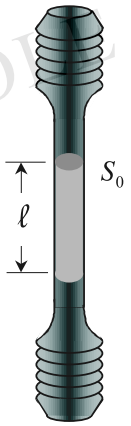


Figure 2 – Éprouvette pour une expérience de traction

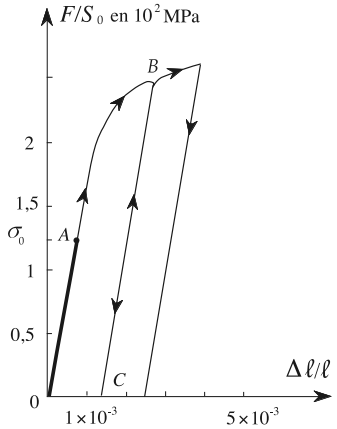


Figure 3 – Diagramme de traction pour un acier inox

L'expérience dans sa forme la plus simple consiste à enregistrer, en fonction de l'allongement relatif de la longueur initiale ℓ_0 marquée sur la partie utile de l'éprouvette

$$(\ell - \ell_0)/\ell_0 = \Delta\ell/\ell_0 \ ,$$

[1] Une telle expérience devra toutefois être analysée très précisément en fonction des propriétés de symétrie (isotropie, anisotropie, cf. § 5.7) du matériau constitutif.

[2] Le matériau constitutif (métal) est supposé isotrope. Pour les matériaux anisotropes l'expérience de traction simple « hors axes » nécessite des précautions particulières concernant notamment le montage de l'éprouvette.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

l'évolution de la force de traction F ou du rapport F/S_0, où S_0 désigne l'aire initiale de la section médiane.

La figure 3 donne un exemple d'un tel enregistrement réalisé pour un acier inox, à propos duquel on observe, en première analyse, les propriétés suivantes :

a) indépendance du diagramme vis-à-vis de la vitesse de chargement, c'est-à-dire de $(\overline{\Delta\dot{\ell}/\ell_0})$;

b) « réversibilité » de la partie OA du diagramme de charge : dans une décharge totale ou partielle effectuée après une charge jusqu'à un niveau inférieur au seuil σ_0 correspondant au point A sur la courbe, on parcourt, dans le sens inverse, le même segment de la partie OA du diagramme de charge ;

c) linéarité de cette partie réversible du diagramme ;

d) au-delà du seuil σ_0, c'est-à-dire lorsque la charge initiale dépasse le point A, la décharge ultérieure est représentée sur le diagramme par une courbe différente de la courbe de charge : courbe OAB à la première charge, courbe BC à la décharge ; notamment après décharge totale, c'est-à-dire lorsque F est ramenée à zéro, l'éprouvette présente un allongement rémanent.

La partie réversible du diagramme de traction est, par définition, représentative du ***comportement élastique*** du matériau. Le point A et la valeur σ_0 correspondent à la limite initiale d'élasticité dans cette expérience (cf. chapitre VI, § 4.1).

La linéarité observée pour le segment OA caractérise le comportement ***élastique linéaire***.

Une autre constatation expérimentale doit également être rapportée qui n'apparaît pas sur le diagramme de la figure 3 : au cours de la traction on observe une réduction de la section de l'éprouvette, qui évolue linéairement quand on parcourt le segment OA du diagramme de charge ; cette variation de la section est elle aussi réversible sur OA.

2.3 Autres résultats expérimentaux

D'autres expériences mettent en évidence les mêmes caractéristiques de comportement : la compression simple d'une éprouvette ou la torsion simple d'un tube mince, pour citer des exemples où le chargement ne dépend que d'un paramètre (force ou couple). Dans la traction-torsion d'un tube mince le chargement dépend de deux paramètres (force et couple simultanément) et induit dans l'éprouvette un champ de contrainte dont les composantes dans la base orthonormée des coordonnées cylindriques sont supposées de la forme : $\sigma_{zz} = \text{constante}$, $\sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = \text{constante}$, autres σ_{ij} nulles. On y met en évidence le domaine initial d'élasticité du matériau (cf. chapitre VI, § 4.1) à l'intérieur duquel il y a réversibilité des déformations subies par l'éprouvette ; la figure 4 donne l'exemple d'un domaine ainsi déterminé (expérience de traction-compression et torsion).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

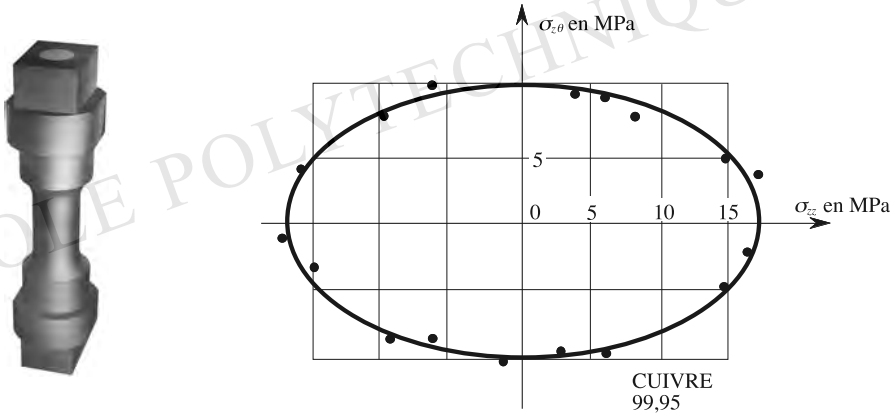


Figure 4 – Éprouvette pour l'expérience de traction-compression et torsion d'un tube mince ; exemple de domaine initial d'élasticité déterminé expérimentalement (H.D. Bui, 1970)

2.4 Commentaires

Historiquement la découverte du comportement élastique linéaire est attribuée à Robert Hooke (mécanicien, physicien, astronome et naturaliste anglais, 1635-1703) dans les années 1660, à partir d'expériences sur des ressorts à boudin et spirales et sur la traction d'un fil métallique.

« Ut tensio sic vis »

est la phrase par laquelle Hooke énonça cette propriété dans un ouvrage paru en 1678 [3][4].

Il convient aussi à ce propos de citer Edme Mariotte (abbé, physicien français, 1620-1684), qui fit la même découverte que Hooke, indépendamment de celui-ci, vers 1680.

[3] Extrait du livre *The New Science of Strong Materials* par J.E. Gordon : « Hooke, like Horace, did not suffer unduly from modesty and he staked his claim to priority in a number of fields by publishing in 1676 *A decimate of the centesme of the inventions I intend to publish* among which was « The true theory of elasticity or springiness ». This heading was followed simply by the anagram « ceiiinossttuu ». The scientific public were left to make what they could of this until, in 1679, Hooke published *De potentia restitutiva, or of a spring* where the anagram was revealed as « Ut tensio *sic uis » - « As the extension, so the force ».* Tensio means, generally, not tension but extension in Latin. The truth seems to be that the Romans muddled up the two ideas. Literary writers probably never thought about the matter at all ».

[4] On peut rappeler que Galileo Galilei lui-même avait eu recours à une anagramme pour informer secrètement Johannes Kepler de sa découverte des phases de Vénus : « Haec immatura a me iam frustra leguntur o y » pour « Cynthiae figuras aemulatur mater amorum » (« En vain ces choses sont lues par moi prématurément » pour « La mère des amours imite les phases de Diane »).

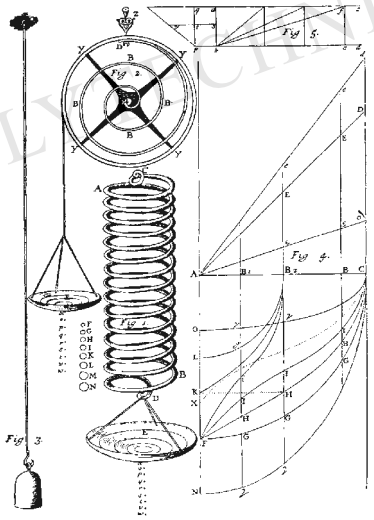


Figure 5 – Planche extraite de Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies, *R. Hooke, (1678)*

3 Éléments de thermodynamique des milieux continus

3.1 Description des échanges

Le système étudié $\mathcal{S}$ occupe, dans la configuration actuelle κ_t, le domaine $\mathcal{D}$ de volume Ω_t et de frontière $\partial\Omega_t$, transportés convectivement de $\mathcal{D}_0, \Omega_0$ et $\partial\Omega_0$ dans la configuration de référence κ_0. Les sous-systèmes $\mathcal{S}'$ sont définis de façon semblable.

Le système $\mathcal{S}$ n'échange avec l'extérieur que de la chaleur et du travail. Il en va de même pour un sous-système $\mathcal{S}'$ quelconque et l'extérieur de $\mathcal{S}'$.

Dans le formalisme du milieu continu tridimensionnel, la description des efforts extérieurs a été donnée au chapitre V (§ 2.2 et 3.1), en supposant que les particules du système n'exercent entre elles aucune action à distance :

- forces de volume définies par une densité massique $\underline{F}(\underline{x}, t)$,
- forces de surface s'exerçant sur le contour de $\mathcal{S}$, ou de $\mathcal{S}'$, et définies par une densité surfacique $\underline{T}_\Omega(\underline{x}, t)$ pour $\mathcal{S}$; $\underline{T}_{\Omega'}(\underline{x}, t)$ pour $\mathcal{S}'$.

La puissance de ces efforts extérieurs dans le mouvement réel exprime le taux de travail reçu de l'extérieur par $\mathcal{S}$ où $\mathcal{S}'$:

$$\mathcal{P}'_{(\mathrm{e})}(\underline{U}) = \int_{\Omega'_t} \rho \underline{F}(\underline{x}, t) \,.\, \underline{U}(\underline{x}, t) \, \mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} \underline{T}_{\Omega'}(\underline{x}, t) \,.\, \underline{U}(\underline{x}, t) \, \mathrm{d}a \,. \tag{3.1}$$

Pour les échanges de chaleur, on fait l'hypothèse que le taux de chaleur reçue par $\mathcal{S}$ résulte de l'addition de deux contributions :

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- l'une ***volumique***, qui exprime le taux de chaleur fournie à distance aux particules de $\mathcal{S}$ par l'extérieur de $\mathcal{S}$; elle se met sous la forme de l'intégrale sur Ω_t d'une densité volumique $r(\underline{x}, t)$;
- l'autre ***surfacique***, intégrale sur la frontière de $\mathcal{S}$ d'une densité surfacique $h_\Omega(\underline{x}, t)$.

Ainsi $\overset{\circ}{Q}$, ***taux de chaleur reçue*** par le système $\mathcal{S}$, s'écrit :

$$\overset{\circ}{Q} = \int_{\partial\Omega_t} h_\Omega(\underline{x}, t)\mathrm{d}a + \int_{\Omega_t} r(\underline{x}, t)\mathrm{d}\Omega_t \ . \tag{3.2}$$

Pour $\mathcal{S}'$, on postule une décomposition semblable. On fait de plus l'hypothèse qu'il n'y a ***pas d'échange de chaleur à distance*** entre les particules de $\mathcal{S}$. Il en résulte que :

- la ***contribution volumique*** pour $\mathcal{S}'$ quelconque est l'intégrale de la même densité volumique définie pour $\mathcal{S}$, $r(\underline{x}, t)$ sur Ω'_t ;
- la ***contribution surfacique*** est l'intégrale sur $\partial\Omega'_t$ d'une densité surfacique $h_{\Omega'}(\underline{x}, t)$ qui, n'apparaissant pas dans (3.2), exprime les échanges de chaleur entre les particules sur $\partial\Omega'_t$ et les particules de $(\mathcal{S} - \mathcal{S}')$. Puisque les échanges de chaleur à distance entre particules du système sont exclus, $h_{\Omega'}(\underline{x}, t)$ exprime les échanges par conduction et ne dépend que des éléments locaux du premier ordre de $\partial\Omega'_t$, c'est-à-dire :

$$h_{\Omega'}(\underline{x}, t) = h(\underline{x}, t, \underline{n}(\underline{x})) \ . \tag{3.3}$$

D'où :

$$\overset{\circ}{Q}' = \int_{\partial\Omega'_t} h(\underline{x}, t, \underline{n}(\underline{x}))\,\mathrm{d}a + \int_{\Omega'_t} r(\underline{x}, t)\,\mathrm{d}\Omega_t \ . \tag{3.4}$$

3.2 Premier principe : équation de l'énergie

On suppose que l'état thermodynamique de ce système est déterminé par la connaissance de certains champs définis sur κ_t (ou sur κ_0).

Le premier principe de la thermodynamique postule l'existence d'une fonction de l'état thermodynamique du système, appelée ***énergie interne, additive***, notée $\boldsymbol{E}$, ayant la dimension d'un travail telle que :

à chaque instant, la somme de la dérivée particulaire de l'énergie interne $\boldsymbol{E}$ de $\mathcal{S}$, et de la dérivée particulaire de ***l'énergie cinétique*** K de $\mathcal{S}$, est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs exercés sur le système dans le mouvement réel, $\mathcal{P}_{(\mathrm{e})}(\underline{U})$, et du taux de chaleur reçue par le système, $\overset{\circ}{Q}$:

$$\dot{\boldsymbol{E}} + \dot{K} = \mathcal{P}_{(\mathrm{e})}(\underline{U}) + \overset{\circ}{Q} \ . \tag{3.5}$$

Le même énoncé est valable pour tout sous-système $\mathcal{S}'$:

$$\dot{\boldsymbol{E}}' + \dot{K}' = \mathcal{P}'_{(\mathrm{e})}(\underline{U}) + \overset{\circ}{Q}' \tag{3.6}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

et l'énergie cinétique a l'expression donnée au chapitre IV (§ 7.5) :

$$K' = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x},t)\,\underline{U}^2(\underline{x},t)\mathrm{d}\Omega_t \,. \tag{3.7}$$

On introduit alors la densité massique d'énergie interne $\boldsymbol{e}(\underline{x},t)$, appelée aussi énergie interne spécifique, et l'on a :

$$\boldsymbol{E}' = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x},t)\,\boldsymbol{e}(\underline{x},t)\mathrm{d}\Omega_t \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{E}}' = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x},t)\,\dot{\boldsymbol{e}}(\underline{x},t)\mathrm{d}\Omega_t \,. \tag{3.8}$$

La formule (3.6) s'explicite en simplifiant les notations[5] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{\Omega'_t} \rho(\boldsymbol{e} + \frac{\underline{U}^2}{2})\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega'_t} (\rho \underline{F}\,.\,\underline{U} + r)\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} (\underline{T}_{\Omega'}\,.\,\underline{U} + h(\underline{n}))\,\mathrm{d}a \,. \end{array} \right. \tag{3.9}$$

Si le champ de vitesse réel $\underline{U}$ est continu et continûment différentiable on peut, dans (3.5) et (3.6), appliquer le théorème de l'énergie cinétique (chapitre IV, § 7.5), qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\,, \\ \mathcal{P}'_{(\mathrm{e})}(\underline{U}) + \mathcal{P}'_{(\mathrm{i})}(\underline{U}) = \dot{K}' \end{array} \right.$$

d'où, par substitution dans (3.1) et (3.2) :

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \overset{\circ}{Q} - \mathcal{P}_{(\mathrm{i})}(\underline{U}) \tag{3.10}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}' = \overset{\circ}{Q}' - \mathcal{P}'_{(\mathrm{i})}(\underline{U}) \,. \tag{3.11}$$

On peut alors remplacer $\mathcal{P}'_{(\mathrm{i})}(\underline{U})$ par son expression au moyen de la représentation des efforts intérieurs par les contraintes de Cauchy et l'on obtient :

$$\forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\,, \int_{\Omega'_t} \rho\,\dot{\boldsymbol{e}}\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega'_t} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + r)\,\mathrm{d}\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} h(\underline{n})\,\mathrm{d}a \,. \tag{3.12}$$

L'équation (3.9), transformée en (3.12) à travers le théorème de l'énergie cinétique, exprime le premier principe de la thermodynamique sous la ***forme globale*** d'une équation de bilan.

L'équation (3.12) est valable pour tout système $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$. Elle exprime l'égalité entre l'intégrale sur Ω'_t de la densité volumique scalaire $(\rho\,\dot{\boldsymbol{e}} - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - r)$ définie dans Ω_t et l'intégrale sur $\partial\Omega'_t$ d'une densité surfacique scalaire définie dans Ω_t et fonction de la position et de l'orientation de la surface élémentaire considérée, $h(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x}))$. Cet énoncé implique (cf. figure 6) que la densité $h(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x}))$, supposée continue et de classe C^1, est définie dans Ω_t par un champ vectoriel $\underline{q}(\underline{x}\,,\,t)$ et dépend linéairement de $\underline{n}(\underline{x})$ en chaque point de Ω_t sous la forme d'un flux :

$$h(\underline{x},t,\underline{n}(\underline{x})) = -\underline{q}(\underline{x},t)\,.\,\underline{n}(\underline{x}) \,. \tag{3.13}$$

[5] On supprime, sous les signes « intégrales », les dépendances des diverses grandeurs en fonction de $\underline{x}$ et de t.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Le vecteur $\underline{q}(\underline{x},,t)$ est appelé ***courant de chaleur sortant***[6] au point M, où le champ $\underline{q}$ est continu et de classe C^1. Cela signifie que les échanges de chaleur entre les éléments du système ne se font que par conduction entre les particules. Le taux de chaleur reçue par $\mathcal{S}'$ s'écrit alors :

$$\overset{\circ}{Q}{}' = -\int_{\partial\Omega'_t} \underline{q}\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}a + \int_{\Omega'_t} r\,\mathrm{d}\Omega_t \tag{3.14}$$

ou, en application de la formule de la divergence,

$$\overset{\circ}{Q}{}' = \int_{\Omega'_t} (-\mathrm{div}\,\underline{q} + r)\,\mathrm{d}\Omega_t\ . \tag{3.15}$$

L'énoncé (3.12) du premier principe devient alors :

$$\forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S},\ \int_{\Omega'_t} \rho\,\dot{\boldsymbol{e}}\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega'_t} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + r - \mathrm{div}\,\underline{q})\,\mathrm{d}\Omega_t\ . \tag{3.16}$$

On en déduit, l'expression locale du premier principe de la thermodynamique en représentation eulérienne, qui est appelée ***équation de l'énergie*** :

$$\boxed{\rho\,\dot{\boldsymbol{e}} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + r - \mathrm{div}\,\underline{q}} \tag{3.17}$$

Remarques

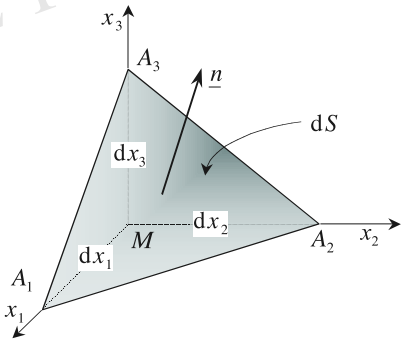


Figure 6 – « Lemme du tétraèdre »

La formule (3.13) est parfois connue sous le nom de « lemme du tétraèdre » en raison de sa démonstration classique, apparentée à celle de la tensorialité des contraintes (chapitre V, § 3.6). L'équation (3.12), valable $\forall\Omega'_t$, est appliquée à un sous-système infinitésimal entourant un point M quelconque intérieur à Ω_t : ce sous-système a la forme d'un tétraèdre construit sur les trois axes de coordonnées orthonormées, dont les arêtes ont respectivement pour longueur $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2$ et $\mathrm{d}x_3$ (figure 6).

[6] L'adjectif « sortant » veut rappeler que h correspond à la chaleur reçue par le système de normale extérieure $\underline{n}$ et que l'équation (3.13) comporte un signe moins. Cette convention est la plus couramment adoptée. On remarque que ce résultat signifie, comme cela sera utilisé dans la suite, que l'intégrale de surface sur $\partial\Omega'_t$ étant une intégrale de flux, est éligible pour l'application de la formule de la divergence qui la transforme, quel que soit Ω'_t, en l'intégrale sur Ω'_t d'une densité volumique définie dans Ω_t. C'est ce qu'exprime la démonstration du « lemme du tétraèdre » (figure 6).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- Pour ce sous-système infinitésimal, l'intégrale de volume dans (3.12) est du 3ème ordre en $\mathrm{d}x_i$. L'intégrale de surface est la somme de quatre termes qui correspondent aux quatre faces $MA_1A_2, MA_2A_3, MA_3A_1$ et $A_1A_2A_3$ du tétraèdre : l'équation (3.12) impose que la somme de ces quatre termes soit, elle aussi, du 3ème ordre, c'est-à-dire que la somme des termes du 2ème ordre soit nulle. Il vient ainsi, en simplifiant :

$$(3.18)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\, h(-\underline{e}_1) + \dfrac{1}{2}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1\, h(-\underline{e}_2) + \dfrac{1}{2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\, h(-\underline{e}_3) + \mathrm{d}S\, h(\underline{n}) = 0 \\ \underline{n}\,\mathrm{d}S = \dfrac{1}{2}(\underline{e}_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + \underline{e}_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1 + \underline{e}_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2)\ . \end{cases}$$

En posant

$$(3.19)\qquad \underline{q} = \underline{e}_1 h(-\underline{e}_1) + \underline{e}_2 h(-\underline{e}_2) + \underline{e}_3 h(-\underline{e}_3)\ ,$$

l'équation (3.18) s'écrit finalement :

$$(3.20)\qquad h(\underline{n}) = -\underline{q}\,.\,\underline{n}$$

ce qui établit la formule (3.13).

- L'équation (3.13) démontrée ci-dessus établit l'existence, sur le domaine Ω_t , d'un champ vectoriel $\underline{q}(\underline{x},t)$, courant de chaleur sortant. On peut, à son propos, reproduire le raisonnement proposé au chapitre V (§ 3.5, figure 8) pour l'interprétation physique de la condition au contour sur le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$. Ici, il permet de montrer que, sur la frontière $\partial\Omega_t$ de $\mathcal{S}$, le champ $\underline{q}$ satisfait, à titre de condition aux limites, l'équation :

$$(3.21)\qquad \underline{q}(\underline{x},t)\,.\,\underline{n}(\underline{x}) = -h_\Omega(\underline{x},t)\ .$$

- Le résultat (3.13) repose sur l'hypothèse d'additivité de l'énergie interne. Physiquement, l'additivité de l'énergie interne n'introduit en fait qu'une hypothèse supplémentaire en plus de celles déjà faites qui excluent à la fois les actions et les échanges de chaleur à distance entre les particules de $\mathcal{S}$: à la frontière entre deux sous-systèmes complémentaires, le bilan global des échanges de travail et de chaleur entre les deux sous-systèmes est nul c'est-à-dire que la puissance développée par les actions intérieures de contact entre les deux sous-systèmes dans une éventuelle discontinuité du champ de vitesse réel est compensée localement par un taux de chaleur équivalent reçu par les deux sous-systèmes.

3.3 Deuxième principe : inégalité fondamentale et inégalité de Clausius-Duhem

Le deuxième principe de la thermodynamique postule l'existence d'une variable d'état, appelé ***température absolue*** notée T, ***positive***, et d'une fonction de l'état thermodynamique du système, appelée ***entropie, additive***, notée $\boldsymbol{S}$, tels que :

pour toute évolution réelle thermodynamiquement réversible de l'élément de matière, $\dfrac{1}{T(\underline{x},t)}$ est le facteur intégrant du taux de chaleur reçue, en sorte que, pour $\mathcal{S}$, et pour tout sous-système $\mathcal{S}'$:

(3.22)

$$\begin{cases} \text{Pour toute évolution réelle thermodynamiquement réversible,} \\ \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\ , \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{S}} = \displaystyle\int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t)\dot{\boldsymbol{s}}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\Omega'_t} \frac{r(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)}\mathrm{d}\Omega_t - \int_{\partial\Omega'_t} \frac{\underline{q}(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)}\,.\,\underline{n}(\underline{x},t)\mathrm{d}a \end{cases}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

et

(3.23)
$$\left\{\begin{array}{l} \text{Pour toute évolution réelle,} \\ \forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}\ , \\ \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{S}} = \displaystyle\int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x},t)\dot{\boldsymbol{s}}(\underline{x},t)\,\mathrm{d}\Omega_t \geq \int_{\Omega'_t} \frac{r(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)}\mathrm{d}\Omega_t - \int_{\partial\Omega'_t} \frac{\underline{\underline{q}}(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)}\,.\,\underline{n}(\underline{x},t),\mathrm{d}a \end{array}\right.$$

où $\boldsymbol{s}$ désigne l'entropie massique (ou spécifique).

Autrement dit le taux de variation de l'entropie du système ou d'un sous-système quelconque dans une évolution réelle est toujours supérieur ou égal à l'intégrale, sur tous les élément constitutifs, du taux de chaleur reçue divisé par la température absolue. L'égalité n'est obtenue que pour les évolutions réelles thermodynamiquement réversibles.

On en déduit l'expression locale du deuxième principe, appelée ***inégalité fondamentale*** :

(3.24)
$$\boxed{\rho\dot{\boldsymbol{s}} + \mathrm{div}\left(\frac{\underline{\underline{q}}}{T}\right) - \frac{r}{T} \geq 0}\ .$$

l'égalité n'ayant lieu que pour une évolution réelle thermodynamiquement réversible.

En tenant compte, dans cette formule, de l'équation de l'énergie (3.17) on obtient (puisque $T > 0$) :

(3.25)
$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + \rho(T\dot{\boldsymbol{s}} - \dot{\boldsymbol{e}}) - \frac{\underline{\underline{q}}}{T}\,.\,\underline{\mathrm{grad}}\,T \geq 0\ .$$

Cette inégalité essentielle peut être transformée en introduisant la fonction thermodynamique appelée ***énergie libre*** (de Helmoltz) ; l'énergie libre massique ψ est définie par :

(3.26)
$$\psi = \boldsymbol{e} - T\,\boldsymbol{s}\ .$$

On obtient l'inégalité dite de ***Clausius-Duhem***[(7)] :

(3.27)
$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho(\dot{\psi} + \boldsymbol{s}\dot{T}) - \frac{\underline{\underline{q}}}{T}\,.\,\underline{\mathrm{grad}}\,T \geq 0}$$

Le premier membre de (3.24) (3.25) et (3.27) est souvent noté Φ. C'est la ***dissipation volumique dans la configuration actuelle***. Le deuxième principe de la thermodynamique exprime que ***la dissipation est toujours positive et n'est nulle que pour une évolution réelle thermodynamiquement réversible***.

[(7)] R. Clausius (1822-1888) ; P. Duhem (1861-1916).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Comme on le verra dans la suite, il est commode et physiquement justifié de décomposer la dissipation sous la forme :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \tag{3.28}$$

où

$$\Phi_1 = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) \tag{3.29}$$

et

$$\Phi_2 = -\frac{q}{T} \cdot \underline{\operatorname{grad} T} \tag{3.30}$$

sont respectivement la ***dissipation intrinsèque*** volumique et la ***dissipation thermique*** volumique dans la configuration actuelle.

On définit la ***réversibilité thermodynamique*** d'une évolution du système $\mathcal{S}$: à tout instant, en tout point du système, on a

$$\Phi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_2 = 0\,. \tag{3.31}$$

On peut remarquer que pour les évolutions adiabatiques, où $\underline{q} = 0$ en tout point et à chaque instant, et pour les évolutions isothermes où T est constante dans le système et dans le temps, on a $\Phi_2 = 0$. (Ce ne sont évidemment pas les seuls cas où $\Phi_2 = 0$).

3.4 Expressions lagrangiennes

Tous les raisonnements des paragraphes précédents ont été menés sur la configuration actuelle κ_t. Les formules (3.17) et (3.25), ou (3.27), sont les expressions locales, eulériennes du premier et du deuxième principe de la thermodynamique des milieux continus.

La formulation globale lagrangienne de ces principes, pour le système ou pour un sous-système, s'obtient en transportant l'égalité (3.16) et l'inégalité (3.23) dans la configuration de référence[8]. Pour cela il convient de décrire les échanges de chaleur sur la configuration de référence, ce qui introduit le vecteur courant de chaleur sortant $\underline{q}_0(\underline{X}\,,\,t)$ et la densité volumique $r_0(\underline{X},t)$ tels que :

$$\forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}, \quad \overset{\circ}{Q}{}' = -\int_{\partial\Omega'_t} \underline{q} \cdot \underline{\mathrm{d}a} + \int_{\Omega'_t} r\,\mathrm{d}\Omega_t = \int_{\partial\Omega'_0} \underline{q}_0 \cdot \underline{\mathrm{d}A} + \int_{\Omega'_0} r_0\,\mathrm{d}\Omega_0\,; \tag{3.32}$$

d'où

$$\begin{cases} \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t) \\ r_0(\underline{X},t) = J(\underline{X},t)\, r(\underline{x},t) \\ \underline{q}_0(\underline{X},t) = J(\underline{X},t)\, \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t) \cdot \underline{q}(\underline{x},t) \end{cases} \tag{3.33}$$

[8] On rappelle les relations établies au chapitre II en des points homologues :
$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t)$, $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{\nabla\phi}}(\underline{X},t)$, $\rho_0(\underline{X})/\rho(\underline{x},t) = \det \underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = J(\underline{X},t)$,
$\underline{\nabla T}(\underline{X},t) = \underline{\operatorname{grad}\, T}(\underline{x},t) \cdot \underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$, $\underline{\mathrm{d}a} = J(\underline{X},t)\, {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t) \cdot \underline{\mathrm{d}A}$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

qui implique

$$\operatorname{div}_{\underline{X}} \underline{q}_0(\underline{X}, t) = J(\underline{X}, t) \operatorname{div} \underline{q}(\underline{x}, t) \,. \tag{3.34}$$

Les fonctions $T, \boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{s}$ sont des grandeurs physiques liées à la matière ; leurs expressions lagrangiennes décrivent la température et les densités ***massiques*** d'énergie interne et d'entropie sur la configuration de référence à l'instant t (cf. chapitre I, § 3.1 et chapitre III, § 4.1 et 5.3). Elles s'obtiennent par substitution de $\underline{\phi}(\underline{X}, t) = \underline{x}$ dans les expressions eulériennes, soit, en introduisant provisoirement des notations spécifiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\underline{X}}(\underline{X}, t) = T[\underline{\phi}(\underline{X}, t), t] \\ \boldsymbol{e}_{\underline{X}}(\underline{X}, t) = \boldsymbol{e}[\underline{\phi}(\underline{X}, t), t] \\ \boldsymbol{s}_{\underline{X}}(\underline{X}, t) = \boldsymbol{s}[\underline{\phi}(\underline{X}, t), t] \end{array} \right. \tag{3.35}$$

La dérivation particulaire est conservée dans le passage de la description eulérienne à la description lagrangienne : $\dot{T}_{\underline{X}} = \dot{T}, \dot{\boldsymbol{e}}_{\underline{X}} = \dot{\boldsymbol{e}}, \dot{\boldsymbol{s}}_{\underline{X}} = \dot{\boldsymbol{s}}$. L'expression lagrangienne de l'équation de l'énergie s'obtient alors par substitution dans (3.17) en rappelant la correspondance entre les tenseurs des contraintes de Cauchy et de Piola-Kirchhoff (chapitre V, § 4.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) : \underline{\underline{\dot{e}}}(\underline{X}, t)}{\rho_0(\underline{X})} = \dfrac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)}{\rho(\underline{x}, t)} \\ \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \,. \end{array} \right. \tag{3.36}$$

Il vient :

$$\boxed{\rho_0 \, \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{e}}}} = \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{e}}} + r_0 - \operatorname{div}_{\underline{X}} \underline{q_0}} \tag{3.37}$$

De même, pour l'inégalité fondamentale et l'inégalité de Clausius-Duhem, compte tenu de la correspondance entre $\underline{\operatorname{grad} T}$ et $\underline{\nabla T}$ on obtient respectivement :

$$\underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{e}}} + \rho_0 \, (T \, \dot{\boldsymbol{s}} - \dot{\boldsymbol{e}}) - \frac{q_0}{T} \,.\, \underline{\nabla T} \geq 0 \tag{3.38}$$

et

$$\boxed{\underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{e}}} - \rho_0(\dot{\psi} + \boldsymbol{s}\dot{T}) - \frac{q_0}{T} \,.\, \underline{\nabla T} \geq 0} \tag{3.39}$$

On remarque que les expressions lagrangiennes font naturellement apparaître le tenseur symétrique des contraintes de Piola-Kirchhoff et sont semblables aux expressions eulériennes.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

4 Loi de comportement thermoélastique

4.1 Hypothèses de l'élasticité

La définition du comportement thermoélastique est énoncée en description lagrangienne. On postule que, pour la particule $\underline{X}$ du matériau considéré, à l'instant t, les valeurs de la température $T(\underline{X},t)$ et du tenseur des déformations $\underline{\underline{e}}(\underline{X},t)$ sont les variables d'état. Elles définissent les valeurs des fonctions thermodynamiques $\boldsymbol{e}(\underline{X},t)$, $\boldsymbol{s}(\underline{X},t)$, $\psi(\underline{X},t)$ et la contrainte de Piola-Kirchhoff :

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{e}(\underline{X},t) = \boldsymbol{e}[\,T(\underline{X},t), \underline{\underline{e}}(\underline{X},t)\,] \\ \boldsymbol{s}(\underline{X},t) = \boldsymbol{s}[\,T(\underline{X},t), \underline{\underline{e}}(\underline{X},t)\,] \\ \underline{\underline{\pi}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{\pi}}[\,T(\underline{X},t), \underline{\underline{e}}(\underline{X},t)\,] \\ \psi(\underline{X},t) = \psi[\,T(\underline{X},t), \underline{\underline{e}}(\underline{X},t)\,] \end{array}\right. \tag{4.1}$$

On adoptera dans la suite, pour simplifier l'écriture, les notations :

$$\psi = \psi(T, \underline{\underline{e}}) \quad , \quad \underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}}) \text{ , etc .} \tag{4.2}$$

Du point de vue mathématique, les écritures (4.1) ou (4.2) ne sont pas totalement correctes. En effet, considérant à titre d'exemple la fonction ψ dans (4.2), celle-ci n'est pas, sauf dans le cas particulier du matériau isotrope (§ 4.5), une fonction du ***seul*** tenseur $\underline{\underline{e}}$ (au sens indiqué au chapitre VI, § 2.7 et 4.2) comme le laisserait penser la lecture stricte de (4.2) ; elle dépend aussi de l'orientation dans l'espace d'un repère significatif pour la particule de matériau considérée à l'instant de référence. Une écriture complète nécessiterait de faire figurer cette information dans les arguments de (4.2), ou d'utiliser une écriture matricielle telle que (4.3) tout en conservant aux formules leur caractère intrinsèque dans les changements de repères. On y reviendra au paragraphe 4.4.

Motivées par les résultats expérimentaux tels que ceux décrits au paragraphe 2.2 sur l'expérience de traction simple, les hypothèses (4.1) sont formulées de façon à satisfaire le ***principe d'isotropie de l'espace***.

En effet, si l'on considère à titre d'exemple la fonction $\boldsymbol{e}$, l'expérience, qui ne fait pas apparaître de dépendance vis-à-vis du temps, suggère a priori d'écrire $\boldsymbol{e}$ comme une fonction de la température T et du gradient $\underline{\underline{F}}$ de la transformation subie par l'élément considéré. Un repère R étant choisi dans le référentiel on calcule $\boldsymbol{e}$ à partir des composantes de $\underline{\underline{F}}$:

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_R(T, \tilde{\underline{\underline{F}}}) \tag{4.3}$$

où $\tilde{\underline{\underline{F}}}$ désigne la matrice de $\underline{\underline{F}}$ dans le repère R supposé, pour simplifier, orthonormé.

Le principe d'***isotropie de l'espace*** déjà introduit au chapitre VI (§ 4.2) implique ici que l'énergie interne massique de l'élément ne dépend pas de son orientation dans l'espace. Plus précisément, si l'on fait subir, à partir de la même configuration initiale, au même élément de matière, deux transformations qui ne diffèrent que par une isométrie les valeurs de $\boldsymbol{e}$ dans les deux configurations actuelles correspondantes sont égales. Ainsi la fonction $\boldsymbol{e}_R$ possède la propriété mathématique :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \tilde{\underline{\underline{F}}},\ \forall \tilde{\underline{\underline{\alpha}}} \text{ telle que } {}^{\mathrm{t}}\tilde{\underline{\underline{\alpha}}}\,.\,\tilde{\underline{\underline{\alpha}}} = \tilde{\underline{\underline{\mathbb{1}}}} \\ \boldsymbol{e}_R(T, \tilde{\underline{\underline{F}}}) = \boldsymbol{e}_R(T, \tilde{\underline{\underline{\alpha}}}\,.\,\tilde{\underline{\underline{F}}}) \,. \end{array}\right. \tag{4.4}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En rappelant la décomposition polaire de $\underline{\underline{F}}$ établie au chapitre II (§ 3.4 et 4.5) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} . \underline{\underline{S}} \\ {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{R}} . \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}} \end{array} \right. , \quad \det \underline{\underline{R}} = +1 \quad , \quad {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}} , \tag{4.5}$$

on voit que l'on peut, dans (4.4), choisir $\underline{\underline{\tilde{\alpha}}} = {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\tilde{R}}}$, on met alors en évidence que $\boldsymbol{e}_R(T, \underline{\underline{\tilde{F}}})$ ne dépend que de $\underline{\underline{\tilde{S}}}$ matrice de la déformation pure, ou encore de $\underline{\underline{\tilde{C}}}$ ou de $\underline{\underline{\tilde{e}}}$:

$$\boldsymbol{e}_R(T, \underline{\underline{\tilde{F}}}) = \boldsymbol{e}_R(T, \underline{\underline{\tilde{S}}}) . \tag{4.6}$$

Le résultat obtenu est évidemment valable de la même manière pour les fonctions $\boldsymbol{s}$ et ψ. En ce qui concerne la contrainte le raisonnement est analogue. La dépendance naturellement suggérée par l'expérience est, dans le repère R :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_R(T, \underline{\underline{\tilde{F}}}) . \tag{4.7}$$

Le principe d'isotropie de l'espace fournit la propriété mathématique à satisfaire par la fonction matricielle $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_R$ dans le repère R :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{\underline{\tilde{F}}} \, , \, \forall \underline{\underline{\tilde{\alpha}}} \text{ telle que } {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\tilde{\alpha}}} . \underline{\underline{\tilde{\alpha}}} = \underline{\underline{\tilde{\mathbb{1}}}} \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_R(T, \underline{\underline{\tilde{\alpha}}} . \underline{\underline{\tilde{F}}}) = \underline{\underline{\tilde{\alpha}}} . \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_R(T, \underline{\underline{\tilde{F}}}) . {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\tilde{\alpha}}} \end{array} \right. \tag{4.8}$$

d'où en choisissant $\underline{\underline{\tilde{\alpha}}} = {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\tilde{R}}}$ défini par (4.5), la relation :

$$\underline{\underline{\tilde{F}}}^{-1} . \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_R(T, \underline{\underline{\tilde{F}}}) . {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\tilde{F}}}^{-1} = \underline{\underline{\tilde{S}}}^{-1} . \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_R(T, \underline{\underline{\tilde{S}}}) . \underline{\underline{\tilde{S}}}^{-1}$$

ou encore, en introduisant le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff

$$\underline{\underline{\tilde{\pi}}}_R(T, \underline{\underline{\tilde{F}}}) = (\det \underline{\underline{S}}) \underline{\underline{\tilde{S}}}^{-1} . \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_R(T, \underline{\underline{\tilde{S}}}) . \underline{\underline{\tilde{S}}}^{-1} = \tilde{\pi}_R(T, \underline{\underline{\tilde{S}}}) \tag{4.9}$$

où l'on retrouve le résultat annoncé en (4.1).

4.2 Loi de comportement thermoélastique en l'absence de liaisons internes

Potentiel thermodynamique

On reprend l'inégalité de Clausius-Duhem dans sa formulation lagrangienne (3.39). Cette inégalité régit toutes les évolutions thermoélastiques réelles de la particule considérée : à partir de son état défini par les variables T et $\underline{\underline{e}}$ dans lequel le courant de chaleur sortant est $\underline{q}_0$ avec le gradient de température $\underline{\nabla T}$, ces évolutions sont définies par $\dot{T}$ et $\underline{\underline{\dot{e}}}$.

L'inégalité (3.39) fait apparaître la dérivée particulaire $\dot{\psi}$ de $\psi(T, \underline{\underline{e}})$. Celle-ci s'explicite en base quelconque en fonction des composantes e_{ij} de $\underline{\underline{e}}$:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi \, (T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} \, \dot{T} + \frac{\partial \psi \, (T, \underline{\underline{e}})}{\partial e_{ij}} \dot{e}_{ij} \, . \tag{4.10}$$

De façon générale, $f(\underline{\underline{t}})$ étant une fonction scalaire, différentiable, des composantes d'un tenseur d'ordre deux $\underline{\underline{t}} = t_{ij} \, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ quelconque, on définit par dualité le tenseur d'ordre deux $\dfrac{\partial f(\underline{\underline{t}})}{\partial \underline{\underline{t}}}$ par les relations :

$$\frac{\partial f(\underline{\underline{t}})}{\partial \underline{\underline{t}}} = \frac{\partial f(\underline{\underline{t}})}{\partial t_{ij}} \, \underline{e}_j \otimes \underline{e}_i \tag{4.11a}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

d'où

$$\dot{f} = \frac{\partial f(\underline{\underline{t}})}{\partial t_{ij}} \dot{t}_{ij} = \frac{\partial f(\underline{\underline{t}})}{\partial \underline{\underline{t}}} : \dot{\underline{\underline{t}}} \,. \tag{4.11b}$$

Cette définition générale, appliquée à $\psi(T, \underline{\underline{e}})$, introduit le tenseur $\dfrac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$

$$\frac{\partial \psi\,(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} = \frac{\partial \psi\,(T, \underline{\underline{e}})}{\partial e_{ij}}\, \underline{e}_j \otimes \underline{e}_i \tag{4.12a}$$

et la dérivée particulaire (4.10) s'écrit :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi\,(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi\,(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} : \dot{\underline{\underline{e}}} \,. \tag{4.12b}$$

On suppose ici que le matériau est ***sans liaisons internes***. Cela signifie que les évolutions géométriques de l'élément de matière ne sont soumises à aucune restriction telle que l'incompressibilité, l'inextensibilité dans une ou plusieurs directions, etc., qui pourraient être dues à sa microstructure. (Celles-ci seront examinées au paragraphe 4.3). Le tenseur $\underline{\underline{e}}$ peut être un tenseur symétrique quelconque et toutes les évolutions sont décrites par $\dot{T}$ et $\dot{\underline{\underline{e}}}$ symétrique ***quelconques***.

L'inégalité de Clausius-Duhem (3.39) devient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall T > 0 \,,\, \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique } \,, \\ \forall \dot{T} \,,\, \forall \dot{\underline{\underline{e}}} \text{ symétrique } , \\ \underline{\underline{\pi}}\,(T, \underline{\underline{e}}) : \dot{\underline{\underline{e}}} - \rho_0 \left(\dfrac{\partial \psi\,(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} \dot{T} + \dfrac{\partial \psi\,(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} : \dot{\underline{\underline{e}}} + \boldsymbol{s}\,(T, \underline{\underline{e}})\, \dot{T} \right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{\underline{q}_0}{T} \cdot \underline{\nabla T} \geq 0 \,. \end{array} \right. \tag{4.13}$$

La première ligne de cette inégalité représente la dissipation intrinsèque volumique. Elle ne dépend que de T , $\underline{\underline{e}}$, $\dot{T}$ et $\dot{\underline{\underline{e}}}$. C'est une ***forme linéaire*** en $\dot{T}$ et $\dot{\underline{\underline{e}}}$. Le dernier terme du premier membre de (4.13) représente, lui, la dissipation thermique volumique. Il dépend évidemment de $T, \underline{\underline{e}}$ et $\underline{\nabla T}$ mais il est ***indépendant*** de $\dot{T}$ et de $\dot{\underline{\underline{e}}}$ car les échanges de chaleur par conduction ne dépendent que de l'état de l'élément de matière et du gradient de température, comme cela est exprimé par la loi de Fourier : $\underline{q}_0 = -\underline{\underline{K}}_0\,(T, \underline{\underline{e}}) \,.\, \underline{\nabla T}$.

Il résulte immédiatement de (4.13), en y faisant $\dot{T} = 0$ et $\dot{\underline{\underline{e}}} = 0$ que, la première ligne étant nulle, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall T > 0 \,,\, \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique } \,, \\ -\underline{q}_0 \,.\, \underline{\nabla T} \geq 0 \end{array} \right. \tag{4.14}$$

Cette inégalité, ***indépendante*** de $\dot{T}$ et de $\dot{\underline{\underline{e}}}$ est ***l'inégalité de la conduction***.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En ce qui concerne la dissipation intrinsèque volumique, pour toutes valeurs données de T et $\underline{\underline{e}}$, cette forme linéaire sur $\dot{T}$ et $\dot{\underline{\underline{e}}}$ symétrique quelconques doit conserver un signe constant. Elle est donc identiquement nulle :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall T>0\,,\ \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique }\,,\ \forall \dot{T}\,,\ \forall \dot{\underline{\underline{e}}} \text{ symétrique }\,, \\ \left(\underline{\underline{\pi}}\,(T,\underline{\underline{e}}) - \rho_0 \dfrac{\partial \psi\,(T,\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}\right) : \dot{\underline{\underline{e}}} - \rho_0 \left(\boldsymbol{s}\,(T,\underline{\underline{e}}) + \dfrac{\partial \psi\,(T,\underline{\underline{e}})}{\partial T}\right) \dot{T} = 0\,. \end{array}\right. \tag{4.15}$$

La dissipation intrinsèque est toujours nulle.

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall T>0\,,\ \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique }\,, \\ \boldsymbol{s}\,(T,\underline{\underline{e}}) = -\dfrac{\partial \psi\,(T,\underline{\underline{e}})}{\partial T} \end{array}} \tag{4.16}$$

Puisque $\dot{\underline{\underline{e}}} = 0$ est arbitraire ***symétrique***, (4.15) implique aussi que :

$$\big(\underline{\underline{\pi}}(T,\underline{\underline{e}}) - \rho_0 \frac{\partial \psi(T,\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}\big) \text{ antisymétrique}\,.$$

et donc, compte tenu de la symétrie de $\underline{\underline{\pi}}(T,\underline{\underline{e}})$,

$$\underline{\underline{\pi}}(T,\underline{\underline{e}}) = \rho_0 \big(\frac{\partial \psi(T,\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}\big)_{\rm s}\,, \tag{4.17}$$

où $\big(\dfrac{\partial \psi(T,\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}\big)_{\rm s}$ désigne la partie symétrique du tenseur $\rho_0\big(\dfrac{\partial \psi(T,\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}\big)$.

On ne doit pas s'étonner du fait que seule la partie symétrique de $\big(\dfrac{\partial \psi(T,\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}\big)$ apparaisse dans ce résultat. Ceci résulte d'un artefact introduit par la définition mathématique (4.12) qui, en considérant que les neuf composantes de $\underline{\underline{e}}$ sont indépendantes, ne prend pas en compte la ***signification physique*** de la fonction $\psi(T\,,\,\underline{\underline{e}})$. En effet cette fonction n'est définie que sur l'ensemble des tenseurs $\underline{\underline{e}}$ symétriques. La définition (4.12), suppose implicitement que l'on étende la définition de $\psi(T,\underline{\underline{e}})$ à l'ensemble de tous les tenseurs du second ordre en respectant les conditions de continuité et de différentiabilité. Le caractère arbitraire de ce prolongement se manifeste dans la partie antisymétrique de $\big(\dfrac{\partial \psi(T,\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}\big)$ tandis que la partie symétrique en est indépendante[(9)]. Cette difficulté artificielle est levée en adoptant, pour prolonger $\psi(T\,,\,\underline{\underline{e}})$, la définition naturelle :

$$\forall \underline{\underline{e}},\ \psi(T,\underline{\underline{e}}) = \psi(T,\underline{\underline{e}}_{\rm s}) = \psi(T,\,(\underline{\underline{e}} + {}^{\rm t}\underline{\underline{e}})/2)\,, \tag{4.18}$$

[(9)] On a en effet, en décomposant (4.11) : $\dfrac{\partial f(\underline{\underline{t}})}{\partial \underline{\underline{t}}} : \dot{\underline{\underline{t}}} = \big(\dfrac{\partial f(\underline{\underline{t}})}{\partial \underline{\underline{t}}}\big)_{\rm s} : \dot{\underline{\underline{t}}}_{\rm s} + \big(\dfrac{\partial f(\underline{\underline{t}})}{\partial \underline{\underline{t}}}\big)_{\rm a} : \dot{\underline{\underline{t}}}_{\rm a}$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

qui signifie que la fonction mathématique $\psi(T,\underline{\underline{e}})$ ne dépend que de la partie symétrique de $\underline{\underline{e}}$ et implique que

$$(\frac{\partial\psi(T,\underline{\underline{e}})}{\partial\underline{\underline{e}}})_{\rm a}=0 \text{ et } (\frac{\partial\psi(T,\underline{\underline{e}})}{\partial\underline{\underline{e}}})_{\rm s}=(\frac{\partial\psi(T,\underline{\underline{e}})}{\partial\underline{\underline{e}}}) \tag{4.19}$$

Du point de vue pratique, cette définition de la fonction mathématique $\psi(T,\underline{\underline{e}})$ revient à adopter la convention d'***écriture symétrique*** de $\psi(T,\underline{\underline{e}})$ en fonction des composantes e_{ij} et e_{ji} pour $i\neq j$, (e_{ij} et e_{ji} jouent le même rôle).

L'équation (4.17) prend la forme simple :

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall T>0\,,\ \forall\underline{\underline{e}} \text{ symétrique}\,,\\ \underline{\underline{\pi}}\,(T,\underline{\underline{e}})=\rho_0\dfrac{\partial\psi\,(T,\underline{\underline{e}})}{\partial\underline{\underline{e}}}\end{array}} \tag{4.20}$$

Ces formules (4.16) et (4.20) montrent que, à partir des hypothèses (4.1), la connaissance de la fonction ψ définit la loi de comportement du matériau thermoélastique[(10)]. Par leur forme, elles justifient le nom de ***potentiel thermodynamique*** donné à $\psi(T,\underline{\underline{e}})$. La nullité de la dissipation intrinsèque exprimée par l'équation (4.15) implique que les évolutions adiabatiques ou isothermes (cf. § 3.2) du matériau thermoélastique sont thermodynamiquement réversibles.

Afin de rendre compte de l'évidence expérimentale de la « réversibilité des déformations » au sens indiqué dans l'analyse du diagamme de la figure 3, la relation entre le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et les variables d'état T et de $\underline{\underline{e}}$ doit être biunivoque. Cela, à travers (4.20), impose une condition au potentiel $\rho_0\psi(T,\underline{\underline{e}})$.

Cette condition est satisfaite si $\psi(T,\underline{\underline{e}})$ est une fonction ***strictement convexe***[(11)]. On verra au paragraphe 5.5 que cette propriété de convexité est une condition suffisante de ***stabilité*** du matériau dans l'état initial sans contrainte (réciproque du théorème de Lejeune-Dirichlet).

Transformation de Legendre-Fenchel

Le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\pi}}$ étant déterminé à partir de T et de $\underline{\underline{e}}$ par l'équation

[(10)] On remarque aussi que le choix de la configuration de référence sur laquelle sont posées les hypothèses du pararaphe 4.1 n'a pas été précisé. Il n'a en fait pas d'importance. En effet, κ_0 et κ_0' étant deux configurations de référence, on a, avec des notations évidentes, $\psi(T,\underline{\underline{e}})=\psi'(T,\underline{\underline{e}}')+$ constante, d'où $\rho_0\dfrac{\partial\psi}{\partial\underline{\underline{e}}}:\dot{\underline{\underline{e}}}=\rho_0'\dfrac{\partial\psi'}{\partial\underline{\underline{e}}'}:\dot{\underline{\underline{e}}}'$ et $\rho_0\dfrac{\partial\psi}{\partial T}:\dot{T}=\rho_0'\dfrac{\partial\psi'}{\partial T}:\dot{T}$. Il en résulte que les formules (4.16) et (4.20) sont invariantes puisque $\rho_0\,\underline{\underline{\pi}}:\dot{\underline{\underline{e}}}=\rho_0'\,\underline{\underline{\pi}}':\dot{\underline{\underline{e}}}'$, . Il est commode, lorsque cela est possible, de prendre pour référence la configuration relâchée de l'élément de matière, dans laquelle le tenseur des contraintes est nul (état dit ***naturel***).

[(11)] Cf. chapitre X (§ 1.5) pour la définition de la convexité.

univoque (4.20) on définit la fonction ψ^* des arguments T et $\underline{\underline{\pi}}$ par :

$$\rho_0\psi^*(T,\underline{\underline{\pi}}) = \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{e}} - \rho_0\psi(T,\underline{\underline{e}}) \,. \tag{4.21}$$

La dérivée particulaire de $\psi^*(T,\underline{\underline{\pi}})$ s'écrit :

$$\rho_0\dot{\psi}^* = \rho_0\frac{\partial\psi^*(T,\underline{\underline{\pi}})}{\partial T}\,\dot{T} + \rho_0\frac{\partial\psi^*(T,\underline{\underline{\pi}})}{\partial\underline{\underline{\pi}}} : \dot{\underline{\underline{\pi}}} \tag{4.22}$$

et s'obtient aussi par dérivation de (4.21) :

$$\rho_0\dot{\psi}^* = \dot{\underline{\underline{\pi}}} : \underline{\underline{e}} + \underline{\underline{\pi}} : \dot{\underline{\underline{e}}} - \rho_0\dot{\psi} \,. \tag{4.23}$$

Compte tenu de (4.16) et (4.20) cette dernière équation s'écrit aussi :

$$\rho_0\dot{\psi}^* = \rho_0 \boldsymbol{s}\dot{T} + \dot{\underline{\underline{\pi}}} : \underline{\underline{e}} \,. \tag{4.24}$$

Il suffit alors de rapprocher (4.24) et (4.22) pour obtenir[12] :

$$\begin{cases} \boldsymbol{s}(T,\underline{\underline{\pi}}) = \dfrac{\partial\psi^*(T,\underline{\underline{\pi}})}{\partial T} \\ \underline{\underline{e}}(T,\underline{\underline{\pi}}) = \rho_0\,\dfrac{\partial\psi^*(T,\underline{\underline{\pi}})}{\partial\underline{\underline{\pi}}} \,. \end{cases} \tag{4.25}$$

Ainsi, en définissant l'état thermodynamqiue par T et $\underline{\underline{\pi}}$ le potentiel conjugué $\rho_0\psi^*(T,\underline{\underline{\pi}})$ fournit pour $\boldsymbol{s}$ et $\underline{\underline{e}}$ les formules homologues de (4.16) et (4.20) où l'on prendra garde au changement de signe concernant $\boldsymbol{s}$. De plus, la stricte convexité de ψ par rapport à $\underline{\underline{e}}$ implique la ***stricte convexité*** de ψ^* par rapport à $\underline{\underline{\pi}}$ (cf.chapitre X, § 1.6).

Symétrie

Sous forme explicite, en composantes, la formule (4.20) s'écrit :

$$\pi^{ij} = \rho_0\,\frac{\partial\psi\,(T,\underline{\underline{e}})}{\partial e_{ij}} \,. \tag{4.26}$$

Il s'ensuit que l'on a la formule de symétrie remarquable :

$$\frac{\partial\pi^{ij}(T,\underline{\underline{e}})}{\partial e_{k\ell}} = \frac{\partial\pi^{k\ell}(T,\underline{\underline{e}})}{\partial e_{ij}} \,, \tag{4.27}$$

Cette relation suppose évidemment que $\psi(T,\underline{\underline{e}})$ est défini selon (4.18), ce qui implique d'ailleurs que les π^{ij} sont exprimés symétriquement en $e_{k\ell}$ et $e_{\ell k}$.

[12] Même convention pour l'écriture symétrique de ψ^* en fonction de $\underline{\underline{\pi}}$ que pour ψ en fonction de $\underline{\underline{e}}$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

4.3 Loi de comportement thermoélastique avec liaisons internes

Définition des liaisons internes

On dit que le comportement du matériau est assujetti à des liaisons internes si ses évolutions thermomécaniques sont, du point de vue géométrique, astreintes à respecter certaines conditions restrictives. ***Ces conditions font partie intégrante de la loi de comportement*** du matériau. Elles ont pour origine la microstructure du matériau sous-jacente à la modélisation macroscopique du mécanicien. Elles s'expriment par une ou plusieurs relations indépendantes portant sur le gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$. Elles doivent satisfaire le principe d'isotropie de l'espace (cf. § 4.1) et ne portent donc sur $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$ qu'à travers le tenseur des déformations $\underline{\underline{e}}(\underline{X},t)$ ou le tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}(\underline{X},t)$. Le nombre de ces relations indépendantes ne peut dépasser 6 (si $n=6$, le matériau est indéformable).

L'exemple le plus fréquent d'une telle liaison interne est la liaison dite « d'incompressibilité » qui exprime l'invariance du volume de l'élément de matière dans toute transformation réelle pour le matériau considéré. Elle s'écrit en allégeant les notations :

$$\det \underline{\underline{F}} = 1 \quad \text{ou} \quad \det(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\underline{\underline{e}}) = 1 \,. \tag{4.28}$$

Un autre exemple pourra être « l'inextensibilité » dans une direction donnée, significative pour le matériau, qui exprime l'invariance de longueur dans cette direction.

On supposera ici plus particulièrement que les liaisons internes se traduisent par n relations indépendantes portant sur $\underline{\underline{e}}$ que l'on écrira :

$$\varphi_p(\underline{\underline{e}}) = 0 \quad , \quad p = 1, \dots, n \quad (1 \leq n \leq 6) \,. \tag{4.29}$$

De même que $\psi(T,\underline{\underline{e}})$ au paragraphe 4.2, les fonctions $\varphi_p(\underline{\underline{e}})$ ne sont physiquement définies que sur l'ensemble des tenseurs $\underline{\underline{e}}$ symétriques. On convient de les écrire en considérant les 9 composantes de $\underline{\underline{e}}$ comme distinctes et en adoptant des formes symétriques en e_{ij} et e_{ji} satisfaisant ainsi l'équation homologue de (4.18). Il s'ensuit que les tenseurs $\dfrac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$, qui interviendront dans la suite, sont symétriques (cf. (4.19)).

L'écriture (4.29) pour les liaisons internes appelle les mêmes remarques que celles déjà faites au paragraphe 4.1 à propos de l'ecriture de ψ sous la forme (4.2). Elles sont illustrées par les deux exemples cités. La liaison d'incompressibilité est évidemment isotrope ; elle s'exprime authentiquement sous la forme (4.29) où φ est une fonction du seul tenseur $\underline{\underline{e}}$:

$$\varphi(\underline{\underline{e}}) = \det(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\underline{\underline{e}}) - 1 = 0 \,. \tag{4.30}$$

En revanche la liaison d'inextensibilité dans une direction définie par le vecteur unitaire $\underline{U}$ dans κ_0 s'écrit :

$$\varphi(\underline{\underline{e}}) = \underline{\underline{e}} : (\underline{U} \otimes \underline{U}) = 0 \tag{4.31}$$

qui met en évidence que φ n'est pas à proprement parler une fonction du ***seul*** tenseur $\underline{\underline{e}}$. La notation (4.29), bien comprise, n'induit néanmoins pas de confusion.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Obtention de la loi de comportement

L'inégalité de Clausius-Duhem (3.39) est écrite à partir d'un état quelconque de la particule défini par les variables T et $\underline{\underline{e}}$ vérifiant les liaisons internes (4.29) : elle concerne les évolutions thermomécaniques définies par T et $\dot{\underline{\underline{e}}}$ symétrique qui vérifient les liaisons internes, c'est-à-dire telles que :

$$\dot{\varphi}_p = \frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} : \dot{\underline{\underline{e}}} = 0 \quad , \quad p = 1, \dots, n \quad (1 \leq n \leq 6) \, . \tag{4.32}$$

Ainsi, au lieu de (4.13), il vient :

$$\begin{cases} \forall T > 0 \ , \ \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique tel que (4.29)} \, , \\ \forall \dot{T} \ , \ \forall \dot{\underline{\underline{e}}} \text{ symétrique tel que (4.32)} \, , \\ \underline{\underline{\pi}}\,(T, \underline{\underline{e}}) : \dot{\underline{\underline{e}}} - \rho_0 \left(\dfrac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} \dot{T} + \dfrac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} : \dot{\underline{\underline{e}}} + \boldsymbol{s}(T, \underline{\underline{e}})\, \dot{T} \right) - \dfrac{\underline{q}_0}{T} \cdot \underline{\nabla T} \geq 0 \, . \end{cases} \tag{4.33}$$

A partir de cette inégalité, par les mêmes arguments que pour (4.13) puisque $\dot{\underline{\underline{e}}} = 0$ satisfait évidemment (4.32), on retrouve l'***inégalité de la conduction***, indépendante de $\dot{T}$ et de $\dot{\underline{\underline{e}}}$, sous la forme :

$$\begin{cases} \forall T > 0 \ , \ \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique satisfaisant (4.29)} \, , \\ -\underline{q}_0 \cdot \underline{\nabla T} \geq 0 \end{cases} \tag{4.34}$$

La dissipation intrinsèque volumique est une fome linéaire en $\dot{T}$ et $\dot{\underline{\underline{e}}}$ qui doit conserver un signe constant pour $\dot{T}$ quelconque et quel que soit $\dot{\underline{\underline{e}}}$ symétrique, satisfaisant (4.32). On en déduit d'abord, comme dans le cas de (4.13) l'expression de l'entropie :

$$\begin{cases} \forall T > 0 \ , \ \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique satisfaisant (4.29)} \, , \\ \boldsymbol{s}(T, \underline{\underline{e}}) = -\dfrac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} \, . \end{cases} \tag{4.35}$$

Ensuite, puisque l'ensemble des $\dot{\underline{\underline{e}}}$ symétriques et satisfaisant (4.32) a une structure d'espace vectoriel, on a :

$$\begin{cases} \forall T > 0 \ , \ \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique satisfaisant (4.29)} \, , \\ \forall \dot{\underline{\underline{e}}} \text{ symétrique satisfaisant (4.32)} \, , \\ [\underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}}) - \rho_0 \, \dfrac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}] : \dot{\underline{\underline{e}}} = 0 \end{cases} \tag{4.36}$$

On en déduit [13], compte tenu de la symétrie de $\underline{\underline{\pi}}$, de $\dfrac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$ et des $\dfrac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$,

[13] L'égalité (4.36) exprime que le tenseur $\left(\underline{\underline{\pi}} - \rho_0 \dfrac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}} \right)$ est orthogonal à tous les tenseurs $\dot{\underline{\underline{e}}}$ symétriques respectant (4.32). $\left(\underline{\underline{\pi}} - \rho_0 \dfrac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}} \right)$ est donc un élément de l'espace vectoriel engendré par les tenseurs $\dfrac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

que le tenseur $\underline{\underline{\pi}}(T,\underline{\underline{e}}) - \rho_0 \dfrac{\partial \psi(T,\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$ est une combinaison linéaire quelconque des n tenseurs $\dfrac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$.

On aboutit ainsi aux formules homologues de (4.20) qui expriment la loi de comportement thermoélastique avec liaisons internes :

(4.37)

$$\forall T > 0\ ,\ \forall \underline{\underline{e}} \text{ symétrique tel que } \varphi_p(\underline{\underline{e}}) = 0\ ,\ p = 1, \dots, n \quad (1 \leq n \leq 6)$$

$$\underline{\underline{\pi}}(T,\underline{\underline{e}}) = \rho_0 \frac{\partial \psi(T,\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} + \eta_p \frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} \quad (14)$$

où les η_p sont n ***scalaires arbitraires*** : ***ce sont les multiplicateurs de Lagrange associés à chaque liaison interne***. On voit que $\underline{\underline{\pi}}$ est indéterminé par les n termes $\eta_p \dfrac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$ qui sont n tenseurs symétriques. L'indépendance des liaisons internes implique que les n tenseurs symétriques $\dfrac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$ sont, pour toute valeur de $\underline{\underline{e}}$ respectant les liaisons internes (4.29), linéairement indépendants.

La formule (4.37) qui exprime la loi de comportement du matériau insiste sur le fait que les liaisons internes (4.29) font partie intégrante de celle-ci. Dans cette loi de comportement les n termes $\eta_p \dfrac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}$ viennent compenser, au niveau des contraintes, les restrictions imposées aux déformations. Cette idée de « compensation » dans la loi de comportement s'éclaire dès que l'on considère l'analyse d'un système constitué d'un tel matériau, c'est-à-dire que l'on se place du point de vue global d'un problème d'évolution thermoélastique tels qu'ils seront posés et étudiés au chapitre VIII. La formule (4.37) écrite en chaque point du système introduit alors n ***champs*** scalaires η_p indéterminés. Pour un problème d'évolution quasi-statique bien posé et dont les données aux limites cinématiques sont compatibles avec les liaisons internes, ces champs sont ***déterminés***, dans la construction d'une solution, par l'ensemble des équations de champs et des conditions aux limites du problème comme on le verra au chapitre VIII (§ 1.3).

Par ailleurs quelques précisions peuvent être apportées quant aux équations (4.37).

- Il est clair que, pour un jeu de liaisons internes donné, la représentation sous la forme (4.29) n'est pas unique mais que les différentes représentations définissent à travers (4.32) le même sous-espace des $\underline{\underline{e}}$ symétriques compatibles avec les liaisons internes. Il en résulte que les différentes expressions correspondantes de la loi de comportement sont équivalentes.

(14) On rappelle la sommation sur l'indice répété p.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- Si l'on considère deux tenseurs $\underline{\underline{\pi}}^{①}$ et $\underline{\underline{\pi}}^{②}$ satisfaisant à la loi de comportement (4.37) pour les mêmes valeurs de T et de $\underline{\underline{e}}$, et un taux de déformation $\underline{\underline{\dot{e}}}$ satisfaisant les liaisons internes (4.32), on a évidemment :

$$\underline{\underline{\pi}}^{①}(T,\underline{\underline{e}}) : \underline{\underline{\dot{e}}} = \underline{\underline{\pi}}^{②}(T,\underline{\underline{e}}) : \underline{\underline{\dot{e}}} \; ; \tag{4.38}$$

  autrement dit les puissances des efforts intérieurs dans un taux de déformation compatible avec les liaisons internes sont identiques. Le tenseur $(\underline{\underline{\pi}}^{①} - \underline{\underline{\pi}}^{②})$ est un ***tenseur inopérant*** dans toute évolution respectant les liaisons internes à partir de l'état actuel. Ainsi la loi de comportement (4.37) définit les liaisons internes du matériau et détermine les contraintes à un tenseur inopérant près.
- La ***nullité de la dissipation intrinsèque*** exprimée par (4.35) et (4.36), implique que les liaisons internes sont ***parfaites***. C'est une conséquence des hypothèses de la thermoélasticité posées au paragraphe (4.1)

4.4 Respect des symétries de la matière

Déjà introduit au chapitre VI (§ 4.2) à propos de l'écriture de la fonction de charge, le principe du respect des symétries de la matière s'impose à la loi de comportement thermoélastique : il exprime l'invariance de cette loi dans toute transformation isométrique appartenant au groupe des symétries du matériau.

La loi de comportement thermoélastique est écrite, par les formules (4.20) ou (4.37), en représentation lagrangienne : les symétries du matériau sont définies dans la configuration de référence correspondante.

Le groupe $\mathcal{G}$ des symétries matérielles dans la configuration κ_0 peut être caractérisé par les deux énoncés équivalents :

- il n'est pas possible, dans la configuration κ_0, de discerner deux éléments qui se déduisent l'un de l'autre par une isométrie appartenant au groupe $\mathcal{G}$; ils réagissent identiquement l'un et l'autre, sous une même sollicitation quelconque ;
- si l'on applique à un élément donné deux sollicitations distinctes déduites l'une de l'autre au moyen d'une isométrie du groupe $\mathcal{G}$, les réponses sont distinctes mais se déduisent l'une de l'autre au moyen de la même isométrie.

Il est utile ici d'expliciter l'écriture de ψ en supposant choisi un repère R, orthonormé pour simplifier (comme dans la formule (4.3)) :

$$\psi = \psi_R(T,\tilde{\underline{\underline{e}}}) \tag{4.39}$$

où $\tilde{\underline{\underline{e}}}$ désigne la matrice de $\underline{\underline{e}}$ dans ce repère.

Le respect des symétries du matériau dans la configuration κ_0 impose à ψ la condition mathématique :

$$\forall \tilde{\underline{\underline{e}}},\ \forall \tilde{\underline{\underline{\alpha}}} \in \mathcal{G}\ ,\ \psi_R(T,\tilde{\underline{\underline{e}}}) = \psi_R(T,\ {}^{\mathrm{t}}\tilde{\underline{\underline{\alpha}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{e}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{\alpha}}})\ . \tag{4.40}$$

On vérifie alors que l'on a bien, par la loi de comportement (4.20), la relation :

$$\begin{cases} \forall \tilde{\underline{\underline{e}}},\ \forall \tilde{\underline{\underline{\alpha}}} \in \mathcal{G}\ , \\ \\ \tilde{\underline{\underline{\pi}}}_R(T,{}^{\mathrm{t}}\tilde{\underline{\underline{\alpha}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{e}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{\alpha}}}) = {}^{\mathrm{t}}\tilde{\underline{\underline{\alpha}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{\pi}}}_R(T,\tilde{\underline{\underline{e}}}) \cdot \tilde{\underline{\underline{\alpha}}}\ . \end{cases} \tag{4.41}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Selon les cas il sera commode pour exprimer et exploiter le principe du respect des symétries de la matière, soit de raisonner sur la fonction ψ et d'appliquer (4.40) comme on le fera au paragraphe 4.5, soit d'écrire (4.41) au niveau des tenseurs des déformations et des contraintes (cf. § 5.7).

Les considérations homologues des précédentes valent évidemment pour l'expression des liaisons internes.

4.5 Matériau thermoélastique isotrope dans la configuration de référence

Pour le matériau isotrope (au sens de Cauchy) dans la configuration de référence, le groupe $\mathcal{G}$ est le groupe de ***toutes*** les isométries, directes et indirectes. Cela signifie que l'on ne peut distinguer par leurs réponses à des sollicitations identiques, ni deux éléments d'orientations différentes, ni un élément et son image dans une glace.

On retrouve alors l'argumentation déjà développée au chapitre VI (§ 4.2) à propos de la fonction de charge. Ainsi :

$$\text{(4.42)} \qquad \begin{cases} \forall \underline{\underline{\tilde{e}}}\,,\ \forall \underline{\underline{\tilde{\alpha}}} \text{ tel que } {}^{t}\underline{\underline{\tilde{\alpha}}}\,.\,\underline{\underline{\tilde{\alpha}}} = \underline{\underline{\tilde{\mathbb{1}}}}\,, \\ \psi_R(T, \underline{\underline{\tilde{e}}}) = \psi_R(T,\ {}^{t}\underline{\underline{\tilde{\alpha}}}\,.\,\underline{\underline{\tilde{e}}}\,.\,\underline{\underline{\tilde{\alpha}}})\ . \end{cases}$$

La fonction ψ apparaît comme une ***fonction scalaire (isotrope) du (seul) tenseur*** $\underline{\underline{e}}$, ce qui traduit bien le fait que le matériau ne possède pas de directions privilégiées qui orienteraient son comportement[15].

En application du théorème de représentation puisque $\underline{\underline{e}}$ est symétrique (chapitre VI, § 2.7 ; annexe I, § 5.7), ψ s'exprime nécessairement comme une fonction de T ***et des invariants*** du tenseur $\underline{\underline{e}}$.

On pose :

$$\text{(4.43)} \qquad I'_1 = \text{ tr } \underline{\underline{e}} \quad , \quad I'_2 = \frac{1}{2} \text{ tr } \underline{\underline{e}}^2 \quad , \quad I'_3 = \frac{1}{3} \text{ tr } \underline{\underline{e}}^3$$

et ψ s'écrit :

$$\text{(4.44)} \qquad \boxed{\psi(T, \underline{\underline{e}}) = \psi(T, I'_1, I'_2, I'_3)}$$

On comprend mieux ici la signification du mot « exploiter » employé à la fin du paragraphe 4.4 : le principe de respect des symétries de la matière permet de préciser la forme qu'a nécessairement la fonction ψ et, comme on le verra au paragraphe 5.3, permet de réduire a priori le nombre des coefficients indépendants caractérisant le comportement du matériau qui sont à déterminer expérimentalement.

[15] L'écriture $\psi(T, \underline{\underline{e}})$ pour le potentiel thermodynamique est, dans ce cas, pleinement justifiée du point de vue mathématique.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L'isotropie correspondant évidemment au groupe de symétries matérielles le plus vaste (***toutes les isométries***), l'expression (4.44) représente la forme la plus réduite possible pour ψ (sans l'introduction d'hypothèses supplémentaires).

On déduit sans difficulté de (4.43) les formules suivantes :

$$\frac{\partial I'_1}{\partial \underline{\underline{e}}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}} \quad , \quad \frac{\partial I'_2}{\partial \underline{\underline{e}}} = \underline{\underline{e}} \quad , \quad \frac{\partial I'_3}{\partial \underline{\underline{e}}} = \underline{\underline{e}}^2 = \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{e}} \tag{4.45}$$

d'où par (4.20), pour le matériau sans liaisons internes (en allégeant les notations) :

$$\underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial I'_1} \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \frac{\partial \psi}{\partial I'_2} \underline{\underline{e}} + \frac{\partial \psi}{\partial I'_3} \underline{\underline{e}}^2 \right) \tag{4.46}$$

dans laquelle $\dfrac{\partial \psi}{\partial I'_1}, \dfrac{\partial \psi}{\partial I'_2}$ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial I'_3}$ sont des fonctions de T, I'_1, I'_2, I'_3.

Cette expression de la loi de comportement du matériau thermoélastique isotrope met notamment en évidence le résultat remarquable :

> ***pour le matériau thermoélastique isotrope dans la configuration de référence, les directions principales de $\underline{\underline{e}}$ sont principales pour $\underline{\underline{\pi}}$.***

Pour le matériau avec liaisons internes, si l'hypothèse d'isotropie est physiquement validée, elle concerne toutes les fonctions qui expriment le comportement du matériau et donc, en particulier, les liaisons internes. Les fonctions $\varphi_p(\underline{\underline{e}})$ ne dépendent, elles aussi, que des invariants I'_1, I'_2, I'_3 et l'on obtient pour $\underline{\underline{\pi}}$:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial I'_1} \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \dfrac{\partial \psi}{\partial I'_2} \underline{\underline{e}} + \dfrac{\partial \psi}{\partial I'_3} \underline{\underline{e}}^2 \right) + \eta_p \left(\dfrac{\partial \varphi_p}{\partial I'_1} \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial I'_2} \underline{\underline{e}} + \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial I'_3} \underline{\underline{e}}^2 \right) \\ \varphi_p(I'_1, I'_2, I'_3) = 0 \quad , \quad p = 1, \ldots, n \qquad 1 \leq n \leq 3 \, . \end{cases} \tag{4.47}$$

Le résultat de coïncidence des directions principales de $\underline{\underline{\pi}}$ et de $\underline{\underline{e}}$ est conservé.

On peut enfin signaler qu'il n'y a pas de contradiction mathématique à exprimer le comportement thermoélastique d'un matériau au moyen d'un potentiel $\psi(T, \underline{\underline{e}})$ fonction isotrope de $\underline{\underline{e}}$ avec des liaisons internes anisotropes ; le matériau correspondant est évidemment anisotrope. Des modèles physiquement réalistes de matériaux composites renforcés ont cette forme.

4.6 Les liaisons internes du point de vue eulérien

À partir de l'état actuel satisfaisant (4.29), les liaisons internes s'expriment, du point de vue eulérien, par les conditions portant sur le taux (eulérien) de déformation qui sont déduites de (4.32) en appliquant la formule de correspondance donnée au chapitre III :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\underline{e}}}(\underline{X}, t) = {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \\ \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \, . \end{cases} \tag{4.48}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Il vient ainsi :

$$\text{(4.49)}\qquad \begin{cases} \left(\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\,.\,\dfrac{\partial\varphi_p(\underline{\underline{e}}(\underline{X},t))}{\partial\underline{\underline{e}}}\,.\,{}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\right) : \underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = 0 \\ \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t) \\ p = 1,\dots,n \quad (1 \le n \le 6)\,. \end{cases}$$

La loi de comportement (4.37) fournit l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$ en appliquant la formule de correspondance donnée au chapitre V :

$$\text{(4.50)}\qquad \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) = \dfrac{\rho(\underline{x},t)}{\rho_0(\underline{X})}\,\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{\pi}}(\underline{X},t)\,.\,{}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) \\ \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t)\,. \end{cases}$$

Il vient ainsi pour $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$

$$\text{(4.51)}\qquad \begin{cases} \forall T\ ,\ \forall \underline{\underline{e}}(\underline{X},t) \text{ symétrique tel que (4.29)}\ , \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) = \rho(\underline{x},t)\,\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\,.\,\dfrac{\partial\psi(T,\underline{\underline{e}}(\underline{X},t))}{\partial\underline{\underline{e}}}\,.\,{}^{t}\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) \\ \qquad\qquad +\eta'_p\,\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\,\dfrac{\partial\varphi_p(\underline{\underline{e}}(\underline{X},t))}{\partial\underline{\underline{e}}}\,.\,{}^{t}\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) \\ p = 1,\dots,n \quad (1 \le n \le 6) \end{cases}$$

où les η'_p sont les scalaires arbitraires liés aux η_p de (4.37) par $\eta'_p = \eta_p\,\rho(\underline{x},t)/\rho_0(\underline{X})$.

En rapprochant (4.49) et (4.51) on obtient le résultat (attendu) : l'indétermination introduite dans l'expression (4.51) du tenseur des contraintes de Cauchy consiste en un tenseur inopérant dans les évolutions respectant (4.49). À titre d'exemple, pour la liaison interne d'incompressibilité (4.30), l'expression eulérienne (4.49) n'est autre que $\mathrm{tr}\,\underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = 0$; il s'ensuit que l'indétermination sur $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$ dans (4.51) est un tenseur inopérant, donc de la forme $\eta'\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$.

5 Thermoélasticité linéaire en l'absence de liaisons internes

5.1 Présentation

Les constatations expérimentales évoquées dans la section 2 de ce chapitre ont mis en évidence deux points essentiels : la réversibilité du diagramme de charge et sa linéarité dans tout ou partie de la phase élastique (§ 2.2) pour des déformations qui demeurent faibles.

On a vu au paragraphe 4.2 comment la loi de comportement (4.20) rend compte de la réversibilité. On se propose maintenant d'examiner la linéarisation de cette loi, de façon à rendre compte aussi de la linéarité observée.

5.2 Linéarisation physique

Écriture de la loi de comportement linéarisée

On prend comme configuration de référence la configuration dite ***initiale*** κ_0, à partir de laquelle on se restreint à l'étude des ***déformations infinitésimales***

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

chapitre II (§ 7.1) définies par :

$$\|\underline{\underline{e}}\| \ll 1 \tag{5.1}$$

et des « petites variations de température » :

$$\tau = (T - T_0) \qquad \text{« petit »} . \tag{5.2}$$

L'idée est alors que, sous ces hypothèses, en l'absence de liaisons internes, il est légitime de linéariser les équations de comportement (4.16) et (4.20), c'est-à-dire de les écrire sous la forme d'expressions linéaires affines en $\underline{\underline{e}}$ et τ. Ces expressions ne sont autres que les développements polynomiaux à l'ordre 1 de $-\dfrac{\partial\psi(T,\underline{\underline{e}})}{\partial T}$ et de $\rho_0\dfrac{\partial\psi(T,\underline{\underline{e}})}{\partial\underline{\underline{e}}}$, obtenus par dérivations du développement polynomial à l'ordre 2 de $\rho_0\,\psi(T,\underline{\underline{e}})$.

En laissant de côté ici [16] le terme de degré zéro, qui est sans importance dans la dérivation, ce développement s'écrit :

$$\boxed{\rho_0\,\psi(T,\underline{\underline{e}}) = \underline{\underline{\pi}}^0 : \underline{\underline{e}} - \rho_0\,\boldsymbol{s}_0\,\tau + \frac{1}{2}\,\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{e}} - \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{e}}\,\tau - \frac{1}{2}\rho_0\,b\,\tau^2} \tag{5.3}$$

Dans cette expression,

• $\boldsymbol{s}_0$ et b sont des ***constantes physiques*** scalaires ;

• $\underline{\underline{\pi}}^0$ est un ***tenseur physique constant*** et est ***symétrique*** pour respecter la convention (4.18) d'écriture symétrique de $\rho_0\psi(T,\underline{\underline{e}})$;

• de même le ***tenseur physique constant*** $\underline{\underline{k}}$ est ***symétrique*** ;

• $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ est un ***tenseur physique constant*** du quatrième ordre et le terme quadratique correspondant s'écrit en base orthornormée :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\,\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{e}} = \dfrac{1}{2}\,e_{ji}A_{ijk\ell}e_{\ell k} \\ \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} = A_{ijk\ell}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_\ell \end{array}\right. \tag{5.4}$$

• pour satisfaire la condition (4.18) d'écriture symétrique de $\rho_0\psi(T,\underline{\underline{e}})$, le tenseur $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ est ***symétrique*** sur les indices i et j d'une part, k et ℓ de l'autre :

$$A_{ijk\ell} = A_{jik\ell} = A_{ij\ell k} = A_{ji\ell k} . \tag{5.5}$$

Ces symétries réduisent ainsi à 36 le nombre des composantes tenseur $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ qui sont indépendantes.

[16] Cf. chapitre X § 3.5, à propos de la formule (3.23).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Par dérivation de 5.3 on obtient les expressions de $\boldsymbol{s}$ et de $\underline{\underline{\pi}}$ issues de (4.16) et (4.20) :

$$\text{(5.6)} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{s}_0 &= \boldsymbol{s} + \dfrac{1}{\rho_0}\underline{\underline{k}} : \underline{\underline{e}} + b\tau \\ \underline{\underline{\pi}} &= \underline{\underline{\pi}}^0 + \dfrac{1}{2}\,\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{e}} + \dfrac{1}{2}\,\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} - \underline{\underline{k}}\tau \end{cases}$$

Une ultime simplification est apportée à cette formule en remarquant que le dédoublement du terme linéaire en $\underline{\underline{e}}$ est un artefact mathématique sans signification physique, dû au dédoublement des termes « rectangles » de la forme quadratique (5.4). Selon l'usage on pose :

$$\text{(5.7)} \qquad A_{ijk\ell} = A_{k\ell ij}\ ,$$

ce qui réduit à 21 le nombre des composantes du tenseur $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ indépendantes[17] par symétrie entre les groupes d'indices (i,j) et (k,ℓ).

On a alors :

$$\text{(5.8)} \qquad \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{e}}}\left(\frac{1}{2}\,\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{e}}\right) = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{e}}$$

et

$$\text{(5.9)} \qquad \boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{s} &= \boldsymbol{s}_0 + \frac{1}{\rho_0}\,\underline{\underline{k}} : \underline{\underline{e}} + b\,\tau \\ \underline{\underline{\pi}} &= \underline{\underline{\pi}}^0 + \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{e}} - \underline{\underline{k}}\,\tau \end{aligned}}$$

ou, en composantes :

$$\text{(5.10)} \qquad \begin{cases} \pi_{ij} = \pi^0_{ij} + A_{ijk\ell}\, e_{\ell k} - k_{ij}\,\tau \\ \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_0 + \dfrac{1}{\rho_0} k_{ij}\, e_{ji} + b\,\tau\ . \end{cases}$$

Interprétation physique des constantes

Ces résultats permettent d'interpréter physiquement les constantes introduites dans l'expression (5.3) relativement à la configuration κ_0 autour de laquelle est effectuée la linéarisation.

• ***Valeurs initiales.***

Le tenseur symétrique $\underline{\underline{\pi}}^0$ apparaît comme le tenseur des ***contraintes initiales*** : ce sont les contraintes qui correspondent à une déformation nulle et à un écart de

[17] Cette réduction n'a rien de magique ! Il s'agit simplement du nombre des termes d'une forme quadratique sur un espace à 6 dimensions (les composantes indépendantes de $\underline{\underline{e}}$), qui est aussi le nombre de coefficients indépendants d'un tableau 6×6 symétrique.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

température nul par rapport à la configuration de référence κ_0. La formule linéaire (5.8) exprime que, en représentation lagrangienne, la contrainte $\underline{\underline{\pi}}$ résulte de la ***superposition*** de la contrainte initiale $\underline{\underline{\pi}}^0$, de la contrainte $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{e}}$ induite à température constante par la seule déformation $\underline{\underline{e}}$ et de celle $-\underline{\underline{k}}\,\tau$ induite par l'écart de température τ à déformation constante.

s_0 est **l'entropie massique initiale** définie de la même manière.

• ***Coefficients thermiques.***

On a évidemment, à partir de (5.9) :

$$T\,\dot{s} = \frac{1}{\rho_0} T\,\underline{\underline{k}} : \dot{\underline{\underline{e}}} + T\,b\,\dot{\tau} \tag{5.11}$$

Le premier membre de cette égalité, qui a les dimensions d'une puissance massique, est, irréversibilités thermiques mises à part, le taux massique de chaleur reçue pour des vitesses de déformation et d'écart de température $\dot{\underline{\underline{e}}}$ et $\dot{\tau}$; ainsi :

$\frac{1}{\rho_0} T\,\underline{\underline{k}}$ est le tenseur des ***chaleurs latentes massiques de déformation*** dans κ_0.
Ce tenseur symétrique est défini par ses **3** valeurs principales, ***constantes physiques*** caractéristiques du matériau dans la configuration κ_0, et par les trois angles qui positionnent ses directions principales, physiquement significatives dans l'élément de matière, par rapport au repère choisi pour l'étude.
$T\,b$ est la chaleur massique à déformation constante.

• ***« Petite » variation de température.***

La notion de petite variation de température peut être précisée à partir de (5.9) : les contraintes $-\underline{\underline{k}}\,\tau$ engendrées par la variation de température τ doivent être du même ordre de grandeur que des contraintes $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{e}}$ engendrées par une déformation $\underline{\underline{e}}$ vérifiant la condition (5.1) des déformations infinitésimales.

• ***Coefficients d'élasticité.***

Le tenseur $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ est le tenseur d'élasticité qui, à température constante, lie les contraintes aux déformations. Le décompte effectué plus haut montre que, dans un repère quelconque, le tenseur $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ correspond à 21 coefficients indépendants. Il s'agit là du cas général du matériau qui ne possède aucune symétrie matérielle particulière, appelé aussi « matériau ælotrope ». Comme pour les coefficients thermiques, ces 21 coefficients sont définis par ***18 modules élastiques***, constantes physiques caractéristiques du matériau dans la configuration κ_0, et par les trois angles qui définissent l'orientation de l'élément de matière par rapport au repère choisi pour l'étude.

Ceci est à rapprocher des développements donnés au chapitre VI (§ 4.2) à propos de la fonction de charge et du principe d'isotropie de l'espace. Dans un repère orthonormé R significatif pour le matériau, la fonction $\psi_R(T, \underline{\underline{\tilde{e}}})$ de la formule (4.39) s'exprime en thermoélasticité linéaire en fonction de 18 coefficients qui sont des constantes physiques du matériau. L'expression de ψ dans un repère R' orthonormé quelconque s'obtient alors à partir de ψ_R par :

$$\psi_{R'}(T, \underline{\underline{\tilde{e}}}') = \psi_R(T, {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\tilde{\alpha}}} \,.\, \underline{\underline{\tilde{e}}} \,.\, \underline{\underline{\tilde{\alpha}}})$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

où la matrice $\underline{\underline{\alpha}}$ de changement de repères est définie par les angles d'Euler qui caractérisent l'orientation du matériau par rapport à R'.

Les modules élastiques ont les ***dimensions d'une contrainte*** : ils s'expriment en pascal (Pa) mais pour les matériaux courants on aura plus souvent recours au mégapascal (MPa).

5.3 Matériau thermoélastique linéaire isotrope

La loi de comportement du matériau thermoélastique linéaire, isotrope dans la configuration de référence s'obtient en combinant les résultats des paragraphes 4.5 et 5.2.

Le développement polynomial au second degré de $\rho_0\,\psi(T,\underline{\underline{e}})$ en fonction de τ et des composantes de $\underline{\underline{e}}$, ne doit plus faire intervenir que les invariants de $\underline{\underline{e}}$ définis par (4.43). Il en résulte, compte tenu de l'ordre de I'_1, I'_2, I'_3, l'expression la plus générale de $\rho_0\psi(T,\underline{\underline{e}})$ pour le matériau thermoélastique linéaire isotrope :

$$\rho_0\psi(T,\underline{\underline{e}}) = \pi^0\, I'_1 - \rho_0\, \boldsymbol{s}_0\, \tau + \frac{\lambda}{2} I'^{\,2}_1 + 2\,\mu\, I'_2 - k\, I'_1\, \tau - \frac{1}{2}\rho_0\, b\, \tau^2 \tag{5.12}$$

On remarque que dans cette formule $\pi^0, \boldsymbol{s}_0, \lambda, \mu, k$ et b sont toutes des constantes ***scalaires***.

On en déduit, par application de (4.16), (4.20) et (4.46) :

$$\underline{\underline{\pi}} = \pi^0\, \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \lambda\, I'_1\, \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\mu\, \underline{\underline{e}} - k\,\tau\, \underline{\underline{\mathbb{1}}}$$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_0 + \frac{1}{\rho_0} k\, I'_1 + b\,\tau$$

ou encore

$$\underline{\underline{\pi}} = \pi^0\, \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \lambda\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{e}})\, \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\mu\, \underline{\underline{e}} - k\,\tau\, \underline{\underline{\mathbb{1}}} \tag{5.13}$$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_0 + \frac{1}{\rho_0} k(\ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{e}}) + b\,\tau \tag{5.14}$$

On voit sur cette expression de la loi de comportement que le tenseur des contraintes initiales $\underline{\underline{\pi}}^0$ est ici nécessairement isotrope : $\underline{\underline{\pi}}^0 = \pi^0 \underline{\underline{\mathbb{1}}}$.

Le tenseur $\underline{\underline{k}}$ est, lui aussi, isotrope en raison de l'isotropie du matériau : ses valeurs principales sont égales entre elles. il n'y a qu'***un seul coefficient thermique*** : $\underline{\underline{k}} = k\, \underline{\underline{\mathbb{1}}}$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Enfin, pour la même raison d'isotropie, on aboutit au résultat particulièrement remarquable[18] : le tenseur des coefficients d'élasticité $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ ne dépend que des **2 *constantes physiques*** λ et μ.

L'élasticité linéaire du matériau isotrope est caractérisée par deux modules élastiques.

À partir de la configuration de référence sans contrainte initiale ($\underline{\underline{\pi}}^0 = 0$), les constantes λ et μ sont appelées ***coefficients d'élasticité de Lamé***[19] : en particulier μ, qui est parfois aussi noté G est le ***module de cisaillement***.

On verra dans la suite (§ ,5.4), à propos de la linéarisation géométrique en transformation infinitésimale, que ces constantes physiques sont également valables pour l'écriture de la loi de comportement linéarisée autour d'un état de référence précontraint thermoélastiquement dans une transformation infinitésimale à partir de la configuration sans contrainte initiale. Ceci explique leur importance pratique.

L'inversion de la loi de comportement (5.13), exprimant $\underline{\underline{e}}$ en fonction de $\underline{\underline{\pi}}$ et τ, est aisée. Il est d'usage de mettre la formule inverse sous la forme :

$$(\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}}^0) = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\pi}} - \frac{\nu}{E}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\pi}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \alpha\,\tau\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} \tag{5.15}$$

qui fait intervenir 3 constantes élastiques et thermiques E, ν, α.

$\underline{\underline{e}}^0$ apparaît comme la déformation dans l'état de contrainte nulle ($\underline{\underline{\pi}} = 0$) et pour un écart de température nul, par rapport à la configuration (ou état) de référence. Elle vaut :

$$\underline{\underline{e}}^0 = -\frac{1-2\,\nu}{E}\,\pi^0\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}\ ^{(20)}\ . \tag{5.16}$$

Si $\underline{\underline{\pi}}^0 = 0$ et donc aussi $\underline{\underline{e}}^0 = 0$

E est le ***module d'élasticité de Young*** qui a les dimensions d'une contrainte [21],

ν est le ***coefficient de Poisson***, nombre sans dimension [22],

α est le ***coefficient de dilatation thermique linéique***.

[18] On a : $A_{ijk\ell} = \lambda(\delta_{ij}\,\delta_{k\ell}) + \mu(\delta_{ik}\,\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\,\delta_{jk})$.
[19] G. Lamé (1795-1870). La constante λ est souvent appelée « constante de Lamé ».
[20] La similitude des notations peut être trompeuse : $\underline{\underline{\pi}}^0$ et $\underline{\underline{e}}^0$ ***ne correspondent pas au même état*** du matériau, sauf lorsqu'ils sont tous deux nuls (état de contrainte nul dans la configuration de référence).
[21] Médecin, physicien (franges de Young), mécanicien, T. Young (1773-1829) était également un remarquable spécialiste des langues modernes et anciennes qui s'intéressa à l'égyptologie et notamment au déchiffrement des hiéroglyphes.
[22] D. Poisson (1781-1840).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La validité de ces constantes, comme celle de λ, μ et k s'étend à l'écriture de la loi de comportement linéarisée autour d'un état de référence précontraint.

Il est utile d'écrire les formules permettant de passer des coefficients d'élasticité de Lamé au module de Young et au coefficient de Poisson :

$$\left\{\begin{array}{ll} E=\mu\dfrac{(3\,\lambda+2\,\mu)}{(\lambda+\mu)} & \nu=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \\ \lambda=E\dfrac{\nu}{(1+\nu)(1-2\,\nu)} & \mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)} \end{array}\right. \tag{5.17}$$

$$k=\frac{E\,\alpha}{1-2\nu} \qquad\qquad \alpha=\frac{k}{3\lambda+2\mu} \tag{5.18}$$

L'équation (5.15) adoptée pour exprimer l'inverse de la relation linéaire (5.13) peut surprendre par la complication de son écriture. L'explication de ce choix réside dans la signification, et donc dans l'accessibilité expérimentale, des coefficients élastiques E et ν. Le résultat qui vient d'être obtenu pour le matériau isotrope est en effet particulièrement remarquable si l'on se réfère à l'expérience de traction-compression. Il signifie qu'une seule expérience de traction (ou compression) simple, effectuée en déformation infinitésimale selon une direction $\underline{e}_X$ quelconque pour le matériau, dans laquelle on impose le tenseur des contraintes de la forme $\underline{\underline{\pi}} = \pi_{XX}\,\underline{e}_X\otimes\underline{e}_X$ à partir de l'état initial $\underline{\underline{\pi}}^0=0$ avec l'écart de température $\tau=0$ permet, par la mesure de $\underline{\underline{e}}$, de déterminer complètement le comportement élastique du matériau isotrope. En effet $\underline{\underline{e}}$ apparaît de la forme : $\underline{\underline{e}} = e_{XX}\,\underline{e}_X\otimes\underline{e}_X+(e_{YY}=e_{ZZ})\,(\underline{e}_Y\otimes\underline{e}_Y+\underline{e}_Z\otimes\underline{e}_Z)$ où $\underline{e}_Y$ et $\underline{e}_Z$ forment avec $\underline{e}_X$ un trièdre orthonormé quelconque. On a ainsi :

$$E=\pi_{XX}/e_{XX} \quad\text{et}\quad \nu=-e_{YY}/e_{XX}=-e_{ZZ}/e_{XX}\ ,$$

où e_{XX}, e_{YY} et e_{ZZ} sont les allongements unitaires selon $\underline{e}_X$, $\underline{e}_Y$ et $\underline{e}_Z$ linéarisés en ***déformation infinitésimale*** (chapitre II, § 7.1). La réalisation et l'interprétation de cette expérience sont évidemment facilitées dans le cas de la transformation infinitésimale qui sera étudié aux paragraphes 5.4 et 5.5.

Par ailleurs une expérience de dilatation (ou de rétraction) thermique, où l'on impose τ avec $\underline{\underline{\pi}}=\underline{\underline{\pi}}^0=0$ permet de déterminer α :

$$\alpha=(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{e}})\,/3\tau=e_{XX}\,/\tau\ ,$$

où tr $\underline{\underline{e}}$ n'est autre que la déformation volumique linéarisée, tr $\underline{\underline{e}}\simeq(\mathrm{d}\Omega_t-\mathrm{d}\Omega_0)/\mathrm{d}\Omega_0$, en déformation infinitésimale.

5.4 Transformation infinitésimale : linéarisation géométrique

On rappelle la correspondance entre les tenseurs des contraintes de Cauchy et de Piola-Kirchhoff (chapitre V, § 4.1) :

$$\underline{\underline{\sigma}}=\frac{\rho}{\rho_0}\,\underline{\underline{F}}\cdot\underline{\underline{\pi}}\cdot{}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}} \quad\text{avec}\quad \underline{\underline{F}}=(\underline{\underline{\mathbb{1}}}+\underline{\underline{\nabla\xi}})\ . \tag{5.19}$$

On déduit alors de la loi de comportement thermoélastique linéaire (5.9) l'expression de $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}}=\frac{\rho}{\rho_0}\,\underline{\underline{F}}\cdot\underline{\underline{\pi}}^0\cdot{}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}+\frac{\rho}{\rho_0}\,\underline{\underline{F}}\cdot(\underline{\underline{\underline{A}}}:\underline{\underline{e}})\cdot{}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}-\frac{\rho}{\rho_0}\,\underline{\underline{F}}\cdot\underline{\underline{k}}\,\tau\cdot{}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}\ . \tag{5.20}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On se propose maintenant d'examiner la possibilité de poursuivre la linéarisation de l'équation de comportement (5.20) pour aboutir à une relation linéaire entre le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$, le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et l'écart de température τ. Cette nouvelle étape de linéarisation est appelée ***linéarisation géométrique*** car elle s'appuie sur l'hypothèse de la transformation infinitésimale.

Transformation infinitésimale

L'hypothèse de la ***transformation infinitésimale***

$$\| \underline{\underline{\nabla \xi}} \| \ll 1 \tag{5.21}$$

a été énoncée au chapitre (chapitre II, § 5.1) pour la linéarisation du tenseur des déformations de Green-Lagrange ; de plus elle permet de confondre les gradients lagrangien et eulérien du déplacement $\underline{\xi}$ pris aux points homologues l'un de l'autre dans la configuration de référence et dans la configuration actuelle[23]. On a ainsi, en négligeant les termes du deuxième ordre en $\| \underline{\underline{\nabla \xi}} \|$:

$$\underline{\underline{e}} \simeq \underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{\nabla \xi}} + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\nabla \xi}})/2 \simeq (\underline{\underline{\mathrm{grad}\ \xi}} + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\mathrm{grad}\ \xi}})/2 \ ; \tag{5.22}$$

on a aussi, au même ordre :

$$\rho/\rho_0 = \mathrm{d}\Omega_0/\mathrm{d}\Omega \simeq (1 + \ \mathrm{tr}\, \underline{\underline{\varepsilon}})^{-1} \simeq (1 - \ \mathrm{tr}\, \underline{\underline{\varepsilon}}) \ . \tag{5.23}$$

Il en résulte que, dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale, la loi de comportement thermoélastique (5.20) se réduit, au premier ordre en $\|\underline{\underline{\nabla \xi}}\|$, à :

$$\underline{\underline{\sigma}} \simeq \underline{\underline{\pi}}^0(1 - \ \mathrm{tr}\, \underline{\underline{\varepsilon}}) + \underline{\underline{\mathrm{grad}\ \xi}} \,.\, \underline{\underline{\pi}}^0 + \underline{\underline{\pi}}^0 \,.\, {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\mathrm{grad}\ \xi}} + \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{k}\, \tau \tag{5.24}$$

qui s'explicite en fonction des parties symétrique $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et antisymétrique $\underline{\underline{w}}$ de $\underline{\underline{\mathrm{grad}\ \xi}}$

$$\underline{\underline{\mathrm{grad}\ \xi}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{w}} \tag{5.25}$$

sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} \simeq \underline{\underline{\pi}}^0 + [\underline{\underline{w}} \,.\, \underline{\underline{\pi}}^0 - \underline{\underline{\pi}}^0 \,.\, \underline{\underline{w}}] + \{-\underline{\underline{\pi}}^0 \ \mathrm{tr}\, \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\varepsilon}} \,.\, \underline{\underline{\pi}}^0 + \underline{\underline{\pi}}^0 \,.\, \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\} - \underline{k}\, \tau \ . \tag{5.26}$$

Dans cette formule, le terme entre [...], symétrique exprime simplement comment, dans une transformation rigidifiante infinitésimale de l'élément de matière, en l'absence de déformation et de variation de température, le tenseur $\underline{\underline{\pi}}^0$ est transformé pour aboutir au tenseur de Cauchy homologue $\underline{\underline{\sigma}}^0$, qui « suit l'élément ». Le terme entre { ... } représente une application linéaire en $\underline{\underline{\varepsilon}}$, que l'on peut écrire :

$$-\underline{\underline{\pi}}^0 \ \mathrm{tr}\, \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\varepsilon}} \,.\, \underline{\underline{\pi}}^0 + \underline{\underline{\pi}}^0 \,.\, \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{B}}}} - \underline{\underline{\pi}}^0 \otimes \underline{\underline{\mathbb{1}}}) : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{5.27}$$

[23] Comme dans la section 4.6, il pourrait être opportun d'expliciter la dépendance spatiale et temporelle de chacune des grandeurs qui interviennent dans les équations. Il est malheureusement évident que les formules deviendraient alors vite inextricables et il paraît préférable de se satisfaire de la dépendance implicite qui apparaît à travers les notations choisies, sans risque majeur d'ambiguïté.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

où les $B_{ijk\ell}$ ont les mêmes symétries que les $A_{ijk\ell}$ et sont définis à partir de $\underline{\underline{\pi}}^0$ par

$$B_{ijk\ell} = (\pi^0_{ik}\,\delta_{\ell j} + \pi^0_{\ell j}\,\delta_{ik} + \pi^0_{i\ell}\,\delta_{kj} + \pi^0_{kj}\,\delta_{i\ell})/2\ . \tag{5.28}$$

On obtient ainsi, pour $\underline{\underline{\sigma}}$, l'expression :

$$\underline{\underline{\sigma}} \simeq \underline{\underline{\pi}}^0 + [\underline{w}\,.\,\underline{\underline{\pi}}^0 - \underline{\underline{\pi}}^0\,.\,\underline{w}] + (\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{B}}}} - \underline{\underline{\pi}}^0 \otimes \underline{\underline{\mathbb{1}}}) : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}}\,\tau\ . \tag{5.29}$$

On voit, tant sur (5.26) que sur (5.29), que les difficultés pour aboutir à une relation linéaire entre $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}$ et τ sont essentiellement dues au tenseur des contraintes initiales. Plusieurs hypothèses relatives à $\underline{\underline{\pi}}^0$ permettent de poursuivre la linéarisation. La plus évidente est celle de l'état de réfèrence naturel.

État de référence naturel

Par définition, l'état de référence est dit ***naturel*** s'il correspond à un état de contrainte nul dans ***l'élément de matière*** :

$$\underline{\underline{\pi}} = 0 \quad \text{pour} \quad \underline{\underline{e}} = 0 \quad \text{et} \quad \tau = 0 \tag{5.30}$$

c'est-à-dire, par (5.8),

$$\underline{\underline{\pi}}^0 = 0\ . \tag{5.31}$$

La relation linéaire entre $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\tau}$ résulte alors immédiatement de (5.26) sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} \simeq \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}}\,\tau\ , \tag{5.32}$$

que dans la suite, selon l'usage, on écrira en remplaçant le signe $\simeq$ par le signe d'égalité stricte :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}}\,\tau} \tag{5.33}$$

Le résultat obtenu est essentiel :

Dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale[(24)], la loi de comportement thermoélastique linéarisée à partir de l'état de référencee naturel s'exprime sous des formes identiques en fonction de $\underline{\underline{\pi}}, \underline{\underline{e}}$ et τ ou en fonction de $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}$ et τ.

En particulier, pour le matériau isotrope :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\,(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} - k\,\tau\underline{\underline{\mathbb{1}}}} \tag{5.34}$$

[(24)] On rappelle que cette hypothèse implique que la déformation est infinitésimale et permet donc la première étape de la linéarisation, à savoir la ***linéarisation physique***.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

inversée en

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\,(\operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \alpha\,\tau\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}} \tag{5.35}$$

qui sont homologues de (5.13) et (5.15).

Il se révèle commode, pour certaines applications, de transformer ces expressions en introduisant le déviateur $\underline{\underline{s}}$ de $\underline{\underline{\sigma}}$ défini au chapitre VI (§ 2.8) et le déviateur $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\mathrm{d}}$ de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ défini de la même façon :

$$\begin{cases} \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - (\operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}}/3)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}\,, \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_{\mathrm{d}} = \underline{\underline{\varepsilon}} - (\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}/3)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}\,. \end{cases} \tag{5.36}$$

On obtient alors les formules suivantes (5.37) et (5.38), respectivement équivalentes aux expressions (5.34) et (5.35) de la loi de comportement :

$$\begin{cases} \operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}} \;=\; (3\lambda + 2\mu)\,\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}} - 3\,k\,\tau \\ \underline{\underline{s}} \;=\; 2\,\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}_{\mathrm{d}} \end{cases} \tag{5.37}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}} \;=\; \dfrac{1-2\nu}{E}\,\operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}} + 3\,\alpha\,\tau \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_{\mathrm{d}} \;=\; \dfrac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{s}}\,. \end{cases} \tag{5.38}$$

On y remarque la proportionnalité entre les déviateurs $\underline{\underline{s}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\mathrm{d}}$ à travers le module de cisaillement μ. En rappelant que, d'après (5.23), $\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}} \simeq (\mathrm{d}\Omega_t - \mathrm{d}\Omega_0)/\mathrm{d}\Omega_0$ représente la déformation volumique linéarisée, on voit que celle-ci dépend linéairement de l'écart de température τ à travers le coefficient de dilatation thermique volumique égal à $3\,\alpha$, et de la trace du tenseur des contraintes.

On pose habituellement :

$$3\,K = 3\,\lambda + 2\,\mu = \frac{E}{1-2\,\nu}\,. \tag{5.39}$$

On voit, à partir de (5.38), que la déformation volumique élastique dans une expérience de compression uniforme isotherme où $\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$, est égale à :

$$\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}} = \operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}}/3\,K = -p/K\,. \tag{5.40}$$

Le coefficient K défini par (5.39) est appelé ***module élastique de compression*** (ou encore module de rigidité à la dilatation) [25].

[25] Cette hésitation dans la terminologie traduit le fait que K est d'autant plus élevé que le matériau est plus « raide ». On la trouve aussi à propos des modules élastiques.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

État de référence quasi-naturel

Un résultat intellectuellement intéressant est obtenu si l'état de contrainte initial dans la configuration de référence est tel que les termes en $\underline{\underline{\pi}}^0$ dans (5.27) soient négligeables devant $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$. L'hypothèse correspondante est dite de l'état de référence ***quasi-naturel***.

Les composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\pi}}^0$ pour ***l'élément de matière*** sont supposées très petites, comparées aux modules d'élasticité du matériau considéré (cette comparaison a un sens puisqu'il s'agit de grandeurs physiques qui s'expriment avec les mêmes unités). On a alors, en se reportant à (5.27, 5.28 et 5.29) :

$$\|\underline{\underline{\pi}}^0 \otimes \underline{\underline{\mathbb{1}}}\| \ll \|\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}\| \quad \text{et} \quad \|\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}\| \ll \|\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}\| \,. \tag{5.41}$$

Si, ***de plus***, on suppose que

$$\|\underline{\underline{\varepsilon}}\| \text{ et } \|\underline{\underline{\text{grad}\,\xi}}\| \ \textbf{\textit{sont du même ordre}} \tag{5.42}$$

les termes entre [...] dans (5.29) sont négligeables et $\underline{\underline{\sigma}}$ se réduit à :

$$\underline{\underline{\sigma}} \simeq \underline{\underline{\pi}}^0 + \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}}\,\tau \,. \tag{5.43}$$

En remplaçant comme précédemment le signe $\simeq$ par le signe d'égalité stricte on aboutit ainsi, sous les hypothèses énoncées, à une formulation eulérienne en $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \tau$ identique à l'écriture lagrangienne (5.8) en $\underline{\underline{\pi}}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \tau$, où $\underline{\underline{\pi}}^0$ apparaît comme le tenseur des contraintes initiales $\underline{\underline{\sigma}}^0$. On écrira ainsi :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}}\,\tau \,. \tag{5.44}$$

Pour le matériau isotrope dans la configuration de référence choisie, la formule (5.44) devient :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma^0 \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \lambda\,(\text{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} - k\,\tau\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} \tag{5.45}$$

inversée en

$$\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^0 = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\,(\text{tr}\,\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \alpha\,\tau\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^0 = -\frac{1-2\,\nu}{E}\sigma^0\underline{\underline{\mathbb{1}}} \,. \tag{5.46}$$

L'intérêt de ce résultat est réduit par le fait que les constantes qui apparaissent dans les expressions de la loi de comportement sont relatives à la configuration de référence choisie. De même, le tenseur $\underline{\underline{\pi}}^0$ doit respecter les symétries de la matière dans cette configuration.

État de référence précontraint

On verra au chapitre VIII (sections 2 et 3) que la question de la linéarisation de la loi de comportement se pose concrètement dans le cadre de l'étude du problème d'évolution thermoélastique d'un ***système***. L'état de contrainte initial de l'élément de matière est la valeur locale du champ de précontrainte qui règne dans le système dans sa configuration initiale précontrainte κ_0 prise comme référence.

Si cet état de précontrainte correspond pour l'élément à une ***transformation thermoélastique infinitésimale à partir de son état naturel***, on peut écrire sa loi de comportement thermoélastique à partir de la configuration précontrainte sous la forme :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}' = (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{p}}) = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}' - \underline{\underline{k}}\,\tau'} \tag{5.47}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{p}}$ est le tenseur de précontrainte de l'élément et où $\underline{\underline{\xi}}', \underline{\underline{\varepsilon}}'$ et τ' sont les éléments de la transformation infinitésimale à partir de la configuration précontrainte κ_{p}.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Il est essentiel de remarquer que les constantes physiques qui interviennent dans cette formule sont relatives à ***l'état de référence naturel***.

Pour le matériau isotrope dans l'état naturel on a ainsi :

$$\underline{\underline{\sigma}}' = (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{p}}) = \lambda\,(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}')\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}' - k\,\tau'\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} \tag{5.48}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}' = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}}' - \frac{\nu}{E}\,(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}')\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \alpha\,\tau'\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} \tag{5.49}$$

On peut donner, de la formule (5.47), la justification suivante qui en précise la signification. Désignant par κ_0 la configuration du matériau dans laquelle l'état est naturel on a, en application de (5.20) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\rho}{\rho_0}(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\nabla\xi}})\cdot(\underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{e}} - \underline{\underline{k}}\,\tau)\cdot(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\nabla\xi}}) \tag{5.50}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{p}} = \frac{\rho_{\mathrm{p}}}{\rho_0}(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\nabla\xi^{\mathrm{p}}}})\cdot(\underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{e}}^{\mathrm{p}} - \underline{\underline{k}}\,\tau^{\mathrm{p}})\cdot(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\nabla\xi^{\mathrm{p}}}})\,. \tag{5.51}$$

Il vient en introduisant le gradient $\underline{\underline{\nabla}}_{\mathrm{p}}$ par rapport à la configuration κ_{p} :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\rho}{\rho_{\mathrm{p}}}\frac{\rho_{\mathrm{p}}}{\rho_0}(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\nabla}}_{\mathrm{p}}\xi')\cdot(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\nabla\xi^{\mathrm{p}}}})\cdot(\underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{e}} - \underline{\underline{k}}\,\tau^{\mathrm{p}} - \underline{\underline{k}}\,\tau')\cdot(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\nabla\xi^{\mathrm{p}}}})\cdot(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\nabla}}_{\mathrm{p}}\xi')$$

où l'on a, puisque les transformations considérées sont infinitésimales,

$\underline{\underline{e}} \simeq \underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{\nabla\xi}} + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\nabla\xi}})/2$, $\underline{\underline{e}}^{\mathrm{p}} \simeq \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = (\underline{\underline{\nabla\xi^{\mathrm{p}}}} + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\nabla\xi^{\mathrm{p}}}})/2$,

$\underline{\underline{\varepsilon}} \simeq \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} + \underline{\underline{\varepsilon}}'$ avec $\underline{\underline{\varepsilon}}' = (\underline{\underline{\nabla}}_{\mathrm{p}}\xi' + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\nabla}}_{\mathrm{p}}\xi')/2$.

On en déduit, compte tenu de (5.51),

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}} \simeq & \frac{\rho}{\rho_0}(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\nabla}}_{\mathrm{p}}\xi')\cdot\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{p}}\cdot(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\nabla}}_{\mathrm{p}}\xi') \\ & + \frac{\rho}{\rho_{\mathrm{p}}}(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\nabla}}_{\mathrm{p}}\xi')\cdot\left\{\frac{\rho_{\mathrm{p}}}{\rho_0}(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\nabla\xi^{\mathrm{p}}}})\cdot(\underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}' - \underline{\underline{k}}\,\tau')\cdot(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\nabla\xi^{\mathrm{p}}}})\right\}\cdot(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\nabla}}_{\mathrm{p}}\xi')\end{aligned} \tag{5.52}$$

où l'on retrouve la structure de l'équation (5.20), κ_{p} jouant le rôle de κ_0 et $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{p}}$ celui de $\underline{\underline{\pi}}^0$. Le caractère infinitésimal de la transformation de κ_0 à κ_{p} implique que les précontraintes sont très petites devant les modules d'élasticité du matériau : la condition homologue de (5.41) pour $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{p}}$ est donc satisfaite. De plus le terme entre {...} dans (5.52) est équivalent à $(\underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}' - \underline{\underline{k}}\,\tau')$. On obtient ainsi, sous la condition homologue de (5.42) pour la transformation infinitésimale de κ_{p} à κ_t, l'équation homologue de (5.44)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{p}} + \underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}' - \underline{\underline{k}}\,\tau' \tag{5.53}$$

qui montre que ***les tenseurs*** $\underline{\underline{\underline{A}}}$ ***et*** $\underline{\underline{k}}$ ***dans la formule*** (5.47) ***sont ceux de la configuration*** κ_0.

Récapitulatif et commentaires

On ne devra pas perdre de vue que les formules précédentes sont approchées, écrites en $\underline{x}$ dans κ_t , dans lesquelles le signe $\simeq$ a été remplacé par le signe $=$ et dont les conditions de validité ont été précisées. En cas de confusion il sera toujours avisé de revenir à la formulation lagrangienne au point $\underline{X}$ dans κ_0.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Compte tenu de leur importance pratique, on a regroupé ci-après les formules essentielles exprimant la loi de comportement thermoélastique du matériau isotrope dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale et de l'état de référence précontraint. Afin de simplifier les notations, cet état de référence sera, sauf lorsqu'il y aura risque de confusion, désigné désormais par $\underline{\underline{\sigma}}^0$.

(5.54)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^0 + \lambda\,(\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}')\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}' - k\,\tau'\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}' = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}}' - \frac{\nu}{E}\,(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}')\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \alpha\,\tau'\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^0$$

$$E = \mu\,\frac{(3\,\lambda + 2\,\mu)}{(\lambda+\mu)} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \qquad \alpha = \frac{k}{(3\,\lambda+2\,\mu)}$$

$$\lambda = E\,\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\,\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad k = \alpha\,\frac{E}{(1-2\,\nu)}$$

5.5 Stabilité du matériau thermoélastique

On considère un élément de matériau thermoélastique ***dans son état naturel*** pris comme état initial. Étudier la stabilité du matériau, c'est examiner si cet élément, en l'absence de sollicitations extérieures (forces, écarts de température) a tendance à évoluer spontanément ou au contraire à demeurer dans son état initial.

On admettra [26] qu'une ***condition nécessaire et suffisante de stabilité isotherme*** du matériau thermoélastique linéaire est que le terme quadratique figurant dans (5.3) soit ***défini positif*** :

(5.55)
$$\frac{1}{2}\,\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{e}} \quad \textbf{\textit{défini}}\ \text{positif}\,.$$

Pour le matériau thermoélastique linéaire isotrope on a :

(5.56)
$$\frac{1}{2}\,\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{e}} = \frac{\lambda}{2} I_1'^2 + 2\,\mu\,I_2'\,.$$

Il est commode pour obtenir les conditions pour que ce terme soit défini positif, d'exprimer I_1' et I_2' en fonction des valeurs principales de $\underline{\underline{e}}$, soit e_1, e_2 et e_3 :

(5.57)
$$\frac{1}{2}\,\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{e}} = \frac{\lambda}{2}\,(e_1+e_2+e_3)^2 + \mu\,(e_1^2+e_2^2+e_3^2)\,;$$

cette forme quadratique s'écrit comme la somme des carrés de trois formes linéaires

[26] Théorème de Lejeune-Dirichlet généralisé et réciproque.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

en e_1, e_2, e_3 indépendantes[27], par exemple :

(5.58)
$$\frac{\lambda}{2} I_1'^2 + 2\,\mu\, I_2' = \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{3}\right)(e_1 + e_2 + e_3)^2 + \frac{\mu}{2}(e_1 - e_2)^2 + \frac{\mu}{6}(2\,e_3 - e_1 - e_2)^2 \,.$$

On en déduit les conditions de stabilité qui expriment (5.55) : deux conditions de positivité sur les coefficients d'élasticité de Lamé

(5.59)
$$\boxed{\begin{array}{l} 3\,\lambda + 2\,\mu > 0 \\ \mu > 0 \end{array}}$$

Si l'on utilise le module de Young et le coefficient de Poisson, les conditions (5.59) sont équivalentes, par (5.17), à :

(5.60)
$$\boxed{\begin{array}{l} E > 0 \\ -1 < \nu < \dfrac{1}{2} \end{array}}$$

Dans la pratique les valeurs négatives de ν sont exceptionnelles [28].

Pour tenter d'apprécier la portée de la condition de stabilité posée a priori sous la forme (5.55), il est intéressant d'identifier la signification physique des restrictions (5.59) et (5.60) qui en découlent sur des expériences simples effectuées dans le cadre de la transformation infinitésimale [29].

- $E > 0$ implique par (5.35) que, dans une expérience de traction isotherme ($\tau = 0$) où $\underline{\underline{\sigma}}$ est uniaxial :
$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{xx}\, \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad , \quad \sigma_{xx} > 0 \,,$$
on a
$$\underline{\underline{\varepsilon}} : (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) = \varepsilon_{xx} = \sigma_{xx}/E > 0$$
c'est-à-dire que le matériau ***s'allonge*** si l'on effectue sur lui une ***traction isotherme***.
- $\nu < 1/2$ avec $E > 0$ impliquent que, dans une expérience de compression isotrope isotherme, où $\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$, on a par (5.40) :
$$\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = -p/K = -3p(1-2\nu)/E < 0$$
c'est-à-dire que le matériau ***diminue de volume*** si l'on effectue sur lui une ***compression isotrope isotherme***.

[27] Les valeurs propres de l'application linéaire associée sont $\left(\frac{3\lambda}{2} + \mu\right)$ et μ, valeur propre double qui correspond à $e_1 + e_2 + e_3 = 0$. La condition (5.55) est équivalente à la positivité de ces valeurs propres.
[28] On a mesuré $\nu = 0,05$ pour le beryllium et un doute subsisterait sur le signe de ν pour la pyrite.
[29] L'hypothèse essentielle est celle de la ***déformation infinitésimale*** ; la transformation n'est ici supposée infinitésimale que pour rendre l'interprétation des expériences plus immédiate (cf. § 5.3).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- $\nu > -1$ avec $E > 0$ impliquent à travers (5.17), $\mu > 0$. L'interprétation de cette condition apparaîtra au chapitre VIII (section 7, formule (7.17) sur le problème de la torsion : elle signifie que la torsion d'une barre cylindrique se produit dans le sens du couple qui lui est imposé.

On remarque que les interprétations des conditions de stabilité qui viennent d'être données sont conformes à l'expérience quotidienne !

Enfin, comme annoncé au paragraphe 4.2, la condition de stabilité (5.55) permet d'affirmer que la loi de comportement élastique linéaire (5.9), dans une évolution isotherme, est une correspondance ***biunivoque*** entre $\underline{\underline{e}}$ d'une part et la contrainte $\underline{\underline{\pi}}$ de l'autre. Ceci implique notamment que, dans une telle évolution, il y a « réversibilité » des déformations comme on l'a indiqué dans la section 2 à propos des constatations expérimentales.

5.6 Quelques valeurs typiques pour des matériaux usuels

Matériau	E en MPa	ν	$\alpha^{(30)}$ en 10^{-6} K^{-1}
Acier doux	2×10^5	0,25-0,30	12
Acier invar (64% Fe, 36% Ni)	$1{,}4 \times 10^5$		$\simeq 0$
Aluminium	$7{,}4 \times 10^4$	0,34	22
Argent	$8{,}5 \times 10^4$	0,39	19
Béton	3,5 à 4,5 $\times 10^4$	0,2	10
Bronze	1×10^5	0,31	17 à 19
Cuivre	$1{,}2 \times 10^5$	0,34	17
Fonte	8×10^4	0,36	10
Granite	8×10^4	0,27	9
Laiton	$9{,}2 \times 10^4$	0,33	18
Or	8×10^4	0,42	14
Platine	$1{,}5 \times 10^5$	0,38	9
Plomb	$1{,}7 \times 10^4$	0,45	29
Verre	7×10^4	0,22 à 0,31	6 à 10

La limite d'élasticité en traction simple de l'acier doux est de l'ordre de 240 MPa, celle d'un acier à haute résistance de 1000 MPa.

(30) On a mesuré $\alpha = -5 \times 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ pour le plutonium en phase δ, stable entre 315 et 445°C. (Cf. Y. Quéré, ***Physique des matériaux***).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

5.7 Exemples de matériaux thermoélastiques anisotropes

Relativement à l'échelle macroscopique choisie pour la modélisation du matériau comme un milieu continu, la structure microscopique due à la constitution et à l'élaboration de ce matériau gouverne les propriétés de symétries évoquées au chapitre VI (§ 4.2) et au paragraphe 4.4. C'est ainsi notamment que, outre les matériaux mono ou polycristallins classiques tels que les métaux par exemple, les matériaux composites de toutes natures, à l'échelle choisie pour leur analyse mécanique par homogénéisation, sont concernés par les considérations relatives aux symétries matérielles. Compte tenu de l'importance croissante de ce type de matériaux dans les applications pratiques on se propose de donner, sans démonstration détaillée les résultats concernant l'écriture de la loi de comportement thermoélastique pour deux types de matériaux ***anisotropes*** fréquemment rencontrés : le matériau orthotrope et le matériau orthotrope de révolution aussi appelé transversalement isotrope. On pourra se reporter à l'ouvrage de A.E. Love ***A treatise on the mathematical theory of elasticity*** pour des résultats très détaillés concernant notamment les anisotropies cristallines (monocristaux).

La méthode d'étude suivie ici (mais il en existe d'autres, fondées sur les théorèmes de représentation des fonctions tensorielles par exemple) consiste à exploiter le principe du respect des symétries de la matière en écrivant l'équation (4.41). Pour cela on se place dans le repère significatif pour le matériau du point de vue de ses symétries. Ceci permet de dénombrer les constantes physiques (élastiques ou thermiques) qui caractérisent le comportement. L'écriture de la loi de comportement dans un repère quelconque nécessite évidemment de leur adjoindre les paramètres géométriques (angles d'Euler par exemple) qui permettent de définir l'orientation du matériau (cf. § 5.2).

Matériau orthotrope dans la configuration de référence

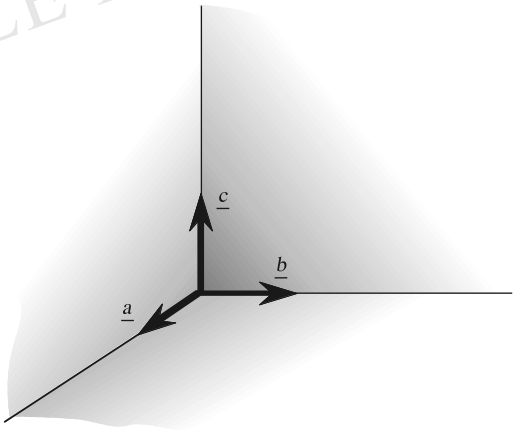


Figure 7 – Matériau orthotrope : plans de symétries

Un matériau est orthotrope dans la configuration de référence s'il possède, dans cette configuration, trois plans de symétrie orthogonaux entre eux ; ceci définit le groupe $\mathcal{G}$ des symétries du matériau pour l'application de l'équation (4.41). On utilise (figure 7) une base orthonormée dirigée suivant les intersections de trois plans de symétrie du matériau ; on explicite la loi de comportement en composantes dans cette base ; on en écrit l'invariance par changement d'orientation des vecteurs de la base.

On obtient la loi de comportement du matériau thermoélastique orthotrope, ***dans sa base privilégiée*** notée $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$:

$$
(5.61)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
\pi_{aa} = \pi^0_{aa} + A_{11}\, e_{aa} + A_{12}\, e_{bb} + A_{13}\, e_{cc} - k_1\, \tau \\
\pi_{bb} = \pi^0_{bb} + A_{12}\, e_{aa} + A_{22}\, e_{bb} + A_{23}\, e_{cc} - k_2\, \tau \\
\pi_{cc} = \pi^0_{cc} + A_{13}\, e_{aa} + A_{23}\, e_{bb} + A_{33}\, e_{cc} - k_3\, \tau \\
\pi_{bc} = A_{44}\, e_{bc} \\
\pi_{ac} = A_{55}\, e_{ac} \\
\pi_{ab} = A_{66}\, e_{ab}\ .
\end{array}
\right.
$$

Il y a donc 9 modules d'élasticité et 3 constantes thermiques. De plus, le tenseur des contraintes initiales est nécessairement diagonal dans la base $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$. La définition de cette base dans un repère quelconque nécessite, quant à elle, la donnée de 3 angles d'Euler.On a coutume de transformer (5.61) en introduisant des « modules de Young », des « coefficients de Poisson » et des « modules de cisaillement » pour écrire, dans le cas isotherme et à partir de l'état naturel pour simplifier, la loi de comportement sous la forme inversée (5.63). On prendra garde qu'il n'y a pas de symétrie de ces coefficients de Poisson, mais symétrie du tableau (5.63) comme indiqué au paragraphe 5.2, c'est-à-dire que

$$
(5.62)\qquad \nu_{21}\, E_1 = \nu_{12}\, E_2 \qquad \nu_{32}\, E_2 = \nu_{23}\, E_3 \qquad \nu_{31}\, E_1 = \nu_{13}\, E_3\ :
$$

$$
(5.63)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
e_{aa} = \dfrac{1}{E_1}\, \pi_{aa} - \dfrac{\nu_{21}}{E_2}\, \pi_{bb} - \dfrac{\nu_{31}}{E_3}\, \pi_{cc} \\
e_{bb} = -\dfrac{\nu_{12}}{E_1}\, \pi_{aa} + \dfrac{1}{E_2}\, \pi_{bb} - \dfrac{\nu_{32}}{E_3}\, \pi_{cc} \\
e_{cc} = -\dfrac{\nu_{13}}{E_1}\, \pi_{aa} - \dfrac{\nu_{23}}{E_2}\, \pi_{bb} + \dfrac{1}{E_3}\, \pi_{cc} \\
2\, e_{bc} = \dfrac{1}{G_{23}}\, \pi_{bc} \qquad 2\, e_{ac} = \dfrac{1}{G_{13}}\, \pi_{ac} \qquad 2\, e_{ab} = \dfrac{1}{G_{12}}\, \pi_{ab}\ .
\end{array}
\right.
$$

Matériau orthotrope de révolution dans la configuration de référence

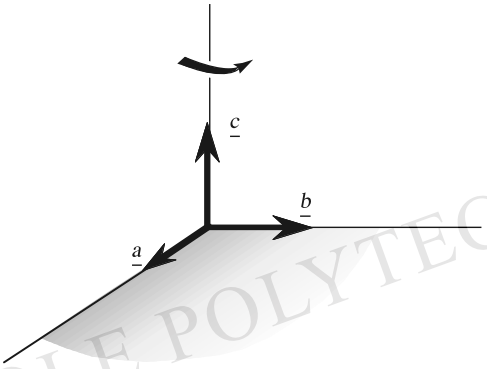


Figure 8 – Matériau orthotrope de révolution : axe de symétrie et plans de symétries

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Un matériau est orthotrope de révolution dans la configuration de référence s'il possède, dans cette configuration, un axe de symétrie de révolution et admet pour plans de symétrie tout plan passant par cet axe et un plan perpendiculaire à cet axe. On dit aussi d'un tel matériau qu'il est transversalement isotrope autour de l'axe indiqué. On utilise (figure 8) une base orthonormée constituée de deux vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$ situés dans le plan de symétrie orthogonal à l'axe et d'un vecteur $\underline{c}$ selon l'axe de symétrie de révolution. On explicite la loi de comportement en composantes dans cette base ; on en écrit l'invariance par changement d'orientation des vecteurs de base et par rotation de la base autour de l'axe de symétrie.

On obtient la loi de comportement du matériau thermoélastique orthotrope de révolution ***dans la base*** $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ (ou toute base équivalente) :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\pi_{aa} = \pi^0 + A_{11}\, e_{aa} + A_{12}\, e_{bb} + A_{13}\, e_{cc} - k\,\tau \\
\pi_{bb} = \pi^0 + A_{12}\, e_{aa} + A_{11}\, e_{bb} + A_{13}\, e_{cc} - k\,\tau \\
\pi_{cc} = \pi^0_{cc} + A_{13}\, e_{aa} + A_{13}\, e_{bb} + A_{33}\, e_{cc} - k_3\,\tau \\
\pi_{bc} = A_{44}\, e_{bc} \\
\pi_{ac} = A_{44}\, e_{ac} \\
\pi_{ab} = (A_{11} - A_{12})\, e_{ab}\ .
\end{array}
\right. \tag{5.64}
$$

Il y a donc 5 modules d'élasticité et 2 constantes thermiques. De plus, le tenseur des contraintes initiales est nécessairement diagonal et « de révolution » autour de l'axe de symétrie du matériau. La définition de cet axe dans un repère quelconque nécessite par ailleurs la donnée de 2 angles.

On peut aussi introduire des « modules de Young », des « coefficients de Poisson » et des « modules de cisaillement ». Dans le cas isotherme à partir de l'état naturel on écrira :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
e_{aa} = \dfrac{1}{E}\,\pi_{aa} - \dfrac{\nu}{E}\,\pi_{bb} - \dfrac{\nu'}{E'}\,\pi_{cc} \\
e_{bb} = -\dfrac{\nu}{E}\,\pi_{aa} + \dfrac{1}{E}\,\pi_{bb} - \dfrac{\nu'}{E'}\,\pi_{cc} \\
e_{cc} = -\dfrac{\nu'}{E'}\,\pi_{aa} - \dfrac{\nu'}{E'}\,\pi_{bb} + \dfrac{1}{E'}\,\pi_{cc} \\
2\,e_{bc} = \dfrac{1}{G}\,\pi_{bc} \qquad 2\,e_{ac} = \dfrac{1}{G}\,\pi_{ac} \qquad 2\,e_{ab} = \dfrac{2(1+\nu)}{E}\,\pi_{ab}\ .
\end{array}
\right. \tag{5.65}
$$

6 Aperçu historique

Sans viser à l'exhaustivité il paraît utile de situer ici, du point de vue historique, l'apparition des principaux concepts évoqués dans ce chapitre consacré au comportement élastique, en donnant les indications essentielles sur les démarches suivies dans les travaux correspondants. Le lecteur soucieux d'approfondir cette question se reportera avec grand profit à l'introduction historique et aux annexes du livre de A.E.H. Love ***A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.***

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Élasticité uniaxiale

Comme indiqué au paragraphe 2.4 la loi de comportement élastique uniaxiale reliant l'extension d'un solide élastique à la force de traction qui lui est appliquée fut découverte et énoncée indépendamment par Hooke et Mariotte. L'application en fut faite essentiellement pour l'étude des poutres. Mariotte lui-même reprit ainsi le problème posé par Galilée (1638) qui tentait d'évaluer la capacité portante d'une poutre console. Pour l'étude de l'***elastica*** (ligne élastique qui se déforme en flexion) Jacques Bernoulli [31] associa la résistance opposée par une tige à la flexion à l'extension et à la contraction de ses fibres longitudinales, aboutissant ainsi pratiquement à un moment de flexion proportionnel à la courbure correspondante de la tige. Ce problème de l'***elastica*** fut étudié entre autres par Euler, Lagrange, Daniel Bernoulli, conduisant notamment aux premiers travaux sur la stabilité élastique (cf. chapitre XII, § 3.1). Pour les poutres de section finie c'est Coulomb [32] qui, à partir de la loi de Hooke appliquée aux fibres longitudinales, proposa une théorie de la flexion.

Milieu continu et élasticité tridimensionnelle

Thomas Young fut le premier à reconnaître le cisaillement comme une déformation élastique (Coulomb ne l'avait considéré qu'en relation avec la rupture). Il fit la remarque que la résistance élastique au cisaillement et la résistance élastique à la traction compression d'un même corps sont en général différentes. Il introduisit le concept de « module d'élasticité d'une substance » dont est issu l'actuel ***module de Young*** [33].

Navier [34] rechercha les équations d'équilibre des solides élastiques à travers une « théorie moléculaire ». Considérant la matière comme constituée de molécules ponctuelles (points matériels) qui exerçaient entre elles des forces axiales, il obtenait les forces élastiques comme résultat des variations de ces forces « moléculaires » liées aux déplacements relatifs des molécules. En supposant le matériau isotrope Navier aboutissait à des équations d'équilibre du solide élastique, exprimées en termes de déplacements des points matériels, mais qui ne faisaient intervenir qu'une seule constante liée au matériau, semblable au module de Young [35].

On a déjà évoqué au chapitre V (§ 3.6) le mémoire communiqué à l'Académie des Sciences en septembre 1822 par Cauchy. Outre l'introduction du concept de contrainte comme on l'a mentionné précédemment, ce mémoire explicitait aussi clairement la notion de ***déformation*** caractérisée par ses 6 composantes ou par les axes principaux des déformations et les extensions principales correspondantes. À partir des équations d'équilibre écrites en contraintes, Cauchy souhaitait aboutir aux équations en déplacements régissant l'équilibre du solide élastique. Il utilisait pour cela la relation contrainte-déformation qu'il obtenait, pour les matériaux isotropes, en supposant d'une part la linéarité et d'autre part la coïncidence des directions principales des contraintes et des déformations. Introduisant ainsi ***2 constantes matérielles***, Cauchy aboutissait aux équations d'équilibre pour un solide élastique exprimées

[31] Jacques Bernoulli (1654-1705) ; Jean Bernoulli (1667-1748) frère de Jacques ; Daniel Bernoulli (1700-1782) fils de Jean.
[32] Ch. A. Coulomb (1736-1806).
[33] Dans ***A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*** (Londres, 1807), Thomas Young donne la définition suivante : « The modulus of elasticity of a substance is a column of the same substance capable of producing a pressure on its base which is to the weight causing a certain degree of compression, as the length of the substance is to the diminution of its length ». (Cité par S. Timoshenko dans ***History of the Strength of Materials***). La complexité de cet énoncé explique sans doute le commentaire de J.E. Gordon dans ***The New Science of Strong Materials*** : « Young published the idea of his modulus in a rather incomprehensible paper in 1807 after he had been dismissed from his lectureship at the Royal Institution for not being sufficiently practical. Thus perhaps the most famous and the most useful of all concepts in engineering, was not generally understood or absorbed into engineering practice until after Young's death ».
[34] C. Navier (1785-1836) : mémoire lu à l'Académie des Sciences en 1821, publié en 1827.
[35] L'équation obtenue n'est pas celle donnée au chapitre VIII (§ 5.3).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

en termes de déplacements [36]. Dans une extension ultérieure Cauchy s'intéressa aux solides cristallins en faisant l'hypothèse de points matériels interagissant par des forces d'attraction et de répulsion. Dans un premier mémoire sur ce thème Cauchy put notamment retrouver par cette voie les équations du cas isotrope qu'il avait obtenues antérieurement (avec 2 constantes matérielles). Dans un second mémoire, immédiatement postérieur, il aboutissait à une relation contrainte-déformation avec un seul coefficient d'élasticité dans le cas isotrope et aux équations trouvées par Navier ; pour le matériau anisotrope le plus général, Cauchy trouvait 21 constantes matérielles, dont 6 représentaient les contraintes initiales, d'où seulement 15 coefficients d'élasticité.

On doit aussi mentionner les mémoires de Poisson à l'Académie des Sciences, fondés sur une théorie moléculaire, qui retrouvaient les équations obtenues par Navier.

L'approche énergétique

C'est à Green [37] qu'il revient d'avoir obtenu les équations de l'élasticité à partir de considérations énergétiques. « In whatever way the elements of any material system may act upon each other, if all internal forces exerted be multiplied by the elements of their respective directions, the total sum for any assigned portion of the mass will always be the exact differential of some function ». En supposant que cette fonction pouvait être développée en puissances et produits des composantes de la déformation, et en se restreignant au deuxième ordre pour les petites déformations, Green obtenait les équations du comportement élastique linéaire avec les 21 coefficients d'élasticité dans le cas anisotrope général (cf. § 5.2 ci-dessus).

À noter que la question du nombre des coefficients d'élasticité c'est-à-dire de savoir s'il était possible d'aller au-delà du résultat de Green et de réduire ce nombre de 2 à 1 pour le matériau isotrope, et de 21 à 15 dans le cas le plus général est demeurée pendant longtemps une question controversée, liée à des hypothèses physiques *a priori* sur la nature des interactions élastiques (cf. par exemples le mémoire de Saint Venant (figure 9) et l'appendice (pages 645-646) qu'il a rédigé dans le ***Résumé des leçons*** données par Navier à l'École des ponts et chaussées, 1864). Des résultats expérimentaux indiscutables et des considérations théoriques ont conduit à rejeter définitivement la thèse du nombre réduit de coefficients. C'est ainsi par exemple que, dans le cas isotrope, la théorie moléculaire de Navier conduirait à l'unique valeur 0,25 (retrouvée par les théories de Cauchy, Poisson, ...) pour le coefficient de Poisson, qui est en désaccord avec l'expérience pour un très grand nombre de matériaux.

[36] Équations exactes données au chapitre VIII (§ 5.3).
[37] G. Green (1793-1841).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PURES ET APPLIQUÉES. 257

MÉMOIRE

Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

Présenté à l'Académie des Sciences le 16 mars 1863 [*].

PREMIER ARTICLE.

§ Ier. — *Objet.*

1. *Exposition.* — L'élasticité d'un corps solide, ou l'intensité plus ou moins grande de la résistance qu'il oppose à la continuation des dilatations ou déformations supposées très-petites qu'on lui fait subir en divers sens à partir de son état dit *naturel* (où il n'y a encore aucune *pression* à son intérieur ni sur sa surface), dépend, en chaque point, d'un certain nombre de constantes ou de *coefficients* qu'un raisonnement péremptoire de George Green a réduit de trente-six à *vingt et un* inégaux au plus, en montrant qu'il y a entre eux nécessairement *quinze égalités*; sans quoi l'on pourrait, observe-t-il, à l'aide d'un corps élastique dilaté ou déformé, puis ramené à son premier état, créer de toutes pièces du travail mécanique, ou produire le mouvement perpétuel sans consommation de moteur ni de chaleur [**].

[*] *Comptes rendus des séances*, t. LVI, p. 475.

[**] *On Propagation of Light in crystallized Media*, 1839 (*Transactions of the Cambridge Society*, vol. VII, part II, p. 122), ou *Sur le Nombre des coefficients inégaux, etc.*, Note insérée aux *Comptes rendus*, 16 décembre 1861, t. LIII, p. 1107. *Voyez*, aussi, n° 2 ci-après, p. 265.

Figure 9 – Première page du Mémoire de Saint Venant paru dans le Journal de Mathématiques pures et appliquées *(de Joseph Liouville), tome VIII (2ème série), août 1863, 257-295.*

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Récapitulatif des formules essentielles

• ***Premier principe***

$$\dot{\boldsymbol{E}} + \dot{K} = \mathcal{P}_{(e)}(\underline{U}) + \overset{\circ}{Q}$$
$$\dot{\boldsymbol{E}} = \overset{\circ}{Q} - \mathcal{P}_{(i)}(\underline{U})$$
$$\overset{\circ}{Q} = -\int_{\partial\Omega_t} \underline{q} \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}a + \int_{\Omega_t} r \mathrm{d}\Omega_t$$

Équation de l'énergie

$$\rho\, \dot{\boldsymbol{e}} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + r - \mathrm{div}\ \underline{q}$$
$$\rho_0\, \dot{e} = \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{e}}} + r_0 - \mathrm{div}_{\underline{X}}\ \underline{q}_0$$

• ***Deuxième principe***

$$\dot{\boldsymbol{S}} \geq -\int_{\partial\Omega_t} \frac{\underline{\underline{q}} \cdot \underline{n}}{T} \mathrm{d}a + \int_{\Omega_t} \frac{r}{T} \mathrm{d}\Omega_t$$

Inégalité fondamentale

$$\rho \dot{\boldsymbol{s}} + \mathrm{div}(\frac{\underline{\underline{q}}}{T}) - \frac{r}{T} \geq 0$$

Inégalité de Clausius-Duhem

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho(\dot{\psi} + \boldsymbol{s}\dot{T}) - \frac{\underline{\underline{q}}}{T} \cdot \underline{\mathrm{grad}\, T} \geq 0$$
$$\underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{e}}} - \rho_0(\dot{\psi} + \boldsymbol{s}\dot{T}) - \frac{\underline{q}_0}{T} \cdot \underline{\nabla T} \geq 0$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

• ***Loi de comportement thermoélastique*** (avec liaisons internes)

$$\varphi_p(\underline{\underline{e}}) = 0 \quad , \quad p = 1, ..., n \qquad 1 \leq n \leq 6$$

$$\boldsymbol{s} = -\frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T}$$

$$\underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} + \eta_p \frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} \qquad (\eta_p \text{ scalaires arbitraires})$$

ψ et φ_p symétriques en e_{ij} et e_{ji}

Linéarisation physique

$$\underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{\pi}}^0 + \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{e}} - \underline{\underline{k}}\,\tau$$

$$\pi_{ij} = \pi^0_{ij} + A_{ijk\ell}\, e_{\ell k} - k_{ij}\,\tau$$

$$A_{ijk\ell} = A_{ij\ell k} = A_{jik\ell} = A_{ji\ell k} = A_{k\ell ij} \quad ; \quad \pi^0_{ij} = \pi^0_{ji} \quad ; \quad k_{ij} = k_{ji}$$

Isotropie

$$\underline{\underline{\pi}} = \pi^0 \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \lambda\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{e}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\mu\,\underline{\underline{e}} - k\,\tau\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

• ***Transformation infinitésimale, matériau isotrope, état de référence précontraint***

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^0 + \lambda\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}')\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}' - k\,\tau'\underline{\underline{\mathbb{1}}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}' = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}}' - \frac{\nu}{E}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}')\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \alpha\,\tau'\underline{\underline{\mathbb{1}}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^0$$

$$E = \mu\,\frac{(3\,\lambda + 2\,\mu)}{(\lambda+\mu)} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \qquad \alpha = \frac{k}{(3\,\lambda+2\,\mu)}$$

$$\lambda = E\,\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\,\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad k = \alpha\,\frac{E}{(1-2\,\nu)}$$

$$3\,K = 3\,\lambda + 2\mu = \frac{E}{(1-2\,\nu)}$$

$$3\,\lambda + 2\,\mu > 0 \qquad \mu > 0$$

$$E > 0 \qquad -1 < \nu < \frac{1}{2}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Exercices

VII.1 - Thermoélasticité linéaire. Écrire la loi de comportement thermoélastique linéaire en transformation infinitésimale pour le matériau isotrope à partir d'une contrainte initiale isotrope quelconque.

Éléments de réponse.

$\underline{\underline{\pi}} = \pi^0\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \lambda(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{e}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\mu\,\underline{\underline{e}} - k\,\tau\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$.

On en tire, au 1er ordre en transformation infinitésimale, la forme de (5.29) pour le matériau isotrope :

$\underline{\underline{\sigma}} = \pi^0\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + (\lambda - \pi^0)(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2(\mu + \pi^0)\,\underline{\underline{\varepsilon}} - k\,\tau\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$

ou encore

$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma^0\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \lambda'(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\mu'\underline{\underline{\varepsilon}} - k\,\tau\underline{\underline{\mathbb{1}}}$

Commentaire.

La loi de comportement conserve en représentation eulérienne la même forme qu'en représentation lagrangienne mais les coefficients sont modifiés par la contrainte initiale (cf. § 5.2). Si l'état initial est quasi-naturel on a, au 1er ordre, $\lambda' = \lambda$ et $\mu' = \mu$ comme dans le cas de l'état initial naturel.

VII.2 - Thermoélasticité du second ordre. On considère un matériau thermoélastique, isotrope dans la configuration de référence, qui n'est assujetti à aucune liaison interne. Expliciter la loi de comportement de ce matériau en thermoélasticité du second ordre.

Éléments de réponse.

Développement polynomial de $\rho_0\,\psi$ au 3ème ordre, compte tenu de l'isotropie :

$$\rho_0\,\psi = \pi^0\,I'_1 - \rho_0\,\boldsymbol{s}_0\,\tau + \frac{\lambda}{2}(I'_1)^2 + 2\,\mu\,I'_2 - k\,I'_1\,\tau - \frac{1}{2}\rho_0\,b\,\tau^2$$
$$+ \frac{\alpha}{3}(I'_1)^3 + \beta\,I'_1\,I'_2 + \gamma\,I'_3 + \frac{\delta}{2}(I'_1)^2\tau + \varepsilon\,I'_2\,\tau + \varphi\,I'_1\,\tau^2 + \eta\,\tau^3.$$

D'où : $\underline{\underline{\pi}} = (\pi_0 + \lambda\,I'_1 - k\,\tau + \alpha(I'_1)^2 + \beta\,I'_2 + \delta\,I'_1\,\tau + \varphi\,\tau^2)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + (2\,\mu + \beta\,I'_1 + \varepsilon\,\tau)\,\underline{\underline{e}} + \gamma\,\underline{\underline{e}}^2$.

Il y a 9 coefficients de thermoélasticité du second ordre pour ce matériau isotrope, dont 5 coefficients d'élasticité isotherme.

VII.3 - Matériau « incompressible ». Étude de la liaison interne « invariance du volume », (on dit aussi matériau « incompressible ») : expression de $\varphi(\underline{\underline{e}})$, tenseurs inopérants.

Éléments de réponse.

• Expression de $\varphi(\underline{\underline{e}})$:

la restriction sur les déformations s'écrit $\det\,\underline{\underline{F}} = 1$;

en utilisant l'expression de $(\det\,\underline{\underline{F}})^2$ donnée au chapitre II (§ 3.3) on trouve pour la liaison interne

$\varphi(\underline{\underline{e}}) = I'_1 + (I'_1)^2 - 2\,I'_2 + \frac{2}{3}(I'_1)^3 - 4\,I'_1\,I'_2 + 4\,I'_3 = 0.$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

• Tenseurs inopérants :
en représentation eulérienne la liaison « invariance du volume » s'écrit : $\operatorname{tr} \underline{\underline{d}} = 0$
d'où, en représentation lagrangienne : $(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\underline{\underline{e}})^{-1} : \dot{\underline{\underline{e}}} = 0$;
$\dfrac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{e}}} = (\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\underline{\underline{e}})^{-1}$ (peut aussi s'obtenir directement à partir de $\varphi(\underline{\underline{e}})$ et du théorème de Cayley-Hamilton).
Tenseurs inopérants, η scalaire arbitraire :
en représentation lagrangienne, $\eta\,(\underline{\underline{\mathbb{1}}}+2\,\underline{\underline{e}})^{-1} = \eta\,\big((1+2\,I'_1+2(I'_1)^2-4\,I'_2)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}-(2+4\,I'_1)\,\underline{\underline{e}}+4\,\underline{\underline{e}}^2\big)$
en représentation eulérienne, $\eta\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$ (cf. § 4.6).

VII.4 - Thermoélasticité du premier ordre pour le matériau isotrope « incompressible ». Écrire la loi de comportement pour un matériau thermoélastique, isotrope, incompressible au premier ordre en $\|\,\underline{\underline{e}}\,\|$.

Éléments de réponse.
• La liaison interne a été étudiée dans Ex.VII.3. Elle implique que I'_1 est du second ordre en $\|\,\underline{\underline{e}}\,\|$ et est équivalent à $2\,I'_2$. On développe $\rho_0\,\psi$ de façon à n'avoir, après dérivation que des termes du premier ordre en $\|\,\underline{\underline{e}}\,\|$ dans $\underline{\underline{\pi}}$ donné par :
$\underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \dfrac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}} + \eta \dfrac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{e}}}$, η scalaire arbitraire.
D'où, à partir des résultats de Ex. VII.1 et Ex. VII.2 :
$\rho_0\,\psi = \pi^0\,I'_1 - \rho_0\,\boldsymbol{s}_0\,\tau + 2\,\mu\,I'_2 - k\,I'_1\tau$
$\underline{\underline{\pi}} = \pi^0\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\mu\,\underline{\underline{e}} + \eta\,(\underline{\underline{\mathbb{1}}} - 2\,\underline{\underline{e}}) - k\,\tau\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$,
avec $\varphi(\underline{\underline{e}}) = \det(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\underline{\underline{e}}) - 1 = 0$,
où $(\underline{\underline{\mathbb{1}}} - 2\,\underline{\underline{e}})$ est l'expression au 1er ordre de $(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\underline{\underline{e}})^{-1}$.
On peut encore écrire, au 1er ordre : $\underline{\underline{\pi}} = 2(\pi^0 + \mu)\,\underline{\underline{e}} + (\eta + \pi^0 - k\,\tau)(\underline{\underline{\mathbb{1}}} - 2\,\underline{\underline{e}})$
soit : $\underline{\underline{\pi}} = 2(\pi^0 + \mu)\,\underline{\underline{e}} + \varpi(\underline{\underline{\mathbb{1}}} - 2\,\underline{\underline{e}})$, ϖ scalaire arbitraire.
• En transformation infinitésimale :
$\underline{\underline{\sigma}} = 2(\pi^0 + \mu)\,\underline{\underline{\varepsilon}} + \varpi\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$ avec $\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = 0$.

Commentaire.
Le terme $\varpi\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$ (ϖ arbitraire) dans cette loi s'interprète comme résultat de l'indétermination du terme $\lambda'(\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$ écrit dans Ex. VII.1 quand $\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \to 0$ et $\lambda' \to \infty$. La constante π^0 (et le terme $\pi^0\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$) perd ici la signification de contrainte initiale (qui justifiait la notation dans (5.3), (5.12) et Ex. VII.1) : en effet, pour $\underline{\underline{e}} = 0$, la contrainte initiale est un tenseur isotrope laissé indéterminé par la loi de comportement en raison de la liaison interne. Dans cette écriture au premier ordre la constante π^0 joue le même rôle que μ ; ceci est cohérent avec le fait que l'on peut, dans l'écriture de $\rho_0\,\psi$, tenir compte de la liaison interne exprimée dans Ex. VII.3 (cf. § 4.3) : on peut, dans $\rho_0\,\psi$ pour la loi de comportement au premier ordre, remplacer le terme $\pi^0\,I'_1$ par $2\,\pi^0\,I'_2$ qui lui est équivalent. Pour cette raison la loi de comportement thermoélastique du matériau incompressible peut être réduite, au premier ordre, à :
$\underline{\underline{\sigma}} = 2\,\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} + \varpi\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$ avec $\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = 0$, ϖ scalaire arbitraire, avec la condition $\mu > 0$.
La confusion des rôles de π^0 et μ dans les expressions de $\underline{\underline{\pi}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ est évidemment liée au caractère infinitésimal de la déformation (cf. Ex. VII.11).

Il est intéressant de remarquer que, dans la formulation adoptée, la liaison interne d'incompressibilité s'applique à la déformation du matériau quelle qu'en soit la cause ; autrement dit, le matériau est à la fois « ***mécaniquement incompressible*** » et « ***thermiquement indilatable*** ». Ceci est conforme à l'intuition que l'on peut avoir relativement à la stabilité du matériau, qui est confirmée par l'analyse. Il en résulte que le passage à la limite sur la formule (5.18) pour le matériau incompressible ($\lambda \to \infty$) conserve bien une valeur finie au coefficient k.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

VII.5 - Inextensibilité. On considère un matériau dont la microstructure impose l'invariance des longueurs (on dit aussi « l'inextensibilité ») dans une direction matérielle donnée. Étudier cette liaison interne.

Éléments de réponse.

La liaison interne est définie en représentation lagrangienne ; X désignant la direction concernée :
$\varphi(\underline{\underline{e}}) = 0 \Leftrightarrow e_{XX} = 0$.

Les tenseurs inopérants sont de la forme : $\eta \dfrac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{e}}} = \eta\, \underline{e}_X \otimes \underline{e}_X$, η scalaire arbitraire.

VII.6 - Symétrie hexagonale. Soit $R = (O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ un repère orthonormé. On considère un matériau élastique linéaire dont la microstructure induit, dans la configuration de référence, les symétries matérielles suivantes : symétrie par rapport au plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, isométries du groupe d'invariance d'un hexagone régulier dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$. Déterminer le nombre de coefficients de thermoélasticité linéaire de ce matériau.

Éléments de réponse.

Le matériau est orthotrope. $\underline{a}, \underline{b}, \underline{e}_3$ définissant les intersections des plans d'orthotropie : $\underline{a}$ rayon de l'hexagone, $\underline{b}$ apothème orthogonal. Il faut exploiter la symétrie ternaire pour réduire encore le nombre de coefficients. On exprime l'équation (4.41) dans la base $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{e}_3)$, pour une isométrie du type « rotation d'angle $\varphi = 2\pi/3$ autour de $\underline{e}_3$ ». On obtient les relations supplémentaires :
$A_{13} = A_{23}$, $A_{11} = A_{22}$, $A_{44} = A_{55}$, $A_{11} - A_{12} = A_{66}$, $k_1 = k_2$,
qui sont identiques à celles obtenues pour le matériau transversalement isotrope : 7 coefficients de thermoélasticité linéaire indépendants (5 constantes élastiques et 2 thermiques).

Commentaire.

Bien que l'hypothèse initiale soit plus faible que celle de l'isotropie transversale il se révèle que le matériau élastique linéaire étudié est transversalement isotrope. La définition de l'orientation du matériau ne nécessite donc que la donnée de $\underline{e}_3$, c'est-à-dire de 2 angles. On aboutit à la même conclusion pour une symétrie d'ordre supérieur autour de $\underline{e}_3$. Ce résultat n'est pas généralisable à d'autres types de lois de comportement.

VII.7 - Symétries « d'un carré ». $R = (O, \underline{a}, \underline{b}\, \underline{c})$ est un repère orthonormé. On considère un matériau linéaire dont les symétries dans la configuration de référence sont : symétrie par rapport au plan $(\underline{a}, \underline{b})$, isométries du groupe d'invariance d'un carré de côtés $\underline{a}$ et $\underline{b}$ dans le plan $(\underline{a}, \underline{b})$. Déterminer le nombre de coefficients de thermoélasticité linéaire de ce matériau.

Éléments de réponse.

Le matériau est orthotrope : plans $(\underline{a}, \underline{b})$, $(\underline{b}, \underline{c})$, $(\underline{c}, \underline{a})$. Il faut exploiter les autres propriétés d'invariance du carré : invariance par rotation $\varphi = k\,\pi/2$ et symétries par rapport aux diagonales ; une rotation ou une symétrie suffit.
On exprime l'équation (4.41) dans la base $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$, pour une telle isométrie. On obtient les relations supplémentaires : $A_{13} = A_{23}$, $A_{11} = A_{22}$, $A_{44} = A_{55}$, $k_1 = k_2$.
Il reste donc 8 coefficients de thermoélasticité linéaire indépendants : 6 constantes élastiques et 2 thermiques.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Commentaire.

On remarque que, à la différence du cas de l'isotropie transversale (orthotropie de révolution), le module de cisaillement dans le plan ($\underline{a}$, $\underline{b}$) demeure un coefficient élastique indépendant. Du point de vue mécanique la définition de l'orientation du matériau dans un repère quelconque nécessite la donnée des 3 angles d'Euler de la base ($\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$), tandis que du point de vue thermique l'orientation de $\underline{c}$ (donc la donnée de 2 angles) suffit.

VII.8 - Symétrie cubique. $R = (O, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ désignant un repère orthonormé, on considère un matériau thermoélastique linéaire dont la microstructure induit, dans la configuration de référence, les symétries matérielles suivantes : isométrie du groupe d'invariance du cube de côtés $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$. Déterminer le nombre de coefficients de thermoélasticité linéaire de ce matériau.

Éléments de réponse.

En poursuivant le raisonnement mis en ceuvre dans Ex. VII.7 et en l'appliquant aux carrés de côtés ($\underline{b}$, $\underline{c}$) ou ($\underline{a}$, $\underline{c}$), on obtient, par rapport au matériau orthotrope, les relations supplémentaires :

$A_{11} = A_{22} = A_{33}$, $A_{12} = A_{13} = A_{23}$, $A_{44} = A_{55} = A_{66}$, $k_1 = k_2 = k_3$. Il y reste donc 4 coefficients de thermoélasticité linéaire indépendants : 3 constantes élastiques et 1 thermique.

Commentaire.

Il reste 3 constantes d'élasticité isotherme au lieu de 2 pour le matériau isotrope ; celui-ci correspond à la relation supplémentaire $A_{44} = (A_{11} - A_{12})$ obtenue comme pour le matériau orthotrope de révolution (5.64). Du point de vue mécanique la définition de l'orientation du matériau dans un repère quelconque nécessite la donnée des 3 angles d'Euler de la base ($\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$), tandis que du point de vue thermique le matériau est isotrope.

VII.9 - Autres formulations de la loi de comportement thermoélastique. On considère un matériau thermoélastique sans liaison interne. En conservant la convention d'écriture tensorielle telle que (4.2) expliquée au paragraphe 4.1 on désigne par $\boldsymbol{\psi}$ la fonction définie par

$$\forall T\ ,\ \forall \underline{\underline{F}}\ ,\ \boldsymbol{\psi}(T, \underline{\underline{F}}) = \psi(T, \underline{\underline{e}}).$$

Donner en fonction de $\dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}(T, \underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}}$ les expressions de $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{B}}$ correspondant à $\underline{\underline{F}}$ par la loi de comportement thermoélastique. Cas du matériau avec liaisons internes. Cas particulier du matériau incompressible.

Éléments de réponse.

• D'après la définition générale (4.11) appliquée à $\dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \underline{\underline{F}}}$, $\forall \dot{T}, \forall \dot{\underline{\underline{F}}}$:

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \underline{\underline{F}}} : \dot{\underline{\underline{F}}} \text{ et } \dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}} : \dot{\underline{\underline{e}}} \quad \text{où} \quad 2\,\dot{\underline{\underline{e}}} = {}^{\mathrm{t}}\dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}} + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}} \cdot \dot{\underline{\underline{F}}}.$$

On écrit que $\forall \dot{T}, \forall \dot{\underline{\underline{F}}} : \dot{\boldsymbol{\psi}} = \dot{\psi}$;

$$\text{d'où : } \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(T, \underline{\underline{F}})}{\partial T} = \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} \quad \text{et} \quad \forall \dot{\underline{\underline{F}}}\ ,\ 2\,\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \underline{\underline{F}}} : \dot{\underline{\underline{F}}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}} : ({}^{\mathrm{t}}\dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}) + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}} : ({}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}} \cdot \dot{\underline{\underline{F}}})\,.$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On en déduit :

$\forall \underline{\underline{\dot{F}}},\ 2\,\dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \underline{\underline{F}}} : \underline{\underline{\dot{F}}} = (\dfrac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}} \cdot {}^{t}\underline{\underline{F}}) : \underline{\underline{\dot{F}}} + ({}^{t}(\dfrac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}}) \cdot {}^{t}\underline{\underline{F}}) : \underline{\underline{\dot{F}}},$

d'où : $\dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \underline{\underline{F}}} = (\dfrac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}})_{s} \cdot {}^{t}\underline{\underline{F}}$

et, avec la convention d'écriture symétrique de $\psi(T, \underline{\underline{e}})$,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}(T, \underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}} = \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} \cdot {}^{t}\underline{\underline{F}}.$$

Il en résulte évidemment que $\dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}(T, \underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}} \cdot {}^{t}\underline{\underline{F}}^{-1}$ est symétrique et égal à $\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot {}^{t}(\dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}(T, \underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}})$.

• De $\underline{\underline{\sigma}} = \dfrac{\rho}{\rho_0}\, \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\pi}} \cdot {}^{t}\underline{\underline{F}}$ on tire l'expression de la loi de comportement thermoélastique entre $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{F}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho\, \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(T, \underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}} \cdot$$

• De même, à partir de $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\pi}}$ (chapitre V, § 4.2) :

$\underline{\underline{B}} = \rho_0\, {}^{t}(\dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}(T, \underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}})$ et ${}^{t}\underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\dot{F}}} = \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{e}}}$.

• De la même façon, on caractérise les liaisons internes par des fonctions $\boldsymbol{\varphi}_p$ de $\underline{\underline{F}}$ telles que : $\boldsymbol{\varphi}_p(\underline{\underline{F}}) = 0 \Leftrightarrow \varphi_p(\underline{\underline{e}}) = 0\,,\ p = 1, ..., n$.

On obtient : $\underline{\underline{\sigma}} = \rho\, \underline{\underline{F}} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \underline{\underline{F}}} + \eta_p\, (\det \underline{\underline{F}})^{-1}\, \underline{\underline{F}} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}_p(\underline{\underline{F}})}{\partial \underline{\underline{F}}}$ avec $\boldsymbol{\varphi}_p(\underline{\underline{F}}) = 0\,,\ p = 1, ..., n$

ainsi que : $\underline{\underline{B}} = \rho_0\, {}^{t}(\dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \underline{\underline{F}}}) + \eta_p\, {}^{t}(\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}_p}{\partial \underline{\underline{F}}})$ (η_p scalaires arbitraires).

• Pour le matériau incompressible on écrit la liaison interne sous la forme :
$\boldsymbol{\varphi}(\underline{\underline{F}}) = \det \underline{\underline{F}} - 1 = 0$.

On a (chapitre III, § 3.5) : $\dfrac{\mathrm{d}(\det \underline{\underline{F}})}{\mathrm{d}t}(\det \underline{\underline{F}})^{-1} = \ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\dot{F}}} : \underline{\underline{F}}^{-1}$

d'où : $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \underline{\underline{F}}} = (\det \underline{\underline{F}})\, \underline{\underline{F}}^{-1}$ et

$\underline{\underline{\sigma}} = \rho\, \underline{\underline{F}} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \underline{\underline{F}}} + \eta\, \underline{\underline{\mathbb{1}}}$ avec $\det \underline{\underline{F}} = 1\,,$ $\underline{\underline{B}} = \rho_0\, {}^{t}(\dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \underline{\underline{F}}}) + \eta\, \underline{\underline{F}}^{-1}$ (η scalaire arbitraire).

VII.10 - Matériau thermoélastique isotrope : directions principales des contraintes, contraintes principales. On considère un matériau thermoélastique isotrope sans liaison interne. Montrer que les directions principales de $\underline{\underline{\sigma}}$ se déduisent des directions principales de $\underline{\underline{\pi}}$ par transport convectif et donner la relation entre les contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3 de $\underline{\underline{\sigma}}$ et les contraintes principales π_1, π_2, π_3 de $\underline{\underline{\pi}}$. Montrer que $\boldsymbol{\psi}(T, \underline{\underline{F}})$ défini dans Ex. VII.9 se met, pour ce matériau, sous la forme d'une fonction symétrique $\overline{\psi}(T, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ des dilatations principales et donner les expressions des σ_i et de π_i en fonctions des $\dfrac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_i}$. Cas du matériau isotrope avec liaisons internes. Cas particulier du matériau incompressible.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Éléments de réponse.

• En raison de l'isotropie du matériau, $\underline{\underline{\pi}}$ a mêmes directions principales que $\underline{\underline{e}}$; soient $\underline{U}$, $\underline{V}$, $\underline{W}$ leurs vecteurs unitaires : $\underline{\underline{\pi}} = \pi_1\, \underline{U} \otimes \underline{U} + \pi_2\, \underline{V} \otimes \underline{V} + \pi_3\, \underline{W} \otimes \underline{W}$.
$\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ obtenus par transport convectif de $\underline{U}$, $\underline{V}$, $\underline{W}$ s'écrivent :
$\underline{u} = \underline{\underline{F}} . \underline{U}$, $\underline{v} = \underline{\underline{F}} . \underline{V}$, $\underline{w} = \underline{\underline{F}} . \underline{W}$.
De $\underline{\underline{\sigma}} = \dfrac{\rho}{\rho_0}\, \underline{\underline{F}} . \underline{\underline{\pi}} . {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}$ on tire : $\underline{\underline{\sigma}} = \dfrac{\rho}{\rho_0}(\pi_1\, \underline{u} \otimes \underline{u} + \pi_2\, \underline{v} \otimes \underline{v} + \pi_3\, \underline{w} \otimes \underline{w})$
qui démontre le résultat cherché sur les directions principales.

• On a $|\underline{u}| = \lambda_1$, $|\underline{v}| = \lambda_2$, $|\underline{w}| = \lambda_3$ (dilatations principales)
d'où : $\sigma_1 = \dfrac{\rho}{\rho_0}\lambda_1^2 \pi_1 = \pi_1 \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2\, \lambda_3}$, $\sigma_2 = \pi_2 \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1\, \lambda_3}$, $\sigma_3 = \pi_3 \dfrac{\lambda_3}{\lambda_1\, \lambda_2}$.

• Le matériau étant isotrope, $\boldsymbol{\psi}(T, \underline{\underline{F}}) = \psi(T, \underline{\underline{e}})$ est une fonction des invariants de $\underline{\underline{e}}$ ou encore une fonction symétrique des valeurs principales de $\underline{\underline{e}}$ soit $e_i = (\lambda_i^2 - 1)/2$; c'est donc une fonction symétrique des λ_i :
$\boldsymbol{\psi}(T, \underline{\underline{F}}) = \hat{\psi}(T,\, e_1,\, e_2,\, e_3) = \overline{\psi}(T,\, \lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3)$.
On désigne par e_{ij} les composantes de $\underline{\underline{e}}$ dans sa base principale $\underline{U}$, $\underline{V}$, $\underline{W}$ figée à l'instant t.
On calcule $\dot{I}'_1$, $\dot{I}'_2$, $\dot{I}'_3$; il vient :
$\dot{e}_{11} + \dot{e}_{22} + \dot{e}_{33} = \dot{e}_1 + \dot{e}_2 + \dot{e}_3$,
$e_1\, \dot{e}_{11} + e_2\, \dot{e}_{22} + e_3\, \dot{e}_{33} = e_1\, \dot{e}_1 + e_2\, \dot{e}_2 + e_3\, \dot{e}_3$,
$(e_1)^2\, \dot{e}_{11} + (e_2)^2\, \dot{e}_{22} + (e_3)^2\, \dot{e}_{33} = (e_1)^2\, \dot{e}_1 + (e_2)^2 \dot{e}_2 + (e_3)^2\, \dot{e}_3$,
qui montrent que $\dot{e}_{11} = \dot{e}_1$, $\dot{e}_{22} = \dot{e}_2$, $\dot{e}_{33} = \dot{e}_3$.
On en déduit, puisque $\underline{\underline{\pi}} = \rho_0\, \dfrac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}}$ admet $\underline{U}$, $\underline{V}$, et $\underline{W}$ pour directions principales, que :

$$\underline{\underline{\pi}} = \rho_0\, \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}} = \rho_0 \Big(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial e_1}\, \underline{U} \otimes \underline{U} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial e_2}\, \underline{V} \otimes \underline{V} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial e_3}\, \underline{W} \otimes \underline{W} \Big)$$

d'où : $\pi_i = \rho_0\, \dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial e_i} = \dfrac{1}{\lambda_i}\, \rho_0\, \dfrac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_i}$ et $\sigma_i = \lambda_i\, \rho\, \dfrac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_i}$ puisque $\dfrac{\rho}{\rho_0} = \dfrac{1}{\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3}$.

• Les liaisons internes devant être isotropes, on a de même :
$\boldsymbol{\varphi}_p(\underline{\underline{F}}) = \overline{\varphi}_p(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3)$ fonction symétrique de $\lambda_1\, , \lambda_2\, , \lambda_3$. Il vient :
$\pi_i = \dfrac{1}{\lambda_i}\, (\rho_0\, \dfrac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_i} + \eta_p\, \dfrac{\partial \overline{\varphi}_p}{\partial \lambda_i})$, η_p scalaires arbitraires,
$\sigma_i = \lambda_i\, (\rho \dfrac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_i} + \eta_p\, \dfrac{\rho}{\rho_0}\, \dfrac{\partial \overline{\varphi}_p}{\partial \lambda_i})$ où $\dfrac{\rho}{\rho_0} = \dfrac{1}{\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3}$.

• Pour le matériau incompressible la liaison interne s'écrit : $\overline{\varphi}(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3) = \lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 - 1 = 0$.
D'où : $\pi_i = \dfrac{1}{\lambda_i}\, \rho_0\, \dfrac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_i} + \eta\, \dfrac{1}{\lambda_i^2}$, $\sigma_i = \lambda_i\, \rho_0\, \dfrac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_i} + \eta$.

VII.11 - Modélisation du comportement élastique du caoutchouc. Divers modèles ont été proposés pour rendre compte des observations expérimentales relatives au comportement élastique isotherme du caoutchouc en grande déformation. Le matériau est considéré comme isotrope et incompressible avec (cf. Ex. VII.10 pour les notations) :

pour le modèle « Néo-Hookien » : $\rho_0\, \psi = \mu\, I'_1$,

pour le modèle de Varga : $\rho_0\, \overline{\psi} = 2\mu\, (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)$,

pour un modèle de Mooney-Rivlin : $\rho_0\, \psi = \pi^0\, I'_1 + \dfrac{\alpha}{2}(I'^2_1 - 2\, I'_2)$,

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

pour un modèle d'Ogden :

$$\rho_0\,\overline{\psi} = \frac{\mu_1}{\alpha_1}(\lambda_1^{\alpha_1}+\lambda_2^{\alpha_1}+\lambda_3^{\alpha_1}-3)+\frac{\mu_2}{\alpha_2}(\lambda^{\alpha_2}+\lambda_2^{\alpha_2}+\lambda_3^{\alpha_2}-3)+\frac{\mu_3}{\alpha_3}(\lambda_1^{\alpha_3}+\lambda_2^{\alpha_3}+\lambda_3^{\alpha_3}-3)\,.$$

Écrire les lois de comportement correspondantes.

Éléments de réponse.

Le matériau étant isotrope incompressible on s'appuie sur les résultats du paragraphe 4.3 et de Ex. VII.3, Ex. VII.9 et VII.10. $\varphi(\underline{\underline{e}}) = \det(\underline{\underline{\mathbb{1}}}+2\underline{\underline{e}})-1$, $\boldsymbol{\varphi}(\underline{\underline{F}}) = \det\underline{\underline{F}}-1$, $\overline{\varphi}(\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3) = \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3-1$.

• Modèle « Néo-Hookien » :
$\underline{\underline{\pi}} = \mu\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}+\eta\,(\underline{\underline{\mathbb{1}}}+2\,\underline{\underline{e}})^{-1}$ avec $\varphi(\underline{\underline{e}})=0$, η scalaire arbitraire.
$\underline{\underline{\sigma}} = \mu\,\underline{\underline{F}}\,.\,{}^t\underline{\underline{F}}+\eta\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$ avec $\det\underline{\underline{F}}-1=0$,
$\rho_0\,\overline{\psi} = \dfrac{\mu}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-3)$, $\sigma_i = \mu\,\lambda_i^2+\eta$ avec $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$.

• Modèle de Varga :
$\pi_i = 2\,\mu\,\dfrac{1}{\lambda_i}+\eta\,\dfrac{1}{\lambda_i^2}$ avec $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3=1$, η scalaire arbitraire, $\sigma_i = 2\,\mu\,\lambda_i+\eta$.

• Modèle de Mooney-Rivlin :
$\underline{\underline{\pi}} = \pi^0\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}+\alpha\,I_1'\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}-\alpha\,\underline{\underline{e}}+\eta\,(\underline{\underline{\mathbb{1}}}+2\,\underline{\underline{e}})^{-1}$, avec $\varphi(\underline{\underline{e}})=0$, η scalaire arbitraire.
$\rho_0\overline{\psi} = \dfrac{1}{2}(\pi^0-\alpha)(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-3)+\dfrac{\alpha}{4}(\lambda_1^2\,\lambda_2^2+\lambda_2^2\,\lambda_3^2+\lambda_3^2\,\lambda_1^2-3)$
ou encore, en tenant compte de la liaison interne $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3=1$:
$\rho_0\,\overline{\psi} = \dfrac{1}{2}(\pi^0-\alpha)(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-3)+\dfrac{\alpha}{4}(\dfrac{1}{\lambda_1^2}+\dfrac{1}{\lambda_2^2}+\dfrac{1}{\lambda_3^2}-3)$
$\pi_i = (\pi^0-\alpha)-\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{1}{\lambda_i^4}+\eta'\,\dfrac{1}{\lambda_i^2}$, avec $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3=1$, η' scalaire arbitraire,
$\sigma_i = (\pi^0-\alpha)\lambda_i^2-\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{1}{\lambda_i^2}+\eta'$.
Pour le caoutchouc étudié par Mooney : $\pi = 0,502\,\text{MPa}, \alpha = 0,136\,\text{MPa}$.

• Modèle d'Ogden :
$\sigma_i = \mu_1\,\lambda_i^{\alpha_1}+\mu_2\,\lambda_i^{\alpha_2}+\mu_3\,\lambda_i^{\alpha_3}+\eta$, $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3=1$, η scalaire arbitraire.
Le modèle d'Ogden calé sur des expériences effectuées par Treloar correspond à :

$\mu_1 = 6,3\,\text{MPa}$, $\mu_2 = 0,012\,\text{MPa}$, $\mu_3 = -\,0,1\,\text{MPa}$
$\alpha_1 = 1,3$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = -2$.

• Linéarisation de ces lois en transformation infinitésimale
Modèle « Néo-Hookien » : $\underline{\underline{\sigma}} = 2\,\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}+\varpi\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$, avec $\text{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}=0$, ϖ scalaire arbitraire.
Modèle de Varga : $\underline{\underline{\sigma}} = 2\,\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}+\varpi\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$, avec $\text{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}=0$, ϖ scalaire arbitraire.
Modèle de Mooney-Rivlin : $\underline{\underline{\sigma}} = 2(\pi^0-\dfrac{\alpha}{2})\,\underline{\underline{\varepsilon}}+\varpi\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$, avec $\text{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}=0$, ϖ scalaire arbitraire.
Modèle d'Ogden : $\underline{\underline{\sigma}} = (\alpha_1\,\mu_1+\alpha_2\,\mu_2+\alpha_3\,\mu_3)\,\underline{\underline{\varepsilon}}+\varpi\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$, avec $\text{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}=0$, ϖ scalaire arbitraire.

Commentaire.

La linéarisation conduit évidemment pour ces diverses lois à la seule forme établie dans Ex. VII. 4 : $\underline{\underline{\sigma}} = 2\,\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}+\varpi\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$. (Pour le modèle de Mooney-Rivlin : $\mu = \pi^0-\alpha/2$; pour le modèle d'Ogden : $2\,\mu = \alpha_1\,\mu_1+\alpha_2\,\mu_2+\alpha_3\,\mu_3$). La documentation à l'origine de cet exercice est tirée de l'article ***Sur les densités d'énergie en élasticité non linéaire*** ... par J.L. Davet *in* Annales des Ponts et Chaussées, 35, 1985, pp. 2-33 ; on y trouvera notamment des considérations sur la validation expérimentale de ces divers modèles. (Cf. aussi Ex. IX.8).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

VII.12 - Formulation incrémentale de la loi de comportement. Écrire la relation entre le taux de déformation (eulérien) et la dérivée intrinsèque de la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ (cf. chapitre VI, § 5.2) pour un matériau thermoélastique en évolution isotherme. Examiner le cas particulier de la transformation infinitésimale à partir de l'état initial naturel ou quasi-naturel.

Éléments de réponse.

• La dérivation particulaire de la loi de comportement en évolution isotherme donne : $\dot{\underline{\underline{\pi}}} = \dfrac{\partial \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} : \dot{\underline{\underline{e}}}$.

Avec les relations (4.48), $\dot{\underline{\underline{e}}} = {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{F}}$ et (5.6) du chapitre VI , $\left(\dfrac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{T}} = J^{-1}\, \underline{\underline{F}} \cdot \dot{\underline{\underline{\pi}}} \cdot {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}$,

on obtient : $\left(\dfrac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{T}} = J^{-1}\, \underline{\underline{F}} \cdot \left(\dfrac{\partial \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} : ({}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{F}})\right) \cdot {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}$.

On pose $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{A}}}}}\,(T, \underline{\underline{e}}) = \dfrac{\partial \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} = \rho_0 \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\underline{e}}\, \partial \underline{\underline{e}}}$ qui a les mêmes symétries (5.5) et (5.7) que $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ dans le cas de l'élasticité linéaire, et on définit $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{A}}}}}\,(T, \underline{\underline{F}}) = \mathcal{A}_{ijuv}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_u \otimes \underline{e}_v$ dans une base orthonormée par : $\mathcal{A}_{ijuv}(T, \underline{\underline{F}}) = J^{-1} F_{im} F_{jn} F_{up} F_{vq} A_{mnpq}(T, \underline{\underline{e}})$.

$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{A}}}}}\,(T, \underline{\underline{F}})$ a les mêmes symétries (5.5) et (5.7) que $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$. L'équation liant $\left(\dfrac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{T}}$ à $\underline{\underline{d}}$ s'écrit :

$\left(\dfrac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{T}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{A}}}}}\,(T, \underline{\underline{F}}) : \underline{\underline{d}}$, relation ***linéaire*** entre $\left(\dfrac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{T}}$ et $\underline{\underline{d}}$. On remarque que $\underline{\underline{d}} = 0$ implique $\left(\dfrac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{T}} = 0$, c'est-à-dire que $\underline{\underline{\sigma}}$ subit alors le même mouvement rigidifiant que l'élément de matière.

• Dans le cas de la transformation infinitésimale à partir de l'état initial naturel ou quasi-naturel on a :

$\left(\dfrac{\mathrm{D}\underline{\underline{\sigma}}}{\mathrm{D}t}\right)_{\mathrm{T}} = \dot{\underline{\underline{\sigma}}} - \underline{\underline{\mathrm{grad}\, U}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\mathrm{grad}\, U}} \simeq \dot{\underline{\underline{\sigma}}}$,

$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{A}}}}}\,(T, \underline{\underline{F}}) \simeq \underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{A}}}}} \quad \left(= \underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{A}}}}}\,(T, 0)\right)$,

$\underline{\underline{d}} \simeq \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$.

D'où : $\dot{\underline{\underline{\sigma}}} \simeq \underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{A}}}}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$.

Commentaires.

On met en évidence l'intervention naturelle des dérivées de Truesdell (ou de Jaumann par la relation linéaire (5.13) du chapitre VI) dans la formulation incrémentale de la loi de comportement.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Chapitre VIII

Évolutions et équilibres thermoélastiques

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MOTS CLÉS

Évolution thermoélastique quasi-statique.
Équilibre thermoélastique.
Conditions aux limites.
Petits déplacements. Petites perturbations.
Linéarisation. Principe de superposition.
Champs cinématiquement admissibles.
Champs statiquement admissibles.
Méthode des déplacements.
Méthode des contraintes.
Torsion.
Principe de Saint Venant.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En bref...

Les sollicitations mécaniques et thermiques habituellement imposées à un système en fonction du temps sont volumiques (forces de masse données) et surfaciques : température donnée au contour du système et *conditions aux limites* sur le vecteur-contrainte et le déplacement. L'*évolution* du système constitué d'un matériau thermoélastique est alors définie par un système d'équations – équations de la dynamique, équation de continuité, loi de comportement, équation thermique, et conditions au contour – qui sont écrites à la fois sur la configuration géométrique initiale connue du système et sur la configuration actuelle qui est une inconnue du problème d'évolution. La résolution des problèmes d'évolution thermoélastique quasi-statiques est donc, par nature, *incrémentale*. Elle s'effectue classiquement par la méthode des déplacements, dans laquelle l'évolution géométrique du système est l'inconnue principale. L'unicité de la solution n'est pas établie (section 1).

À partir de l'état initial pris comme référence, les équations du *problème tangent* sont obtenues par dérivation convective, sur la configuration initiale, des équations du problème d'évolution. On en déduit les équations du « 1er pas » de la résolution incrémentale du problème d'évolution, dans lequel les champs donnés et les champs inconnus sont supposés infinitésimaux. Ces équations sont *écrites sur la configuration initiale* et le problème correspondant est linéaire. Il constitue la *linéarisation* du problème d'évolution au voisinage de la configuration initiale. La validation de cette linéarisation suppose *l'hypothèse des petites perturbation* : hypothèse des petites transformations, hypothèse des petits déplacements et hypothèse des petites variations de température (sections 2 et 3).

Dans cette analyse, le problème thermique est *découplé* : le champ d'écart de température peut être déterminé indépendamment des autres champs inconnus. Sa détermination préalable permet de l'intégrer dans les *données* du problème pour la recherche des champs de déplacement et de contrainte. Sous réserve de la validation de l'hypothèse des petites perturbations, la solution du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé est *unique* si les données aux limites en efforts et en déplacements sont celles du problème *bien posé* (section 3).

Le *principe de superposition*, qui traduit la linéarité du problème

d'équilibre thermoélastique à partir de l'état initial *naturel* à température uniforme, est d'utilisation courante dans la pratique, car il permet la résolution de problèmes complexes par combinaison linéaire de problèmes plus simples (notamment en séparant les effets mécaniques et les effets thermiques). Il fournit également le moyen de traiter le cas où l'état initial du système est *préchargé*. Il est essentiel de rappeler que sa validité dépend du respect de l'hypothèse des petites perturbations (section 3).

La solution du problème d'équilibre thermoélastique est constituée d'un champ de déplacement *cinématiquement admissible* et d'un champ de contrainte *statiquement admissible* pour le problème, liés par la loi de comportement thermoélastique linéaire (section 4).

Les méthodes classiques de résolution directe du problème, à partir d'hypothèses inspirées par la forme des données, choisissent l'un ou l'autre de ces champs, cinématiquement admissible ou statiquement admissible, comme inconnue principale et expriment que le champ qui lui est associé par la loi de comportement est, selon le cas, statiquement admissible ou cinématiquement admissible. Le théorème d'unicité justifie a posteriori les hypothèses faites au départ sur la forme de champs choisie, dès lors qu'elles permettent d'aboutir à la solution du problème (sections 4, 5 et 6).

Dans le cas particulier de l'équilibre isotherme à partir de l'état initial naturel d'un système homogène en matériau isotrope, la *méthode des déplacements* impose au champ ξ cinématiquement admissible de satisfaire l'équation de Navier. La *méthode des contraintes* impose au champ σ statiquement admissible de satisfaire les équations de Beltrami (sections 5 et 6).

Le problème d'équilibre élastique de la *torsion* isotherme d'une barre cylindrique constituée d'un matériau isotrope homogène peut être résolu par l'une ou l'autre méthode, lorsque les conditions aux extrémités ont une forme bien précise liée à la géométrie de la section droite de la barre. Le champ de contrainte solution est un champ de *cission pure*, non homogène dans la section droite, invariant par translation le long de la barre. Le champ de déplacement met en évidence le *gauchissement* des sections droites et leur rotation différentielle, constants le long de la barre ; la *rotation différentielle* est *proportionnelle* au *couple* de torsion appliqué (section 7).

Le *principe de Saint Venant* affirme que la solution du problème de la torsion obtenue pour les conditions aux limites ainsi spécifiées aux extrémités de la barre demeure valable, dans la *partie courante* de cette même barre supposée suffisamment longue, pour toute distribution d'efforts surfaciques aux extrémités dont le *torseur* se réduit à un couple d'axe parallèle à celui de la barre : la forme précise des conditions imposées n'introduit que des effets limités au voisinage des extrémités. Plus généralement le principe de Saint Venant est énoncé pour les corps *élancés* chargés à leurs extrémités. Il est très utilisé dans la pratique (section 8).

Principales notations

Notation	Signification	1ère formule
$\underline{\underline{K}}_0$	tenseur de conduction thermique	(1.10)
T_i^{d}	valeur donnée d'une composante de $\underline{T}$	(1.13)
U_i^{d}	valeur donnée d'une composante de $\underline{U}$	(1.13)
S_{T_i}	portion du contour où T_i est donnée	(1.13)
S_{U_i}	portion du contour où U_i est donnée	(1.13)
$\underline{F}^0$	forces massiques initiales	(2.11)
$\underline{\underline{\sigma}}^0$	champ de contrainte initial	(2.12)
τ	écart de température	(2.14)
ξ_i^{d}	valeur donnée d'une composante de $\underline{\xi}$	(2.25)
S_{ξ_i}	partie du contour Ω_0 où ξ_i est donnée	(2.25)
K_0	coefficient de conduction thermique (matériau isotrope)	(2.26)
$\mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$	ensemble des champs de contrainte S.A. avec $(\underline{F}, T_i^{\mathrm{d}})$	(4.6)
$\mathbb{C}(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}})$	ensemble des champs de déplacement C.A. avec (ξ_i^{d})	(4.7)
$\dfrac{\partial}{\partial n} = \mathrm{D}_{\underline{n}}$	symbole de la « dérivée normale »	(4.9)(7.12)
$\mathcal{V}(\underline{x})$	potentiel des forces de masse	(5.6)
$\mathcal{C}$	couple de torsion	(§ 7.1)
$\varphi(x, y)$	fonction de gauchissement	(7.3)
α	rotation différentielle ou « angle de torsion »	(7.3)
J	inertie de torsion	(7.17)
$\psi_1(x, y)$	fonction de contrainte (en torsion)	(7.44)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Évolution thermoélastique quasi-statique 79
1.1 L'intervention nécessaire de la loi de comportement . . . 79
1.2 Position du problème d'évolution thermoélastique quasi-statique 81
1.3 Résolution du problème d'évolution thermoélastique quasi-statique 85
1.4 Quelques exemples de conditions aux limites 86
2 Linéarisation du problème d'évolution thermoélastique quasi-statique 88
2.1 Objectifs et principes de la linéarisation 88
2.2 Équations du problème tangent 89
2.3 Premier pas de la résolution incrémentale 91
2.4 Découplage du problème thermique 92
2.5 État initial non chargé et non contraint 93
2.6 Approche lagrangienne 93
3 Équilibre thermoélastique linéarisé 94
3.1 Unicité 94
3.2 Principe de superposition 95
3.3 Hypothèses de linéarisation (état initial de référence naturel) 95
3.4 État initial de référence précontraint 96
3.5 Hypothèse des petites perturbations 98
3.6 Unicité du champ de déplacement 99
4 Résolution du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé 100
4.1 Position du problème étudié, nouvelles notations 100
4.2 Champs de contrainte statiquement admissibles, champs de déplacement cinématiquement admissibles 101
4.3 Problème d'équilibre thermoélastique linéarisé et problème isotherme associé 104
4.4 Méthodes de résolution 106
5 Méthode des déplacements 107
5.1 Principe de la méthode 107
5.2 Équilibre isotherme, matériau homogène isotrope : équation de Navier 108
5.3 Système avec hétérogénéité forte du matériau constitutif ou présence de choc thermique 110
6 Méthode des contraintes 111
6.1 Principe de la méthode 111
6.2 Équilibre isotherme, matériau homogène isotrope : équations de Beltrami 112
6.3 Système avec hétérogénéité forte du matériau constitutif ou présence de choc thermique 115
6.4 La compatibilité géométrique et les équations de Beltrami 116
7 Torsion d'une barre cylindrique 118

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

7.1 Position du problème 118
7.2 Résolution du problème : méthode des déplacements . . 119
7.3 Commentaires 123
7.4 Invariances du problème 124
7.5 Cas de la barre de section circulaire 125
7.6 Résolution du problème par la méthode des contraintes 127
7.7 Limite initiale d'élasticité de la barre en torsion 129
8 Principe de Saint Venant 131
Récapitulatif des formules essentielles 136
Exercices 140

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Évolutions et équilibres thermoélastiques

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Évolution thermoélastique quasi-statique

1.1 L'intervention nécessaire de la loi de comportement

On a déjà remarqué que l'équation de la dynamique (1.1) représente un système de ***trois*** équations aux dérivées partielles du premier ordre pour le champ tensoriel $\underline{\underline{\sigma}}$, c'est-à-dire pour les ***six*** champs scalaires, composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ symétrique, fonctions des trois variables d'espace, à chaque instant t :

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \text{en référentiel galiléen ,} \\ \operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)+\rho(\underline{x},t)\big(\underline{F}(\underline{x},t)-\underline{a}(\underline{x},t)\big)=0 \quad \text{sur } \Omega_t \\ [\![\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,]\!]\,.\,\underline{n}(\underline{x})=0 \quad \text{sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}} \end{cases}^{(1)}$$

On considère un système $\mathcal{S}$ dans un état initial pris comme état de référence, auquel on impose, jusqu'à l'instant t, une histoire de sollicitation par la donnée de forces surfaciques ou de déplacements imposés au contour, de forces de masse et de sollicitations thermiques. La détermination de l'évolution de ce système s'appuie, dans le formalisme du milieu continu, en ce qui concerne les équations de champs, sur :

- les équations de la dynamique (1.1).

- l'équation de conservation de la masse sous sa forme lagrangienne ou eulérienne (équation de continuité)

$$(1.2)\qquad \frac{\partial\rho(\underline{x},t)}{\partial t}+\operatorname{div}\,\big(\rho(\underline{x},t)\underline{U}(\underline{x},t)\big)=0\,,$$

- les équations décrivant la cinématique

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \underline{x}=\underline{\phi}(\underline{X},t) \\ \underline{U}=\dfrac{\partial\underline{\phi}(\underline{X},t)}{\partial t}\,. \end{cases}$$

On ne dispose ainsi que d'un système de 4 équations de champs pour 10 fonctions scalaires inconnues de $(\underline{X},t)$, à savoir :

(1) En l'absence d'onde de choc et de densité surfacique de forces extérieures dans Ω_t.

les six composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$,

les trois composantes de $\underline{\phi}$,

la masse volumique ρ.

Ces constatations mettent en lumière la nécessité de faire intervenir le ***comportement*** du matériau. En effet, dans le cas d'une évolution isotherme par exemple, la loi de comportement d'un matériau s'écrit comme une relation (fonctionnelle) entre l'histoire des déformations et l'histoire des contraintes pour l'élément de matière : elle fournit six équations (intégro-différentielles) supplémentaires qui complètent ainsi à ***dix*** le système disponible pour la résolution du problème d'évolution posé ci-dessus et la détermination des champs $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\phi}$ où $\underline{\xi}$, et ρ (par exemple).

Suivant le modèle adopté pour représenter le comportement du matériau, la loi de comportement s'exprime par une équation plus ou moins compliquée. La thermoélasticité en constitue l'exemple le plus simple, où la loi de comportement s'écrit sous la forme explicite d'une relation biunivoque entre les valeurs des contraintes, déformations et température au même instant. Les problèmes correspondants seront étudiés dans le présent chapitre.

D'autres modèles de comportement peuvent être adoptés pour les solides : élastoplasticité, viscoélasticité, élastoviscoplasticité. Chacun donne lieu à des problèmes dont les techniques de résolution présentent des particularités et dans lesquels le comportement du système étudié manifeste certains traits caractéristiques. Toutefois ce qui sera dit dans le présent chapitre concernant la façon de poser les problèmes (en particulier à propos des conditions aux limites) et la façon dont interviennent, dans leur résolution, les équations de la dynamique, les relations de comportement, et les équations géométriques, a un caractère général.

Tous ces modèles de comportement font évidemment intervenir la température parmi les sollicitations imposées au matériau. On a évoqué plus haut l'exemple de l'évolution isotherme, mais il est clair que le cas d'une évolution où la répartition de la température, variable dans le temps, est connue à chaque instant ne modifie pas l'analyse. Lorsque le champ de température T constitue lui-même une inconnue du problème, une onzième équation de champ doit être écrite, c'est ***l'équation thermique***, à laquelle s'adjoint à chaque instant une condition aux limites (§ 1.2).

On remarque enfin que, du point de vue physique, il est naturel que l'on doive faire intervenir la loi de comportement du matériau pour déterminer l'évolution d'un système. L'expérience montre couramment par exemple que deux systèmes géométriquement identiques, soumis aux mêmes sollicitations, constitués de matériaux élastiques différents, se déforment différemment ; par contre il n'est peut-être pas aussi intuitif que la répartition des efforts intérieurs dépende elle aussi, en règle générale, de la loi de comportement du matériau constitutif : il est important de conserver cette idée présente à l'esprit.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1.2 Position du problème d'évolution thermoélastique quasi-statique

Évolution thermoélastique

Le concept d'évolution est schématiquement représenté sur la figure 1. L'état initial du système étudié est défini au moyen des données initiales. L'histoire des sollicitations appliquées au système est donnée à partir de cet instant initial et l'on cherche à déterminer l'évolution correspondante, c'est-à-dire, à chaque instant (instant actuel), tous les champs qui définissent son état.

Lorsque le matériau constitutif du système (qui n'est pas nécessairement homogène) est, en tout point, régi par une loi de comportement thermoélastique, le problème ainsi posé est un ***problème d'évolution thermoélastique***

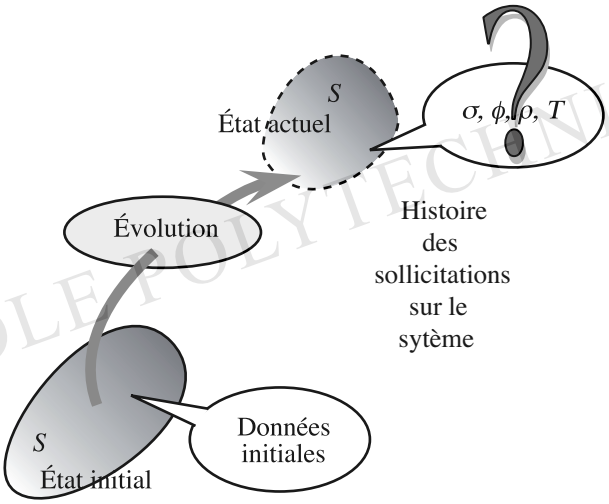


Figure 1 – Représentation schématique du problème d'évolution

Équations de champs

L'ensemble des équations de champs du problème d'évolution thermoélastique est ainsi constitué

des équations de la dynamique (1.1),

de l'équation de continuité (ici sous la forme lagrangienne)

$$\rho_0(\underline{X})/\rho(\underline{x},t) = \det \underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\ , \tag{1.4}$$

de la loi de comportement

$$\underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \frac{\partial \psi(T,\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} \quad \text{pour le matériau sans liaison interne}\ , \tag{1.5a}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ou, pour le matériau avec liaisons internes,

$$\text{(1.5b)}\qquad \begin{cases} \varphi_p(\underline{\underline{e}}) = 0\,,\ p = 1, \dots, n\ (1 \leq n \leq 6) \\ \underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \dfrac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} + \eta_p \dfrac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} \quad , \quad \eta_p \text{ scalaires arbitraires .} \end{cases}$$

avec les formules de transport

$$\text{(1.6)}\qquad \begin{cases} \underline{x} = \underline{X} + \underline{\xi}(\underline{X}, t) \\ \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X}, t) \\ \underline{\underline{e}}(\underline{X}, t) = \dfrac{1}{2}({}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) - \underline{\underline{\mathbb{1}}}) \\ \underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) = \dfrac{\rho_0(\underline{X})}{\rho(\underline{x}, t)}\, \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) \,.\, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \,.\, {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t)\ . \end{cases}$$

On remarque que l'équation de comportement (1.5) fait intervenir la température. Ceci implique que le champ de température initial fait partie des données et que le champ de température actuel constitue une onzième inconnue, comme cela est indiqué sur la figure 1, une équation supplémentaire doit donc être adjointe au décompte effectué dans la section précédente : c'est l'***équation thermique***.

L'équation thermique s'obtient à partir de l'équation de l'énergie (chapitre VII, § 3.4), écrite ici en supposant que $r_0 = 0$:

$$\text{(1.7)}\qquad \rho_0\, \dot{\boldsymbol{e}} - \underline{\underline{\pi}} : \dot{\underline{\underline{e}}} + \mathrm{div}_{\underline{x}}\, \underline{q}_0 = 0\ .$$

Cette équation se transforme à travers la loi de comportement thermoélastique (1.5) pour les évolutions compatibles avec les liaisons internes, en rappelant que

$$\text{(1.8)}\qquad \rho_0\, \psi = \rho_0\, \boldsymbol{e} - \rho_0\, T\, \boldsymbol{s}$$

et il vient :

$$\text{(1.9)}\qquad T \frac{\partial \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} : \dot{\underline{\underline{e}}} + \rho_0\, T \frac{\partial^2 \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T^2} \dot{T} - \mathrm{div}_{\underline{x}}\, \underline{q}_0 = 0\ .$$

Si l'on adopte la loi de conduction de Fourier[(2)] où $\underline{\underline{K}}_0$ est le tenseur de conductivité thermique en description lagrangienne :

$$\text{(1.10)}\qquad \underline{q}_0 = -\underline{\underline{K}}_0 \,.\, \underline{\nabla T} \quad {}^{(3)}$$

on obtient enfin l'***équation thermique*** :

$$\text{(1.11)}\qquad T \frac{\partial \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} : \dot{\underline{\underline{e}}} + \rho_0\, T \frac{\partial^2 \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T^2} \dot{T} + \mathrm{div}_{\underline{x}}\, (\underline{\underline{K}}_0 \,.\, \underline{\nabla T}) = 0\ .$$

[(2)] Sur la configuration actuelle, la loi de Fourier s'écrit sous la forme $\underline{q} = \underline{\underline{K}} \,.\, \underline{\mathrm{grad}\ T}$ avec $\underline{\underline{K}}_0 = J\, \underline{\underline{F}}^{-1} \,.\, \underline{\underline{K}} \,.\, {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}^{-1}$.

[(3)] La forme quadratique associeé à $\underline{\underline{K}}_0$ est positive pour satisfaire l'inégalité de la conduction (chapitre VII, § 4.2). Le tenseur $\underline{\underline{K}}_0$ est symétrique en application générale du principe de symétrie de Onsager ou par simple écriture du principe de respect des symétries de la matière (cf. L. Brun, ***Énergétique et modélisation du comportement thermomécanique***).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Conditions aux limites

Les sollicitations imposées au système à chaque instant sont volumiques sur Ω_t (forces volumiques ou massiques données) et surfaciques sur $\partial\Omega_t$. Ces dernières constituent les ***conditions aux limites*** à chaque instant, qui concernent la température T et les composantes des forces surfaciques et des vitesses.

On rencontre classiquement des conditions aux limites données à chaque instant sous la forme suivante :

- donnée de la ***température*** T en chaque point de $\partial\Omega_t$,
- donnée, en chaque point de $\partial\Omega_t$, de ***trois composantes orthogonales entre elles pour l'ensemble des deux vecteurs, contrainte*** $\underline{T}(\underline{n})$ ***et vitesse*** $\underline{U}$.

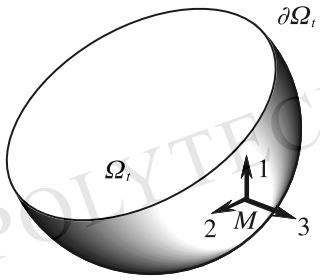


Figure 2 – Conditions aux limites

On désigne par un indice i, $(i = 1, 2, 3)$, les trois directions, éventuellement variables d'un point à l'autre de $\partial\Omega_t$ de ces composantes orthogonales et on repère par un exposant « $^{\mathrm{d}}$ » les composantes ***données***. Les conditions aux limites se formulent ainsi :

$$T(\underline{x}, t) = T^{\mathrm{d}}(\underline{x}, t) \qquad \text{sur } \partial\Omega_t \ , \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(\underline{x}, t)\, n_j(\underline{x}) = T_i^{\mathrm{d}}(\underline{x}, t) & \text{sur } S_{T_i}(t) \\ U_i(\underline{x}, t) = U_i^{\mathrm{d}}(\underline{x}, t) & \text{sur } S_{U_i}(t) \\ \text{avec } S_{U_i}(t) \cup S_{T_i}(t) = \partial\Omega_t \ \text{ et } S_{U_i}(t) \cap S_{T_i}(t) = \varnothing \ , \ i = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{1.13}$$

où les $n_j(\underline{x})\,, (j = 1, 2, 3)$, sont les composantes du vecteur extérieur normal unitaire $\underline{n}(\underline{x})$ à $\partial\Omega_t$.

Les directions $i(= 1, 2, 3)$ correspondent en général à des axes qui ont une signification vis-à-vis du contour $\partial\Omega_t$ au point considéré : le plus souvent ce sont deux directions du plan tangent à $\partial\Omega_t$ et la direction de la normale extérieure à $\partial\Omega_t$ (figure 2). On donnera au paragraphe 1.4 des exemples courants de telles conditions aux limites.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Évolutions thermoélastiques quasi-statiques

On se place dans le cadre d'une évolution ***quasi-statique*** en postulant que le système est, à chaque instant, ***en équilibre*** : en d'autres termes, l'évolution est une succession d'états d'équilibre. Il s'agit là d'une hypothèse *a priori* qui doit être plausible, compte tenu des données initiales et des sollicitations données à chaque instant[(4)]. Ceci implique que :

a) le système est en équilibre dans l'état initial ;

b) les forces extérieures imposées au système sont, à chaque instant compatibles avec l'équilibre global du système, c'est-à-dire compatibles avec l'équation (cf. chapitre IV, § 6.4 et chapitre V, § 3.4) :

$$\text{pour } \mathcal{S}\,, \quad [\mathcal{F}_e] = 0 \tag{1.14}$$

c) les variations des sollicitations données au cours du temps sont suffisamment lentes ;

d) (les données en vitesses imposées au contour du système sont compatibles avec les éventuelles liaisons internes du matériau constitutif).

Pour cette évolution les équations de la dynamique sont, à chaque instant, remplacées par les équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) + \rho(\underline{x},t)\underline{F}(\underline{x},t) = 0 \quad \text{sur } \Omega_t\,, \\ [\![\, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,]\!]\,.\,\underline{n}(\underline{x}) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}}\,. \end{cases} \tag{1.15}$$

L'équation thermique (1.9) se présente souvent sous deux formes simplifiées :

- Le régime ***transitoire*** en thermoélasticité ***découplée***, dans lequel on suppose que le terme linéaire en $\dot{\underline{\underline{e}}}$ du premier membre de (1.9) est négligeable devant chacun des deux autres ; avec la loi de Fourier il vient :

$$\rho_0\, T \frac{\partial^2 \psi(T,\underline{\underline{e}})}{\partial T^2}\dot{T} + \operatorname{div}_{\underline{x}} \left(\underline{\underline{K}}_0\,.\,\underline{\nabla T}\right) = 0\,. \tag{1.16}$$

- Le régime ***stationnaire***, dans lequel le système est à chaque instant en ***équilibre thermique*** ; le taux de chaleur reçu par tout sous-système et par le système lui-même est nul. Avec la loi de Fourier :

$$\operatorname{div}_{\underline{x}} \left(\underline{\underline{K}}_0\,.\,\underline{\nabla T}\right) = 0 \tag{1.17}$$

tandis que (1.9) et (1.11) s'écrivent

$$T \frac{\partial \underline{\underline{\pi}}(T,\underline{\underline{e}})}{\partial T} : \dot{\underline{\underline{e}}} + \rho_0\, T \frac{\partial^2 \psi(T,\underline{\underline{e}})}{\partial T^2}\dot{T} = 0\,, \tag{1.18}$$

c'est-à-dire $\rho_0\, T\, \dot{\boldsymbol{s}} = 0$ (réversibilité, cf. la formule (5.11) du chapitre VII).

(4) Cette hypothèse devrait aussi être validée *a posteriori*, faute d'être assurée par un théorème d'unicité.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1.3 Résolution du problème d'évolution thermoélastique quasi-statique

On se place, pour simplifier, dans le cas d'une évolution quasi-statique isotherme. Les équations de champs (1.4 à 1.6 et 1.15) et les conditions aux limites (1.13) définissent le problème correspondant.

On remarque que ces équations font intervenir à l'instant t à la fois la configuration initiale κ_0, connue, et la configuration actuelle κ_t qui, elle, fait partie de la solution même du problème : les équations d'équilibre (1.4) sont écrites sur la configuration actuelle et les forces de masse, qui font partie des données, sont relatives à cette configuration.

La résolution du problème d'évolution thermoélastique quasi-statique s'articule autour des étapes suivantes.

- À partir de l'analyse des données du problème (géométrie, chargement, caractéristiques mécaniques du matériau constitutif) on imagine a priori une forme possible pour la transformation $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ entre κ_0 et κ_t, éventuellement fonction d'un ou plusieurs paramètres, qui satisfait « par construction » les conditions aux limites en vitesses dans (1.13) et les liaisons internes du matériau dans (1.5b).
- On détermine les tenseurs géométriques de (1.6) correspondants : $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$, $\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)$, sur Ω_0.
- On exprime le champ de contrainte $\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t)$ défini sur Ω_0 , associé par la loi de comportement au champ de déformation précédemment déterminé. Dans le cas de liaisons internes, la loi de comportement (1.5b) introduit n champs scalaires indéterminés $\eta_p(\underline{X}, t)$ sur Ω_0 .
- On en déduit, par la formule de correspondance (1.6), le champ de contrainte de Cauchy correspondant $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ sur Ω_t .
- On exprime que ce champ de contrainte doit satisfaire les équations d'équilibre (1.15) et les conditions aux limites concernant les contraintes dans (1.13).
- Dans le cas favorable d'un choix initial pertinent pour $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$, ces équations peuvent être satisfaites. Elles déterminent les paramètres de la transformation et les n champs scalaires η_p (une indétermination peut quelquefois subsister avec certaines formes de conditions aux limites).

.

Cette démarche est schématisée sur la figure 3 et porte le nom de méthode des déplacements pour signifier qu'elle s'appuie sur l'intuition géométrique de l'évolution du système.

Lorsqu'elle aboutit, le résultat obtenu est ***une*** solution, c'est-à-dire ***une évo-***

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

lution thermoélastique quasi-statique possible répondant aux données et aux équations du problème, sans que l'on puisse affirmer en général qu'il s'agit de l'unique solution du problème.

Schéma de résolution	*Équations de champs*	*c.a.l.*
$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t) \Longrightarrow \Omega_t\ ,\ \partial\Omega_t$ ..	.....	.. (1.13)
(1.6) ⇓		
$\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\ ,\ \underline{\underline{e}}(\underline{X},t)$ ..	(1.5 b)	
(1.5) ⇓		
$\underline{\underline{\pi}}(\underline{X},t)$		
(1.6) ⇓		
$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$ ..	.....(1.15) ...	.. (1.13)

Figure 3 – Problème d'évolution thermoélastique quasi-statique : méthode de résolution

1.4 Quelques exemples de conditions aux limites

Afin d'illustrer concrètement la formulation (1.13) des conditions aux limites sur $\underline{U}$ et $\underline{T}$ au cours d'une évolution on se propose d'examiner quelques exemples fréquemment rencontrés (lorsque nécessaire, on se réfèrera à la figure 2 pour la désignation des axes orthogonaux locaux).

a) Une partie $S_{\underline{U}}$ de $\partial\Omega_t$ sur laquelle le solide $\mathcal{S}$ a sa vitesse imposée en tout point.

$S_{\underline{U}}$ est une surface S_{U_i} pour $i = 1, 2, 3$, à l'instant t.
Les données sont les U_i^{d} en tout point de $S_{\underline{U}}$ et les conditions aux limites s'écrivent :

$$\text{(1.19)} \qquad \begin{cases} U_i(\underline{x},t) = U_i^{\mathrm{d}}(\underline{x},t) \quad i = 1,2,3 \quad \text{sur } S_{\underline{U}} \\ \text{ou encore } \underline{U}(\underline{x},t) = \underline{U}^{\mathrm{d}}(\underline{x},t) \qquad \text{sur } S_{\underline{U}}\ . \end{cases}$$

En particulier si un solide $\mathcal{S}$ est ***fixé*** sur une partie $\mathcal{S}_{\underline{U}}$ de son contour $\partial\Omega_t$ cela signifie que la vitesse y est imposée nulle et la condition aux limites s'écrit :

$$\text{(1.20)} \qquad \underline{U}(\underline{x},t) = 0 \quad \text{sur } S_{\underline{U}}\ .$$

b) Une partie $S_{\underline{T}}$ de $\partial\Omega_t$ sur laquelle le vecteur contrainte est imposé.

$S_{\underline{T}}$ est une surface S_{T_i} pour $i = 1, 2, 3$, à l'instant t.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Les données sont les T_i^{d} en tout point de $S_{\underline{T}}$ et les conditions aux limites s'écrivent :

$$\text{(1.21)} \qquad \begin{cases} \sigma_{ij}(\underline{x},t)\, n_j(\underline{x}) = T_i^{\mathrm{d}}(\underline{x},t) \quad i=1,2,3 \quad \text{sur } S_{\underline{T}} \\ \text{ou encore } \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}^{\mathrm{d}}(\underline{x},t) \qquad \text{sur } S_{\underline{T}}\,. \end{cases}$$

Par exemple, la force surfacique peut être une pression normale imposée $p(t)$. En prenant les axes locaux comme indiqué sur la figure 2, les conditions aux limites s'écrivent alors :

$$\text{(1.22)} \qquad \sigma_{ij}(\underline{x},t)\, n_j(\underline{x}) = 0 \quad i=1,2, \quad \sigma_{3j}(\underline{x},t)\, n_j(\underline{x}) = -p(t) \quad \text{sur } S_{\underline{T}}\,.$$

On rencontre aussi le cas où la force surfacique est imposée nulle : la surface $S_{\underline{T}}$ correspondante est dite ***libre de contrainte*** ; les conditions aux limites s'écrivent :

$$\text{(1.23)} \qquad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,.\,\underline{n}(\underline{x}) = 0 \quad \text{sur } S_{\underline{T}}\,.$$

c) Une partie S_t de $\partial\Omega_t$ sur laquelle deux composantes tangentielles de $\underline{T}$ et la composante normale de $\underline{U}$ sont imposées.

Avec les axes locaux de la figure 2, S_t est, à l'instant t, une surface S_{T_i} pour $i=1,2$ et S_{U_i} pour $i=3$ et l'on a :

$$\text{(1.24)} \qquad \begin{cases} \sigma_{ij}(\underline{x},t)\, n_j(\underline{x}) = T_i^{\mathrm{d}}(\underline{x},t) \quad i=1,2 \quad \text{sur } S_{T_i} = S_t \\ U_3(\underline{x},t) = U_3^{\mathrm{d}}(\underline{x},t) \qquad \text{sur } S_{U_3} = S_t\,. \end{cases}$$

d) Une partie S_t de $\partial\Omega_t$ sur laquelle $\mathcal{S}$ est en contact sans frottement avec une paroi indéformable (fixe ou mobile).

On désigne par $\underline{U}^{\mathrm{p}}$ la vitesse de déplacement de la paroi au point considéré, et on choisit les axes locaux comme indiqué sur la figure 2.

- On suppose d'abord (hypothèse d'école) que la ***liaison est bilatérale***. Les conditions aux limites sont du type (1.13) :

  S_t est une surface S_{T_i} pour $i=1,2$; les composantes $T_1(\underline{x},t)$ et $T_2(\underline{x},t)$ de $\underline{T}(\underline{x},t)$ sont données, nulles en raison de l'absence de frottement :

  $$\text{(1.25)} \qquad T_1^{\mathrm{d}}(\underline{x},t) = 0 \qquad T_2^{\mathrm{d}}(\underline{x},t) = 0\,;$$

  S_t est une surface S_{U_i} pour $i=3$; la composante $U_3(\underline{x},t)$ de $\underline{U}(\underline{x},t)$ est donnée, égale à la composante $U_3^{\mathrm{p}}(\underline{x},t)$ de la vitesse de la paroi, en raison de l'hypothèse de liaison bilatérale :

  $$\text{(1.26)} \qquad U_3^{\mathrm{d}}(\underline{x},t) = U_3^{\mathrm{p}}(\underline{x},t)\,.$$

  Les conditions aux limites s'écrivent :

  $$\text{(1.27)} \qquad \begin{cases} \sigma_{ij}(\underline{x},t)\, n_j(\underline{x}) = 0 \quad i=1,2 \quad \text{sur } S_t \\ U_3(\underline{x},t) = U_3^{\mathrm{d}}(\underline{x},t) \qquad \text{sur } S_t\,. \end{cases}$$

- Si l'on suppose ***la liaison unilatérale***, ce qui est physiquement plus réaliste, elle ne rentre plus dans le cadre de la formulation (1.13). Son analyse nécessite de distinguer les deux cas complémentaires suivants.

  La liaison unilatérale est persistante :
  $U_3(\underline{x},t)$ devient alors une donnée égale à $U_3^{\mathrm{p}}(\underline{x},t)$ et (1.26) demeure valable.
  Ceci implique que la composante $T_3(\underline{x},t)$ de $\underline{T}(\underline{x},t)$ est ***négative***, c'est-à-dire ***compressive***, (ou nulle).

  La liaison unilatérale est rompue :
  Si la composante $U_3(\underline{x},t)$ de $\underline{U}(\underline{x},t)$ est ***inférieure*** à $U_3^{\mathrm{p}}(\underline{x},t)$ c'est-à-dire, puisque la direction 3 est normale extérieure à $\mathcal{S}$, s'il y a ***séparation entre le solide et la paroi***, c'est $T_3(\underline{x},t)$ qui est fixée égale à zéro. Les conditions sur $T_1(\underline{x},t)$ et $T_2(\underline{x},t)$ sont inchangées. La surface devient alors une surface libre.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Les conditions aux limites pour une liaison unilatérale s'écrivent ainsi :

$$(1.28)\qquad \begin{cases} \sigma_{ij}(\underline{x},t)\,n_j(\underline{x}) = 0 & i=1,2\,, \quad \text{et} & U_3(\underline{x},t) \le U_3^{\mathrm{P}}(\underline{x},t) \\ \bullet\, U_3(\underline{x},t) = U_3^{\mathrm{P}}(\underline{x},t) & \Rightarrow & \sigma_{3j}(\underline{x},t) n_j(\underline{x}) \le 0 \\ \bullet\, U_3(\underline{x},t) < U_3^{\mathrm{P}}(\underline{x},t) & \Rightarrow & \sigma_{3j}(\underline{x},t) n_j(\underline{x}) = 0\,, \text{ sur } S_t\,. \end{cases}$$

On a aussi la formulation globalement[5] équivalente à (1.28) :

$$(1.29)\qquad \begin{cases} \sigma_{ij}(\underline{x},t)\,n_j(\underline{x}) = 0 & i=1,2\,, \quad \text{et} & \sigma_{3j}(\underline{x},t) n_j(\underline{x}) \le 0 \\ \bullet\, \sigma_{3j}(\underline{x},t)\,n_j(\underline{x}) < 0 & \Rightarrow & U_3(\underline{x},t) = U_3^{\mathrm{P}}(\underline{x},t) \\ \bullet\, \sigma_{3j}(\underline{x},t)\,n_j(\underline{x}) = 0 & \Rightarrow & U_3(\underline{x},t) \le U_3^{\mathrm{P}}(\underline{x},t)\,, \text{ sur } S_t\,. \end{cases}$$

2 Linéarisation du problème d'évolution thermoélastique quasi-statique

2.1 Objectifs et principes de la linéarisation

L'exposé du paragraphe 1.3 et, en particulier, le schéma de la figure 3, mettent en évidence le caractère incrémental de la résolution du problème d'évolution thermoélastique. En effet, comme on l'a remarqué, les équations du problème à l'instant t font intervenir à la fois la configuration initiale κ_0 et la configuration actuelle κ_t. La linéarisation de ce problème, qui fait l'objet de cette section, consiste à s'intéresser au « premier pas » de cette résolution incrémentale à partir de l'état initial donné du système, comme cela est schématisé sur la figure 4. Dans cette démarche, on suppose que la transformation est infinitésimale en tout point du système. L'état de contrainte initial dans la configuration de référence κ_0 est un état précontraint $\underline{\underline{\sigma}}^0$ supposé engendré par une transformation thermoélastique infinitésimale à partir de l'état naturel comme cela a été défini au chapitre VII (§ 5.4).

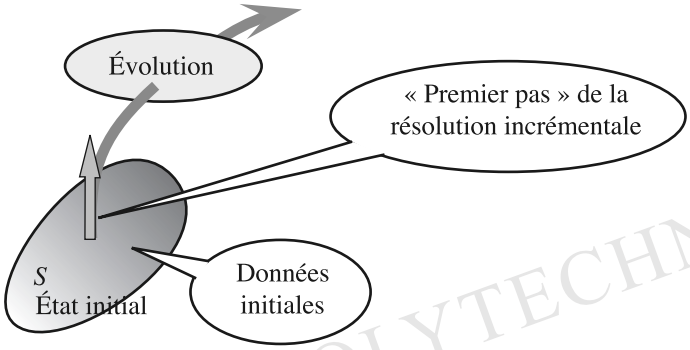


Figure 4 – Représentation schématique de la linéarisation du problème d'évolution

[5] Les « • » de (1.29) pourraient aussi servir de bases à des définitions de la liaison persistante et de la liaison rompue ; celles-ci ne seraient pas équivalentes aux précédentes qui paraissent plus physiques.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L'état initial est défini par la donnée, dans le système, du ***champ de contrainte initial*** $\underline{\underline{\sigma}}^0$ et du ***champ de température*** satisfaisant l'équation (1.17) du régime stationnaire. Le ***champ*** $\underline{\underline{\sigma}}^0$ est en équilibre avec le ***chargement initial*** constitué des forces massiques initiales $\underline{F}^0$ sur Ω_0 et, au contour $\partial\Omega_0$, avec les forces surfaciques initiales $\underline{T}^0 = \underline{\underline{\sigma}}^0 \,.\, \underline{n}$.

La réponse incrémentale du système à partir de cet état initial est définie, sur κ_0, par le champ de vitesse $\underline{U} = \dot{\underline{\xi}}$ et par les dérivées convectives, à l'instant $t = 0$, des champs $\underline{\underline{\sigma}}, \rho, T$. Celles-ci satisfont, sur κ_0, le système d'équations formé par les conditions aux limites sur les vitesses et par les dérivées convectives des équations de champs et des conditions aux limites sur les contraintes. Ces équations définissent ce que nous appellerons ***le problème tangent***. Pour ce problème les données sont[6] : $\dot{\underline{F}}(\underline{x} = \underline{X}, 0)$ sur Ω_0, $\dot{T}_i^{\mathrm{d}}(\underline{x} = \underline{X}, 0)$ sur $S_{T_i}(0)$, $U_i^{\mathrm{d}}(\underline{x} = \underline{X}, 0)$ sur $S_{U_i}(0)$ et $\dot{T}(\underline{x} = \underline{X}, 0)$ sur $\partial\Omega_0$. Le problème tangent est, par construction, linéaire. La linéarisation du problème d'évolution consiste à y substituer les variations des champs donnés et inconnus entre l'état initial et l'état actuel en remplacement de leurs dérivées.

Du point de vue pratique, il conviendra évidemment d'examiner les hypothèses sous lesquelles le problème linéarisé ainsi obtenu est une bonne approximation du problème d'évolution au voisinage de l'état initial (cf. § 3.3).

2.2 Équations du problème tangent

Les équations du problème tangent sont écrites sur la configuration initiale, elles sont constituées par les conditions aux limites sur les vitesses et par les dérivées convectives, à l'instant $t = 0$, des autres équations du problème d'évolution. Dans la suite on suppose le régime thermique stationnaire à chaque instant et le matériau sans liaisons internes. Les équations du problème d'évolution s'écrivent :

Équations de champs

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) + \rho(\underline{x}, t)\, \underline{F}(\underline{x}, t) = 0 \quad \text{sur } \Omega_t \tag{2.1}$$

[7]

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad \text{sur } \Omega_0 \tag{2.2}$$

$$\rho_0(\underline{X})/\rho(\underline{x}, t) = J(\underline{X}, t) \quad \text{sur } \Omega_0 \tag{2.3}$$

$$\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}}(\underline{X}, t) \quad \text{sur } \Omega_0 \tag{2.4}$$

$$\operatorname{div}_{\underline{X}} \underline{\underline{K}}_0 \,.\, \underline{\nabla T} = 0 \quad \text{sur } \Omega_0 \,. \tag{2.5}$$

[6] Dans ces expressions, les arguments $(\underline{x} = \underline{X}, t)$ appliqués à une grandeur eulérienne dénotent la valeur de cette grandeur au point ***géométrique*** $\underline{x} = \underline{X}$ à l'instant t. Lorsqu'il s'agit d'une grandeur physique, telle que la vitesse $\underline{U}$, dont la notation est identique dans les descriptions lagrangienne et eulérienne on a évidemment $\underline{U}(\underline{x} = \underline{X}, 0) = \underline{U}(\underline{X}, 0)$.

[7] L'expression linéarisée de l'équation de saut du champ de contrainte qui figure dans (1.15) sera déduite de la linéarisation (2.1).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Conditions aux limites

$$T(\underline{x},t) = T^{\mathrm{d}}(\underline{x},t) \quad \text{sur } \partial\Omega_t \tag{2.6}$$

$$T_i(\underline{x},t) = T_i^{\mathrm{d}}(\underline{x},t) \quad \text{sur } S_{(T_i)}(t) \tag{2.7}$$

$$U_i(\underline{x},t) = U_i^{\mathrm{d}}(\underline{x},t) \quad \text{sur } S_{(U_i)}(t)\ . \tag{2.8}$$

Les équations obtenues par la dérivation convective des équations (2.1) à (2.8) à l'instant $t = 0$ sont écrites sur Ω_0 et $\partial\Omega_0$: les opérateurs gradients $\underline{\underline{\nabla}}$ et $\underline{\underline{\underline{\mathrm{grad}}}}$ sont alors confondus, de même que les opérateurs $\mathrm{div}_{\underline{X}}$ et div.

Équations de champs sur Ω_0

La dérivation convective de (2.1) à l'instant $t = 0$ s'écrit :

$$\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\rho(\underline{x},t)\,\underline{F}(\underline{x},t)]\Big]_{t=0} = 0 \qquad \text{sur } \Omega_0\ . \tag{2.9}$$

L'équation de continuité (2.3) donne, à l'instant $t = 0$:

$$\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(\underline{x},t)\Big]_{t=0} = -\rho_0(\underline{X})\,\mathrm{div}_{\underline{X}}\,\underline{U}(\underline{X},0) \tag{2.10}$$

dont on déduit pour (2.9) l'expression

$$\begin{aligned}\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)]\Big]_{t=0} &+ \rho_0(\underline{X})\,\Big[\frac{\partial}{\partial t}\underline{F}(\underline{x}=\underline{X},t)\Big]_{t=0} - \rho_0(\underline{X})\,\underline{F}^0(\underline{X})\,\mathrm{div}_{\underline{X}}\,\underline{U}(\underline{X},0)\\ &+ \rho_0(\underline{X})\underline{\underline{\nabla F}}^0(\underline{X})\,.\,\underline{U}(\underline{X},0) = 0 \qquad \text{sur } \Omega_0\ .\end{aligned} \tag{2.11}$$

Compte tenu de l'égalité

$$\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)]\Big]_{t=0} = \Big[\mathrm{div}_{\underline{X}}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)]\Big]_{t=0} - \underline{\underline{\underline{\nabla\sigma}}}^0(\underline{X}) : \underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X},0)^{(8)} \tag{2.12}$$

on obtient finalement pour la dérivée convective de (2.1) à l'instant $t = 0$:

$$\begin{aligned}&\big[\,\mathrm{div}_{\underline{X}}\,\dot{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{x},t)\big]_{\substack{\underline{x}=\underline{X}\\ t=0}} + \rho_0(\underline{X})\,\Big[\frac{\partial}{\partial t}\underline{F}(\underline{x}=\underline{X},t)\Big]_{t=0} - \underline{\underline{\underline{\nabla\sigma}}}^0(\underline{X}) : \underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X},0)\\ &- \rho_0(\underline{X})\,\underline{F}^0(\underline{X})\,\mathrm{div}_{\underline{X}}\,\underline{U}(\underline{X},0) + \rho_0(\underline{X})\,\underline{\underline{\nabla F}}^0(\underline{X})\,.\,\underline{U}(\underline{X},0) = 0 \qquad \text{sur } \Omega_0\ .\end{aligned} \tag{2.13}$$

(8) On a en effet

$$\begin{aligned}\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)]\Big]_{t=0} &= \Big[\frac{\partial}{\partial t}[\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)]\Big]_{t=0} + \Big[\underline{\underline{\nabla}}[\mathrm{div}_{\underline{X}}\,\underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{X},0)]\Big]\,.\,\underline{U}(\underline{X},0)\\ &= \Big[\mathrm{div}_{\underline{X}}\,\frac{\partial}{\partial t}[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)]\Big]_{t=0} - \underline{\underline{\underline{\nabla\sigma}}}^0(\underline{X},0) : \underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X},0) + \mathrm{div}_{\underline{X}}\,[\underline{\underline{\underline{\nabla\sigma}}}^0(\underline{X},0)\,.\,\underline{U}(\underline{X},0)]\\ &= \Big[\mathrm{div}_{\underline{X}}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)]\Big]_{t=0} - \underline{\underline{\underline{\nabla\sigma}}}^0(\underline{X},0) : \underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X},0)\ .\end{aligned}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La linéarisation de l'équation de comportement (2.4), qui correspond à la dérivée convective (2.14) de (2.4) à l'instant $t = 0$, a été étudiée au chapitre VII (section 5) :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{x} = \underline{X}, 0) = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \dot{\underline{\underline{e}}} - \underline{\underline{k}}\dot{\tau} + (\underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\nabla U}} + \underline{\underline{\nabla U}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^0) - \underline{\underline{\sigma}}^0 \operatorname{div} \underline{U} \qquad \text{sur } \Omega_0 \ . \tag{2.14}$$

La dérivation convective de l'équation thermique (2.5) à l'instant $t = 0$ fournit :

$$\operatorname{div}_{\underline{X}} \left[\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}_0 \cdot \underline{\nabla} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \right] = 0 \qquad \text{sur } \Omega_0 \tag{2.15}$$

où $\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}_0$ est la valeur du tenseur de conductivité thermique dans la configuration initiale

Conditions aux limites

Pour les conditions aux limites, on obtient de même à l'instant $t = 0$:

$$\left[\frac{\partial \tau}{\partial t}(\underline{X}, t) \right]_{t=0} = \left[\frac{\partial \tau^{\mathrm{d}}}{\partial t}(\underline{X}, t) \right]_{t=0} \qquad \text{sur } \partial\Omega_0 \tag{2.16}$$

$$\left[\frac{\partial T_i}{\partial t}(\underline{X}, t) \right]_{t=0} = \left[\frac{\partial T_i^{\mathrm{d}}}{\partial t}(\underline{X}, t) \right]_{t=0} \qquad \text{sur } S_{T_i}(0) \tag{2.17}$$

$$\left[\frac{\partial \xi_i}{\partial t}(\underline{X}, t) \right]_{t=0} = \left[\frac{\partial \xi_i^{\mathrm{d}}}{\partial t}(\underline{X}, t) \right]_{t=0} \qquad \text{sur } S_{U_i}(0) \ . \tag{2.18}$$ (9)

Le problème tangent sur la configuration initiale est ainsi défini par les équations (2.10, 2.13 à 2.18).

2.3 Premier pas de la résolution incrémentale

On substitue maintenant dans les équations (2.10, 2.13 à 2.18) le champ $\underline{\xi}$ au champ $\underline{U}$ et les variations $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x} = \underline{X}, t) - \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{X})$ et $\underline{\underline{F}}(\underline{x} = \underline{X}, t) - \underline{\underline{F}}^0(\underline{X})$ aux dérivées correspondantes. On fait de plus l'hypothèse de la transformation infinitésimale.

On obtient ainsi le système d'équations où les arguments $(\underline{x} = \underline{X}, t)$ sont sous-entendus et ou l'opérateur divergence est évidemment pris sur Ω_0 :

Équations de champs sur Ω_0

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^0) + \rho_0 \, (\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{F}}^0) - \underline{\underline{\underline{\underline{\nabla \sigma^0}}}} : \underline{\underline{\nabla \xi}} - \rho_0 \, \underline{\underline{F}}^0 \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} + \rho_0 \, \underline{\underline{\nabla F^0}} \cdot \underline{\xi} = 0 \tag{2.19}$$

$$\rho = \rho_0 (1 - \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \tag{2.20}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^0 = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}}\tau + (\underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\nabla \xi}} + \underline{\underline{\nabla \xi}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^0) - \underline{\underline{\sigma}}^0 \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{2.21}$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}_0 \cdot \underline{\nabla \tau} = 0 \ . \tag{2.22}$$

(9) Puisque le champ $\underline{\xi}$ est nul dans la configuration initiale on a évidemment :

$$\underline{U}(\underline{X}, 0) = \left[\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial t}(\underline{x} = \underline{X}, t) \right]_{t=0} .$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Conditions aux limites

$$\tau = \tau^{\mathrm{d}} \qquad \text{sur } \partial\Omega_0 \tag{2.23}$$

$$T_i - T_i^0 = T_i^{\mathrm{d}} - T_i^0 \qquad \text{sur } S_{T_i} = S_{T_i}(0) \tag{2.24}$$

$$\xi_i = \xi_i^{\mathrm{d}} \qquad \text{sur } S_{\xi_i} = S_{U_i}(0) \tag{2.25}$$

où l'on désigne par $T_i^0(\underline{X})$ la valeur de la composante «i» du vecteur contrainte engendré par $\underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{X})$ sur $S_{T_i}(0)$ au point $\underline{X}$. L'équation de comportement (2.21) est évidemment identique à la formule (5.24) du chapitre VII.

2.4 Découplage du problème thermique

Une conséquence importante du système d'équations (2.19) à (2.25) est le ***découplage du problème thermique***. En effet, on a implicitement supposé, dans l'écriture de (2.22) que $\underline{\underline{K}}_0$ est une constante physique du matériau ; il s'ensuit que cette équation, associée à la condition aux limites (2.23), permet la détermination du champ τ sur Ω_0, indépendamment des champs $\underline{\xi}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$.

À titre d'exemple, si le solide étudié est constitué d'un matériau isotrope homogène, le tenseur $\underline{\underline{K}}_0$ est un tenseur isotrope constant sur Ω_0 :

$$\underline{\underline{K}}_0 = K_0\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} \quad \text{constant sur } \Omega_0 \ ; \tag{2.26}$$

l'équation (2.22) se réduit alors à l'équation de Laplace

$$\Delta\tau = 0 \quad \text{sur } \Omega_0 \tag{2.27}$$

qui détermine τ sur Ω_0 à partir des conditions aux limites (2.23) sur $\partial\Omega_0$. La figure 5 donne un exemple de champ τ ainsi déterminé numériquement.

Une fois sa détermination effectuée, le champ τ peut être considéré comme une ***donnée*** sur Ω_0 pour le problème relatif à $\underline{\xi}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$. ***C'est le point de vue qui sera adopté dans toute la suite***.

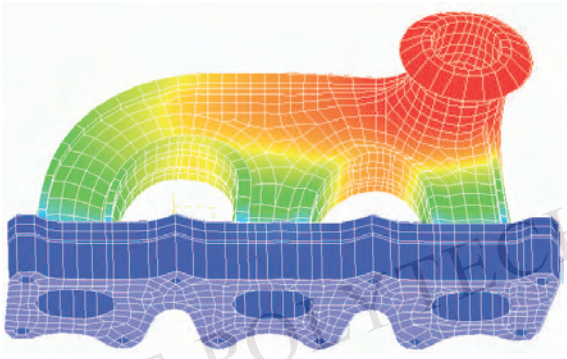


Figure 5 – Distribution de température dans un collecteur d'échappement (document comuniqué par PSA - Peugeot-Citroën)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

2.5 État initial non chargé et non contraint

Les équations précédentes sont remarquablement simplifiées lorsque, dans son état initial pris comme référence, le champ de contrainte est nul, le système étant évidemment non chargé :

$$\underline{\underline{\sigma}}^0 = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega_0 \ , \ \underline{F}^0 = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega_0 \ , \ T_i^0 = 0 \quad \text{sur} \quad S_{T_i}(0) \ . \tag{2.28}$$

Cet ***état initial est dit naturel***. Le système des équations (2.19 à 2.25), où le champ τ est désormais considéré comme une donnée, devient alors :

Équations de champs sur Ω_0

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho_0 \, \underline{F} = 0 \tag{2.29}$$

$$\rho = \rho_0 \, (1 - \operatorname{div} \underline{\xi}) \tag{2.30}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}} \tau \tag{2.31}$$

Conditions aux limites

$$T_i = T_i^{\mathrm{d}} \quad \text{sur } S_{T_i} = S_{T_i}(0) \tag{2.32}$$

$$\xi_i = \xi_i^{\mathrm{d}} \quad \text{sur } S_{T_i} = S_{T_i}(0) \ . \tag{2.33}$$

On constate que l'équation (2.19) se réduit à l'équation (2.29), qui exprime l'équilibre du champ de constrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ avec le champ de force massique $\underline{F}$. L'équation de comportement(2.21) devient (2.31) (chapitre VII, § 5.4).

À partir de l'état initial naturel, le problème posé par le système des équations (2.29 à 2.33) définit ***l'équilibre*** du système sous les sollicitations qui lui sont imposées à l'instant actuel ***dans la géométrie de la configuration*** κ_0 avec la loi de comportement ***thermoélastique linéarisée***.

Ce problème est ***linéaire*** : la correspondance entre les champs donnés ξ_i^{d}, T_i^{d}, $\underline{F}$ et τ d'une part, et les champs solutions $\underline{\xi}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ d'autre part, est linéaire. ***C'est la linéarisation, sur de la configuration initiale non chargée et non contrainte, du problème d'évolution thermoélastique donné***.

2.6 Approche lagrangienne

On peut donner, de la construction du problème tangent, une approche lagrangienne. Il s'agit, en fait, de procéder à la dérivation convective de l'équation d'équilibre (2.1) en description lagrangienne. Comme dans d'autres cas (cf. chapitre III, § 4.4 par exemple) cette démarche, quoique plus lourde que celle adoptée au paragraphe 2.2, peut paraître « plus rassurante ».

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L'équation d'équilibre (2.1) sur Ω_t est transportée sur Ω_0, comme indiqué au chapitre V (§ 4.2) et fait apparaître le tenseur des contraintes de Piola-Lagrange (ou de Boussinesq) $\underline{\underline{B}}(\underline{X},t)$ relié à $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$ par :

$$\underline{\underline{B}}(\underline{X},t) = J(\underline{X},t)\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\phi}(\underline{X},t),t)\,.\,{}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)\ . \tag{2.34}$$

On obtient ainsi l'équation :

$$\mathrm{div}_{\underline{X}}\,\underline{\underline{B}}(\underline{X},t) + \rho_0\,\underline{F}(\underline{\phi}(\underline{X},t),t) = 0 \tag{2.35}$$

et l'équation de saut correspondante

$$[\![\,\underline{\underline{B}}(\underline{X},t)\,]\!]\,.\,\underline{N}(\underline{X}) = 0\ . \tag{2.36}$$

La dérivation convective de (2.35) donne :

$$\mathrm{div}_{\underline{X}}\,\dot{\underline{\underline{B}}}(\underline{X},t) + \rho_0\,\dot{\underline{F}}(\underline{\phi}(\underline{X},t),t) = 0 \tag{2.37}$$

soit, compte tenu de (2.34),

$$\mathrm{div}_{\underline{X}}\,(\dot{J}\underline{\underline{\sigma}}\,.\,{}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}^{-1} + J\underline{\underline{\sigma}}\,.\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}^{-1}) + J\dot{\underline{\underline{\sigma}}}\,.\,{}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}^{-1}) + \rho_0\frac{\mathrm{d}\underline{F}}{\mathrm{d}t} = 0\ . \tag{2.38}$$

Cette équation devient, après calculs[10] :

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_{\underline{X}}\,[\dot{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,]_{\substack{\underline{x}=\underline{X}\\ t=0}} + \mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{X})\,\mathrm{div}\,\underline{U}(\underline{X},0) - \underline{\underline{\underline{\nabla\sigma}}}^0(\underline{X}) : \underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X},0)\\ + \rho_0(\underline{X})\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{F}(\underline{x},t)\right]_{\substack{\underline{x}=\underline{X}\\ t=0}} = 0\ .\end{aligned} \tag{2.39}$$

Ou encore, en tenant compte de l'équation d'équilibre satisfaite par $\underline{\underline{\sigma}}^0$ avec les forces de masse $\underline{F}^0$ sur Ω_0 et en explicitant la dérivée convective :

$$\begin{aligned}&[\mathrm{div}_{\underline{X}}\,\dot{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)]_{\substack{\underline{x}=\underline{X}\\ t=0}} + \rho_0(\underline{X})\left[\frac{\partial}{\partial t}\underline{F}(\underline{x}=\underline{X},t)\right]_{t=0} - \underline{\underline{\underline{\nabla\sigma}}}^0(\underline{X}) : \underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X},0)\\ &\quad - \rho_0(\underline{X})\,\underline{F}^0(\underline{X})\,\mathrm{div}_{\underline{X}}\,\underline{U}(\underline{X},0) + \rho_0(\underline{X})\,\underline{\underline{\nabla F}}^0(\underline{X})\,.\,\underline{U}(\underline{X},0) = 0 \quad \text{sur } \Omega_0\ .\end{aligned} \tag{2.40}$$

qui n'est autre que l'équation (2.13) obtenue au paragraphe 2.2.

3 Équilibre thermoélastique linéarisé

3.1 Unicité

On démontrera au chapitre X (§ 2.4 et 3.4) le résultat d'unicité pour la solution du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé, qui s'énonce ainsi :

La solution du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé (2.29 à 2.33) ***est unique en fonction des valeurs des sollicitations imposées à l'instant*** t. ***Plus précisément : il y a unicité des champs*** $\underline{\underline{\sigma}}$ ***et*** $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ***sur*** Ω_0.

[10] On a en effet sur κ_0, compte tenu des valeurs initiales :
$\mathrm{div}_{\underline{X}}\,(\dot{J}\underline{\underline{\sigma}}\,.\,{}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}^{-1}) = (\mathrm{div}\,\underline{U})\,\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\nabla}(\mathrm{div}\,\underline{U})\,.\,{}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\sigma}}^0$
$\mathrm{div}_{\underline{X}}\,(J\underline{\underline{\sigma}}\,.\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}^{-1})) = \mathrm{div}(-J\underline{\underline{\sigma}}\,.\,{}^{\mathrm{t}}\dot{\underline{\underline{F}}}) = -\underline{\underline{\underline{\nabla\sigma}}}^0 : \underline{\underline{\nabla U}} - \underline{\underline{\sigma}}^0\,.\,\underline{\nabla}(\mathrm{div}\,\underline{U})$.
On rappelle que sur κ_0 les gradients $\underline{\nabla}$ et $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}$ sont confondus de même que les opérateurs $\mathrm{div}_{\underline{X}}$ et div.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La démonstration de ces résultats d'unicité repose sur la forme des conditions aux limites (2.32, 2.33) qui définissent un problème régulier ou ***bien posé*** et sur le caractère défini positif de la forme quadratique $\frac{1}{2}\,\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ imposé par la stabilité du matériau thermoélastique dans son état naturel (chapitre VII, § 5.5).

La question de l'unicité du champ $\underline{\xi}$ sera traitée dans la suite (§ 3.6).

3.2 Principe de superposition

En conséquence des propriétés énoncées plus haut (§ 2.5 et 3.1), les champs $\underline{\xi}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ dépendent linéairement des données $\underline{F}$ et τ sur Ω_0, ξ_i^{d} et T_i^{d} sur $\partial\Omega_0$. Compte tenu de son importance pratique, cette propriété mathématique est souvent connue sous le nom de ***principe de superposition***, énoncée sous la forme suivante. (On rappelle que dans la configuration initiale le système est non chargé et que l'état de contrainte est nul).

Si $\underline{\underline{\sigma}}^1$ et $\underline{\xi}^1$ satisfont les équations de champ du problème d'équilibre thermoélastique avec les données $\underline{F}^1$ et τ^1 sur Ω_0, et correspondent sur $\partial\Omega_0$ aux forces surfaciques $\underline{T}^1$ et aux déplacements $\underline{\xi}^1$,

si $\underline{\underline{\sigma}}^2$ et $\underline{\xi}^2$ satisfont les mêmes équations avec les données $\underline{F}^2$ et τ^2 sur Ω_0 et correspondent sur $\partial\Omega_0$ aux forces surfaciques $\underline{T}^2$ et aux déplacements $\underline{\xi}^2$,

alors, $\forall\lambda^1$, $\forall\lambda^2$, les champs

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda^1\underline{\underline{\sigma}}^1 + \lambda^2\underline{\underline{\sigma}}^2 \quad \text{et} \quad \underline{\xi} = \lambda^1\underline{\xi}^1 + \lambda^2\underline{\xi}^2 \tag{3.1}$$

satisfont les équations du même problème d'équilibre thermoélastique avec les données

$$\underline{F} = \lambda^1\underline{F}^1 + \lambda^2\underline{F}^2 \quad \text{et} \quad \tau = \lambda^1\tau^1 + \lambda^2\tau^2 \quad \text{sur } \Omega_0 \ , \tag{3.2}$$

et correspondent sur $\partial\Omega_0$ aux

$$\text{forces surfaciques } \underline{T} = \lambda^1\underline{T}^1 + \lambda^2\underline{T}^2 \qquad \text{et déplacements } \underline{\xi} = \lambda^1\underline{\xi}^1 + \lambda^2\underline{\xi}^2 \ . \tag{3.3}$$

3.3 Hypothèses de linéarisation (état initial de référence naturel)

Deux hypothèses ont été initialement posées dans l'explication de la démarche mathématique qui a permis de passer du problème tangent au problème d'équilibre théermoélastique linéarisé(§ 2.2 et 2.3) : l'hypothèse de la ***transformation infinitésimale*** et l'hypothèse du ***faible écart de température*** (ch. chapitre VII, § 5.2) :

$$\|\underline{\underline{\nabla\xi}}\| \ll 1 \quad \text{sur } \Omega_0 \tag{3.4}$$

$$|\tau| \quad \text{petit sur } \Omega_0 \ . \tag{3.5}$$

De plus les équations (2.32) et (2.33) recèlent une condition essentielle sur la forme des ***conditions aux limites*** : celles-ci doivent pouvoir être définies, à chaque instant,

sur les mêmes surfaces $S_{T_i}(0)$ et $S_{U_i}(0)$, c'est-à-dire que la nature des conditions aux limites ne doit pas varier entre la configuration initiale et la configuration actuelle sur les mêmes ***surfaces matérielles***.

Ceci exclut évidemment le cas de la ***liaison unilatérale*** (§ 1.4c), qui ne rentre pas dans le cadre (1.13) du champ de cette analyse. De la même façon, un problème de contact tel que le ***problème de Hertz*** pour le contact d'une sphère élastique sur un demi-espace indéformable (figure 6) n'est pas justiciable du traitement précédent : il est en effet posé en écrivant que le contact se fait sur une aire S qui dépend de l'intensité de la force avec laquelle la sphère est appliquée sur le demi-espace. En conséquence, pour ce problème, le principe de superposition énoncé au paragraphe 3.3 n'est plus applicable : ***il n'y a pas linéarité***.

Enfin, il va de soi que le remplacement du problème d'évolution par son problème linéaire tangent n'a de sens que si les champs donnés et inconnus substitués aux dérivées partielles tendent vers zéro c'est-à-dire, du point de vue pratique, demeurent suffisamment petits.

En conséquence de cette analyse, les résultats de linéarité et d'unicité ne sont physiquement valables que pour autant que les hypothèses de linéarisation énoncées ci-dessus sont satisfaites. Cela est vrai, en particulier, dans l'application du principe de superposition, où l'on doit notamment prendre garde aux facteurs multiplicatifs dans les équations (3.1) à (3.3). Le non-respect de cette condition explique le caractère paradoxal des résultats obtenus par l'utilisation sans précaution de certaines solutions.

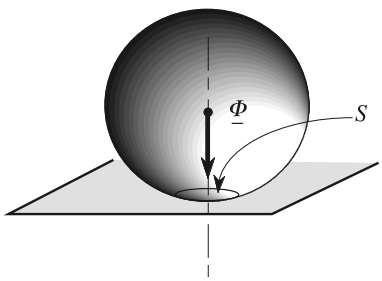


Figure 6 – Problème de Hertz

3.4 État initial de référence précontraint

Il est fréquent dans la pratique que l'état que l'on souhaite prendre comme référence soit un état dans lequel le champ de contrainte n'est pas nul. Un tel état initial est dit ***précontraint***. Le chargement initial correspondant est défini par les forces massiques $\underline{F}^0$ sur Ω_0 et par les composantes T_i^0 du vecteur contrainte engendré par $\underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{X})$ au point $\underline{X}$ sur $S_{T_i}(0)$, comme décrit au paragraphe 2.3.

Lorsque ce chargement n'est pas nul le système est ***préchargé*** ; c'est le cas notamment lorsqu'interviennent les forces de gravité. On rappelle à ce propos l'hypothèse

posée au paragraphe 2.1 : le préchargement résulte d'une transformation infinitésimale à partir de l'état naturel (cf. chapitre VII, § 5.4).

Le chargement initial peut aussi être nul :

$$\underline{F}^0 = 0 \quad \text{sur } \Omega_0 \ , \ T_i^0 = 0 \quad \text{sur } S_{T_i}(0) \ . \tag{3.6}$$

Dans ce cas, le système est non chargé et le champ de contrainte initial $\underline{\underline{\sigma}}^0$ est ***un champ d'autocontrainte pour le problème***. Un tel état de contrainte peut être, par exemple, un champ de ***contrainte résiduelle*** résultant d'un processus de mise en forme, un champ de contrainte thermique dû à l'incompatibilité géométrique des déformations thermiques d'une pièce[(11)], ou être volontairement mis en place dans un élément de structure pour exploiter au mieux les capacités de résistance des matériaux constitutifs en fonction des sollicitations actives qu'il doit subir.

Le problème qui se pose de façon pertinente à partir d'un état initial précontraint pris comme référence vise à la détermination des champs de déplacement $\underline{\xi}$ et de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ par rapport à cet état du système, qui sont engendrés par les sollicitations additionnelles appliquées au système à partir de l'état initial. Du point de vue du champ de contrainte, il va de soi que c'est bien sa valeur totale $\underline{\underline{\sigma}}$ résultant du préchargement et des sollicitations additionnelles qui est significative, notamment lorsque l'on s'intéresse à la détermination des charges maximales qui peuvent être imposées au système sans dépasser en aucun point la limite d'élasticité des matériaux constitutifs (cf. § 7.7). Toutefois, il est commode de décomposer le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ en faisant apparaître sa variation $\underline{\underline{\sigma}}' = (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^0)$ par rapport à l'état de précontrainte initial. Ceci explique que l'on ait fait apparaître explicitement cette variation dans les équations (2.19, 2.21 et 2.24).

Les équations (2.19 à 2.25), en tenant compte du découplage thermique (§ 2.4) deviennent alors :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}' + \rho_0 \, (\underline{F} - \underline{F}^0) - \underline{\underline{\underline{\nabla \sigma}}}^0 : \underline{\underline{\nabla \xi}} - \rho_0 \underline{F}^0 \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} + \rho_0 \, \underline{\underline{\nabla F}}^0 \, . \, \underline{\xi} = 0 \quad \text{sur } \Omega_0 \tag{3.7}$$

$$\rho = \rho_0 (1 - \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \quad \text{sur } \Omega_0 \tag{3.8}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}} \tau + (\underline{\underline{\sigma}}^0 \, . \, {}^{\mathrm{t}} \underline{\underline{\nabla \xi}} + \underline{\underline{\nabla \xi}} \, . \, \underline{\underline{\sigma}}^0) - \underline{\underline{\sigma}}^0 \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{sur } \Omega_0 \tag{3.9}$$

$$T_i' = T_i^{\mathrm{d}} - T_i^0 \quad \text{sur } S_{T_i} = S_{T_i}(0) \tag{3.10}$$

$$\xi_i = \xi_i^{\mathrm{d}} \quad \text{sur } S_{\xi_i} = S_{U_i}(0) \ . \tag{3.11}$$

On remarque que, lorsque $\underline{\underline{\sigma}}^0$ est un champ d'autocontrainte pour le problème, les équations (3.7) et (3.10) se réduisent, pour $\underline{\underline{\sigma}}'$ à l'équilibre avec le champ de force de masse $\underline{F}$ et les données T_i^{d}.

(11) Cf. chapitre II § 6.4 et X § **??**.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

3.5 Hypothèse des petites perturbations

Comme cela a été expliqué au chapitre VII (§ 5.4), le terme $[(\underline{\underline{\sigma}}^0 \,.\, {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\underline{\underline{\nabla \xi}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{\nabla \xi}}}} \,.\, \underline{\underline{\sigma}}^0) - \underline{\underline{\sigma}}^0 \mathrm{tr}\, \underline{\underline{\varepsilon}}]$ au second membre de l'équation (3.9) est négligeable devant les deux premiers, compte tenu des hypothèse de transformations infinitésimales, et (3.9) se réduit à l'équation de comportement thermoélastique linéarisée (5.47) du chapitre VII .

Au niveau de l'équation d'équilibre (3.7), les hypothèses de transformations infinitésimales permettent de négliger les termes $-\underline{\underline{\underline{\underline{\nabla \sigma^0}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\nabla \xi}}}} - \rho_0 \underline{F}^0 \mathrm{tr}\, \underline{\underline{\varepsilon}}$. En revanche, le ***terme de convection*** $\rho_0 \underline{\underline{\underline{\underline{\nabla F^0}}}} \,.\, \underline{\xi}$ met explicitement en évidence la nécessité d'introduire ***l'hypothèse des petits déplacements*** de façon à ce que ce terme soit, lui aussi, négligeable devant les deux premiers.

En fait, l'hypothèse (3.4) suffit le plus souvent, dans la pratique, à assurer que le champ de déplacement $\underline{\xi}$ est petit, mais les contre-exemples sont aisés à construire qui montrent l'indépendance des deux hypothèses (translation d'ensemble ; petite rotation d'ensemble appliquée à un corps élancé, etc.). L'hypothèse des ***petits déplacements*** est donc formulée :

$$|\,\underline{\xi}\,| \quad \text{petit sur } \Omega_0 \,. \tag{3.12}$$

dont la signification quantitative est rattachée au terme de convection dans (3.7).

On regroupe couramment l'ensemble des hypothèses sous le nom d'***hypothèse des petites perturbations***, abrégé en **H.P.P.**

(3.13)

H.P.P.

$$\|\underline{\underline{\underline{\underline{\nabla \xi}}}}\| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \|\underline{\underline{\varepsilon}}\| \ll 1 \quad \text{sur } \Omega_0$$

$$|\,\tau\,| \quad \textbf{petit} \text{ sur } \Omega_0$$

$$|\,\underline{\xi}\,| \quad \textbf{petit} \text{ sur } \Omega_0$$

Symboliquement, on peut dire que ces hypothèses définissent qualitativement le domaine du premier pas de la résolution incrémentale sur la figure 4.

On voit que, ***dans l'hypothèse des petites perturbations***, le système des équations à partir de l'état précontraint se ramène, pour les champs inconnus $\underline{\underline{\sigma}}'$, $\underline{\xi}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et les champs donnés $\underline{F}' = (\underline{F} - \underline{F}^0)$ et τ sur Ω_0, $(T_i^{\mathrm{d}} - T_i^0)$ sur $S_{T_i} = S_{T_i}(0)$ et ξ_i^{d} sur $S_{\xi_i} = S_{U_i}(0)$, au système des équations du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé à partir de l'état initial non chargé et non contraint (§ 2.5). En conséquence, la suite de l'analyse avec, notamment, l'étude des méthodes de résolution, sera uniquement consacrée à ce problème d'équilibre thermoélastique linéarisé.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

$$\text{(3.14)} \qquad \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}' + \rho_0(\underline{F} - \underline{F}^0) = 0 \text{ sur } \Omega_0$$

$$\text{(3.15)} \qquad \rho = \rho_0 \, (1 - \operatorname{div} \underline{\xi}) \text{ sur } \Omega_0$$

$$\text{(3.16)} \qquad \underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}}\tau \text{ sur } \Omega_0$$

$$\text{(3.17)} \qquad T_i' = T_i^{\mathrm{d}} - T_i^0 \text{ sur } S_{T_i} = S_{T_i}(0)$$

$$\text{(3.18)} \qquad \xi_i = \xi_i^{\mathrm{d}} \text{ sur } S_{\xi_i} = S_{U_i}(0)$$

On rappelle que compte tenu de l'hypothèse faite sur l'état de précontrainte, les tenseurs $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ et $\underline{\underline{k}}$ dans (3.16) sont relatifs à ***l'état initial*** du matériau constitutif (cf. chapitre VII, § 5.4).

Il en résulte une conséquence importante dans l'application du principe de superposition. Tel qu'il est établi au paragraphe 3.2, le principe de superposition exprime la linéarité du problème d'équilibre thermoélastique ***posé sur la configuration initiale non contrainte*** prise comme référence. Dans la pratique, la superposition des problèmes est rarement simultanée à partir de l'état initial : une sollicitation est ajoutée à une autre au cours du processus de chargement du système. L'hypothèse des petites perturbations, si elle demeure vérifiée tout au long de ce processus, garantit l'applicabilité du principe de superposition sans qu'il soit nécessaire de connaître la chronologie c'est-à-dire l'histoire du chargement du système.

3.6 Unicité du champ de déplacement

On a énoncé, au paragraphe 3.1, le théorème d'unicité du champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ et du champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ solutions du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé sur Ω_0. Ce résultat s'applique évidemment aux champs solutions du problème défini par (3.14) à (3.18).

Comme on l'a vu au chapitre II (§ 6.3), l'unicité du champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$, qui est géométriquement compatible puisque solution du problème, n'assure pas l'unicité du champ de déplacement solution $\underline{\xi}$ dont il dérive. On sait qu'en toute généralité, l'intégration de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ détermine $\underline{\xi}$ à un champ de déplacement rigidifiant additif près, dans le respect de l'hypothèse de la transformation infinitésimale.

La conséquence de ce résultat est, ici, que :

Le champ de déplacement solution du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé sur Ω_0 est unique, éventuellement à un champ de déplacement rigidifiant additif près selon la nature des conditions aux limites (3.17), (3.18) ***du problème bien posé, dans le respect de l'hypothèse des petites perturbations.***

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

4 Résolution du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé

4.1 Position du problème étudié, nouvelles notations

Les équations du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé à partir de l'état initial non chargé et non contraint ont été énoncées précédemment (2.29) et (2.33). On y ajoute, pour être complet, l'équation de saut du champ $\underline{\underline{\sigma}}$.

Selon l'usage on allègera désormais les notations en ne faisant plus apparaître explicitement la référence à la configuration initiale au moyen de symboles ou d'indices, mais il est essentiel de garder en mémoire que, bien que cette nouvelle écriture donne l'impression de se référer à la configuration actuelle, c'est bien ***sur la configuration initiale et, notamment, avec la masse volumique*** ρ_0 que l'on écrit et résout le problème[(12)]. Dans l'équation (2.30) il est évidemment nécessaire de différencier les deux valeurs de la masse volumique en faisant intervenir explicitement ρ_0 et ρ. En fait, cette équation sera désormais omise et ne sera rappelée que lorsque la détermination de la masse volumique actuelle ρ sera nécessaire.

On obtient ainsi le système d'équations suivant, où le champ d'écart de température τ est une donnée, en conséquence du paragraphe 2.4.

(4.1a) $\quad \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho\, \underline{F} = 0 \qquad \text{sur } \Omega$

(4.1b) $\quad [\![\underline{\underline{\sigma}}]\!] \,.\, \underline{n} = 0 \qquad \text{sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}}$

(4.2) $\quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}}\,\tau$

(4.3) $\quad \underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{\operatorname{grad} \xi}} + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\operatorname{grad} \xi}})/2$

(4.4) $\quad \sigma_{ij} n_j = T_i^{\mathrm{d}} \qquad \text{sur } S_{T_i}$

(4.5) $\quad \xi_i = \xi_i^{\mathrm{d}} \qquad \text{sur } S_{\xi_i}$

$S_{T_i} \cup S_{\xi_i} = \partial\Omega \ , \ S_{T_i} \cap S_{\xi_i} = \varnothing \ , \ i = 1, 2, 3$

Le problème est dit ***isotherme*** si le champ d'écart de température τ est identiquement nul sur Ω.

(12) Il est courant de dire à ce propos que « l'on confond la géométrie actuelle et la géométrie initiale ». L'expérience montre que cette expression est souvent la cause de malentendus.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

4.2 Champs de contrainte statiquement admissibles, champs de déplacement cinématiquement admissibles

Définition

Les inconnues du problème, qui apparaissent sur les équations (4.1) à (4.5) sont les champs $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\xi}$ (dont dérive le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$).

Les grandeurs $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}(\underline{x})$, $\underline{\underline{k}}(\underline{x})$ et $\rho(\underline{x})$ sont les caractéristiques physiques du matériau constitutif du système étudié. Les champs correspondants sont des données : ils sont constants sur Ω si le système est constitué d'un matériau homogène.

Les champs $\underline{F}$ et τ sur Ω , T_i^{d} et ξ_i^{d} sur S_{T_i} et S_{ξ_i} respectivement, sont les données du problème qui définissent les sollicitations du système.

Il est alors intéressant de structurer ces équations en remarquant que :

- les équations (4.1) et (4.4) concernent le champ inconnu $\underline{\underline{\sigma}}$ seul,
- les équations (4.5) concernent le champ inconnu $\underline{\xi}$ seul,
- les équations (4.2), avec la correspondance géométrique (4.3), lient les champs inconnus $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\xi}$.

Cette constatation conduit à introduire les définitions suivantes.

♦ ***Champs de contrainte statiquement admissibles***

Un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ est dit ***statiquement admissible*** (S.A.) ***pour le problème avec les données*** $\underline{F}$ ***et*** T_i^{d} s'il satisfait les équations (4.1) et (4.4) avec ces données. L'ensemble de ces champs de contrainte sera désigné par $\mathbb{S}(\underline{F}\,,\, S_{T_i}\,,\, T_i^{\mathrm{d}})$:

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{S}(\underline{F}\,,\, S_{T_i}\,,\, T_i^{\mathrm{d}}) \Longleftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho\, \underline{F} = 0 & \text{sur } \Omega \\ [\![\, \underline{\underline{\sigma}} \,]\!] \,.\, \underline{n} = 0 & \text{sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}} \\ \sigma_{ij} n_j = T_i^{\mathrm{d}} & \text{sur } S_{T_i}\,,\ i = 1,2,3 \end{cases} \tag{4.6}$$

Pour que cet ensemble soit non vide il faut et suffit que les données $\underline{F}$ sur Ω et T_i^{d} sur S_{T_i} satisfassent la condition, indiquée au paragraphe 1.2, de compatibilité avec l'équilibre global du système c'est-à-dire de compatibilité avec l'équation : $[\mathcal{F}_e] = 0$. À titre d'exemple : lorsque les données sur les forces surfaciques fixent, en tout point du contour, la composante du vecteur contrainte suivant une direction ***fixe***, on doit vérifier que, selon cette direction, la résultante des forces surfaciques et des forces de masse (qui sont connues) a bien une composante nulle.

♦ ***Champs de déplacement cinématiquement admissibles***

Un champ de déplacement $\underline{\xi}$ est dit ***cinématiquement admissible*** (C.A.) ***pour le problème avec les données*** ξ_i^{d} s'il satisfait les équations (4.5) avec ces données.

L'ensemble de ces champs de déplacement sera désigné par $\mathbb{C}(S_{\xi_i}\,,\,\xi_i^{\mathrm{d}})$:

$$\underline{\xi} \in \mathbb{C}(S_{\xi_i}\,,\,\xi_i^{\mathrm{d}}) \iff \xi_i = \xi_i^{\mathrm{d}} \quad \text{sur} \quad S_{\xi_i}\,,\ i = 1,2,3 \tag{4.7}$$

Problématique

Avec ces définitions la résolution du problème d'équilibre thermoélastique linéarisée se ramène au schéma de la figure 7 qui signifie qu'une solution du problème est constituée d'un champ $\underline{\underline{\sigma}}$ de $\mathbb{S}(\underline{F}\,,\,S_{T_i}\,,\,T_i^{\mathrm{d}})$ et d'un champ $\underline{\xi}$ de $\mathbb{C}(S_{\xi_i}\,,\,\xi_i^{\mathrm{d}})$ associés par la loi de comportement thermoélastique linéarisée (4.2)[13].

La suite de ce chapitre, et le chapitre X, seront consacrés à exploiter de diverses manières le schéma de la figure 7.

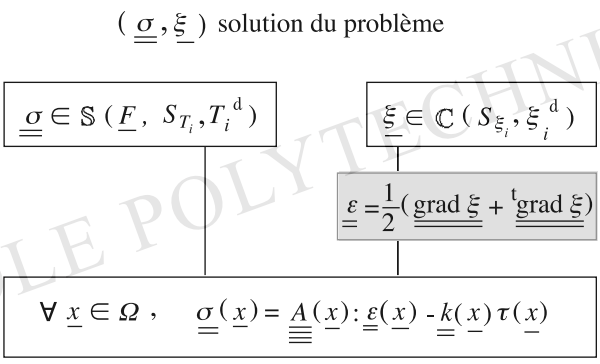


Figure 7 – Problématique de l'équilibre thermoélastique

Régularité des champs statiquement ou cinématiquement admissibles

Les équations (4.1) à (4.5) supposent, pour les champs $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\xi}$, les conditions de régularité suivantes.

Le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ est ***continu et continûment différentiable, par morceaux*** sur Ω.

Le champ de déplacement $\underline{\xi}$ doit être ***continu*** sur Ω : en effet, une discontinuité de $\underline{\xi}$ au franchissement d'une surface $\Sigma_{\underline{\xi}}$ induirait, par la loi de comportement (4.2, 4.3), une singularité pour le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ (singularité en δ_{Σ_ξ} de Dirac). Il doit aussi être ***continûment différentiable par morceaux***.

[13] Dans l'hypothèse des petites perturbations le schéma de la figure 7 demeure valable pour représenter l'équilibre avec d'autres lois de comportement (élasto-plastique, viscoélastique, ...) qui sont alors substituées à la loi thermoélastique dans le cadre inférieur. L'existence d'une solution suppose toujours que $\mathbb{S}(F\,,\,S_{T_i}\,,\,T_i^{\mathrm{d}})$ soit non vide, (cf. supra) et que $\mathbb{C}(S_{\xi_i}\,,\,\xi_i^{\mathrm{d}})$ soit compatible avec la loi de comportement du matériau, c'est-à-dire que les données en déplacements doivent être compatibles avec les éventuelles liaisons internes du matériau (condition indiquée au paragraphe 1.2).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Il est intéressant d'examiner de façon plus précise comment se présente alors le problème de l'équilibre thermoélastique et en particulier quelles sont les discontinuités possibles pour une solution.

On considère d'abord un système constitué d'un matériau dont les propriétés thermoélastiques, caractérisées par $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ et $\underline{\underline{k}}$, sont des fonctions continues des variables spatiales : matériau à hétérogénéité faible (cas particulier : matériau homogène). Dans ce cas, au franchissement de $\Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}}$, la loi de comportement fournit l'équation aux discontinuités :

$$[\![\underline{\underline{\sigma}}]\!] = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : [\![\underline{\underline{\varepsilon}}]\!] - \underline{\underline{k}}[\![\tau]\!] \quad \text{sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}} \,. \tag{4.8}$$

Par ailleurs la continuité de $\underline{\xi}$ impose la continuité de ses dérivées tangentielles sur $\Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}}$ (relation de compatibilité de Hadamard, chapitre III, § 4.4) :

$$\forall\, \underline{t} \text{ tangent à } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}} \quad , \quad [\![\underline{\underline{\text{grad}}}\, \underline{\xi}]\!] \,.\, \underline{t} = 0 \quad \text{d'où} \quad [\![\underline{\underline{\text{grad}}}\, \underline{\xi}]\!] = [\![\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial n}]\!] \otimes \underline{n}$$

et

$$[\![\underline{\underline{\varepsilon}}]\!] = ([\![\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial n}]\!] \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes [\![\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial n}]\!])/2 \,, \tag{4.9}$$

où $\dfrac{\partial \underline{\xi}}{\partial n}$ désigne la dérivée normale de $\underline{\xi}$ c'est-à-dire la dérivée de $\underline{\xi}$ selon la normale $\underline{n}$ à $\Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}}$:

$$\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial n} = \mathrm{D}_{\underline{n}} \underline{\xi} = (\underline{\underline{\text{grad}}}\, \underline{\xi}) \,.\, \underline{n} \,.$$

En regroupant alors les équations (4.1b), (4.8) et (4.9) il vient :

$$[\![\underline{\underline{\sigma}}]\!] \,.\, \underline{n} = ([\![\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial n}]\!] \otimes \underline{n}) : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \,.\, \underline{n} - [\![\tau]\!] \underline{\underline{k}} \,.\, \underline{n} = 0 \,.$$

Si l'on suppose le champ τ continu (pas de « choc thermique », cf. § 4.3) cette équation se réduit à :

$$([\![\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial n}]\!] \otimes \underline{n}) : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \,.\, \underline{n} = 0$$

qui implique : $([\![\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial n}]\!] \otimes \underline{n}) : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : (\underline{n} \otimes [\![\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial n}]\!]) = 0$. La forme quadratique correspondante étant définie positive, il en résulte que :

$$[\![\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial n}]\!] = 0 \quad \text{d'où} \quad [\![\underline{\underline{\varepsilon}}]\!] = 0 \quad \text{et} \quad [\![\underline{\underline{\sigma}}]\!] = 0 \,, \quad \text{sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}} \,. \tag{4.10}$$

Il est ainsi démontré que, pour un système constitué d'un matériau à hétérogénéité faible (en particulier : homogène), en l'absence de choc thermique et de densité surfacique de force extérieure à l'intérieur de Ω, toute solution du problème d'équilibre thermoélastique est nécessairement constituée d'un champ de déplacement $\underline{\xi}$ ***continu et continûment différentiable*** sur Ω et d'un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ ***continu*** sur Ω et continûment différentiable par morceaux.

Selon l'usage, les méthodes de résolution du problème d'équilibre thermoélastique seront exposées dans les sections 5 et 6 en se plaçant dans les hypothèses précédentes et en supposant donc, a priori, que la solution possède les propriétés de régularité

$$\begin{cases} \underline{\xi} & \text{continu et continûment différentiable sur } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} & \text{continu sur } \Omega \text{ et continûment différentiable par morceaux} \,. \end{cases} \tag{4.11}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Il est nécessaire, pour que la solution du problème existe dans ce cadre, que les données qui définissent les sollicitations du système satisfassent les conditions de régularité correspondantes.

Les deux méthodes présentées dans les sections 5 et 6 sont valables avec les conditions de régularité générales permises pour les champs $\underline{\xi}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$. Il convient, lorsque cela est nécessaire, de compléter les schémas de résolution correspondants en y insérant les équations relatives aux discontinuités comme on l'indiquera le moment venu.

4.3 Problème d'équilibre thermoélastique linéarisé et problème isotherme associé

On suppose que le matériau constitutif du système est à hétérogénéité faible, que le champ d'écart de température τ est continu et différentiable sur Ω (pas de choc thermique) : les champs $\underline{\xi}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ solutions satisfont donc les conditions de régularité (4.11).

En transformant les équations (4.1) à (4.5) où le champ d'écart de température τ est donné, on démontre le résultat suivant.

La résolution de tout problème d'équilibre thermoélastique linéarisé se ramène à celle d'un problème auxiliaire d'équilibre élastique linéarisé isotherme.

Il suffit en effet de poser :

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{k}}\,\tau \qquad \text{sur } \Omega \tag{4.12}$$

$$\rho\underline{F}' = \rho\,\underline{F} - \operatorname{div}(\underline{\underline{k}}\,\tau) \qquad \text{sur } \Omega \tag{4.13}$$

$$T_i'^{\mathrm{d}} = T_i^{\mathrm{d}} + k_{ij}n_j\tau \qquad \text{sur } S_{T_i}\ , \tag{4.14}$$

pour transformer le système des équations (4.1) à (4.5) en le système équivalent :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}}' + \rho\,\underline{F}' = 0 & \text{sur } \Omega \\ [\![\,\underline{\underline{\sigma}}'\,]\!]\,.\,\underline{n} = 0 & \text{sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}} \end{cases} \tag{4.15}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{4.16}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{\operatorname{grad}\,\xi}} + {}^{\mathrm{t}}\,\underline{\underline{\operatorname{grad}\,\xi}})/2 \tag{4.17}$$

$$\sigma'_{ij}n_j = T_i'^{\mathrm{d}} \qquad \text{sur } S_{T_i} \tag{4.18}$$

$$\xi_i = \xi_i^{\mathrm{d}} \qquad \text{sur } S_{\xi_i} \tag{4.19}$$

$$S_{T_i} \cup S_{\xi_i} = \partial\Omega\ ,\ S_{T_i} \cap S_{\xi_i} = \varnothing\ ,\ i = 1,2,3\ .$$

Il apparaît ainsi que les champs $\underline{\underline{\sigma}}'$ et $\underline{\xi}$ sont solutions du problème auxiliaire d'équilibre élastique linéarisé ***isotherme*** défini sur le même système par les données $\underline{F}'$ dans Ω, $T_i'^{\mathrm{d}}$ sur S_{T_i} et ξ_i^{d} sur S_{ξ_i}.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En particulier, si le système est constitué d'un matériau homogène et isotrope, on a $\underline{\underline{k}} = k\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$ (k constant sur Ω) et les équations (4.13) et (4.14) s'écrivent :

$$\rho \underline{F}' = \rho\,\underline{F} - k\,\underline{\operatorname{grad}}\,\tau \quad \text{sur } \Omega \tag{4.20}$$

$$T_i'^{\mathrm{d}} = T_i^{\mathrm{d}} + k\,\tau\,n_i \quad \text{sur } S_{T_i} \tag{4.21}$$

(14) .

On peut aussi prendre en compte des discontinuités de $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ et $\underline{\underline{k}}$ (matériau à hétérogénéité forte), τ et $\underline{\underline{\sigma}}$, le champ $\underline{\xi}$ étant continu (par les arguments exposés au paragraphe précédent).

Le problème isotherme auxiliaire concerne encore le champ $\underline{\xi}$ et le champ $\underline{\underline{\sigma}}'$ défini à partir de $\underline{\underline{\sigma}}$ par (4.12). Les données de ce problème demeurent ξ_i^{d}, $\underline{F}'$ et $T_i'^{\mathrm{d}}$ définies par (4.13) et (4.14), auxquelles il faut adjoindre, sur les surfaces Σ de discontinuité de $\underline{\underline{k}}$ ou de τ, la densité surfacique de forces

$$\underline{F}'_{\Sigma} = -[\![\,\underline{\underline{k}}\,\tau\,]\!]\,.\,\underline{n}\,. \tag{4.22}$$

Ainsi les champs $\underline{\xi}$ et $\underline{\underline{\sigma}}'$ du problème auxiliaire d'équilibre élastique isotherme doivent satisfaire, en plus des équations (4.15 à 4.19), l'équation de saut (choc thermique) au franchissement de Σ (cf. chapitre V, § 3.9) :

$$[\![\,\underline{\underline{\sigma}}'\,]\!]\,.\,\underline{n} = [\![\,\underline{\underline{k}}\,\tau\,]\!]\,.\,\underline{n} \tag{4.23}$$

(15)

La discontinuité de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ correspondant à $[\![\,\underline{\underline{\sigma}}'\,]\!]$ par la loi de comportement $[\![\,\underline{\underline{\sigma}}'\,]\!] = [\![\,\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\,]\!]$ a la forme (4.9) imposée par la continuité de $\underline{\xi}$.

Le théorème d'équivalence ainsi établi fournit une méthode élégante pour traiter les problèmes avec effets thermiques. Il présente essentiellement un intérêt théorique : il permet, sans perte de généralité, de restreindre les exposés au seul cas du problème d'équilibre élastique isotherme à partir de l'état initial naturel.

Dans la pratique, afin d'obtenir la séparation des effets mécaniques et thermiques de façon évidente, on préférera le plus souvent résoudre directement le problème d'équilibre thermoélastique, par exemple en utilisant le ***principe de superposition*** qui fournit la solution du problème par l'addition des solutions

- du ***problème isotherme*** dont les sollicitations sont :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \underline{F}^1 & = & \underline{F} & \text{sur } \Omega\,, \\ (T_i^{\mathrm{d}})^1 & = & T_i^{\mathrm{d}} & \text{sur } S_{T_i} \\ \tau^1 & = & 0 & \text{sur } \Omega\,, \end{array}\right. \quad , \quad (\xi_i^{\mathrm{d}})^1 = \xi_i^{\mathrm{d}} \text{ sur } S_{\xi_i}\,, \tag{4.24}$$

(14) On remarque sur ces équations que, pour un système constitué d'un matériau homogène et isotrope, un champ τ homogène n'introduit, dans le problème auxiliaire, que des forces surfaciques normales au contour du système. L'application de l'une ou l'autre des méthodes de résolution présentées dans la suite montre alors que, si les conditions aux limites sur les déplacements le permettent, le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ à l'équilibre thermoélastique du système est indépendant de l'amplitude du champ τ, dans le respect de l'hypothèse des petites perturbations (cf. Ex. II.9 et EX. II.10). En revanche, la non-homogénéité du champ τ introduit des forces volumiques dans le problème auxiliaire.

(15) Bien noter que, conformément au résultat établi au chapitre V (§ 3.9), le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ satisfait, au franchissement de Σ, la continuité du vecteur-contrainte : $[\![\,\underline{\underline{\sigma}}\,]\!]\,.\,\underline{n} = 0$ sur Σ.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

• et du ***problème purement thermique*** dont les données sont :

$$\text{(4.25)} \qquad \begin{cases} \underline{F}^2 & = 0 \quad \text{sur } \Omega\,, \\ (T_i^{\mathrm{d}})^2 & = 0 \quad \text{sur } S_{T_i} \quad , \quad (\xi_i^{\mathrm{d}})^2 = 0 \text{ sur } S_{\xi_i}\,, \\ \tau^2 & = \tau \quad \text{sur } \Omega\,. \end{cases}$$

4.4 Méthodes de résolution

On exposera dans les sections suivantes deux approches utilisées classiquement pour la résolution des problèmes d'équilibre thermoélastique.

L'une et l'autre consistent schématiquement à parcourir le diagramme de la figure 7 en partant soit de son extrémité « $\underline{\xi}$ », soit de son extrémité « $\underline{\underline{\sigma}}$ ». En effet il n'existe pas de méthode analytique systématique et entièrement déductive qui permette, à partir des données et des équations du problème, d'en construire la solution.

Toutes les approches présentées font appel à l'intuition, ou à l'expérience acquise, et les méthodes ont pour objet essentiel d'ordonner l'utilisation des équations du problème pour leur exploitation rationnelle et le bon enchaînement des raisonnements.

On sera ainsi amené à faire des ***hypothèses*** a priori sur la forme des champs solutions du problème de façon à orienter la procédure de résolution pour la rendre praticable. Ces hypothèses seront ***justifiées*** a posteriori par les résultats d'unicité énoncés au paragraphe 3.1, dès qu'elles permettront effectivement de construire la solution du problème.

De nombreuses solutions explicites sont ainsi disponibles. Beaucoup concernent les « problèmes plans », problèmes de déformation plane ou de contrainte plane, à propos desquels quelques indications sont données dans l'annexe III ; l'emploi des fonctions de variables complexes permet, dans ce cas, des méthodes de résolution analytique raffinées. Les solutions concernant des problèmes réellement tridimensionnels, c'est-à-dire sans fortes symétries, sont assez rares, tout comme celles relatives à des systèmes constitués de matériaux anisotropes ou non homogènes.

Ces solutions analytiques, dont l'intérêt demeure très grand comme en témoigne leur utilité actuelle en mécanique de la rupture, ne suffisent évidemment pas à satisfaire les besoins de la pratique : anisotropie des matériaux composites, géométrie sans particularité, ...

Les ***méthodes de résolution variationnelles*** qui seront introduites au chapitre X, ont acquis une très grande importance avec le développement des ordinateurs. Les mécaniciens sont à l'origine de la ***méthode des éléments finis*** pour des calculs de structures élastiques. Cette méthode, qui a connu développements, perfectionnements, raffinements, aussi bien en mécanique des solides pour la prise en compte d'autres modèles de comportement et pour le traitement de problèmes de plus en plus vastes, qu'en mécanique des fluides, et d'une manière générale dans la résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles, est maintenant un outil constant des ingénieurs et des chercheurs. On doit aussi signaler le développement d'autres mé-

thodes de résolution numérique des problèmes d'élasticité fondées sur la théorie des équations intégrales.

Dans le chapitre IX on traitera quelques problèmes classiques d'équilibre élastique linéarisés résolubles analytiquement, qui sont intéressants à plusieurs titres :

- ils font partie du « bagage élastique » de l'ingénieur, et lui permettent de réagir en temps réel sur des questions simples ;
- certains d'entre eux (traction, torsion, flexion d'une barre), sont des prérequis en calcul des structures notamment dans la théorie simplifiée de la « Résistance des Matériaux » (chapitre XII), à laquelle ils fournissent les lois de comportement thermoélastiques en variables généralisées qui lui sont nécessaires ;
- enfin, les problèmes classiques dont la solution analytique explicite est connue, sont des problèmes types pour effectuer des essais de calcul au moyen des grands logiciels de calcul numérique, et en contrôler la validité.

5 Méthode des déplacements

5.1 Principe de la méthode

On se réfère aux équations (4.1a) et (4.2) à (4.5) pour le matériau constitutif à ***hétérogénéité faible*** en rappelant que l'état initial du système est supposé naturel.

L'idée directrice de la méthode des déplacements consiste à aborder le schéma donné sur la figure 7 en prenant le champ de déplacement $\underline{\xi}$ comme inconnue principale : on recherche un champ $\underline{\xi}$ solution du problème parmi les champs cinématiquement admissibles avec les données ξ_i^{d} sur S_{ξ_i}, en exprimant que le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ qui lui est associé par la loi de comportement thermoélastique est statiquement admissible avec les données $\underline{F}$ dans Ω et T_i^{d} sur S_{T_i}. D'où le schéma de résolution de la figure 8.

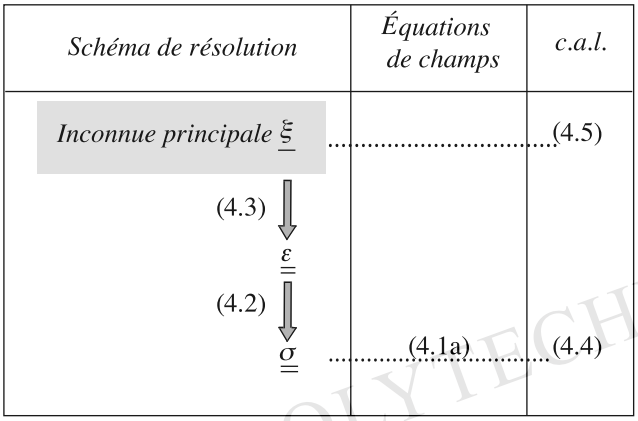


Figure 8 – Schéma de résolution par la méthode des déplacements

Cette méthode est adoptée lorsque la forme de toutes les données du problème, géométriques et mécaniques, y compris celles concernant le comportement du matériau

constitutif, permet d'avoir une forte intuition quant à la forme du champ $\underline{\xi}$ solution du problème : par exemple, par des considérations de symétries[16]. Comme on l'a dit, les hypothèses ainsi faites a priori, à partir de considérations intuitives, sont justifiées a posteriori par le théorème d'unicité (§ 3.1).

5.2 Équilibre isotherme, matériau homogène isotrope : équation de Navier

Lorsque le système considéré est constitué d'un matériau homogène isotrope, et que l'équilibre est isotherme, l'équation (4.2) se réduit à :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\,(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} \tag{5.1}$$

où λ et μ sont des constantes dans le volume Ω du système.

Équation de Navier

Il est alors commode de modifier le schéma de la figure 8 en substituant, dans l'équation d'équilibre (4.1), $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de $\underline{\xi}$ à travers (4.3) et (5.1). On obtient ainsi ***l'équation de Navier***[17]

$$(\lambda + \mu)\,\underline{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\underline{\xi}) + \mu\,\mathrm{div}\,(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\xi}) + \rho\,\underline{F} = 0\,. \tag{5.2}$$

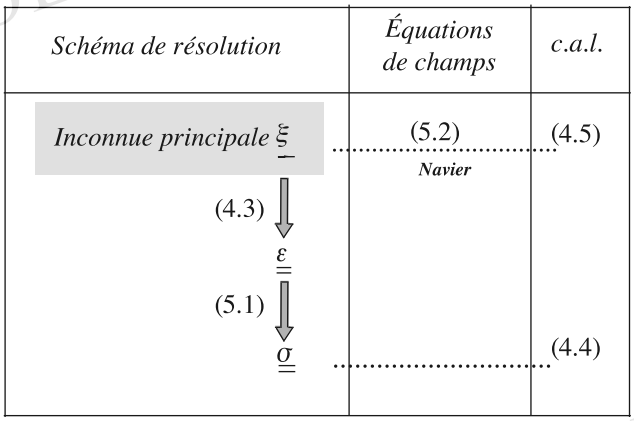


Figure 9 – Méthode des déplacements pour le matériau homogène isotrope : équation de Navier

[16] Bien noter que la symétrie du problème requiert plus que la symétrie de la géométrie et des sollicitations.

[17] On établit sans difficulté les identités :
$\mathrm{div}\,\big((\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}\big) = \underline{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\underline{\xi})$, $\mathrm{div}\,(k\,\tau\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}) = k\,\underline{\mathrm{grad}}\,\tau$
$\mathrm{div}\,({}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\xi}) = \underline{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\underline{\xi})$, $\mathrm{div}\,\big(\mathrm{div}\,(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\xi})\big) = \Delta\,(\mathrm{div}\,\underline{\xi})$,
$\mathrm{rot}\,\big(\mathrm{div}\,(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\xi})\big) = \mathrm{div}\,\big(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,(\mathrm{rot}\,\underline{\xi})\big)$.

Le schéma de résolution est alors modifié comme indiqué sur la figure 9 où l'équation de champ (5.2) porte maintenant sur $\underline{\xi}$.

L'équation de Navier (5.2) représente trois équations scalaires aux dérivées partielles du deuxième ordre portant sur les composantes de $\underline{\xi}$ qui s'écrivent, en coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$(\lambda+\mu)\,\frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_i\,\partial x_j}+\mu\,\Delta\xi_i+\rho\,F_i=0\;,\qquad i=1,2,3\;. \tag{5.3}$$

Ceci explique pour (5.2) l'écriture souvent utilisée :

$$(\lambda+\mu)\,\underline{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\;\underline{\xi})+\mu\,\Delta\underline{\xi}+\rho\,\underline{F}=0$$

où $\Delta\underline{\xi}$ est défini par $\Delta\underline{\xi}=\mathrm{div}\,(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\;\underline{\xi})$. On se reportera à l'annexe II pour les formules donnant les composantes de ce vecteur dans les systèmes de coordonnées classiques.

Équation de la dilatation

En prenant la divergence de l'équation de Navier (5.2) on obtient, puisque ρ est constant sur Ω (matériau homogène), l'équation dite « de la dilatation » (on rappelle que $\mathrm{div}\;\underline{\xi}=(\mathrm{d}\Omega_t-\mathrm{d}\Omega_0)/\mathrm{d}\Omega_0$) :

$$(\lambda+2\mu)\,\Delta\,(\mathrm{div}\;\underline{\xi})+\rho\;\mathrm{div}\;\underline{F}=0\;. \tag{5.4}$$

Cette équation, conséquence de l'équation de Navier, montre que si le champ de forces de masse est à divergence nulle (en particulier s'il est constant), la dilatation $\mathrm{div}\;\underline{\xi}$ est une fonction harmonique.

Équation de la rotation

De même, en prenant le rotationnel de (5.2), on obtient l'équation :

$$\mu\;\mathrm{div}\;\big(\,\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\;(\underline{\mathrm{rot}}\;\underline{\xi})\,\big)+\rho\,\underline{\mathrm{rot}}\;\underline{F}=0 \tag{5.5}$$

appelée équation « de la rotation ». Elle montre que lorsque les forces de masse dérivent d'un potentiel on a :

$$\mathrm{div}\;\big(\,\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\;(\underline{\mathrm{rot}}\,\underline{\xi})\,\big)=0$$

que l'on écrit également

$$\Delta\,(\underline{\mathrm{rot}}\;\underline{\xi})=0\;.$$

Fonction de déplacement ; champ de déplacement irrotationnel.

L'équation de la rotation (5.5) montre aussi qu'un champ de déplacement irrotationnel $\underline{\xi}$, c'est-à-dire tel que $\mathrm{rot}\;\underline{\xi}=0$, ne peut être solution d'un problème d'équilibre élastique isotherme, pour le matériau isotrope, homogène, que si les forces de masse dérivent d'un potentiel :

$$\underline{F}=-\underline{\mathrm{grad}}\;\mathcal{V}\;; \tag{5.6}$$

dans ce cas l'équation de Navier s'intègre en :

$$(\lambda+2\,\mu)\;\mathrm{div}\;\underline{\xi}=\rho\mathcal{V}+C\qquad(C:\ \text{constante arbitraire})\;. \tag{5.7}$$

Pour définir le champ $\underline{\xi}$ irrotationnel on utilise une ***fonction de déplacement*** $\varphi(\underline{x})$, telle que :

$$\underline{\xi}=\underline{\mathrm{grad}}\;\varphi\;. \tag{5.8}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On a alors :

$$\operatorname{div} \underline{\xi} = \Delta\varphi$$

et l'on voit que la fonction de déplacement φ doit satisfaire l'équation de la dilatation qui devient :

$$(\lambda + 2\,\mu)\,\Delta\varphi = \rho\,\mathcal{V} + C\,. \tag{5.9}$$

La faible latitude laissée par l'équation (5.9) dans la détermination de la fonction φ ne permet en général pas, sauf pour quelques problèmes simples, de satisfaire les conditions aux limites (4.4) et (4.5) : il s'ensuit que le champ de déplacement solution d'un problème d'équilibre élastique est rarement irrotationnel.

Équation de Navier lorsque l'équilibre n'est pas isotherme

On peut évidemment reprendre le raisonnement qui conduit à l'équation (5.2) lorsque le système, toujours constitué d'un matériau homogène isotrope, est dans un état d'équilibre thermoélastique où le champ d'écart de température τ n'est pas nul sur Ω. Au lieu de (5.1) la loi de comportement thermoélastique s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} - k\,\tau\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} \tag{5.10}$$

où λ, μ et k sont des constantes sur Ω, et l'équation de Navier devient :

$$(\lambda + \mu)\,\underline{\operatorname{grad}}\,(\operatorname{div} \underline{\xi}) + \mu\,\operatorname{div}\,(\underline{\underline{\operatorname{grad}\,\xi}}) + \rho\,\underline{F} - k\,\underline{\operatorname{grad}\,\tau} = 0 \tag{5.11}$$

où l'on remarque que τ n'intervient que par son gradient (cf. § 4.3). Le schéma de résolution s'obtient de façon évidente à partir de la figure 9 en y remplaçant (5.2) par (5.11) et (5.1) par (5.10).

5.3 Système avec hétérogénéité forte du matériau constitutif ou présence de choc thermique

La méthode des déplacements s'applique aussi dans le cas d'un système avec hétérogénéités fortes de son matériau constitutif (par exemple : système constitué de ***plusieurs matériaux homogènes solidaires à leurs interfaces*** de contact) ou présence de choc thermique. Il convient alors de se référer aux équations des paragraphes 4.2 et 4.3.

Plus précisément, le champ $\underline{\xi}$ ***est continu*** (cf. § 4.2) mais son gradient peut être discontinu (il respecte alors la condition de compatibilité d'Hadamard) ; en conséquence, $[\![\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,]\!]$ est de la forme (4.9) :

$$[\![\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,]\!] = ([\![\,\frac{\partial \xi}{\partial n}\,]\!] \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes [\![\,\frac{\partial \xi}{\partial n}\,]\!])/2\,.$$

La loi de comportement thermoélastique fournit la relation entre les sauts de $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\sigma}}$, τ et les sauts des caractéristiques thermoélastiques du matériau, $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ et $\underline{\underline{k}}$:

$$[\![\,\underline{\underline{\sigma}}\,]\!] = [\![\,\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\,]\!] - [\![\,\underline{\underline{k}}\,\tau\,]\!]\,. \tag{5.12}$$

La seule modification à apporter au schéma de résolution de la figure 8 consiste à adjoindre à l'équation de champ (4.1a) son « équation de saut » (4.1b) :

$$[\![\,\underline{\underline{\sigma}}\,]\!] \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma\,.$$

On remarque que si le problème étudié est le problème isotherme auxiliaire associé à un problème avec choc thermique (cf. § 4.3), l'équation (5.12) pour le champ $\underline{\underline{\sigma}}'$ concerné et pour $\underline{\xi}$ se réduit à

$$[\![\,\underline{\underline{\sigma}}'\,]\!] = [\![\,\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\,]\!]\,, \tag{5.13}$$

tandis que l'équation (4.1b) est remplacée par (4.23)

$$[\![\,\underline{\underline{\sigma}}'\,]\!] \cdot \underline{n} = [\![\,\underline{\underline{k}}\,\tau\,]\!] \cdot \underline{n}\,(= [\![\,k\,\tau\,]\!]\,\underline{n} \text{ pour le matériau isotrope})\,.$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

6 Méthode des contraintes

6.1 Principe de la méthode

On se réfère encore aux équations (4.1a) et (4.2) à (4.5) pour le matériau constitutif à hétérogénéité faible en rappelant que l'état initial du système est supposé naturel.

L'idée directrice de la méthode des contraintes, abordant le schéma de la figure 7 par l'extrémité « $\underline{\underline{\sigma}}$ », consiste à prendre le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ comme inconnue principale : on recherche le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ solution du problème parmi les champs statiquement admissibles avec les données $\underline{F}$ dans Ω et T_i^{d} sur S_{T_i} en exprimant qu'un champ $\underline{\xi}$ qui lui est associé par la loi de comportement thermoélastique est cinématiquement admissible avec les données ξ_i^{d} sur S_{ξ_i}.

Ceci conduit au schéma de résolution représenté sur la figure 10 dans lequel $(4.2)^{-1}$ symbolise l'inversion de la loi de comportement (4.2) pour exprimer $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en fonction de $\underline{\underline{\sigma}}$ et τ, et $\int$ (4.3) symbolise l'intégration du champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ pour obtenir un champ de déplacement $\underline{\xi}$ dont il dérive par (4.3).

On a vu au chapitre II (section 6) que l'intégrabilité d'un champ de déformation linéarisée n'est possible que si celui-ci satisfait ***les conditions de compatibilité géométrique*** qui s'écrivent, en coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$\underline{\underline{\underline{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{d}}\,(\underline{\underline{\underline{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{g}}\,\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}) = 0 \tag{6.1}$$

et représentent six équations aux dérivées partielles du deuxième ordre pour les six champs scalaires des coefficients de $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}$ symétrique. Le système de ces six équations est redondant : il est automatiquement satisfait dès que trois des équations sont posées comme équations de champ et trois comme conditions au contour.

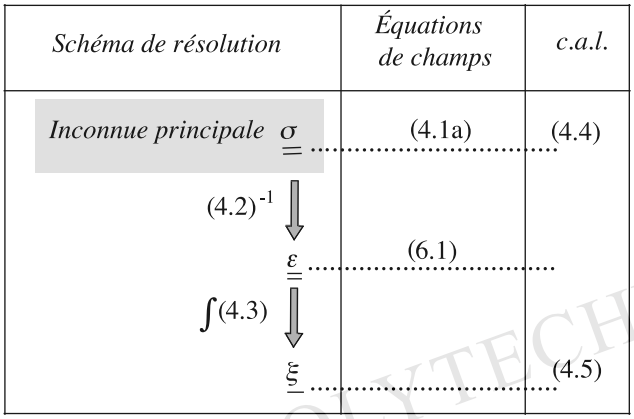


Figure 10 – Méthode des contraintes : schéma de résolution

Le schéma de résolution complet par la méthode des contraintes doit faire apparaître explicitement la nécessité pour le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ déduit de $\underline{\underline{\sigma}}$ par $(4.2)^{-1}$ de satisfaire

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

les conditions de compatibilité (6.1). (Ces équations sont placées, sur le schéma, dans la colonne des équations de champs avec la redondance signalée ci-dessus).

La méthode des contraintes est utilisée lorsque la forme de toutes les données du problème paraît bien orienter l'intuition relativement à la forme de la solution en contrainte. Ici encore, le théorème d'unicité permet de justifier a posteriori les hypothèses faites.

On doit signaler que, comme on l'a dit au chapitre II (§ 6.3), dans le cas où le solide étudié n'est pas simplement connexe, les conditions de compatibilité géométrique (6.1) sont nécessaires mais non suffisantes pour assurer l'intégrabilité du champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans les schémas de la figure 10 : on doit en outre calculer les déplacements et leur imposer des ***conditions de fermeture***. La méthode des contraintes peut alors perdre beaucoup de son intérêt. Les développements donnés au paragraphe suivant se placent dans l'hypothèse où le solide étudié est simplement connexe.

6.2 Équilibre isotherme, matériau homogène isotrope : équations de Beltrami

Pour un système constitué d'un matériau homogène isotrope en équilibre isotherme, l'inversion $(4.2)^{-1}$ de la loi de comportement se réfère à (5.1) dont la formule inverse a été établie au chapitre VII et fait intervenir le module de Young et le coefficient de Poisson :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} \tag{6.2}$$

où E et ν sont des constantes sur Ω.

Suivant l'idée mise en œuvre dans la méthode des déplacements pour aboutir à l'équation de Navier, on peut substituer l'expression (6.2) de $\underline{\underline{\sigma}}$ dans les équations (6.1) ; on obtient ainsi les six équations :

$$(1+\nu)\,\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{d}}\,(\,\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{g}}\,\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}\,) - \nu\,\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{d}}\,(\,\underline{\underline{\tilde{\mathrm{rot}}}}^{\mathrm{g}}\,(\,\underline{\underline{\tilde{\mathbb{1}}}}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}})\,)\,) = 0\ . \tag{6.3}$$

Celles-ci sont donc équivalentes à (6.1) pour le solide homogène dont le matériau constitutif obéit à la loi de comportement (6.2). Il est toutefois essentiel de retenir que, alors que les conditions (6.1) sont purement géométriques et ne dépendent en rien de la loi de comportement du matériau, les conditions (6.3) comme les équations de Beltrami dans la suite, sont ***essentiellement liées au comportement élastique linéaire isotrope du matériau supposé homogène***.

On peut alors modifier le schéma de résolution de la figure 10, comme indiqué sur la figure 11, en ramenant les conditions d'intégrabilité du champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ au niveau du champ $\underline{\underline{\sigma}}$ dont il est issu par la loi de comportement. Le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ doit alors satisfaire les équations de champs (4.1a) et (6.3), soit six équations scalaires et non neuf, compte tenu de la redondance de (6.3).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Équations de Beltrami

Dans la pratique on n'utilise pas les équations (4.1a) et (6.3) mais un système de six équations scalaires obtenues par combinaison des équations (6.3) et des équations de l'équilibre (4.1a).

Ces équations s'établissent en remarquant que (6.1) est équivalente à :

$$\underline{\underline{\text{grad}}}(\text{div}\ \underline{\underline{\varepsilon}}) + {}^{\text{t}}\,\underline{\underline{\text{grad}}}\,(\text{div}\ \underline{\underline{\varepsilon}}) - \underline{\underline{\text{div}}}\,(\text{grad}\ \underline{\underline{\varepsilon}}) - \underline{\underline{\text{grad}}}\,(\ \text{grad}\,(\text{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}})\ ) = 0\ , \tag{6.4}$$

dont on déduit pour (6.3) :

$$(1+\nu)(\ \underline{\underline{\text{grad}}}(\text{div}\ \underline{\underline{\sigma}}) + {}^{\text{t}}\,\underline{\underline{\text{grad}}}(\text{div}\ \underline{\underline{\sigma}}) - \underline{\underline{\text{div}}}(\text{grad}\ \underline{\underline{\sigma}})\ ) - \underline{\underline{\text{grad}}}\,(\ \text{grad}\,(\text{tr}\ \underline{\underline{\sigma}})\ ) + \nu\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}\,\Delta(\text{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}) = 0\ . \tag{6.5}$$

En tenant compte de l'équation d'équilibre (4.1a), qui implique $\text{div}\ \underline{\underline{\sigma}} = -\rho\,\underline{F}$, il vient :

$$(1+\nu)\,\underline{\underline{\text{div}}}(\text{grad}\ \underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{\text{grad}}}\,(\ \text{grad}\,(\text{tr}\ \underline{\underline{\sigma}})\ ) - \nu\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}\,\Delta(\text{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}) + (1+\nu)\rho(\underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{F} + {}^{\text{t}}\,\underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{F}) = 0 \tag{6.6}$$

dont on déduit, en prenant la trace de cette équation tensorielle :

$$\frac{1-\nu}{1+\nu}\,\Delta\,(\text{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}) = -\rho\ \text{div}\ \underline{F}\ . \tag{6.7}$$

En reportant (6.7) dans (6.6) on obtient l'équation simplifiée :

$$\underline{\underline{\text{div}}}\,(\text{grad}\ \underline{\underline{\sigma}}) + \frac{1}{1+\nu}\,\underline{\underline{\text{grad}}}\,(\ \text{grad}(\text{tr}\ \underline{\underline{\sigma}})\ ) + \frac{\nu}{1-\nu}\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}\,\rho\ \text{div}\ \underline{F} + \rho\,(\underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{F} + {}^{\text{t}}\,\underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{F}) = 0 \tag{6.8}$$

qui représente six équations scalaires aux dérivées partielles du deuxième ordre pour les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ (équations de Michell).

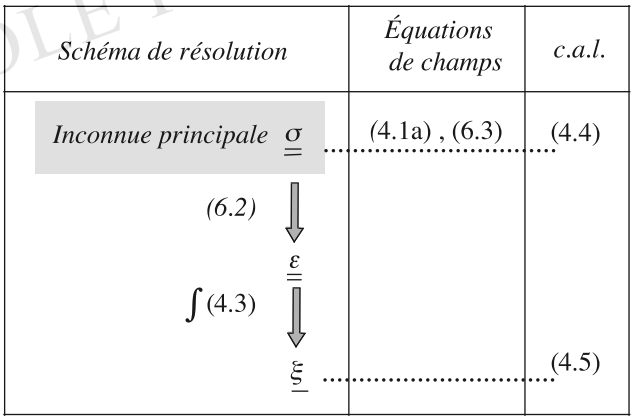


Figure 11 – Méthode des contraintes pour le matériau homogène isotrope

Dans le cas d'un champ de forces de masse uniforme ($\underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{F} = 0$), l'équation (6.8) se réduit à la forme classique :

$$(1+\nu)\,\underline{\underline{\text{div}}}\,(\text{grad}\ \underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{\text{grad}}}\,(\ \text{grad}(\text{tr}\ \underline{\underline{\sigma}})\ ) = 0 \tag{6.9}$$

soit, en composantes, en coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$(1+\nu)\,\Delta\,\sigma_{ij} + \frac{\partial^2(\text{tr}\ \underline{\underline{\sigma}})}{\partial x_i\,\partial x_j} = 0 \qquad i,j = 1,2,3\ . \tag{6.10}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Les six équations aux dérivées partielles du deuxième ordre (6.10) sont les ***équations de Beltrami*** [18] .

Les équations de Beltrami (6.10), ou les équations (6.8), conséquence de (4.1a) et (6.3) sont ***nécessairement*** satisfaites par le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ dans le schéma de résolution de la figure 11.

Réciproquement, supposons qu'un champ $\underline{\underline{\sigma}}$ vérifie (6.8) et (4.1a), alors la compatibilité géométrique du champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ qui lui est associé par (6.2) est assurée.

Plus précisément, supposons que $\underline{\underline{\sigma}}$ vérifie (6.8). Il en résulte que $\underline{\underline{\sigma}}$ vérifie (6.7) car il suffit de prendre la trace de (6.8) pour obtenir (6.7) au facteur $(2+\nu)$ multiplicatif près.
En prenant la divergence de (6.8), il vient :

$$(1+\nu)\ \mathrm{div}\ \big(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,(\mathrm{div}\ \underline{\underline{\sigma}} + \rho\,\underline{F})\big) + \underline{\mathrm{grad}}\,\big(\Delta\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}) + \rho\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\mathrm{div}\ \underline{F}\big) = 0$$

d'où, compte tenu de (6.7) :

$$\mathrm{div}\ \big(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,(\mathrm{div}\ \underline{\underline{\sigma}} + \rho\,\underline{F})\big) = 0\ . \tag{6.11}$$

Il est commode, pour interpréter cette formule, de se placer en coordonnées cartésiennes orthonormées où l'on voit que (6.11) signifie que les composantes du vecteur $(\mathrm{div}\ \underline{\underline{\sigma}} + \rho\,\underline{F})$ sont des fonctions harmoniques sur Ω. En conséquence, en supposant que $(\mathrm{div}\ \underline{\underline{\sigma}} + \rho\,\underline{F})$ est une fonction régulière des coordonnées, il suffit d'imposer la condition (4.1a), $\mathrm{div}\ \underline{\underline{\sigma}} + \rho\,\underline{F} = 0$, au contour, pour que le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ satisfaisant (6.8) soit en équilibre dans tout le solide.
Enfin, en portant (6.7) dans (6.8) (toutes deux vérifiées par $\underline{\underline{\sigma}}$), on remonte à (6.5), qui assure la compatibilité géométrique du champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ lié à $\underline{\underline{\sigma}}$ par la loi de comportement élastique (6.2).

En conclusion on voit que l'on aboutit au schéma de résolution réduit représenté sur la figure 12, pour la méthode des « équations de Beltrami » (ou de Michell).

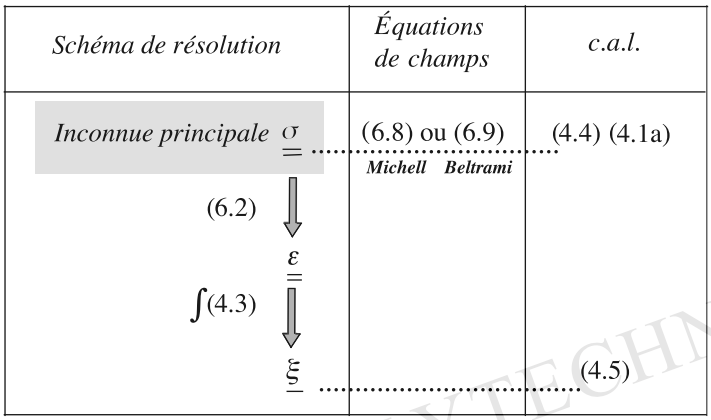


Figure 12 – Méthode des contraintes pour le matériau homogène isotrope : équations de Michell et de Beltrami

[18] E. Beltrami(1835-1900).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La discussion ci-dessus concernant les rôles des équations de Beltrami (ou de Michell) et des équations d'équilibre dans le schéma de résolution présente un intérêt théorique pour vérifier qu'il n'y a pas excès d'équations de champs à satisfaire par $\underline{\underline{\sigma}}$. Dans la mise en œuvre pratique de la méthode on s'attache à construire des champs $\underline{\underline{\sigma}}$ qui soient statiquement admissibles avec $\underline{F}$ dans Ω et T_i^{d} sur S_{T_i} et qui satisfassent de plus les équations de Beltrami (ou Michell) comme équations de champs.

Équations de Beltrami lorsque l'équilibre n'est pas isotherme

On peut reprendre le raisonnement qui mène aux équations de Michell et de Beltrami lorsque l'équilibre n'est pas isotherme. La loi de comportement s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \alpha\,\tau\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}\,. \tag{6.12}$$

Les premiers membres des équations (6.8) et (6.9) sont alors complétés par les termes additifs :

$$+k\,(1-2\,\nu)\,\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,(\mathrm{grad}\ \tau) + \underline{\underline{\mathbb{1}}}\,k\,(1+\nu)\frac{1-2\,\nu}{1-\nu}\Delta\tau \tag{6.13}$$

dont le second est nul en conséquence de (2.33).

Le schéma de résolution est obtenu à partir de la figure 12 en complétant (6.8) ou (6.9) par le premier terme de (6.13) et en remplaçant la loi de comportement (6.2) par (6.12).

6.3 Système avec hétérogénéité forte du matériau constitutif ou présence de choc thermique

La méthode des contraintes peut aussi être mise en œuvre dans le cas d'un système avec hétérogénéités fortes de son matériau constitutif (cf. § 5.3) ou présence de choc thermique.

Le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ peut être discontinu et on adjoint à l'équation (4.1a) son équation de saut (4.1b) :

$$[\![\,\underline{\underline{\sigma}}\,]\!]\,.\,\underline{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma\,.$$

La discontinuité $[\![\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,]\!]$ est déterminée, par la loi de comportement thermoélastique, formule inverse de (5.12), en fonction de $[\![\,\underline{\underline{\sigma}}\,]\!], [\![\,\underline{\tau}\,]\!], [\![\,\underline{\underline{\underline{A}}}\,]\!]$ et $[\![\,\underline{\underline{k}}\,]\!]$. Elle doit être ***cinématiquement admissible*** avec un champ $\underline{\xi}$ continu ce qui implique que $\underline{\underline{\varepsilon}}$ doit satisfaire, en plus des équations de compatibilité géométrique (6.1), la ***condition de compatibilité*** de Hadamard (cf. § 4.2) qui donne ici :

$$\forall \underline{t}_1, \underline{t}_2 \text{ tangents à } \Sigma \qquad \underline{t}_1\,.\,[\![\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,]\!]\,.\,\underline{t}_2 = 0\,. \tag{6.14}$$

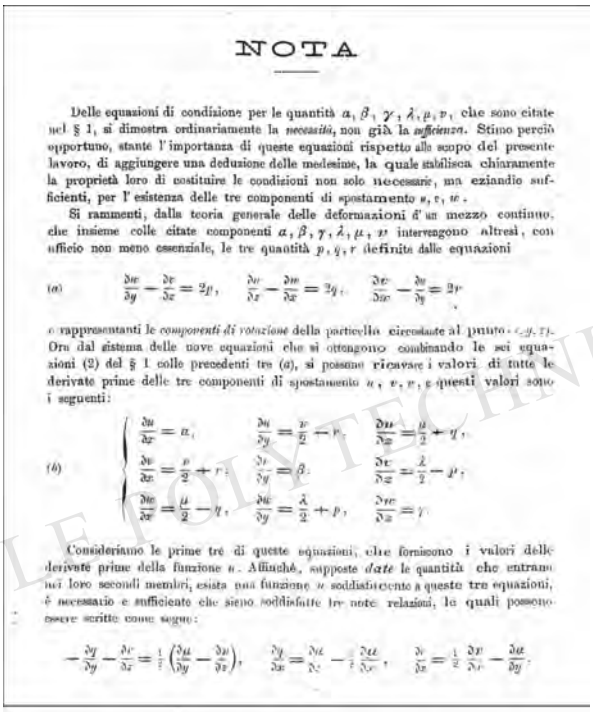
Le schéma de résolution de la figure 10 est ainsi modifié par l'adjonction des deux équations de champs (4.1b) et (6.14) pour $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ respectivement.

Lorsque le problème étudié est le problème isotherme auxiliaire associé à un problème avec choc thermique (cf. § 4.3 et 5.3), l'équation (4.1b) est modifiée en (4.23) comme au paragraphe 5.3 tandis que $[\![\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,]\!]$ s'obtient par (5.13).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

6.4 La compatibilité géométrique et les équations de Beltrami

L'étude de la compatibilité géométrique d'un champ de déformation a été introduite au chapitre II comme un problème inverse (§ 6.1). Pour donner une justification de cette étude, on a alors (6.4) anticipé sur l'analyse du présent chapitre en examinant le problème de la compatibilité d'un champ de déformation thermique et en évoquant les éventuelles contraintes thermiques engendrées par sa non-intégrabilité.



NOTA

Delle equazioni di condizione per le quantità $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$, che sono citate nel § 1, si dimostra ordinariamente la *necessità*, non già la *sufficienza*. Stimo perciò opportuno, stante l'importanza di queste equazioni rispetto allo scopo del presente lavoro, di aggiungere una deduzione delle medesime, la quale stabilisca chiaramente la proprietà loro di costituire le condizioni non solo necessarie, ma eziandio sufficienti, per l'esistenza delle tre componenti di spostamento u, v, w.

Si rammenti, dalla teoria generale delle deformazioni d'un mezzo continuo, che insieme colle citate componenti $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ intervengono altresì, con ufficio non meno essenziale, le tre quantità p, q, r definite dalle equazioni

$$(a) \qquad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2p, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2q, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2r$$

e rappresentanti le *componenti di rotazione* della particella circostante al punto (x, y, z). Ora dal sistema delle nove equazioni che si ottengono combinando le sei equazioni (2) del § 1 colle precedenti tre (a), si possono ricavare i valori di tutte le derivate prime delle tre componenti di spostamento u, v, w, e questi valori sono i seguenti:

$$(b) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha, & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\nu}{2} - r, & \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\mu}{2} + q, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\nu}{2} + r, & \frac{\partial v}{\partial y} = \beta, & \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\lambda}{2} - p, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\mu}{2} - q, & \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\lambda}{2} + p, & \frac{\partial w}{\partial z} = \gamma \end{cases}$$

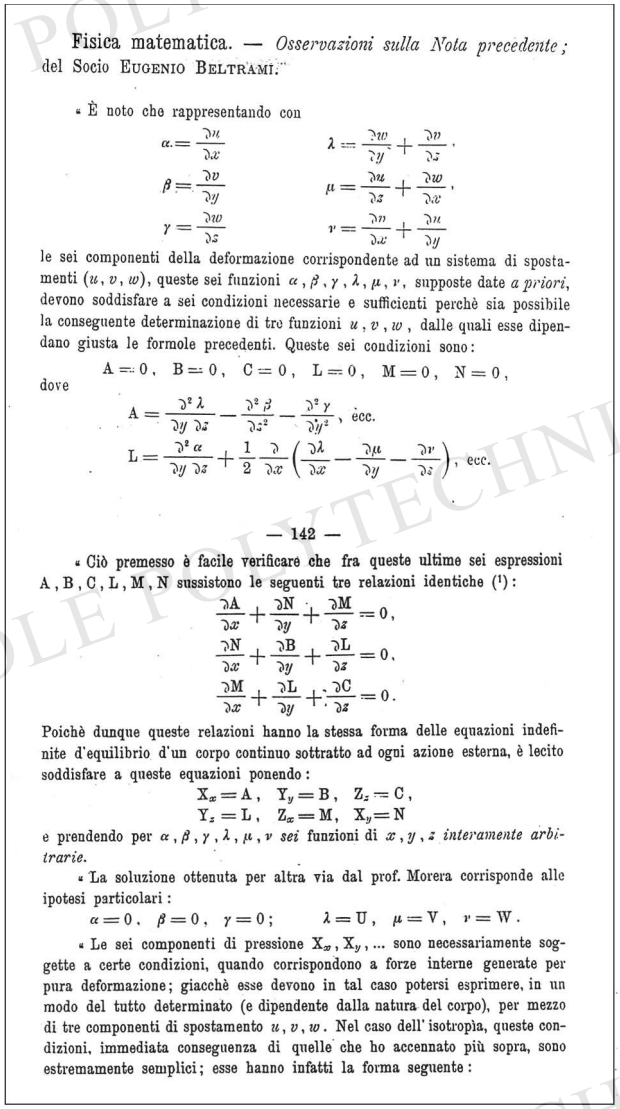
Consideriamo le prime tre di queste equazioni, che forniscono i valori delle derivate prime della funzione u. Affinchè, supposte *date* le quantità che entrano nei loro secondi membri, esista una funzione u soddisfacente a queste tre equazioni, è necessario e sufficiente che sieno soddisfatte tre note relazioni, le quali possono essere scritte come segue:

$$-\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z}\right), \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \epsilon}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial x}, \qquad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

*Figure 13 – Extrait de la note de Beltrami sur l'interprétation mécanique des équations de Maxwell (*Comptes rendus de la Reale Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, 1886).*

La présentation de la méthode des contraintes qui a été donnée au paragraphe 6.1 montre la pertinence pratique du problème mathématique posé alors. En particulier, avec le théorème d'unicité énoncé au paragraphe 3.1, elle apporte la démonstration des résultats annoncés concernant les déformations thermiques (Ex. II.9 et Ex. II.10). Ainsi que cela été annoncé au chapitre II, c'est à Beltrami qu'est due la démonstration du caractère suffisant des conditions de compatibilité du champ de déformation linéarisé établies par Saint Venant, dans un Mémoire (1886) sur l'interprétation mécanique des équations de Maxwell (Figure 13). Les équations de Beltrami, quant à elles, ont été publiées en 1892 dans une note aux *'Comptes rendus de la Reale Accademia dei Lincei* qui suivait immédiatement, en la commeentant, une note de Morera présentée elle-même par Beltrami (Figure 14).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE



Fisica matematica. — *Osservazioni sulla Nota precedente;* del Socio EUGENIO BELTRAMI.

« È noto che rappresentando con

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \lambda = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$
$$\beta = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \mu = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$
$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \nu = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

le sei componenti della deformazione corrispondente ad un sistema di spostamenti (u, v, w), queste sei funzioni $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$, supposte date *a priori*, devono soddisfare a sei condizioni necessarie e sufficienti perchè sia possibile la conseguente determinazione di tre funzioni u, v, w, dalle quali esse dipendano giusta le formole precedenti. Queste sei condizioni sono:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

dove

$$A = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2}, \text{ ecc.}$$

$$L = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y\, \partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z}\right), \text{ ecc.}$$

— 142 —

« Ciò premesso è facile verificare che fra queste ultime sei espressioni A, B, C, L, M, N sussistono le seguenti tre relazioni identiche (1):

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Poichè dunque queste relazioni hanno la stessa forma delle equazioni indefinite d'equilibrio d'un corpo continuo sottratto ad ogni azione esterna, è lecito soddisfare a queste equazioni ponendo:

$$X_x = A, \quad Y_y = B, \quad Z_z = C,$$
$$Y_z = L, \quad Z_x = M, \quad X_y = N$$

e prendendo per $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ *sei* funzioni di x, y, z *interamente arbitrarie.*

« La soluzione ottenuta per altra via dal prof. Morera corrisponde alle ipotesi particolari:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0; \qquad \lambda = U, \quad \mu = V, \quad \nu = W.$$

« Le sei componenti di pressione $X_x, X_y, \ldots$ sono necessariamente soggette a certe condizioni, quando corrispondono a forze interne generate per pura deformazione; giacchè esse devono in tal caso potersi esprimere, in un modo del tutto determinato (e dipendente dalla natura del corpo), per mezzo di tre componenti di spostamento u, v, w. Nel caso dell'isotropìa, queste condizioni, immediata conseguenza di quelle che ho accennato più sopra, sono estremamente semplici; esse hanno infatti la forma seguente:

Figure 14 – Extrait de la note de Beltrami la note de Morera dans Comptes rendus de la Reale Accademia dei Lincei, *(1886).*

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

7 Torsion d'une barre cylindrique

7.1 Position du problème

On se place dans les hypothèses générales de linéarisation exposées aux paragraphes 3.3 et 3.5.

$Oxyz$ désigne le système de coordonnées cartésiennes orthonormées dans lequel on étudie l'équilibre élastique ***isotherme*** d'une barre cylindrique de longueur ℓ parallèlement à Oz. On désigne par S la section droite courante de la barre. S_0 et S_ℓ sont les sections d'extrémités de cote $z = 0$ et $z = \ell$ (figure 15). La barre étudiée est supposée constituée d'un matériau élastique isotrope, homogène.

L'état initial du système, pris comme référence, est l'état naturel. Le chargement dans l'état d'équilibre étudié est défini par les données suivantes.

- Forces de masse nulles :

(7.1) $$\underline{F} = 0 \quad \text{sur } \Omega \, .$$

- Surface latérale libre de contrainte. Il s'agit d'une surface de type $S_{\underline{T}}$ (ou encore S_{T_i} avec $i = 1, 2, 3$)

(7.2) $$\underline{T} = \underline{T}^{\mathrm{d}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega - S_0 - S_\ell \, .$$

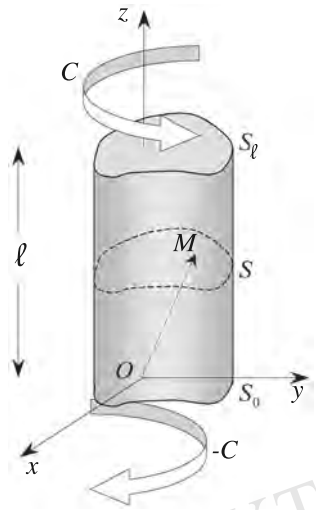


Figure 15 – Torsion d'une barre cylindrique

- Sur les sections d'extrémités S_0 et S_ℓ, les données demeurent provisoirement incomplètes par rapport à la forme donnée au paragraphe 2.3. Les sections d'extrémités sont des surfaces $S_{\underline{T}}$. Les distributions des T_i^{d} sur ces bases seront précisées

ultérieurement, mais il est imposé aux T_i^{d} de satisfaire la condition suivante : le torseur des forces surfaciques $\underline{T}^{\mathrm{d}}$ sur l'extrémité S_ℓ est $(O, \underline{0}, \mathcal{C}\underline{e}_z)$ c'est-à-dire de résultante nulle et équivalent à un moment $\mathcal{C}$ d'axe Oz ; le torseur des forces surfaciques $\underline{T}^{\mathrm{d}}$ sur S_0 est $(O, \underline{0}, -\mathcal{C}\underline{e}_z)$.

Il s'agit d'un problème où toutes les données portent sur les efforts (forces de masse, forces surfaciques) ; on doit donc vérifier que la condition (1.14) de compatibilité des données statiques (cf. aussi § 4.2) est satisfaite : ceci est réalisé car le torseur de tous les efforts extérieurs appliqués au solide est bien nul.

Le problème ainsi posé de façon incomplète correspond à la ***torsion*** de la barre considérée par des couples opposés, dirigés parallèlement à son axe, appliqués aux deux extrémités.

Le but de l'étude qui va être faite est de construire ***une*** solution d'équilibre élastique satisfaisant les conditions imposées plus haut. Elle correspondra à des formes particulières pour les distributions de $\underline{T}^{\mathrm{d}}$ sur les extrémités S_0 et S_ℓ, qui fixeront donc, ***a posteriori***, le problème posé. Ces distributions pourraient être imposées a priori mais cela apparaîtrait comme très artificiel[19].

7.2 Résolution du problème : méthode des déplacements

Il peut sembler paradoxal d'utiliser la méthode des déplacements alors qu'aucune donnée du problème ne concerne $\underline{\xi}$. Toutefois l'idée que l'on peut se faire a priori du mode de déformation d'une barre en torsion incite à rechercher une solution en déplacement de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_x = -\alpha\, z\, y \\ \xi_y = \alpha\, z\, x \\ \xi_z = \alpha\, \varphi\,(x, y) \end{array}\right. \tag{7.3}$$

où ξ_x, ξ_y, ξ_z désignent les composantes du déplacement $\underline{\xi}$ dans le repère cartésien orthonormé. α est un paramètre ayant la dimension de l'inverse d'une longueur et φ une fonction (à déterminer) ayant la dimension du carré d'une longueur.

Les équations (7.3) s'écrivent aussi :

$$\underline{\xi} = \alpha\big(z\,\underline{e}_z \wedge \underline{OM} + \underline{e}_z\,\varphi(x, y)\big) \tag{7.4}$$

qui permet, de mieux percevoir la forme du champ de petit déplacement envisagé et les motivations de ce choix. Il est commode, pour interpréter (7.4), de considérer le point courant M de la section droite de cote z. On voit que le déplacement, supposé infinitésimal (H.P.P.), de M est le résultat de la ***rotation d'ensemble*** de la section S autour de l'axe Oz, qui lui est perpendiculaire, d'un angle αz (rotation proportionnelle

[19] Méthode appelée « mixte ou semi-inverse » par Barré de Saint Venant (1797-1886) qui l'a proposée et utilisée pour obtenir la solution rigoureuse du problème de la torsion d'une barre cylindrique élastique homogène quelconque (1853). La justification pratique de cette méthode s'appuie sur le principe de Saint Venant énoncé dans la section 8.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

à la cote) et d'un ***gauchissement*** de la section (composante selon $\underline{e}_z$) indépendant de la cote.

On reviendra dans la suite sur l'interprétation géométrique de (7.4), mais il est important d'insister ici sur l'hypothèse des petits déplacements, qui doit être vérifiée par chacun des deux termes du second membre de (7.4), en remarquant par ailleurs que la position de l'axe Oz n'est, à ce stade, nullement précisée par rapport à la barre.

Le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dérivé de (7.3) s'écrit :

(7.5)
$$\underline{\underline{\varepsilon}}(x,y,z) = \frac{1}{2}\alpha\,(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y)(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x) + \frac{1}{2}\alpha\,(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x)(\underline{e}_y \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_y)\ .$$

On voit ainsi :

- qu'il n'y a pas de variation de volume

  (7.6) $$\text{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \text{div}\ \underline{\xi} = 0\ ;$$

- que les sections droites ($z =$ constante) ne sont pas déformées dans leur plan :

  (7.7) $$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{yy} = 0\ ,$$

  conséquence de la rotation d'angle αz autour de l'axe Oz ; α est appelé la rotation « différentielle » ;
- pour un vecteur matériel dirigé suivant Oz, en tout point de la barre, l'allongement unitaire est nul (cf. chapitre II, § 5.2)

  (7.8) $$\varepsilon_{zz} = 0\ ;$$

- qu'en conséquence, une ***fibre*** de longueur quelconque, parallèle à Oz, n'est pas déformée dans le champ de déplacement (7.3) : elle demeure rectiligne et ne subit pas de variation de longueur.

Ce dernier résultat peut sembler paradoxal car peu conforme à l'idée intuitive que l'on a de la géométrie d'une barre tordue ! Il est évidemment lié à l'hypothèse essentielle des petits déplacements qui fait partie de l'hypothèse des petites perturbations.

On peut, pour visualiser ce mode de déformation de la barre, l'imaginer comme un assemblage de fibres très fines parallèles à Oz. Dans la torsion ***infinitésimale***, ces fibres sont indéformées : elles s'inclinent sur Oz et subissent une translation parallèle à cet axe (figure 16). Ces propriétés du champ (7.4) ne sont vraies que dans l'hypothèse des petits déplacements. Il faut donc que les produits $\alpha\, z\, x$, $\alpha\, z\, y$ et $\alpha\,\varphi(x,y)$, dans (7.3) demeurent suffisamment petits, quelle que soit la cote $z\,(0 \leq z \leq \ell)$ et quel que soit le point M dans la section S. Ceci impose que la rotation de S_ℓ, égale à $\alpha\ell$, soit faible et que $|\,\xi_x\,| = |\,\alpha\ell y|$ et $|\,\xi_y\,| = |\,\alpha\ell x\,|$ soient suffisamment petits. Le positionnement de l'axe Oz par rapport à la barre (cf. § 7.4) est alors évidemment mis en cause.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

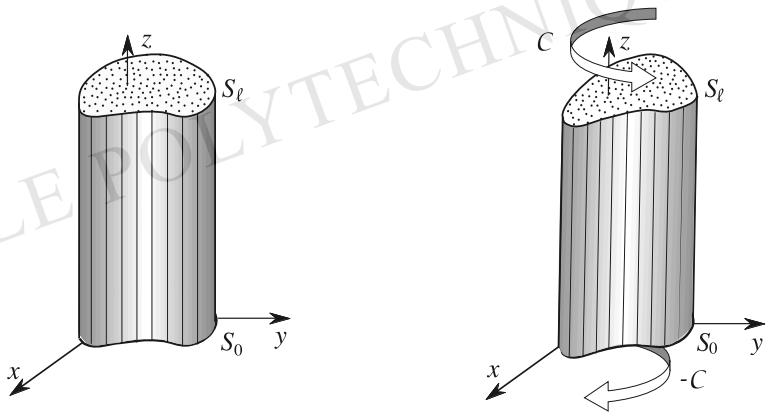


Figure 16 – Torsion élastique d'une barre considérée comme un assemblage de fibres

On applique le schéma de résolution de la figure 8. Le calcul de $\underline{\underline{\sigma}}$ par (4.2) est immédiat ; il vient, à partir de (7.5) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mu\,\alpha\,(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y)(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x) + \mu\,\alpha\,(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x)(\underline{e}_y \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_y)\ . \tag{7.9}$$

Les deux premières équations d'équilibre (4.1a) sont satisfaites et la troisième impose

$$\Delta_2\varphi = \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{7.10}$$

(où Δ_2 désigne le laplacien bidimensionnel).

La condition de surface libre pour la surface latérale de la barre (7.2) s'écrit, en désignant par n_1, n_2, n_3 les composantes du vecteur normal unitaire $\underline{n}$ au point courant de $\partial\Omega - S_0 - S_\ell$:

$$n_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + n_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + n_2 x - n_1 y = 0 \tag{7.11}$$

soit, dans l'espace à deux dimensions (x, y) :

$$\underline{\mathrm{grad}}\,\varphi\,.\,\underline{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = n_1 y - n_2 x \quad \text{sur } \partial S\ ,\ \text{bord de la section } S\ . \tag{7.12}$$

On voit que (7.10) et (7.12) définissent pour $\varphi(x, y)$ un problème de Neumann intérieur sur la section S : ceci permet donc de déterminer[20] la fonction φ (à une

[20] On sait que pour qu'un tel problème ait une solution, la donnée $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ doit vérifier la condition de possibilité, $\displaystyle\int_{\partial S}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}L = 0$, qui traduit la nullité du flux de $\underline{\mathrm{grad}}\,\varphi$ à travers une courbe fermée. Celle-ci est effectivement vérifiée ici : $\displaystyle\int_{\partial S}(n_1 y - n_2 x)\,\mathrm{d}L = \int_{\partial S}\underline{OM}\,.\,\underline{\mathrm{d}M} = 0\,.$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

constante additive près, sans incidence sur $\underline{\underline{\sigma}}$, et qui correspond pour $\underline{\xi}$ à une translation d'ensemble parallèle à Oz arbitraire).

La fonction φ étant ainsi déterminée par les conditions aux limites (7.2) sur la surface latérale $(\partial\Omega - S_0 - S_\ell)$, il convient de vérifier que les conditions imposées aux efforts surfaciques sur les sections d'extrémités S_0 et S_ℓ sont satisfaites.

Sur S_ℓ la résultante des efforts surfaciques a pour composantes :

$$(7.13)\qquad \left\{\begin{array}{l} R_x = \displaystyle\int_{S_\ell} \sigma_{xz}\,\mathrm{d}a = \int_{S_\ell} \mu\,\alpha\,(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y)\mathrm{d}a \\ R_y = \displaystyle\int_{S_\ell} \sigma_{yz}\,\mathrm{d}a = \int_{S_\ell} \mu\,\alpha\,(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x)\mathrm{d}a \\ R_z = \displaystyle\int_{S_\ell} \sigma_{zz}\,\mathrm{d}a = 0\ , \end{array}\right.$$

où R_x et R_y sont nulles en conséquence de (7.10) et (7.12) satisfaites par φ. Il en va de même pour les composantes de la résultante des efforts surfaciques sur S_0, qui sont opposées à (7.13).

En effet, on a par exemple :

$$(7.14)\qquad \int_S (\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y)\mathrm{d}a = \int_S [\frac{\partial}{\partial x}\big(x(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y)\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(x(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x)\big) - x\,\Delta_2\varphi]\mathrm{d}a$$

d'où, puisque $\Delta_2\varphi = 0$, et par application du théorème de la divergence :

$$(7.15)\qquad \int_S (\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y)\mathrm{d}a = \int_{\partial S} x(\frac{\partial\varphi}{\partial n} - n_1\,y + n_2\,x)\mathrm{d}L = 0\ .$$

On peut aussi proposer un raisonnement direct. Comme le montre (7.16), les moments résultants des efforts surfaciques sur S_0 et S_ℓ sont dirigés selon Oz. Puisque le champ de contrainte (7.9), avec φ déterminée par (7.10) et (7.12), est en équilibre avec des forces de masse nulles sur Ω, le torseur des efforts surfaciques qu'il induit sur $\partial\Omega$ est nul (cf. chapitre V, § 3.4). En conséquence, si les résultantes des efforts surfaciques sur S_0 et S_ℓ, qui sont opposées, avaient des composantes non nulles selon Ox et Oy, on trouverait, pour les équilibrer, un moment d'axe perpendiculaire à Oz dû aux efforts surfaciques sur la surface latérale ; or ceux-ci sont nuls.

Le moment résultant des forces surfaciques sur S_ℓ a pour composantes :

$$(7.16)\qquad \left\{\begin{array}{l} H_x = 0 \\ H_y = 0 \\ H_z = \displaystyle\int_{S_\ell} (x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz})\mathrm{d}a = \mu\,\alpha \int_{S_\ell} \big(x(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x) - y(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y)\big)\mathrm{d}a\ ; \end{array}\right.$$

le moment des forces surfaciques sur S_0 lui est opposé.

La confrontation de la formule (7.16) donnant H_z avec la condition aux limites « partielle » imposée aux efforts surfaciques sur S_ℓ (et S_0) à travers la torseur $(O\,,\,\underline{0}\,,\,\mathcal{C}\underline{e}_z)$ montre que le paramètre α introduit dans le champ de déplacement (7.3) est déterminé à partir de la donnée $\mathcal{C}$ par l'équation

$$(7.17)\qquad \boxed{\mathcal{C} = \mu\,J\,\alpha}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

où J résulte de la seule résolution du problème de Neumann (7.10, 7.12) et ne dépend donc, dans les axes choisis, que de la géométrie de la section droite. On montrera dans la suite que J est, en fait, une ***caractéristique géométrique intrinsèque*** de la section (indépendante de la position de Oz et de l'orientation des axes Ox et Oy). J a pour dimension la puissance quatrième d'une longueur et est appelée ***inertie de torsion*** de la section :

$$J = \int_S \big(x(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x) - y(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y)\big)\mathrm{d}a \; . \tag{7.18}$$

Compte tenu de (7.10) et (7.12), J peut aussi s'écrire :

$$J = \int_S \big((\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x)^2 + (\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y)^2\big)\mathrm{d}a \tag{7.19}$$

et est donc toujours positif. Il résulte alors de (7.17) et de la positivité de μ établie au chapitre VII (§ 5.5) que le couple de torsion $\mathcal{C}$ et la rotation différentielle α sont de même signe. C'est la signification physique de la positivité de μ qui avait été annoncée au chapitre VII (§ 5.5).

On peut en effet écrire en transformant (7.18) :

$$J = \int_S \big((\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x)^2 + (\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y)^2\big)\mathrm{d}a - \int_S \big(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y)\big)\mathrm{d}a \tag{7.20}$$

où la deuxième intégrale est nulle en conséquence de (7.10) et (7.12) car elle se transforme en :

$$\begin{aligned}\int_S (\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y))\mathrm{d}a &= \int_S (\frac{\partial}{\partial y}(\varphi(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x)) + \frac{\partial}{\partial x}(\varphi(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y)))\mathrm{d}a \\ &\quad - \int_S \varphi \, \Delta_2 \varphi \mathrm{d}a \\ &= \int_{\partial S} \varphi(n_1(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y) + n_2(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x))\mathrm{d}L - \int_S \varphi \, \Delta_2 \varphi \mathrm{d}a = 0 \; .\end{aligned}$$

7.3 Commentaires

- Le problème résolu au paragraphe précédent est donc défini a posteriori comme suit. Le repère $Oxyz$ étant choisi, on détermine la fonction φ par le problème de Neumann intérieur (7.10, 7.12). Les données $\underline{T}^{\mathrm{d}}(x, y)$ sur S_ℓ sont alors définies :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1^{\mathrm{d}}(x, y) = \dfrac{\mathcal{C}}{J}(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - y) \\ T_2^{\mathrm{d}}(x, y) = \dfrac{\mathcal{C}}{J}(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + x) \\ T_3^{\mathrm{d}}(x, y) = 0 \; ; \end{array} \right. \tag{7.21}$$

sur S_0 les données $\underline{T}^{\mathrm{d}}(x, y)$ sont les opposées des précédentes.

La solution du problème est donnée par les formules (7.4) pour $\underline{\xi}$ et (7.9) pour $\underline{\underline{\sigma}}$. En tout point de la barre les tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sont proportionnels. Sur toute facette parallèle à Oz il ne s'exerce qu'une contrainte de cisaillement parallèle à Oz.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- Le couple de torsion $\mathcal{C}$ est proportionnel à la rotation différentielle α, (ou encore, à ℓ donnée, à la rotation de S_ℓ par rapport à S_0)[21]. Le coefficient de proportionnalité est le produit du module de cisaillement du matériau par l'inertie de torsion de la section.

7.4 Invariances du problème

L'analyse effectuée n'a mis en évidence aucune signification particulière relativement à la géométrie de la section S_0 pour la position de l'origine O, c'est-à-dire de l'axe Oz autour duquel s'effectue la rotation des sections (du point de vue des coordonnées x, y), ni pour l'orientation des axes Ox et Oy. C'est sur le problème bien posé, avec les données (7.2) et (7.21) que l'on examine l'influence de la position de l'axe Oz et de l'orientation des axes Ox et Oy. On démontre alors les résultats suivants.

- Le problème posé avec les données (7.2) et (7.21) est ***indépendant*** de la position de l'axe Oz et de l'orientation des Ox et Oy. Ses données, qui portent toutes sur les efforts, sont entièrement définies par la géométrie de la section et le couple $\mathcal{C}$. L'***inertie de torsion*** est une caractéristique géométrique intrinsèque de la section.
- Le champ de contrainte solution de ce problème donné par (7.9) est, lui aussi, indépendant de la position de l'axe Oz et de l'orientation des axes Ox et Oy (résultat conforme au théorème d'unicité).
- Les champs de déplacement solutions de ce problème donnés par (7.4) ne diffèrent les uns des autres que par un mouvement rigidifiant tant que l'hypothèse des petites perturbations demeure vérifiée par la position de l'axe Oz (résultat conforme au théorème d'unicité).

Pour établir ces résultats on s'intéresse à la fonction de gauchissement φ. Le problème de Neumann (7.10, 7.12) s'écrit aussi

$$\Delta_2\varphi = \operatorname{div}(\underline{\operatorname{grad}}\,\varphi) = 0 \quad \text{sur } S \tag{7.22}$$

$$\underline{n}\,.\,\underline{\operatorname{grad}}\,\varphi = (\underline{n}\wedge\underline{OM})\,.\,\underline{e}_z \quad \text{sur } \partial S\,. \tag{7.23}$$

Il en résulte d'abord que, l'origine O des axes étant fixée, les fonctions φ solutions de (7.22, 7.23) sont déterminées par la géométrie de la section S, indépendamment des axes Ox et Oy : $\varphi(x,y) = \varphi(\underline{M})$. D'autre part, si l'on considère les solutions, notées φ_1 et φ_2, des problèmes de Neumann (7.22, 7.23) pour deux positions différentes, O_1 et O_2, de l'origine des axes, ces fonctions sont liées par :

$$\varphi_2(\underline{M}) = \varphi_1(\underline{M}) + (\underline{e}_z\wedge\underline{O_1O_2})\,.\,\underline{O_2M} \tag{7.24}$$

et vérifient ainsi

$$\underline{\operatorname{grad}}\,\varphi_2 = \underline{\operatorname{grad}}\,\varphi_1 + \underline{e}_z\wedge\underline{O_1O_2}\,. \tag{7.25}$$

En conséquence, l'inertie de torsion J est une caractéristique géométrique intrinsèque de la section S. En effet, compte tenu de (7.20) on a

$$J = \int_S (\underline{\operatorname{grad}}\,\varphi + \underline{e}_z\wedge\underline{OM})^2\,\mathrm{d}a \tag{7.26}$$

[21] α est aussi appelé « angle de torsion ». Cette terminologie peut prêter à confusion car α est en fait l'angle de la torsion par unité de longueur selon Oz.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

qui est invariant en raison de (7.25). Les données (7.21) sur S_ℓ s'écrivent :

$$\underline{T}^{\mathrm{d}} = \frac{\mathcal{C}}{J}\,(\underline{\mathrm{grad}}\,\varphi + \underline{e}_z \wedge \underline{OM}) \tag{7.27}$$

et sont, elles aussi, invariantes en raison de (7.25). Il en va de même pour la solution (7.9) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mathcal{C}}{J}\big(\underline{e}_z \otimes (\underline{\mathrm{grad}}\,\varphi + \underline{e}_z \wedge \underline{OM}) + (\underline{\mathrm{grad}}\,\varphi + \underline{e}_z \wedge \underline{OM}) \otimes \underline{e}_z\big)\ . \tag{7.28}$$

Le champ de déplacement solution (7.4) est :

$$\underline{\xi} = \frac{\mathcal{C}}{\mu J}\big(z\,\underline{e}_z \wedge \underline{OM} + \underline{e}_z\,\varphi(\underline{M})\big)\ . \tag{7.29}$$

Les champs $\underline{\xi}_1$ et $\underline{\xi}_2$ correspondant à deux positions O_1 et O_2 de l'origine des axes sont reliés par

$$\underline{\xi}_2(\underline{M}) = \underline{\xi}_1(\underline{M}) + \frac{\mathcal{C}}{\mu J}\,\underline{O_1O_2} \wedge \underline{O_2M} \tag{7.30}$$

et ne diffèrent donc l'un de l'autre que par un déplacement rigidifiant dans l'hypothèse des petites perturbations.

On a insisté à plusieurs reprises sur le respect de l'hypothèse des petites perturbations et en particulier, dans celle-ci, de l'hypothèse des petits déplacements. La position de l'axe Oz doit satisfaire cette contrainte. De ce point de vue la ligne des centres d'inertie des sections droites, qui joue un rôle privilégié dans d'autres problèmes (chapitre IX, section 3), sera souvent retenue.

7.5 Cas de la barre de section circulaire

On suppose que la section droite S est un disque de rayon R.

L'origine O étant prise au centre de S_0, le problème de Neumann pour φ s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta_2\varphi = 0 & \text{sur } S \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial S \end{cases} \tag{7.31}$$

dont la solution (à une constante près) est :

$$\varphi = 0\ . \tag{7.32}$$

On en déduit les résultats suivants à partir des formules établies dans le cas général (§ 7.2 et 7.4).

♦ ***Champ de déplacement***

$$\begin{cases} \xi_x = -\alpha\,z\,y \\ \xi_y = \alpha\,z\,x \\ \xi_z = 0 \end{cases} \tag{7.33}$$

ou encore, en coordonnées cylindriques autour de Oz,

$$\underline{\xi} = \alpha\,z\,r\,\underline{e}_\theta\ . \tag{7.34}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Il n'y a pas de gauchissement des sections droites.

♦ ***Champ de contrainte***

$$\text{(7.35)} \qquad \begin{cases} \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = -\mu\,\alpha\,y \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \mu\,\alpha\,x \\ \text{autres } \sigma_{ij} = 0\ ; \end{cases}$$

en coordonnées cylindriques autour de Oz,

$$\text{(7.36)} \qquad \begin{cases} \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = \mu\,\alpha\,r \\ \text{autres } \sigma_{ij} = 0\ . \end{cases}$$

Il s'agit, en chaque point de la barre, d'un état de cission simple dont l'intensité est proportionnelle au rayon vecteur (et à la rotation différentielle α).

♦ ***Inertie de torsion***

On a ici, puisque $\varphi = 0$:

$$\text{(7.37)} \qquad J = \int_S (x^2 + y^2)\mathrm{d}a = \pi\frac{R^4}{2}\ .$$

C'est le moment d'inertie polaire de la section autour de Oz.

♦ ***Distribution des efforts surfaciques sur*** S_ℓ

$$\text{(7.38)} \qquad \begin{cases} T_1^{\mathrm{d}} = -\dfrac{2\,\mathcal{C}}{\pi R^4}\,y \\ T_2^{\mathrm{d}} = \dfrac{2\,\mathcal{C}}{\pi R^4}\,x \\ T_3^{\mathrm{d}} = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\text{(7.39)} \qquad \underline{T}^{\mathrm{d}} = \frac{2\,\mathcal{C}}{\pi R^4}\,r\,\underline{e}_\theta\ .$$

Il s'agit d'une contrainte de cisaillement, dirigée normalement au rayon vecteur dans la section droite, et proportionnelle à celui-ci (figure 17).

Commentaire

La simplicité de la solution[(22)] qui vient d'être écrite est évidemment due à la symétrie du problème : symétrie géométrique, symétrie du chargement, matériau constitutif homogène et isotrope. Une fois établie la forme générale de la solution (§ 7.2),

[(22)] Saint Venant (1853, 1864) fait référence à cette solution comme étant due à Coulomb et signale que Lamé et Clapeyron (1828) ont « reconnue et avoué » qu'elle n'est valable que pour « autant que chaque point des bases supérieure et inférieure est sollicité par une force proportionnelle à sa distance à l'axe, et agissant perpendiculairement au rayon vecteur dans le plan de ces bases. » On reviendra sur ces points dans la section 8.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

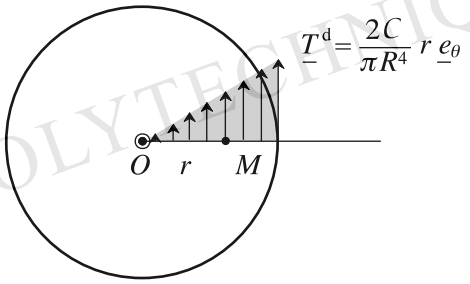


Figure 17 – Torsion élastique d'une barre circulaire : distribution des contraintes de cisaillement sur la section droite S_ℓ

la symétrie de révolution implique, en s'appuyant sur le principe de superposition et le théorème d'unicité, l'absence de gauchissement de la section droite (7.32), dont découlent tous les autres résultats.

Les mêmes arguments s'appliquant à la torsion d'un ***tube*** dont la section droite est limitée par deux cercles concentriques de rayons intérieur et extérieur R_0 et R_1 ; l'inertie de torsion pour une telle section est :

$$J = \pi(R_1^4 - R_0^4)/2\ . \tag{7.40}$$

Enfin on peut signaler qu'en raison du caractère « naturel » du champ de contrainte (7.35), celui-ci sert de base à une théorie élémentaire de la torsion d'une barre cylindrique de section quelconque. Cette théorie fournit pour l'inertie de torsion J de la section de la barre une valeur approchée égale au moment d'inertie polaire de la section par rapport à son centre d'inertie. Une interprétation de cette approche peut être donnée en s'appuyant sur les méthodes variationnelles (théorèmes de l'énergie en élasticité) exposées au chapitre X (sections 2 et 5) : elle permet de démontrer que l'on aboutit ainsi à une évaluation de J par excès.

7.6 Résolution du problème par la méthode des contraintes

L'utilisation de la méthode des contraintes pour résoudre le problème posé au paragraphe 7.1 paraît naturelle puisque les données sont essentiellement statiques. On recherche le champ de contrainte solution sous la forme[23]

$$\sigma_{ij} = 0 \quad \text{sauf} \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad \text{et} \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}\ . \tag{7.41}$$

Dans le schéma de résolution de la figure 12, $\underline{\underline{\sigma}}$ doit vérifier les équations d'équilibre (4.1a) d'où les trois équations :

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \tag{7.42}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0\ . \tag{7.43}$$

[23] Il serait excessif d'affirmer que cette forme vient spontanément à l'esprit pour rechercher le champ de contrainte solution du problème de la torsion si l'on n'a pas une connaissance préalable de la résolution par la méthode des déplacements.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

De (7.42) on déduit que $\underline{\underline{\sigma}}$ est indépendant de z. En supposant que S est ***simplement connexe***, on déduit de (7.43) qu'il existe une fonction $\psi_1(x,y)$ telle que :

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \quad \text{et} \quad \sigma_{zy} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \,. \tag{7.44}$$

La fonction ψ_1 est appelée la ***fonction de contrainte*** dans le problème de la torsion.
Poursuivant l'application du schéma de résolution de la figure 12, on doit satisfaire les équations de Beltrami (6.9). Compte tenu de (7.44), celles-ci se réduisent aux deux équations :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta_2 \psi_1) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y}(\Delta_2 \psi_1) = 0 \tag{7.45}$$

dont on déduit que $\Delta_2 \psi_1$ est une constante sur la section S de la barre. Soit en désignant par $-2K$ cette valeur constante :

$$\Delta_2 \psi_1 = -2K \quad \text{sur } S \,. \tag{7.46}$$

Le respect de la condition de surface libre (7.2) sur la paroi latérale de la barre s'écrit :

$$n_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - n_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } \partial S \,, \tag{7.47}$$

qui implique que ψ_1 garde une valeur constante, soit C, sur ∂S

$$\psi_1 = C \quad \text{sur } \partial S \,. \tag{7.48}$$

Les équations (7.46) et (7.48) définissent le problème permettant de déterminer, à une constante près (due à la valeur arbitraire de $\mathcal{C}$ sur ∂S), la fonction ψ_1 .
Ce problème peut se ramener à la détermination d'une fonction harmonique en mettant ψ_1 sous la forme :

$$\psi_1 = K(\psi - (x^2 + y^2)/2) \,; \tag{7.49}$$

(7.46) et (7.48) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \Delta \psi = 0 & \text{sur } S \qquad (7.50) \\ \psi = C' + (x^2 + y^2)/2 & \text{sur } \partial S \,. \qquad (7.51) \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème de Dirichlet qui détermine ψ (à une constante près due à C').
Le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ est alors déterminé à la constante K de proportionnalité près qui permet d'ajuster la solution aux données du problème. On peut ici abréger les calculs en tirant parti de la résolution effectuée par la méthode des déplacements : le champ de contrainte exprimé en fonction de φ est identique à celui déterminé au paragraphe 7.2. Le rapprochement de (7.9), (7.44) et (7.46) donne :

$$\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial y} = 2\mu\,\alpha = -\Delta_2 \psi_1 = 2K \tag{7.52}$$

d'où la relation :

$$K = \mu\,\alpha = \mathcal{C}/J \,. \tag{7.53}$$

On en déduit, en substituant (7.49) dans (7.44) et en comparant à (7.9), la relation remarquable entre les fonctions φ et ψ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \,. \tag{7.54}$$

Ces dernières relations impliquent que la fonction complexe

$$f(x,y) = \varphi(x,y) + \mathrm{i}\psi(x,y) \tag{7.55}$$

est une fonction analytique de la variable $(x + \mathrm{i}y)$.
Pour le cas particulier de la barre de section circulaire étudiée au paragraphe 7.5, on a :

$$\varphi = 0 \quad , \quad f = 0 \quad \text{et} \quad \psi = 0 \tag{7.56}$$

d'où

$$\psi_1 = -K(x^2 + y^2)/2 = -Kr^2/2 \,. \tag{7.57}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

7.7 Limite initiale d'élasticité de la barre en torsion

Lignes de cisaillement

L'expression (7.9) du champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ montre que, sur la section droite S de normale $\underline{e}_z$, en un point M quelconque, le vecteur contrainte est contenu dans le plan Oxy , c'est-à-dire purement tangentiel :

$$\underline{T}(\underline{e}_z) = \underline{\underline{\sigma}} \,.\, \underline{e}_z = \sigma_{xz}\, \underline{e}_x + \sigma_{yz}\, \underline{e}_y \ . \tag{7.58}$$

Ainsi la contrainte normale est nulle et l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{T}(\underline{e}_z) = \underline{\tau} \\ \\ |\,\underline{\tau}\,| = \sqrt{\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2}\ . \end{array} \right. \tag{7.59}$$

Les lignes enveloppes du champ de vecteur $\underline{\tau}$ défini sur la section droite S par (7.59) sont appelées ***lignes de cisaillement***[(24)]. On remarque que, compte tenu de la condition de surface libre (7.2) reprise en (7.11), on a :

$$n_1\sigma_{zx} + n_2\sigma_{zy} = 0 \quad \text{sur } \partial S \tag{7.60}$$

qui signifie que ∂S est une ligne de cisaillement (figure 18).

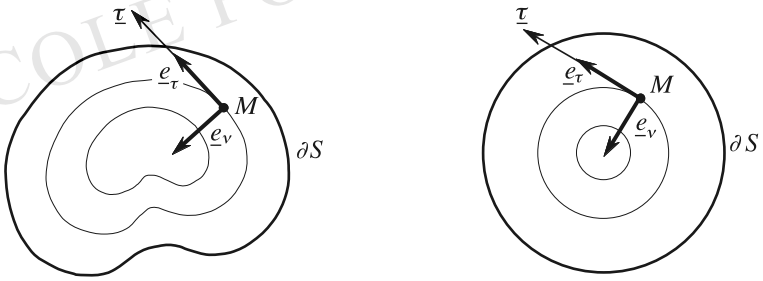


Figure 18 – Lignes de cisaillement : cas typique et section droite circulaire

En se reportant à la résolution par la méthode des contraintes (§ 7.6) on voit à partir de (7.44), que (7.59) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\tau} = -\underline{e}_z \wedge \underline{\mathrm{grad}}\,\psi_1 \\ |\,\underline{\tau}\,| = |\,\underline{\mathrm{grad}}\,\psi_1\,| \end{array} \right. \tag{7.61}$$

et que, le long des lignes de cisaillement, on a :

$$\underline{\mathrm{grad}}\,\psi_1 \,.\, \underline{\mathrm{d}M} = 0\ . \tag{7.62}$$

Il en résulte que les lignes de cisaillement sont les lignes de niveau de la fonction de contraintes ψ_1 , dont ∂S est un cas particulier.

(24) La confusion de langage entre cisaillement (déformation) et contrainte de cisaillement est ici sans conséquence car les tenseurs $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ sont proportionnels.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Directions principales. Contraintes principales

Il est commode d'introduire, en chaque point M de S, la base orthonormée directe

$$\begin{cases} \underline{e}_\tau & \text{colinéaire à } \underline{\tau} \text{ et de même sens que lui ,} \\ \underline{e}_\nu & \text{normal à } \underline{e}_\tau \text{ dans le plan de } S \text{ ,} \\ \underline{e}_z & \end{cases} \tag{7.63}$$

dans laquelle $\underline{\underline{\sigma}}$ s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = |\,\underline{\tau}\,|(\underline{e}_\tau \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\tau) \,. \tag{7.64}$$

Ainsi, en tout point de la barre, l'état de contrainte est un état de cission simple (chapitre VI, § 3.5) dont les directions principales sont $\underline{e}_\nu$ et les deux bissectrices des directions $\underline{e}_\tau$ et $\underline{e}_z$. Les contraintes principales sont 0 selon $\underline{e}_\nu$ et $\pm|\,\underline{\tau}\,|$ selon les deux autres directions principales. Cet état de contrainte est invariant le long des fibres parallèles à Oz et varie en intensité et en direction dans la section droite S.

Limite initiale d'élasticité de la barre

La ***limite initiale d'élasticité*** de la barre soumise à la torsion est définie comme la valeur du couple $\mathcal{C}$ pour laquelle la limite d'élasticité du matériau constitutif est atteinte pour la première fois en un point de la barre.

Compte tenu de la forme de l'état de contrainte qui vient d'être décrite (état de cission simple d'intensité $|\,\underline{\tau}\,|$) et puisque le matériau consitutif de la barre est ***homogène*** et ***isotrope***, la recherche de la limite initiale d'élasticité $\mathcal{C}_0$ de la barre se réduit aux étapes suivantes, simples dans leur principe.

- Déterminer, pour le critère donné de limite initiale d'élasticité du matériau constitutif isotrope (et homogène), la limite initiale d'élasticité du matériau en cission simple, soit τ_0 .
- Déterminer, sur la solution du problème de la torsion de la barre considérée, les points de la barre les plus sollicités en cission simple, c'est-à-dire les points où $|\,\underline{\tau}\,|$ est maximale. (On démontre que ces points sont toujours une ou plusieurs fibres de la surface latérale de la barre). Exprimer la valeur maximale de $|\,\underline{\tau}\,|$ en fonction du couple appliqué $\mathcal{C}$.
- Par confrontation des deux résultats précédents, on obtient la valeur de $\mathcal{C}_0$.

À titre d'exemple, avec les critères de limite initiale d'élasticité de Tresca (chapitre VI, § 4.3) et de von Mises (chapitre VI, § 4.4) on a respectivement pour τ_0 :

$$\begin{cases} \tau_0 = \sigma_0/2 & \text{(Tresca) ,} \\ \tau_0 = k & \text{(von Mises) .} \end{cases} \tag{7.65}$$

Si l'on considère le cas très simple de la barre de section droite circulaire, la sollicitation maximale est évidemment atteinte en tous les points de contour et pour

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ceux-ci on a $|\underline{\tau}| = 2\,\mathcal{C}/\pi R^3$; on obtient donc :

$$\text{(7.66)} \qquad \begin{cases} \mathcal{C}_0 = \dfrac{\pi R^3}{4}\sigma_0 & \text{(Tresca)}\ , \\ \mathcal{C}_0 = \dfrac{\pi R^3}{2}\,k & \text{(von Mises)}\ . \end{cases}$$

Il est essentiel de remarquer que la limite initiale d'élasticité ainsi déterminée est celle de la barre soumise à la torsion à partir de l'état initial de référence naturel en évolution isotherme. Hors de ce cas particulier, c'est-à-dire notamment pour la torsion isotherme à partir d'un état initial préchargé, la solution établie dans la présente section fournit le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^0$ des équations (3.14) à (3.18)) alors que la recherche de la limite initiale d'élasticité de la barre se réfère évidemment au champ de contrainte ***total*** $\underline{\underline{\sigma}}$ auquel doit être appliqué le critère de limite initiale d'élasticité du matériau.

8 Principe de Saint Venant

Au paragraphe 7.2 on a construit la solution du problème de la torsion élastique d'une barre, soumise à un couple de torsion $\mathcal{C}$ appliqué sur S_ℓ de la façon précisée par la suite au paragraphe 7.3 (formule 7.21), et au couple $-\mathcal{C}$ appliqué de la façon homologue sur S_0.

Cette même solution est également valable si l'on impose sur S_ℓ et sur S_0 des données portant sur les déplacements pourvu que les $\underline{\xi}^{\rm d}$ correspondent à (7.4).

En particulier, pour la barre de section circulaire, ces données en déplacements sont remarquablement simples :

$$\text{(8.1)} \qquad \begin{cases} \underline{\xi}^{\rm d} = 0 & \text{sur } S_0 \\ \underline{\xi}^{\rm d} = \alpha\,\ell\,\underline{e}_z \wedge \underline{OM} & \text{sur } S_\ell \end{cases}$$

c'est-à-dire une rotation d'angle $\alpha\,\ell$ autour de Oz pour S_ℓ.

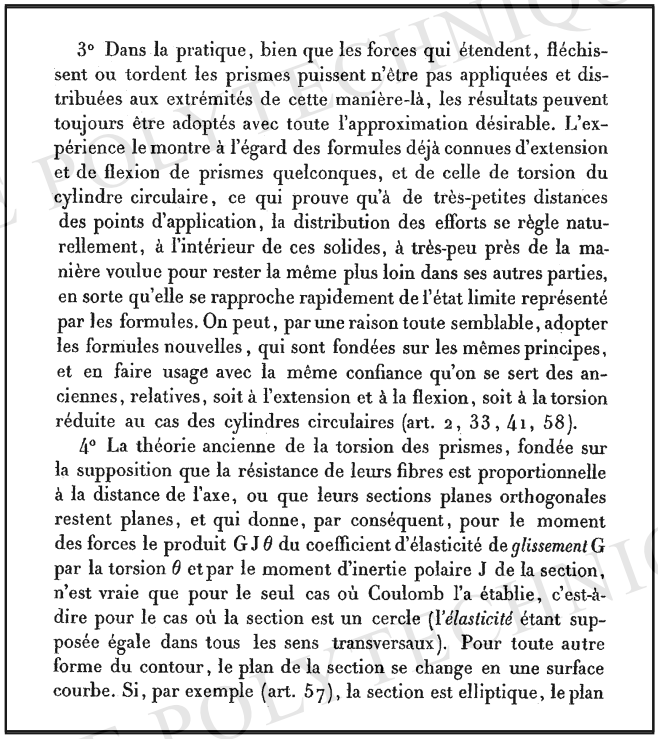
En revanche on ne peut rien en déduire sur la solution de ce problème de torsion élastique dans le cas où les données sur S_0 et S_ℓ, concernant les forces surfaciques ou les déplacements ne sont pas de la forme indiquée.

Dans la pratique, pour ce type d'éléments (barres, poutres) fréquemment rencontrés dans les structures, on est confronté aux conditions suivantes :

– la longueur de la barre est grande vis-à-vis de ses dimensions transversales,
– on connaît la valeur du couple de torsion appliqué aux extrémités de la barre,
– on ne connaît pas précisément la façon dont ce couple est appliqué (données $\underline{T}^{\rm d}$).

C'est à ce propos que Saint Venant, dans son ***Mémoire sur la torsion des prismes*** présenté en 1853, a formulé la conjecture connue désormais sous le nom de ***Principe de Saint Venant***, qui justifie la méthode semi-inverse qu'il a introduite (Figure 19). Il a développé et précisé ce point dans une note ajoutée (pages 523, 524)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE



3° Dans la pratique, bien que les forces qui étendent, fléchissent ou tordent les prismes puissent n'être pas appliquées et distribuées aux extrémités de cette manière-là, les résultats peuvent toujours être adoptés avec toute l'approximation désirable. L'expérience le montre à l'égard des formules déjà connues d'extension et de flexion de prismes quelconques, et de celle de torsion du cylindre circulaire, ce qui prouve qu'à de très-petites distances des points d'application, la distribution des efforts se règle naturellement, à l'intérieur de ces solides, à très-peu près de la manière voulue pour rester la même plus loin dans ses autres parties, en sorte qu'elle se rapproche rapidement de l'état limite représenté par les formules. On peut, par une raison toute semblable, adopter les formules nouvelles, qui sont fondées sur les mêmes principes, et en faire usage avec la même confiance qu'on se sert des anciennes, relatives, soit à l'extension et à la flexion, soit à la torsion réduite au cas des cylindres circulaires (art. 2, 33, 41, 58).

4° La théorie ancienne de la torsion des prismes, fondée sur la supposition que la résistance de leurs fibres est proportionnelle à la distance de l'axe, ou que leurs sections planes orthogonales restent planes, et qui donne, par conséquent, pour le moment des forces le produit $GJ\theta$ du coefficient d'élasticité de *glissement* G par la torsion θ et par le moment d'inertie polaire J de la section, n'est vraie que pour le seul cas où Coulomb l'a établie, c'est-à-dire pour le cas où la section est un cercle (l'*élasticité* étant supposée égale dans tous les sens transversaux). Pour toute autre forme du contour, le plan de la section se change en une surface courbe. Si, par exemple (art. 57), la section est elliptique, le plan

Figure 19 – Extrait du Mémoire sur la torsion des prismes *par Saint Venant (1853), (Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences,* **15***, 233-560, Paris, 1856).*

au ***Résumé des leçons*** données par Navier à l'École des ponts et chaussées (1864) :

« Nous l'avons dit : des faits suffisamment nombreux montrent le peu d'influence du mode de répartition et d'application, et permettent d'employer les formules soit anciennes soit nouvelles d'extension, torsion, flexion, pour des forces quelconques agissant aux extrémités de prismes très-longs par rapport à leurs dimensions transversales en n'ayant égard qu'aux grandeurs de leurs résultantes et de leurs moments résultants. D'où il suit qu'il suffit de donner des démonstrations exactes des formules relativement à ***un cas*** ou à ***un*** mode particulier d'action des forces aux extrémités, pour que la théorie soit établie et qu'on puisse faire l'application de ses résultats aux divers autres cas qui peuvent s'offrir ».

En d'autres termes et dans le cas de la torsion : ***hormis des effets d'extrémités, la façon dont le couple de torsion est appliqué n'a pas d'influence sur la solution du problème de la torsion élastique, pourvu que la résultante et les autres composantes du moment résultant des forces appliquées aux extrémités soient nulles***.

Ainsi que cela apparaît dans le texte cité, le principe s'applique à tout système de sollicitations exercées aux extrémités d'une barre (ou d'une poutre) et, d'une façon

générale, d'un « ***solide élancé*** ». Il y sera notamment fait appel, dans le chapitre suivant, à propos de la traction et de la flexion d'une barre cylindrique pour lesquels les figures 20 et 21 donnent des exemples de justification expérimentale en photoélasticité.

L'importance pratique du Principe de Saint Venant s'est révélée considérable dans le domaine de la construction et l'on peut considérer qu'il est un fondement de la théorie de la Résistance des matériaux (cf. chapitre 12, § 2.5). La recherche d'une démonstration de ce « principe » et d'un éventuel énoncé de portée plus générale, notamment applicable à un soldie de forme quelconque, était alors naturelle. Une première voie d'approche, initiée par Boussinesq (1885)[(25)], consiste à examiner le comportement de la solution lorsque l'aire de la région chargée au contour du solide décroit, en conservant pour le chargement correspondant le même torseur résultant. Elle a été suivie par von Mises (1945) qui a émis une conjecture validée par la suite dans un article de Sternberg (1954) (cf. aussi l'article de Sternberg et Rosenthal, 1952). Une autre voie, suivie notamment par Zanaboni (1937), Toupin (1965), Palama (1976) et autres, examine, pour un chargement donné au contour du solide, le comportement de la densité d'énergie élastique de la solution (cf. chapitre X, § 5.1) lorsque l'on s'éloigne de la zone chargée. (cf. Gurtin, 1972).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

[(25)] Emile Picard (1933) : « Boussinesq a apporté une contribution éminente dans tous les domaines de la Physique mathématique, hormis celui de l'électromagnétisme ».

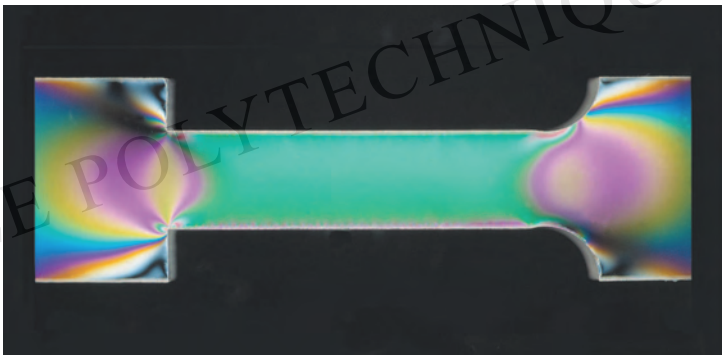


Figure 20 – Vérification expérimentale du principe de Saint Venant sur l'expérience de traction d'une éprouvette (photo : J. Salençon)

Le problème est plan (contrainte plane ; cf. annexe III, section 3). Les franges visualisent le champ de contrainte (photoélasticité). On voit que les effets d'extrémités sont très localisés. Par ailleurs la présence de congés à l'extrémité droite de l'éprouvette atténue beaucoup les concentrations de contraintes par rapport aux angles vifs de l'extrémité de gauche.

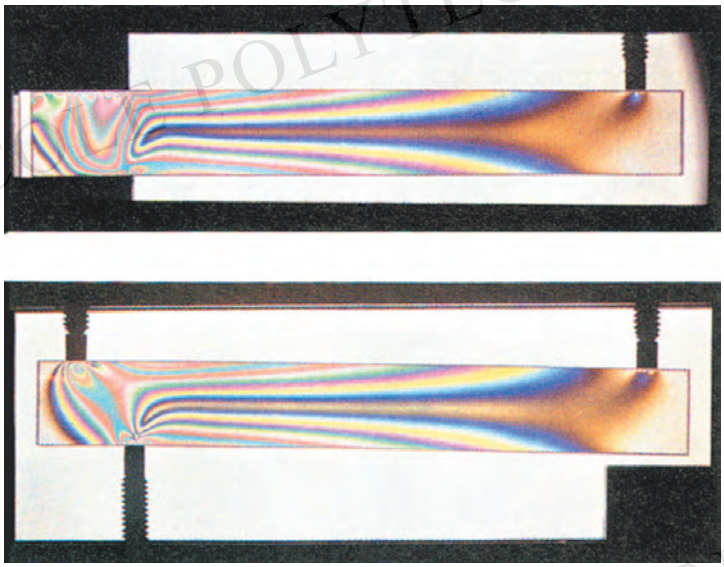


Figure 21 – Vérification expérimentale du principe de Saint Venant sur le problème de la flexion d'une poutre console (documents communiqués par le Laboratoire central des ponts et chaussées)

Le problème est plan (contrainte plane). Les conditions d'appui de la poutre (extrémité de gauche) sont différentes ; la charge appliquée (près de l'extrémité de droite) est identique. Les franges visualisent le champ de contrainte plane (photoélasticité) : on constate que, mises à part les zones d'extrémité, les réseaux de franges sont identiques.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

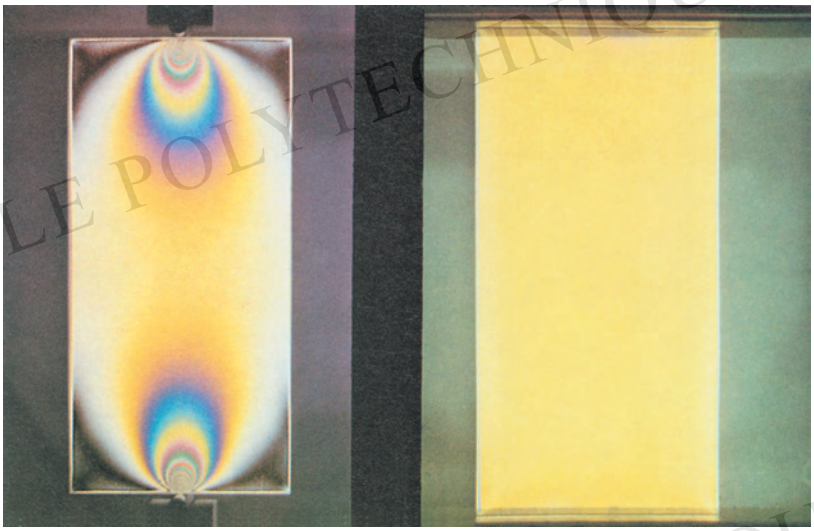


Figure 22 – Compression d'un bloc (documents communiqués par le Laboratoire central des ponts et chaussées)

Le problème est plan (contrainte plane). Le bloc de gauche est chargé par des forces concentrées ; dans le bloc de droite on impose, au moyen de traverses indéformables lisses, une translation verticale de la face supérieure. On constate l'absence totale de franges dans le bloc de droite, ce qui traduit l'homogénéité du champ de contrainte (cf. chapitre IX, section 2). Dans le bloc de gauche des concentrations de contraintes sont apparentes autour des points d'application des charges concentrées, avec de forts gradients (franges très rapprochées) comme d'ailleurs sur la figure 21 ; mais une bonne homogénéité du champ de contrainte règne dans le corps du bloc. (À noter qu'au voisinage des forces concentrées, le comportement du matériau n'est plus élastique).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Récapitulatif des formules essentielles

• **Évolution thermoélastique quasi-statique**

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) + \rho(\underline{x},t)\,\underline{F}(\underline{x},t) = 0 & (\Omega_t) \\ [\![\, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,]\!]\,.\,\underline{n}(\underline{x}) = 0 & (\Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}}) \end{cases}$$

$$\rho_0(\underline{X})/\rho(\underline{x},t) = \det \underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$$

$$\begin{cases} \varphi_p(\underline{\underline{e}}) = 0 \quad , \quad p = 1,\dots,n \quad (1 \le n \le 6) \\ \underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \dfrac{\partial \psi(T,\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} + \eta_p \dfrac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\pi}}(\underline{X},t) = \frac{\rho_0(\underline{X})}{\rho(\underline{x},t)}\,\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)\,.\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\,.\,{}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(\underline{x},t)\,.\,n_j(\underline{x}) = T_i^{\mathrm{d}}(\underline{x},t) & (S_{T_i}(t), i = 1,\,2,\,3) \\ U_i(\underline{x},t) = U_i^{\mathrm{d}}(\underline{x},t) & (S_{U_i}(t), i = 1,\,2,\,3) \\ S_{U_i}(t) \cup S_{T_i}(t) = \partial\Omega_t \quad , \quad S_{U_i}(t) \cap S_{T_i}(t) = \varnothing\ . \end{cases}$$

• **Hypothèses des petites perturbations** (H.P.P)

$$\| \underline{\underline{\nabla \xi}} \| \ll 1 \Rightarrow \| \underline{\underline{e}} \| \ll 1$$

$$|\,\tau\,| \text{ petit} \quad , \quad |\,\underline{\xi}\,| \text{ petit}$$

• **Équilibre thermoélastique** (état initial naturel)

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{F} = 0 & (\Omega) \\ [\![\, \underline{\underline{\sigma}}\,]\!]\,.\,\underline{n} = 0 & (\Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}}) \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}}\,\tau$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{\operatorname{grad} \xi}} + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\operatorname{grad} \xi}})/2$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij}\,n_j = T_i^{\mathrm{d}} & (S_{T_i}, i = 1,\,2,\,3) \\ \xi_i = \xi_i^{\mathrm{d}} & (S_{\xi_i}, i = 1,\,2,\,3) \\ S_{\xi_i} \cup S_{T_i} = \partial\Omega \quad , \quad S_{\xi_i} \cap S_{T_i} = \varnothing \end{cases}$$

.../...

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- **Matériau élastique, linéaire, isotrope, homogène ; équilibre isotherme ; état initial naturel**

Méthode des déplacements

équation de Navier

$$(\lambda+\mu)\,\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,(\mathrm{div}\ \underline{\xi}) + \mu\,\mathrm{div}\,(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ \underline{\xi}) + \rho\,\underline{F} = 0$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu\,\Delta\xi_i + \rho\,F_i = 0$$

Méthode des contraintes

équations de Beltrami ($\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ F = 0$)

$$(1+\nu)\,\underline{\underline{\mathrm{div}}}\,(\mathrm{grad}\ \underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\big(\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}})\big) = 0$$

$$(1+\nu)\Delta\sigma_{ij} + \frac{\partial^2(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}})}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

- **Torsion d'une barre cylindrique d'axe Oz**

$$\begin{cases} \Delta_2\varphi = 0 & \text{sur } S \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} + n_2 x - n_1 y = 0 & \text{sur } \partial S \end{cases}$$

$$J = \int_S \big(x(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x) - y(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y)\big)\,\mathrm{d}a = \int_S \big((\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x)^2 + (\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y)^2\big)\,\mathrm{d}a$$

$$\underline{\xi} = \frac{\mathcal{C}}{\mu J}\big(-z\,y\,\underline{e}_x + z\,x\,\underline{e}_y + \varphi(x,y)\,\underline{e}_z\big)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mathcal{C}}{J}(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y)(\underline{e}_x\otimes\underline{e}_z + \underline{e}_z\otimes\underline{e}_x) + \frac{\mathcal{C}}{J}(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x)(\underline{e}_y\otimes\underline{e}_z + \underline{e}_z\otimes\underline{e}_y)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2\mu}\,\underline{\underline{\sigma}}$$

$$\mathcal{C} = \mu J\,\alpha$$

Barre de section circulaire

$$\underline{\xi} = \alpha\,z\,r\underline{e}_\theta$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mu\,\alpha\,r(\underline{e}_\theta\otimes\underline{e}_z + \underline{e}_z\otimes\underline{e}_\theta)$$

$$J = \pi R^4/2$$

.../...

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

• **Rappel des formules en coordonnées cylindriques**

$$\underline{\xi} = \xi_r \, \underline{e}_r + \xi_\theta \, \underline{e}_\theta + \xi_z \, \underline{e}_z$$

Composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\xi_r}{r} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \xi_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_\theta}{\partial r} - \frac{\xi_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \xi_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \xi_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_\theta}{\partial z}\right) \quad \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial z} + \frac{\partial \xi_z}{\partial r}\right)$$

$$\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \mathrm{div}\ \underline{\xi} = \frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\xi_r}{r} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z}$$

Équations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho F_r = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \rho F_\theta = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho F_z = 0$$

.../...

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

• **Rappel des formules en coordonnées sphériques**

$$\underline{\xi} = \xi_r \, \underline{e}_r + \xi_\theta \, \underline{e}_\theta + \xi_\varphi \, \underline{e}_\varphi$$

Composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\xi_r}{r} \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\xi_\theta}{r}\,\cot\,\theta + \frac{\xi_r}{r}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_\theta}{\partial r} - \frac{\xi_\theta}{r}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\cot\,\theta}{r}\xi_\varphi\right)$$

$$\varepsilon_{\varphi r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} - \frac{\xi_\varphi}{r}\right)$$

$$\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}} = \mathrm{div}\,\underline{\xi} = \frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\xi_\theta}{r}\,\cot\,\theta + 2\frac{\xi_r}{r}$$

Équations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta}\,cot\,\theta) + \rho\, F_r = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\big((\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})\,\cot\,\theta + 3\sigma_{r\theta}\big) + \rho\, F_\theta = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}(3\sigma_{\varphi r} + 2\sigma_{\varphi\theta}\,\cot\,\theta) + \rho\, F_\varphi = 0$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Exercices

Dans tous les énoncés suivants, l'état initial du système étudié est supposé ***naturel***.

VIII.1 - Étudier l'équilibre d'un solide constitué d'un matériau homogène, linéairement élastique, isotrope, soumis sur tout son contour à des efforts de surface normaux $\underline{T}^{\mathrm{d}} = -p\,\underline{n}$ (p constante), en l'absence de forces de masse, dans l'hypothèse des petites perturbations.

Éléments de réponse :
Méthode des contraintes :
$\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$,
$\underline{\xi} = -p\,\underline{x}\,(1-2\nu)/E$ + déplacement rigidifiant.
(Cf. chapitre IX, (6.23)).

VIII.2 - Étudier, dans l'hypothèse des petites perturbations, l'équilibre d'un solide constitué d'un matériau homogène, linéairement élastique, isotrope, immergé et immobile dans un fluide de même masse volumique (ρ) que lui, dans un champ de forces de masse uniforme (pesanteur).

Éléments de réponse :

- Efforts sur le solide :
  au contour $\underline{T}^{\mathrm{d}} = \rho\,g\,z\,\underline{n}$ (cf. Ex. V.2),
  forces de masse $\underline{F} = -\rho\,g\,\underline{e}_z$ (z verticale ascendante).
- Méthode des contraintes :
  $\underline{\underline{\sigma}} = \rho\,g\,z\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$, $\underline{\xi} = \dfrac{1-2\nu}{E}\rho\,g\,z\,(x\underline{e}_x + y\underline{e}_y) + \dfrac{1-2\nu}{2E}\rho\,g\,(z^2 - x^2 - y^2)\underline{e}_z$.

Commentaire.
L'intégration du champ de déformation pour obtenir $\underline{\xi}$ est identique à celle faite dans Ex. II.10. En particulier une plaque mince horizontale est déformée en calotte sphérique dont la concavité est tournée vers $z < 0$.

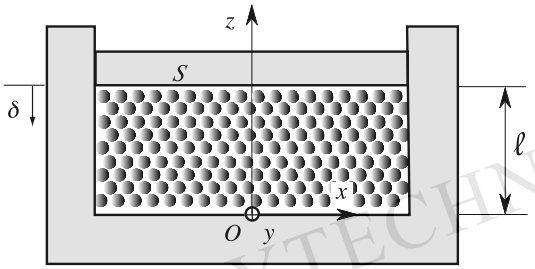
VIII.3 - Essai œdométrique. Un bloc cylindrique de section S et de hauteur ℓ, constitué d'un matériau homogène, linéairement élastique, isotrope, est placé à l'intérieur d'un conteneur cylindrique indéformable de même section. On suppose que le contact entre le bloc et le conteneur est sans frottement, et on néglige les forces de masse. Un piston indéformable agissant sans frottement sur la surface supérieure du bloc est soumis à un déplacement vertical descendant d'amplitude δ, le conteneur étant immobile. Dans l'hypothèse des petites perturbations, déterminer les champs de déplacement et de contrainte dans le bloc élastique ainsi que le torseur des efforts extérieurs à exercer sur le piston pour obtenir l'enfoncement δ.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Éléments de réponse :

- Méthode des déplacements :
  $\underline{\xi} = -\delta(z/\ell)\,\underline{e}_z$
  $\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z - q(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y)$
  $p = E\,\dfrac{\delta}{\ell}\,\dfrac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = (\lambda+2\mu)\dfrac{\delta}{\ell}$, $q = E\,\dfrac{\delta}{\ell}\,\dfrac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.
- On doit exercer des efforts extérieurs équivalents à une force verticale descendante appliquée au centre de S et d'intensité $Q = p\,S$.

Commentaire.
Cet exercice schématise l'essai œdométrique utilisé en mécanique des sols.



VIII.4 - Étudier, dans l'hypothèse des petites perturbations, l'équilibre d'un solide constitué d'un matériau homogène, linéairement élastique, ***orthotrope***, soumis sur tout son contour à des efforts de surface normaux de la forme $\underline{T}^{\mathrm{d}} = -p\,\underline{n}$ (p constante), en l'absence de forces de masse. Cas du matériau orthotrope de révolution et du matériau à symétrie cubique.

Éléments de réponse :

- Méthode des contraintes en suivant la démarche de la figure 10 où $(4.2)^{-1}$ est remplacée par la loi de comportement du matériau linéairement élastique, orthotrope.
  $\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$
  $\underline{\xi} = -p\,(\dfrac{1-\nu_{12}-\nu_{13}}{E_1})x_a\,\underline{a} - p\,(\dfrac{1-\nu_{21}-\nu_{23}}{E_2})x_b\,\underline{b} - p(\dfrac{1-\nu_{31}-\nu_{32}}{E_3})x_c\,\underline{c}$
  + déplacement rigidifiant.
  ($\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$: vecteurs unitaires du repère d'orthotropie).
- Avec le matériau orthotrope de révolution : même $\underline{\underline{\sigma}}$ et
  $\underline{\xi} = -p\,(\dfrac{1-\nu}{E} - \dfrac{\nu'}{E'})(x_a\,\underline{a} + x_b\,\underline{b}) - p\,(\dfrac{1-2\nu'}{E'})x_c\,\underline{c}$ + déplacement rigidifiant.
- Avec le matériau à symétrie cubique (Ex. VII.7) pour lequel
  $\varepsilon_{aa} = \dfrac{1}{E}\,\sigma_{aa} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{bb}+\sigma_{cc})$ et permutation circulaire sur a, b, c,
  $\varepsilon_{ab} = \dfrac{1}{2G}\,\sigma_{ab}$ et permutation circulaire sur a, b, c,
  on a :
  même champ $\underline{\underline{\sigma}}$ et
  $\underline{\xi} = -p\,\underline{x}\,(1-2\nu)/E$ + déplacement rigidifiant, comme pour le matériau isotrope (Ex. VIII.1).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

VIII.5 - Torsion d'une barre de section elliptique. Étudier, dans l'hypothèse des petites perturbations, la torsion d'une barre cylindrique de hauteur ℓ dont la section droite est elliptique d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$, constituée d'un matériau homogène linéairement élastique isotrope. (Le problème est posé comme au paragraphe 7.1).

Éléments de réponse :

- $\psi_1 = -K\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2})$ est solution de (7.46, 7.48) ;
  $\psi = (x^2-y^2)(a^2-b^2)/2(a^2+b^2) \quad , \quad \varphi = -x\,y\,(a^2-b^2)/(a^2+b^2)$
  $f = \varphi + \mathrm{i}\psi = \mathrm{i}\,(x+\mathrm{i}y)^2(a^2-b^2)/2(a^2+b^2)$.
  $\xi_x = -\alpha\,z\,y$, $\xi_y = \alpha\,z\,x$, $\xi_z = -\alpha\,x\,y\,(a^2-b^2)/(a^2+b^2)$.
  $J = \pi a^3b^3/(a^2+b^2)$
  $\sigma_{zx} = -2\,\mathcal{C}\,\dfrac{y}{\pi ab^3} \quad , \quad \sigma_{zy} = 2\,\mathcal{C}\,\dfrac{x}{\pi a^3 b}$
  $|\underline{\tau}| = \dfrac{2\,\mathcal{C}}{\pi ab}\left(\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}\right)^{1/2}$ est maximale sur le contour de la section, aux extrémités du petit axe.
  La limite initiale d'élasticité de la barre est :
  $\mathcal{C}_0 = \dfrac{\sigma_0}{4}\pi a\,b^2$ avec le critère de Tresca et $\mathcal{C}_0 = \dfrac{k}{2}\pi a\,b^2$ avec le critère de von Mises.
- Les lignes de cisaillement ($\psi_1 = $ Cte) sont les ellipses homothétiques du contour de la section par rapport au centre de celle-ci.

Commentaire.
La fonction φ donne (au facteur $\mathcal{C}/J$ près) le gauchissement de la section, dont le signe est alterné suivant les quadrants du plan (x, y).

On notera que la contrainte de cisaillement maximale dans la pièce se produit au contour de la section aux extrémités du ***petit*** axe contrairement à ce que l'on aurait pu imaginer à partir de la solution pour la section circulaire où $|\underline{\tau}|$ est proportionnelle au rayon-vecteur.

VIII.6 - Torsion d'un tube. Étudier, dans l'hypothèse des petites perturbations, la torsion d'un tube cylindrique (profil creux fermé) dont la section droite est limitée par les ellipses concentriques homothétiques $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ (extérieure), $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-m^2=0$ ($0<m<1$, intérieure), et qui est constitué d'un matériau homogène, linéairement élastique, isotrope.

Éléments de réponse :

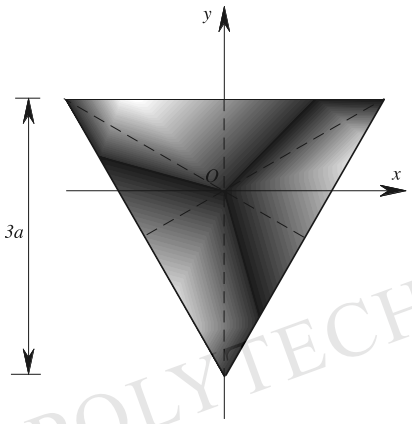
- La section droite n'est pas simplement connexe. On aborde la solution par la méthode des déplacements.
  La fonction de gauchissement φ trouvée en Ex. VIII.5 est encore solution de (7.10) et (7.12) ici : on vérifie qu'elle satisfait (7.12) sur l'ellipse frontière intérieure de la section droite.
  Champ de déplacement identique à Ex. VIII.5, en fonction de la rotation différentielle α .
  $J = \pi\dfrac{a^3b^3}{a^2+b^2}(1-m^4)$
  $\sigma_{zx} = -2\,\mathcal{C}\dfrac{y}{\pi ab^3(1-m^4)} \quad \sigma_{zy} = 2\,\mathcal{C}\dfrac{x}{\pi a^3 b(1-m^4)}$.
  $|\underline{\tau}|$ est maximale sur le contour extérieur de la section, aux extrémités du petit axe.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Commentaire.

Le raisonnement ci-dessus se généralise pour la torsion des tubes cylindriques dont le contour intérieur coïncide avec une ligne de cisaillement de la section supposée pleine.

VIII.7 - Torsion d'une barre à section triangulaire. Étudier, dans l'hypothèse des petites perturbations, la torsion d'une barre cylindrique constituée d'un matériau homogène linéairement élastique isotrope, et dont la section droite est un triangle équilatéral de hauteur $3a$.



Éléments de réponse :

- La solution s'obtient à partir de $f = \varphi + \mathrm{i}\psi = \dfrac{1}{6a}(x + \mathrm{i}y)^3$:

  $\psi = \dfrac{1}{6a}(3x^2y - y^3)$, $\psi_1 = K(\psi - \dfrac{x^2+y^2}{2})$ satisfait (7.46, 7.48) ; $\varphi = \dfrac{1}{6a}(x^3 - 3xy^2)$.

  $J = \dfrac{9\sqrt{3}}{5}a^4$, $\sigma_{zx} = \dfrac{5\,\mathcal{C}}{9\sqrt{3}\,a^4}(\dfrac{x^2-y^2}{2a} - y)$, $\sigma_{zy} = \dfrac{5\,\mathcal{C}}{9\sqrt{3}\,a^4}(\dfrac{-xy}{a} + x)$.

- La contrainte de cisaillement $|\underline{\tau}|$ a pour module :

  $|\underline{\tau}| = \dfrac{5\,\mathcal{C}}{18\sqrt{3}\,a^5}\big((x^2+y^2)^2 + 4a^2(x^2+y^2) - 4ay(3x^2-y^2)\big)^{1/2}$.

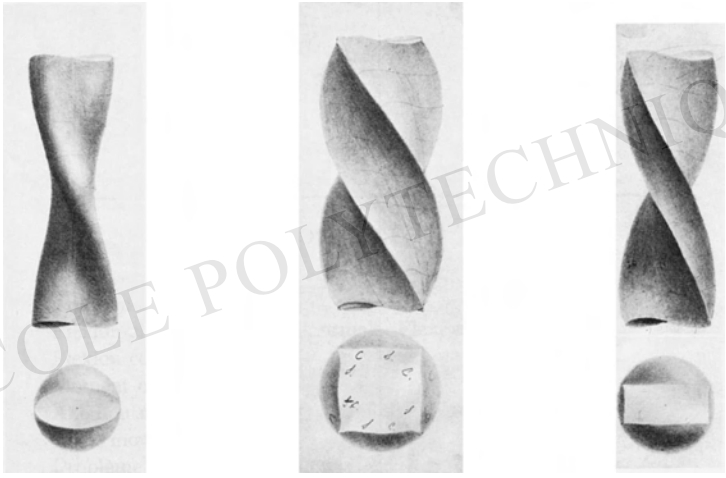
  La recherche du maximum de $|\underline{\tau}|$ sur la section, plus commode en coordonnées polaires, montre que $|\underline{\tau}|$ est maximale sur le contour aux points les plus proches de O (pieds des hauteurs). On trouve : $|\underline{\tau}|_{\max} = 5\,\mathcal{C}/6\sqrt{3}\,a^3$. La limite initiale d'élasticité de la barre est : $\mathcal{C}_0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{5}a^3\sigma_0$, avec le critère de Tresca et $\mathcal{C}_0 = \dfrac{6\sqrt{3}}{5}a^3k$ avec le critère de von Mises.

Commentaire.

On remarque le gauchissement de la section droite donné par la fonction φ (au facteur $\mathcal{C}/J$ près) : son signe est alterné dans les régions limitées par les hauteurs du triangle.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE



Torsion de barres cylindriques à sections elliptique, carrée, rectangulaire.
Dessins originaux de Saint Venant (1855) publiés dans le Résumé des leçons données par Navier *à l'École des ponts et chaussées (1864), pages 277 et 300.*
Document communiqué par la Bibliothèque de l'École polytechnique, Fonds Saint Venant.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Chapitre IX

Quelques thèmes classiques en élasticité tridimensionnelle

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MOTS CLÉS

Traction-compression.
Flexion circulaire. Flexion normale. Flexion déviée.
Flexion composée.
Moment de flexion.
Axe neutre.
Fibre moyenne. Courbure.
Problème de Saint Venant.
Enveloppes sphériques et cylindriques sous pression.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En bref...

Quatre problèmes d'équilibre élastique isotherme pour des solides constitués d'un matériau homogène isotrope sont présentés. L'état initial du système sous chargement nul pris comme référence est, dans tous les cas, supposé naturel.

Traction - compression d'une barre cylindrique. **La solution, obtenue pour des conditions aux extrémités spécifiées, est étendue par le principe de Saint Venant à la partie courante d'une barre suffisamment élancée dont les torseurs des efforts appliqués aux extrémités se réduisent chacun à une force, parallèle à l'axe de la barre, exercée au centre de la section. Le champ de contrainte solution est uniforme : il est uniaxial, de traction ou de compression, parallèle à la barre. Le champ de déplacement, dans le cas de la traction par exemple, met en évidence l'allongement de la barre proportionnel à la longueur de celle-ci et à la force appliquée, et la contraction transversale, constante le long de la barre et proportionnelle à la force de traction** (section 2).

Flexion normale d'une barre cylindrique. **La solution, établie pour des conditions aux limites précises, est étendue par le principe de Saint Venant à la partie courante d'une barre suffisamment élancée à laquelle sont appliqués des efforts aux extrémités dont les torseurs se réduisent chacun à un moment porté par un *axe principal d'inertie* de la section droite. Le champ de contrainte est uniaxial de traction et de compression parallèle à la barre ; il est invariant par translation le long de la barre ; il varie linéairement dans la section droite et s'annule sur *l'axe neutre* qui coïncide avec l'axe d'inertie portant le moment de flexion appliqué. Le champ de déplacement met en évidence que les sections droites demeurent planes et orthogonales aux fibres dont les déformées sont *circulaires* et *orthogonales* au moment de flexion. La rotation différentielle des sections droites autour de l'axe neutre, et la courbure des fibres déformées, sont proportionnelles au moment de flexion appliqué** (section 3).

La combinaison linéaire des solutions obtenues pour des moments de flexion portés par l'un ou l'autre des axes d'inertie principaux de la section droite permet de résoudre le problème de la flexion pour un moment de direction quelconque. La solution présente les mêmes propriétés de linéarité. Les sections droites demeurent planes et orthogonales aux déformées

des fibres qui sont circulaires. En revanche, l'axe neutre, sur lequel s'annule le champ de contrainte et autour duquel tourne la section droite, ne coïncide plus, en général, avec la direction du moment de flexion appliqué. La *flexion* est *déviée* (section 4).

Ces problèmes sont résolus par la méthode des contraintes.

Le problème de l'équilibre d'une *enveloppe sphérique* soumise à des *pressions intérieure et extérieure uniformes* est résolu par la méthode des déplacements. La solution est à symétrie sphérique : le champ de déplacement est radial et le champ de contrainte admet en chaque point la direction radiale et les directions orthoradiales pour directions principales (section 6).

Le problème de l'équilibre d'un *tube cylindrique* sous *pressions intérieure et extérieure uniformes* est résolu de manière analogue. La solution est à symétrie cylindrique : le champ de déplacement a une composante radiale fonction de la distance à l'axe du tube et une composante parallèle au tube proportionnelle à la cote ; le champ de contrainte admet, en chaque point, pour directions principales les directions de la base locale des coordonnées cylindriques (section 7).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Principales notations

Notation	Signification	1ère formule
$\underline{\mathcal{X}}$	résultante sur la section droite	(2.20)
$\mathcal{X}_0^+, \mathcal{X}_0^-$	limites initiales d'élasticité de la barre en traction et compression	(2.23)
I_y , I_z	moments principaux d'inertie (géométrique) de la section droite	(3.2)
$\underline{\mathcal{M}}$	moment de flexion	(3.13)
$\mathcal{M}_z$	composante de $\underline{\mathcal{M}}$ suivant $\underline{e}_z$	(3.13)
$\underline{\omega}(x)$	rotation de la section droite	(3.15)
χ	courbure des fibres	(3.18)
$(\mathcal{M}_z)_0^+, (\mathcal{M}_z)_0^-$	limites initiales d'élasticité de la barre en flexion normale	(3.21)
$\mathcal{M}_y$	composante de $\underline{\mathcal{M}}$ suivant $\underline{e}_y$	(4.1)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Présentation générale 151
2 Traction-compression d'une barre cylindrique 152
2.1 Position du problème 152
2.2 Forme de la solution 152
2.3 Commentaires 154
2.4 Limite initiale d'élasticité de la barre en traction ou compression simple 156
2.5 Traction-torsion d'une barre cylindrique 156
3 Flexion normale d'une barre cylindrique 158
3.1 Position du problème de flexion normale 158
3.2 Forme de la solution 159
3.3 Commentaires 161
3.4 Limite initiale d'élasticité de la barre en flexion normale 163
3.5 Application du principe de Saint-Venant 164
4 Flexion déviée d'une barre cylindrique 165
4.1 Flexion normale à l'axe Oy 165
4.2 Flexion déviée 166
4.3 Commentaires 167
5 Flexion composée d'une barre cylindrique 168
5.1 Définition 168
5.2 Solution du problème et commentaires 168
5.3 Problème de Saint Venant 169
5.4 Applications pratiques 170
6 Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression . . 172
6.1 Position du problème 172
6.2 Forme de la solution 172
6.3 Commentaires 174
6.4 Limite initiale d'élasticité de la sphère creuse sous pression 176
7 Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression 177
7.1 Position du problème 177
7.2 Forme de la solution 178
7.3 Commentaires 180
Récapitulatif des formules essentielles 181
Exercices 183

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quelques thèmes classiques en élasticité tridimensionnelle

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Présentation générale

On se propose dans ce chapitre de présenter quelques problèmes classiques d'équilibre élastique ***isotherme*** linéarisés pour le matériau homogène, isotrope. L'état initial du système sous chargement nul, pris comme référence, est dans tous les cas supposé naturel. On s'attachera essentiellement aux aspects suivants :
– position du problème (notamment : conditions aux limites),
– forme de la solution,
– commentaires éventuels (autres façons de poser le problème, ...),
– applications pratiques (notamment : limite d'élasticité initiale du système, ...).

En application du résultat énoncé au chapitre VIII (§ 4.2), compte tenu de l'homogénéité du matériau constitutif, la solution possède les propriétés de régularité :

$$\begin{cases} \underline{\xi} \text{ continu et continûment différentiable sur } \Omega \ , \\ \underline{\underline{\sigma}} \text{ continu et continûment différentiable, par morceaux .} \end{cases}$$

On rappelle, pour faciliter les références dans les sections suivantes, les équations du chapitre VIII, qui seront les plus fréquemment utilisées.

• Équation d'équilibre

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{F} = 0 \quad \text{sur } \Omega \ , \tag{1.1}$$

• pour la méthode des déplacements dans le cas du matériau homogène et isotrope : l'équation de Navier

$$(\lambda + \mu)\, \underline{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \underline{\xi}) + \mu \operatorname{div}(\underline{\underline{\operatorname{grad}\, \xi}}) + \rho \underline{F} = 0 \quad \text{sur } \Omega \ , \tag{1.2}$$

• Pour la méthode des contraintes dans le cas du matériau homogène et isotrope : les équations de Beltrami (avec $\underline{\underline{\operatorname{grad}\, F}} = 0$)

$$(1 + \nu)\, \underline{\underline{\operatorname{div}}}(\operatorname{grad} \underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{\operatorname{grad}}}\big(\operatorname{grad}(\operatorname{tr} \underline{\underline{\sigma}})\big) = 0 \quad \text{sur } \Omega \ . \tag{1.3}$$ [(1)]

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

(1) Comme indiqué au chapitre VIII (§ 4.1) les notations sont désormais allégées. Toutes les équations sont écrites sur la configuration initiale : $\Omega, \partial\Omega, \rho$ désignent en fait $\Omega_0, \partial\Omega_0, \rho_0$; S_{T_i} et S_{ξ_i} pour les conditions aux limites désignant $S_{T_i}(0)$ et $S_{\xi_i}(0)$.

2 Traction-compression d'une barre cylindrique

2.1 Position du problème

On considère une barre cylindrique parallèle à Ox, de section droite S, et de longueur ℓ. On désigne par S_0 et S_ℓ les sections d'extrémités (figure 1). L'origine O et les directions des axes Oy et Oz sont quelconques dans le plan de S_0 ($Oxyz$ orthonormé).

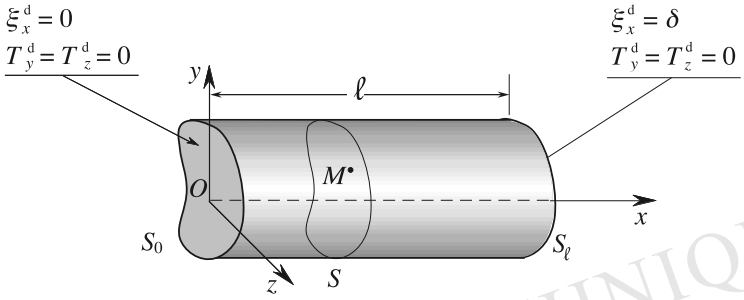


Figure 1 – Traction-compression d'une barre cylindrique

On désigne par ξ_x, ξ_y, ξ_z les composantes du déplacement $\underline{\xi}$ au point courant M de la section droite S.

Les données ont la forme suivante.

• Forces de masse nulles :

$$\underline{F} = 0 \,. \tag{2.1}$$

• Surface latérale libre de contrainte :

$$\underline{\underline{T}}^{\rm d} = 0 \qquad \text{sur } (\partial\Omega - S_0 - S_\ell) \,. \tag{2.2}$$

• Aux extrémités : S_0 et S_ℓ sont des surfaces $S_{\xi_x}, S_{T_y}, S_{T_z}$,

$$T_y^{\rm d} = 0 \,,\ T_z^{\rm d} = 0 \text{ sur } S_0 \text{ et } S_\ell \tag{2.3}$$

$$\xi_x^{\rm d} = 0 \text{ sur } S_0 \tag{2.4}$$

$$\xi_x^{\rm d} = \delta \text{ sur } S_\ell \tag{2.5}$$

où δ est la donnée cinématique du problème.

2.2 Forme de la solution

Résolution par la méthode des contraintes.

Champ de contrainte ***uniaxial homogène*** de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \, \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \tag{2.6}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

(ou encore $\sigma_{xx} = \sigma$, autres $\sigma_{ij} = 0$ dans le repère indiqué), où σ est un paramètre à déterminer en fonction des données du problème.

Il satisfait évidemment les conditions (2.2) et (2.3), les équations d'équilibre (1.1) compte tenu de (2.1) et les équations de Beltrami $(1.3)^{(2)}$.

Le champ de déformation associé par la loi de comportement élastique linéaire, isotrope, est ***homogène mais n'est pas uniaxial*** :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{E}\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \nu\frac{\sigma}{E}\,(\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \tag{2.7}$$

ou encore $\varepsilon_{xx} = \dfrac{\sigma}{E}$, $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu\dfrac{\sigma}{E}$, autres $\varepsilon_{ij} = 0$.

L'intégration du champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ donne le champ de déplacement $\underline{\xi}$:

$$\underline{\xi} = \frac{\sigma}{E}\,x\,\underline{e}_x - \nu\frac{\sigma}{E}\,(y\,\underline{e}_y + z\,\underline{e}_z) + \underline{\lambda} + \underline{\omega} \wedge \underline{x} \tag{2.8}$$

où $\underline{\lambda}$ et $\underline{\omega}$ sont respectivement les vecteurs translation et rotation d'un déplacement rigidifiant arbitraire dans l'hypothèse des petites perturbations (H.P.P.).

Les conditions aux limites (2.4) et (2.5) imposent

$$\underline{\lambda} \cdot \underline{e}_x = 0 \quad , \quad \underline{\omega} = \omega\,\underline{e}_x \tag{2.9}$$

et déterminent la valeur du paramètre σ en fonction de la donnée δ :

$$\sigma = E\,\frac{\delta}{\ell}\,. \tag{2.10}$$

On obtient finalement, pour le champ de contrainte :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = E\,\frac{\delta}{\ell}\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x} \tag{2.11}$$

et pour le champ de déformation

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\delta}{\ell}\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \nu\frac{\delta}{\ell}\,(\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)\,. \tag{2.12}$$

Le champ de déplacement est déterminé à une translation parallèle à Oyz et une rotation (H.P.P.) autour de Ox près :

$$\boxed{\underline{\xi} = \frac{\delta}{\ell}\big(x\,\underline{e}_x - \nu(y\,\underline{e}_y + z\,\underline{e}_z)\big)} \tag{2.13}$$

$^{(2)}$Suivant la présentation classique de ce problème on fait ici référence aux équations de Beltrami. Celles-ci sont trivialement satisfaites car le champ de contrainte est constant. On peut bien évidemment se dispenser d'invoquer ces équations et résoudre le problème en appliquant directement les schémas de résolution de la figure 10 du chapitre VIII : compte tenu de l'homogénéité de la barre, le champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ associé à $\underline{\underline{\sigma}}$ par la loi de comportement élastique est uniforme et donc intégrable.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Ce champ est univoque même si la section droite S de la barre n'est pas simplement connexe, c'est-à-dire qu'il satisfait alors la condition de fermeture (chapitre II, § 6.3 ; chapitre VIII, § 6.1).

2.3 Commentaires

Interprétation physique du module de Young et du coefficient de Poisson

Le problème étudié modélise l'expérience de traction simple (chapitre VII, § 2.2). On voit que le champ de contrainte étant uniaxial homogène, le champ de déformation est également homogène mais n'est pas uniaxial.

On note que la solution obtenue est valable quelle que soit la forme de la section droite S de la barre, simplement connexe ou non.

Le coefficient de Poisson caractérise les déformations transversales dans cette expérience tandis que le module de Young mesure le rapport entre sollicitation et réponse axiales :

$$\sigma_{xx} = \sigma = E\,\frac{\delta}{\ell} = E\,\varepsilon_{xx} \tag{2.14}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu\,\varepsilon_{xx}\ . \tag{2.15}$$

On remarque la présence du signe « moins » dans (2.15). Dans la pratique l'expérience montre que les valeurs négatives de ν sont exceptionnelles (cf. chapitre VII, § 5.5), c'est-à-dire que les déformations principales dans le plan Oxy sont habituellement du signe contraire de celui de la déformation selon Ox : il y a raccourcissement selon Oy et Oz s'il y a allongement selon Ox (le résultat est vrai pour toute direction du plan Oyz car toutes les directions y sont principales pour $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et correspondent à la même valeur propre égale à $-\nu\,\varepsilon_{xx}$).

On a établi au chapitre II (§ 4.2) la formule de transport d'une surface orientée qui s'écrit, en introduisant le déplacement $\underline{\xi}$ et compte tenu des hypothèses de linéarisation :

$$\underline{\mathrm{d}a} = (1 + \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}})(\underline{\underline{\mathbb{1}}} - {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\mathrm{grad}\,\xi}})\,.\,\underline{\mathrm{d}A} \tag{2.16}$$

soit ici :

$$\underline{\mathrm{d}a} = \big(1 + (1-2\nu)\frac{\delta}{\ell}\big)\big(\underline{\underline{\mathbb{1}}} - \frac{\delta}{\ell}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \nu\,\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \nu\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)\big)\,.\,\underline{\mathrm{d}A}\ . \tag{2.17}$$

La transformation est homogène. On applique la formule (2.17) à une section droite pour laquelle $\underline{A} = S\underline{e}_x$, on obtient :

$$\underline{a} = S\,\underline{e}_x(1 - 2\,\nu\frac{\delta}{\ell})\ , \tag{2.18}$$

sur laquelle on voit que la section droite initiale, qui reste plane puisque la transformation est homogène, demeure parallèle à Oyz (évident sur (2.13)), et que la variation relative de section est :

$$\frac{a - A}{A} = -2\,\nu\frac{\delta}{\ell}\ . \tag{2.19}$$

Puisque, dans la pratique, ν est positif cela implique que, en traction, l'aire de la section droite diminue, et qu'en compression elle augmente.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On rappelle que la variation relative de volume (linéarisée) est $(\Omega - \Omega_0)/\Omega_0 = \operatorname{div} \underline{\xi} = \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}$, égale ici à $(\Omega - \Omega_0)/\Omega_0 = (1-2\,\nu)\dfrac{\delta}{\ell}$, qui est donc toujours du signe de δ puisque $\nu \leq 1/2$ (cf. chapitre VII, § 5.5) : il y a augmentation de volume en traction et diminution en compression.

Efforts surfaciques sur les extrémités S_0 et S_ℓ

Les efforts surfaciques sur S_0 et S_ℓ sont uniformément répartis et l'on a, pour le vecteur contrainte : $\underline{T} = E\,\dfrac{\delta}{\ell}\,\underline{e}_x$ sur S_ℓ et $\underline{T} = -E\,\dfrac{\delta}{\ell}\,\underline{e}_x$ sur S_0 .

Le torseur des efforts surfaciques appliqués sur S_ℓ est celui d'une force (résultante) parallèle à Ox appliquée au centre[(3)] de la section :

$$\underline{\mathcal{X}} = SE\,\frac{\delta}{\ell}\,\underline{e}_x \quad \text{sur } S_\ell \tag{2.20}$$

(force égale et opposée appliquée au centre de S_0).

On retiendra la relation :

$$\boxed{\frac{\mathcal{X}}{S} = E\,\frac{\delta}{\ell}} \tag{2.21}$$

Autres façons de poser le problème

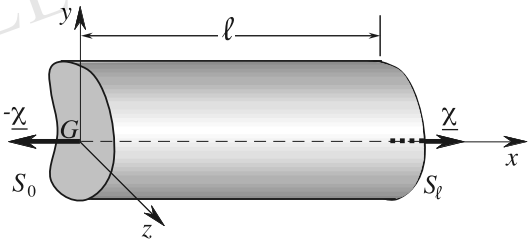


Figure 2 – Traction-compression d'une barre cylindrique : application du principe de Saint Venant

À partir des résultats précédents et du théorème d'unicité, on voit que les mêmes champs $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ seront obtenus si l'on pose le problème en modifiant les conditions (2.4) et (2.5) sur S_0 et S_ℓ de la façon suivante :

Le vecteur $\underline{T}$ est complètement donné sur S_0 et S_ℓ et l'on suppose que ces données sont :

$$\begin{cases} \underline{T}^{\mathrm{d}} = \dfrac{\mathcal{X}}{S}\,\underline{e}_x & \text{sur } S_\ell \\ \underline{T}^{\mathrm{d}} = -\dfrac{\mathcal{X}}{S}\,\underline{e}_x & \text{sur } S_0 \end{cases} \tag{2.22}$$

(3) appelé aussi « centre d'inertie géométrique » ou plus simplement « centre d'inertie » sans qu'aucune considération de masse n'intervienne ici.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

efforts surfaciques uniformes sur les extrémités, avec $\mathcal{X}$ défini par (2.21).

Compte tenu de la forme (2.22) des conditions aux extrémités, les champs $\underline{\xi}$ solutions de ce nouveau problème sont donnés par (2.13) ***modulo*** un champ rigidifiant (H.P.P.) sans aucune restriction.

Enfin, en appliquant le ***principe de Saint Venant*** (chapitre VIII, § 8), on admet que la solution ci-dessus demeure valable en contrainte (et déformation), aux effets d'extrémités près, pour une barre suffisamment élancée si l'on applique à l'extrémité S_ℓ (respectivement S_0) des efforts surfaciques dont le torseur est celui d'une ***force*** $\underline{\mathcal{X}}$ (resp. $-\underline{\mathcal{X}}$), parallèle à Ox, ***appliquée au centre*** de S_ℓ (resp. de S_0) (figure 2).

2.4 Limite initiale d'élasticité de la barre en traction ou compression simple

La problématique est identique à celle exposée au chapitre VIII (§ 7.7) à propos de la torsion d'une barre cylindrique. L'analyse est simplifiée par l'homogénéité du champ de contrainte (2.6) de traction simple ou de compression simple.

On désigne par σ_0^+ et σ_0^- respectivement les limites initiales d'élasticité du matériau constitutif isotrope, homogène, en traction simple et en compression simple. Les limites initiales d'élasticité de la barre sont alors :

$$\text{(2.23)} \qquad \begin{cases} \mathcal{X}_0^+ = \sigma_0^+ S & \text{en traction} \\ -\mathcal{X}_0^- = -\sigma_0^- S & \text{en compression ;} \end{cases}$$

• avec le critère de Tresca (chapitre VI, § 4.3) :

$$\text{(2.24)} \qquad \mathcal{X}_0^+ = \mathcal{X}_0^- = \sigma_0 \, S$$

• avec le critère de von Mises (chapitre VI, § 4.4) :

$$\text{(2.25)} \qquad \mathcal{X}_0^+ = \mathcal{X}_0^- = k\sqrt{3}\, S \, .$$

2.5 Traction-torsion d'une barre cylindrique

Le principe de superposition (chapitre VIII, § 3.2) permet, à partir des résultats précédents et de ceux établis au chapitre VIII (section 7) pour le problème de la torsion, d'obtenir la solution du problème de traction (ou compression) et torsion simultanées d'une barre cylindrique.

Le couple de torsion $\mathcal{C}$ est ici porté par l'axe Ox (figure 3) et les formules du chapitre VIII (section 7) sont à adapter en conséquence. On obtient ainsi, par superposition :

• pour le champ de contrainte

$$\text{(2.26)} \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mathcal{C}}{J}\,(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z)(\underline{e}_y \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y) + \frac{\mathcal{C}}{J}\,(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y)(\underline{e}_z \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_x \otimes \underline{e}_z) + \frac{\mathcal{X}}{S}\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

• et pour le champ de déplacement

$$\underline{\xi} = \frac{\mathcal{C}}{\mu J}\left(xy\,\underline{e}_z - xz\,\underline{e}_y + \varphi(y,z)\,\underline{e}_x\right) + \frac{\mathcal{X}}{ES}\left(x\,\underline{e}_x - \nu(y\,\underline{e}_y + z\,\underline{e}_z)\right) . \tag{2.27}$$

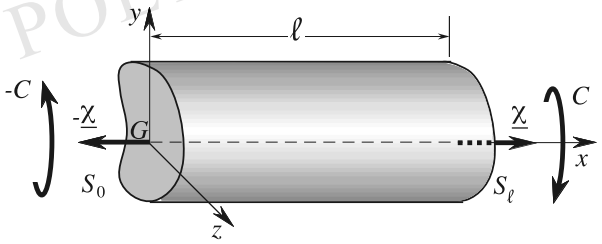


Figure 3 – Traction (ou compression) et torsion d'une barre cylindrique

Le chargement du système est défini par les deux paramètres $\mathcal{X}$ (force axiale) et $\mathcal{C}$ (couple de torsion). La frontière initiale d'élasticité de la barre est engendrée par les valeurs de ces paramètres pour lesquelles le critère de limite initiale d'élasticité du matériau est atteint pour la première fois en un point de la barre. L'état de contrainte étant plus complexe que dans les exemples étudiés précédemment, on se bornera à considérer les cas particuliers des critères de limite d'élasticité de Tresca et de von Mises.

En se plaçant en chaque point de la section dans la base orthonormée liée aux lignes de cisaillement, décrite au chapitre VIII (§ 7.7), $\underline{\underline{\sigma}}$ est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = |\,\underline{\tau}\,|\,(\underline{e}_\tau \otimes \underline{e}_\nu + \underline{e}_\nu \otimes \underline{e}_\tau) + \sigma_{xx}\ \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \tag{2.28}$$

où

$$|\,\underline{\tau}\,| = \frac{|\,\mathcal{C}\,|}{J}\left((\frac{\partial\varphi}{\partial y} - z)^2 + (\frac{\partial\varphi}{\partial z} + y)^2\right)^{1/2} . \tag{2.29}$$

Les contraintes principales, obtenues par exemple au moyen de la théorie des cercles de Mohr (chapitre VI, § 3.2), s'écrivent :

$$\sigma_I\ ,\ \sigma_{III} = \frac{\sigma_{xx}}{2} \pm (\frac{\sigma_{xx}^2}{4} + |\,\underline{\tau}\,|^2)^{1/2}\ ,\ \sigma_{II} = 0 \tag{2.30}$$

d'où, pour l'application du critère de Tresca :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = (\sigma_{xx}^2 + 4\,|\,\underline{\tau}\,|^2)^{1/2} - \sigma_0\ . \tag{2.31}$$

Le déviateur $\underline{\underline{s}}$ de $\underline{\underline{\sigma}}$ s'écrit dans la même base orthonormée :

$$\underline{\underline{s}} = -\frac{1}{3}\sigma_{xx}\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + |\,\underline{\tau}\,|\,(\underline{e}_\tau \otimes \underline{e}_\nu + \underline{e}_\nu \otimes \underline{e}_\tau) + \sigma_{xx}\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \tag{2.32}$$

d'où, pour l'application du critère de von Mises :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = (\frac{\sigma_{xx}^2}{3} + |\,\underline{\tau}\,|^2)^{1/2} - k\ . \tag{2.33}$$

On voit, puisque σ_{xx} est constant sur la section S, que pour déterminer la frontière initiale d'élasticité on doit, comme dans le cas de la torsion pure, déterminer le (les) point(s) où la contrainte de cisaillement (qui ne dépend que de $\mathcal{C}$) est maximale en valeur absolue. La frontière initiale d'élasticité de la barre est alors l'ellipse du plan $(\mathcal{X}\,,\,\mathcal{C})$ définie par :

• avec le critère de Tresca

$$\frac{\mathcal{X}^2}{S^2} + 4\,A^2\frac{\mathcal{C}^2}{J^2} = \sigma_0^2\ , \tag{2.34}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

• avec le critère de von Mises

$$\frac{\mathcal{X}^2}{S^2} + 3\,A^2\frac{\mathcal{C}^2}{J^2} = 3\,k^2\ , \tag{2.35}$$

où A^2 désigne la valeur de $(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-z)^2+(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+y)^2$ au(x) point(s) où la contrainte de cisaillement est maximale.

3 Flexion normale d'une barre cylindrique

La pratique de la construction et de l'ingénierie mécanique offre des exemples quotidiens de pièces cylindriques (prismatiques) de section quelconque, élancées, soumises à des sollicitations de flexion : poutres, entretoises, mâts, solives, longerons, etc... L'étude de ce problème général s'appuie sur le principe de Saint Venant pour se ramener à un problème bien posé. Ce dernier est lui-même traité à travers le principe de superposition à partir d'un problème de flexion particulier, plus simple, dont la compréhension éclaire celle du problème général. Il s'agit du problème de la flexion normale qui fait l'objet de la présente section ; la superposition sera traitée dans les sections 4 et 5.

3.1 Position du problème de flexion normale

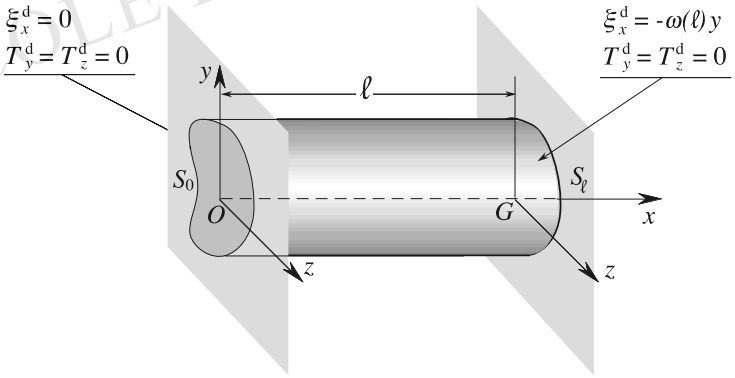


Figure 4 – Flexion normale d'une barre cylindrique : un problème bien posé

La barre étudiée est identique à celle du paragraphe 2.1. L'origine O des axes dans le plan S_0 est placée au ***centre d'inertie de*** S_0, et les axes Oy et Oz sont dirigés suivant les ***axes principaux d'inertie***[(4)] de S_0. On a donc les égalités, valables sur toute section S :

$$\int_S y\,\mathrm{d}a = 0\,,\ \int_S z\,\mathrm{d}a = 0\,,\ \int_S y\,z\,\mathrm{d}a = 0\ . \tag{3.1}$$

[(4)] Comme dans la section 2, aucune considération relative à la masse n'intervient ici. Il s'agit à proprement parler de l'inertie ***géométrique*** de la section.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On définit les moments d'inertie principaux de la section S :

$$I_y = \int_S z^2 \, \mathrm{d}a \, , \, I_z = \int_S y^2 \, \mathrm{d}a \, . \tag{3.2}$$

Les données du problème sont supposées de la forme suivante.

• Forces de masse nulles :

$$\underline{F} = 0 \quad \text{sur } \Omega \, . \tag{3.3}$$

• Surface latérale libre de contrainte :

$$\underline{T}^{\mathrm{d}} = 0 \qquad \text{sur } (\partial\Omega - S_0 - S_\ell) \, . \tag{3.4}$$

• Aux extrémités : S_0 et S_ℓ sont des surfaces S_{ξ_x} , S_{T_y} , S_{T_z} avec

$$\xi_x^{\mathrm{d}} = 0 \, , \text{ sur } S_0 \text{ et } \xi_x^{\mathrm{d}} = -\omega(\ell)\, y \quad \text{sur } S_\ell \tag{3.5}$$

et

$$T_y^{\mathrm{d}} = 0 \text{ et } T_z^{\mathrm{d}} = 0 \text{ sur } S_0 \text{ et } S_\ell \, . \tag{3.6}$$

La figure 4 tente d'illustrer ces conditions aux extrémités dont la réalisation pratique est évidemment difficile ![(5)]

3.2 Forme de la solution

L'idée intuitive qui préside à la construction de la solution consiste à imaginer que la barre est constituée de fibres longitudinales solidaires les unes des autres ; chacune de ces fibres est soumise à un effort de traction-compression proportionnel à la cote y qui provoque un profil d'allongement-accourcissement, lui aussi proportionnel à y, qui devrait permettre de satisfaire les conditions aux extrémités (3.5) et (3.6) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = A\, y\, \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \tag{3.7}$$

où α est un paramètre à déterminer en fonction des données du problème. L'application de la méthode des contraintes permet de justifier cette intuition.

Le champ de contrainte (3.7) satisfait évidemment les équations d'équilibre (1.1) sans forces de masse et les conditions aux limites sur les contraintes (3.4) et (3.6). Il est donc statiquement admissible avec les données du problème.

Le champ de déformation associé à $\underline{\underline{\sigma}}$ par la loi de comportement élastique linéaire isotrope est fonction linéaire de la coordonnée y et satisfait les équations de compatibilité géométrique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{A}{E}\, y[\, \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \nu(\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)] \, . \tag{3.8}$$

(5) On rappelle que le problème bien posé sera utilisé à travers le principe de Saint Venant dont on perçoit ici toute l'importance.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Son intégration aboutit au champ de déplacement

$$\text{(3.9)} \qquad \begin{cases} \xi_x = \dfrac{A}{E}\, yx \\ \xi_y = -\dfrac{A}{E}\left(\dfrac{x^2}{2} + \nu\dfrac{y^2 - z^2}{2}\right) , \\ \xi_z = -\nu\dfrac{A}{E}\, yz \end{cases}$$

défini à un déplacement rigidifiant (H.P.P.) près, qui doit satisfaire les conditions aux extrémités (3.5). On en déduit l'expression de A en fonction des données du problème :

$$\text{(3.10)} \qquad A = -E\,\frac{\omega(\ell)}{\ell}\ ,$$

et les restrictions sur les déplacements rigidifiants arbitraires (H.P.P.), d'où

$$\text{(3.11)} \qquad \begin{cases} \xi_x = -\omega(\ell)\, y\dfrac{x}{\ell} \\ \xi_y = \dfrac{\omega(\ell)}{\ell}\left(\dfrac{x^2}{2} + \nu\dfrac{y^2 - z^2}{2}\right) , \\ \xi_z = \nu\dfrac{\omega(\ell)}{\ell}\, yz \end{cases}$$

$+$ rotation arbitraire autour de Ox,
$+$ translation arbitraire orthogonale à Ox, (H.P.P.).

La solution du problème bien posé ainsi obtenue détermine la valeur des efforts extérieurs qui sont exercés sur les sections d'extrémités. Il s'agit de vecteurs contraintes normaux à la section, linéaires en y :

$$\text{(3.12)} \qquad \underline{T} = E\,\frac{\omega(\ell)}{\ell}\, y\,\underline{e}_x \text{ sur } S_0 \text{ et } \underline{T} = -E\,\frac{\omega(\ell)}{\ell}\, y\,\underline{e}_x \text{ sur } S_\ell\ .$$

On peut alors calculer le torseur résultant des efforts sur S_ℓ : compte tenu de (3.1, 3.2) on voit que la résultante est nulle et que le moment résultant est porté par Oz, égal à :

$$\text{(3.13)} \qquad \underline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_z\underline{e}_z = EI_z\frac{\omega(\ell)}{\ell}\underline{e}_z \text{ sur } S_\ell\ ;$$

sur S_0 le torseur est opposé. Le moment $\underline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_z\underline{e}_z$ est le ***moment de flexion*** appliqué à l'extrémité S_ℓ de la barre.

Le champ de contrainte s'écrit ainsi en fonction de $\mathcal{M}_z$:

$$\text{(3.14)} \qquad \boxed{\underline{\underline{\sigma}} = -\frac{\mathcal{M}_z}{I_z}\, y\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

3.3 Commentaires

Forme du champ de contrainte

La solution construite correspond à un champ de contrainte uniaxial selon Ox. Le « profil des contraintes », c'est-à-dire la distribution de la composante σ_{xx}, est linéaire en fonction de y et indépendant de la section droite considérée (figure 5). Si $\mathcal{M}_z$ est positif, σ_{xx} est négative pour $y > 0$ et positive pour $y < 0$: il y a compression et raccourcissement ($\varepsilon_{xx} < 0$) des ***fibres*** (parallèles à Ox) supérieures, traction et allongement ($\varepsilon_{xx} > 0$) des fibres inférieures.

En désignant par G le centre d'inertie de la section droite courante, l'axe Gz est appelé ***axe neutre*** de S dans la flexion considérée : il sépare dans S la zone des fibres comprimées de celle des fibres tendues.

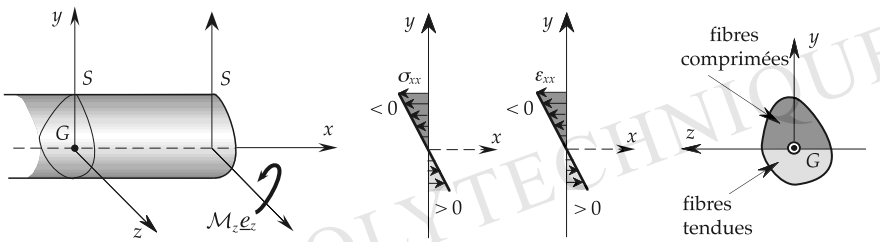


Figure 5 – Flexion normale d'une barre cylindrique : axe neutre, profils des contraintes σ_{xx} et des déformations ε_{xx}

Forme du champ de déplacement et déformée de la barre

On convient dans la suite, sans perte de généralité, d'adopter pour $\underline{\xi}$ l'expression (3.11) sans addition d'aucune rotation autour de Ox ou translation parallèle à Ox.

Cette expression montre que, dans une section donnée d'abscisse x, la composante du déplacement parallèle à Ox est proportionnelle à la cote y. Il en résulte, ***dans l'hypothèse des petites perturbations***, que chaque « section droite »[(6)] reste plane dans la transformation de la barre. Le plan de cette section subit une rotation infinitésimale autour de Oz, proportionnelle à x :

$$\underline{\omega}(x) = \omega(x)\underline{e}_z = \omega(\ell)\frac{x}{\ell}\,\underline{e}_z \ . \tag{3.15}$$

La ***rotation différentielle*** de la section est

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\omega}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathcal{M}_z}{E\,I_z}\underline{e}_z \ . \tag{3.16}$$

Le champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ étant indépendant de x, toutes les sections droites se déforment de façon identique dans leur plan.

(6) C'est-à-dire orthogonale à l'axe Ox.

Afin de visualiser la déformée de la barre il est commode de reprendre l'idée intuitive des fibres longitudinales constitutives. L'axe Ox, lieu des centres d'inertie des sections droites est appelé ***fibre moyenne*** de la barre. Les équations de sa déformée (H.P.P.) se déduisent de (3.11) et (3.13) :

$$y = \frac{\mathcal{M}_z}{E\,I_z}\,\frac{x^2}{2}\,,\, z = 0 \tag{3.17}$$

et décrivent une parabole située dans le plan Oxy que l'on assimile classiquement, compte tenu de l'hypothèse des petites perturbations, à son cercle osculateur de ***courbure***

$$\chi = \frac{\mathcal{M}_z}{E\,I_z}\,. \tag{3.18}$$

Revenant aux sections droites, on remarque sur (3.8) que le champ de déformation admet en tout point Ox, Oy et Oz comme directions principales : il n'y a donc pas de glissement entre ces directions. Cela implique que les sections droites demeurent ***orthogonales à la fibre moyenne*** dans la transformation de la poutre, ce que confirme la comparaison des expressions (3.16) et (3.18). Mais, de plus, cette propriété étant vraie pour ***toutes les fibres longitudinales***, il en résulte que les déformées de toutes les fibres sont assimilables à des cercles situés dans des plans orthogonaux à Oz et dont la courbure est égale à (3.18).

Cette description, illustrée (et amplifiée) sur la figure 6, explique les deux qualificatifs utilisés à propos du problème étudié ici :

- La flexion est dite ***circulaire*** pour signifier que les fibres parallèles à Ox se transforment en des arcs de cercles ;
- La flexion est dite ***normale*** pour signifier que ces arcs de cercles sont parallèles à Oxy, c'est-à-dire orthogonaux à l'axe des moments de flexion appliqués.

On verra dans les sections suivantes que la première de ces deux propriétés est toujours conservée dans la solution du problème général, ce qui n'est pas le cas pour la seconde.

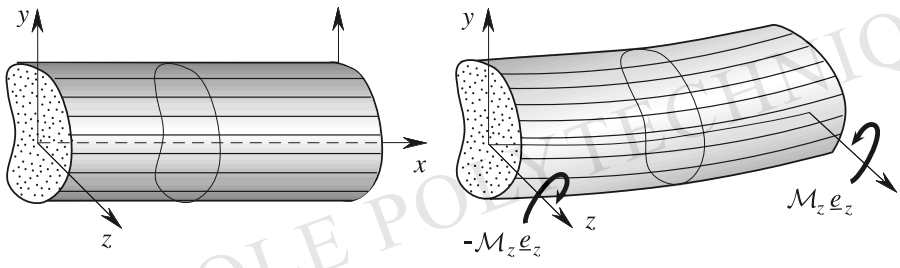


Figure 6 – Flexion normale d'une barre cylindrique : fibres et sections droites

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Respect de l'hypothèse des petites perturbations

L'hypothèse des petites perturbations exige le respect de l'hypothèse de la transformation infinitésimale. Le calcul du gradient de la transformation à partir de (3.11) et (3.13) met en évidence les conditions :

$$\frac{|\mathcal{M}_z|}{E\,I_z}\,|x| \ll 1 \quad , \quad \frac{|\mathcal{M}_z|}{E\,I_z}\,|y| \ll 1 \quad , \quad \frac{|\mathcal{M}_z|}{E\,I_z}\,|z| \ll 1 \quad \text{sur } \Omega\,. \tag{3.19}$$

Dans l 'hypothèse d'une barre élancée on a $D/\ell \ll 1$, D diamètre (maximal) de la section droite, et ces conditions se réduisent à :

$$\frac{|\mathcal{M}_z|}{E\,I_z}\,\ell \ll 1 \tag{3.20}$$

qui limite l'intensité du moment de flexion[7].

« Hypothèse » de Navier-Bernoulli

On regroupe sous le nom d'***hypothèse de Navier-Bernoulli*** les propositions suivantes :
• les sections droites restent planes,
• les sections droites demeurent orthogonales aux fibres.

Dans le cas présent ces propriétés ont été obtenues comme des conséquences de la résolution du problème par la méthode des contraintes, le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ étant postulé de la forme (3.7). Elles auraient pu aussi être prises comme point de départ intuitif dans la résolution du même problème par la méthode des déplacements.

Il convient de signaler que, dans le cas d'autres modèles de comportement pour le matériau constitutif de la barre (élasto-plasticité, viscoélasticité, ...) on procède souvent à la résolution du problème de la flexion en partant a priori de l'hypothèse de Navier-Bernoulli. Celle-ci n'est toutefois pas toujours justifiée, notamment dans le cas d'hétérogénéité de comportement en section.

3.4 Limite initiale d'élasticité de la barre en flexion normale

La problématique de la recherche de la limite initiale d'élasticité de la barre en flexion normale autour de la direction Oz est semblable à celle exposée au chapitre VIII (§ 7.7) à propos de la torsion. L'état de contrainte dans la barre n'est pas homogène. C'est, en chaque point un état uniaxial de traction ou de compression : avec les notations de (2.4) on doit comparer l'intensité de cet état de contrainte aux valeurs σ_0^+ et $-\sigma_0^-$ des limites initiales d'élasticité du matériau homogène, isotrope, en traction simple et en compression simple.

Les points les plus sollicités sont, d'après (3.14), situés sur les fibres les plus éloignées de l'axe Oz du côté des y positifs ou du côté des y négatifs selon le signe du

[7] Cette condition (3.20) éclaire évidemment les assimilations géométriques faites concernant les déformées des fibres.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

moment appliqué et les valeurs relatives de σ_0^+ et σ_0^-. On désigne par v' et $-v''$ respectivement les cotes de ces fibres. On a alors, pour les limites initiales d'élasticité de la barre en flexion positive $(\mathcal{M}_z)_0^+$ et négative $-(\mathcal{M}_z)_0^-$ autour de Oz :

$$\text{(3.21)} \qquad \begin{cases} (\mathcal{M}_z)_0^+ = \text{Min}\,\{\sigma_0^+\, I_z/v''\ ,\ \sigma_0^-\, I_z/v'\} \\ (\mathcal{M}_z)_0^- = \text{Min}\,\{\sigma_0^+\, I_z/v'\ ,\ \sigma_0^-\, I_z/v''\} \end{cases}$$

Avec les critères de Tresca ou de von Mises on a $\sigma_0^+ = \sigma_0^-$. La fibre la plus sollicitée est la fibre la plus éloignée de l'axe Oz. En désignant par v la distance de cette fibre à l'axe Oz, on a :

$$\text{(3.22)} \qquad \begin{cases} (\mathcal{M}_z)_0^+ = (\mathcal{M}_z)_0^- = \sigma_0\, I_z/v \quad \text{(Tresca)} \\ (\mathcal{M}_z)_0^+ = (\mathcal{M}_z)_0^- = k\sqrt{3}\, I_z/v \quad \text{(von Mises)}\ . \end{cases}$$

3.5 Application du principe de Saint-Venant

Dans l'hypothèse d'une barre élancée, $D/\ell \ll 1$, le principe de Saint Venant permet d'affirmer que la solution construite ci-dessus pour le problème bien posé (3.3, 3.5, 3.6) est valable, pour les champs de contrainte et de déformation, dans la partie courante de la barre, quelle que soit la façon dont les efforts extérieurs sont appliqués aux extrémités, pourvu qu'ils soient réductibles aux torseurs :

$$\text{(3.23)} \qquad [O, \underline{0}, \mathcal{M}_z\, \underline{e}_z] \ \text{ sur } \ S_\ell \ \text{ et } [O, \underline{0}, -\mathcal{M}_z\, \underline{e}_z] \ \text{ sur } \ S_0\ .$$

La solution est également valable pour le champ de déplacement et la déformée de la barre dans la partie courante de la barre. En effet, par raison de symétrie, la section droite médiane de la barre reste plane dans la transformation ; l'intégration du champ de déformation à partir de cette section, de part et d'autre, conduit alors de nouveau à (3.11), que l'on exprime en fonction de la donnée $\mathcal{M}_z$:

$$\text{(3.24)} \qquad \boxed{\begin{aligned} \xi_x &= -\frac{\mathcal{M}_z}{E\, I_z}\, y\, x \\ \xi_y &= \frac{\mathcal{M}_z}{E\, I_z}\, (\frac{x^2}{2} + \nu\, \frac{y^2 - z^2}{2}) \\ \xi_z &= \nu\, \frac{\mathcal{M}_z}{E\, I_z}\, y\, z \end{aligned}}$$

$+$ rotation arbitraire autour de Ox
$+$ translation arbitraire orthogonale à Ox, (H.P.P.).

Autrement dit : la flexion est circulaire et normale dans la partie courante de la barre, les sections droites y restent planes et orthogonales aux fibres.

Dans la partie courante de la barre la détermination de la limite d'élasticité est identique à celle du paragraphe 3.4 ; mais on doit évidemment se prémunir contre les effets d'extrémités, notamment les concentrations de contrainte en l'absence de congés (cf. figure 20 du chapitre VIII).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

4 Flexion déviée d'une barre cylindrique

4.1 Flexion normale à l'axe Oy

Les axes étant positionnés comme au paragraphe 3.1, il est clair que tout ce qui a été établi dans la section précédente relativement à l'axe Oz peut être reproduit, *mutatis mutandis*[8], relativement à l'axe Oy. Ainsi (figure 7) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mathcal{M}_y}{I_y} z\, \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \tag{4.1}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\mathcal{M}_y}{E\, I_y}\, z[\, \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \nu\, (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)] \tag{4.2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_x = \dfrac{\mathcal{M}_y}{E\, I_y}\, z\, x \\ \xi_y = -\nu\, \dfrac{\mathcal{M}_y}{E\, I_y}\, y\, z \\ \xi_z = \dfrac{\mathcal{M}_y}{E\, I_y}\, (-\dfrac{x^2}{2} + \nu\, \dfrac{y^2 - z^2}{2}) \, . \end{array} \right. \tag{4.3}$$

$+$ rotation arbitraire autour de Ox
$+$ translation arbitraire orthogonale à Ox, (H.P.P.)

est la solution du problème bien posé de (3.3, 3.5, 3.6) pour lequel les torseurs des efforts extérieurs appliqués aux extrémités sont

$$[O, \underline{0}, \mathcal{M}_y\, \underline{e}_y] \text{ sur } S_\ell \text{ et } [O, \underline{0}, -\mathcal{M}_y\, \underline{e}_y] \text{ sur } S_0 \, . \tag{4.4}$$

Dans chaque section droite, Oy est désormais axe neutre du profil linéaire des contraintes. La flexion de la barre est circulaire, normale à Oy. La rotation différentielle des sections est :

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\omega}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathcal{M}_y}{E_{\,y}}\, \underline{e}_y \, . \tag{4.5}$$

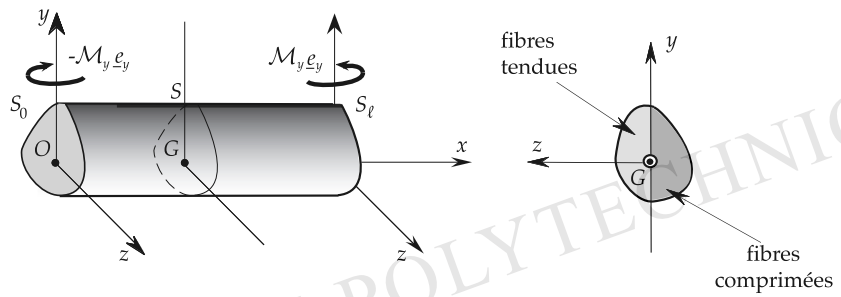


Figure 7 – Flexion de la barre cylindrique normalement à Oy

[8] C'est-à-dire, notamment, en prenant garde aux changements de signes dus à l'orientation des trièdres.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La mise en application du principe de Saint Venant est strictement identique à celle du paragraphe 3.5.

4.2 Flexion déviée

Le problème général de flexion d'une barre cylindrique évoqué en prologue de la section 4 concerne le cas où les moments de flexion $\underline{\mathcal{M}}$ et $-\underline{\mathcal{M}}$ appliqués aux extrémités de la barre soit d'orientation quelconque, ce qui, sauf pour des sections de forme particulière, implique que ces moments ne sont pas dirigés suivant un axe principal d'inertie des sections droites. La solution du problème bien posé correspondant peut être effectuée directement en suivant la démarche du paragraphe 3.2. Il est plus simple et plus clair de l'obtenir en décomposant $\mathcal{M}$ selon les directions principales d'inertie :

$$\boxed{\underline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_y\, \underline{e}_y + \mathcal{M}_z \underline{e}_z} \tag{4.6}$$

et en appliquant le principe de superposition aux deux solutions précédentes. Il vient ainsi :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = (-\frac{M_z}{I_z}\, y + \frac{\mathcal{M}_y}{I_y}\, z)\, \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x} \tag{4.7}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = (-\frac{\mathcal{M}_z}{E\, I_z}\, y + \frac{\mathcal{M}_y}{E\, I_y}\, z)[\, \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \nu\, (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)] \tag{4.8}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \xi_x &= (-\frac{\mathcal{M}_z}{E\, I_z}\, y + \frac{\mathcal{M}_y}{E\, I_y}\, z)\, x \\ \xi_y &= \frac{\mathcal{M}_z}{E\, I_z}(\frac{x^2}{2} + \nu\, \frac{y^2 - z^2}{2}) - \nu\, \frac{\mathcal{M}_y}{E\, I_y}\, y\, z \\ \xi_z &= \nu\, \frac{\mathcal{M}_z}{E\, I_z}\, y\, z + \frac{\mathcal{M}_y}{E\, I_y}\, (-\frac{x^2}{2} + \nu\, \frac{y^2 - z^2}{2}) \end{aligned}} \tag{4.9}$$

+ rotation arbitraire autour de OX
+ translation arbitraire orthogonale à Ox, (H.P.P.).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

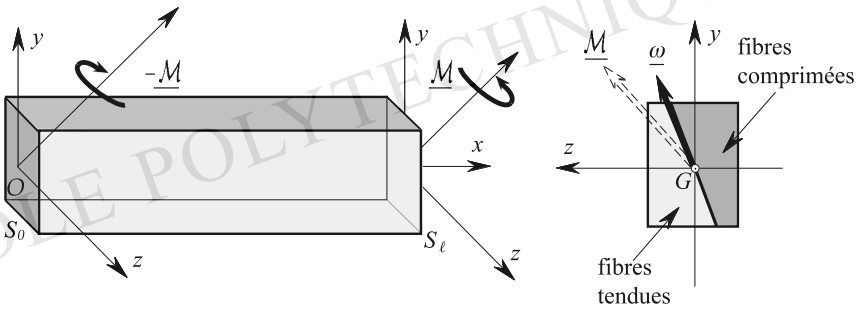


Figure 8 – Flexion déviée : cas d'une barre prismatique de section droite rectangulaire

4.3 Commentaires

Des deux solutions particulières précèdentes, cette solution générale conserve les propriétés suivantes :

- Les champs de contrainte et de déformation sont indépendants de x, le champ de contrainte est uniaxial selon Ox. Le profil des contraintes σ_{xx} est linéaire. ***L'axe neutre*** des contraintes, d'équations

$$-\frac{\mathcal{M}_z}{E\,I_z}\,y+\frac{\mathcal{M}_y}{E\,I_y}\,z=0\,,\ x=\text{constante}\,, \tag{4.10}$$

  partage la section droite courante d'abscisse x en deux zones : zone des fibres comprimées et zone des fibres tendues.
- La contrainte σ_{xx} de traction ou de compression en un point de la section droite est proportionnelle à la distance de ce point à l'axe neutre.
- Il en résulte, en ce qui concerne la ***limite d'élasticité*** de la barre, suivant la démarche du paragraphe 3.4, que les fibres les plus exposées sont les fibres les plus éloignées de l'axe neutre, de part et d'autre de celui-ci.
- De même ε_{xx} est proportionnelle à la distance de ce point à l'axe neutre.
- Les sections droites restent planes dans la transformation de la barre.
- La déformation des sections droites dans leur plan est indépendante de l'abscisse x.
- La rotation différentielle des sections droites est égale à :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\underline{\omega}(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathcal{M}_z}{E\,I_z}\,\underline{e}_z+\frac{\mathcal{M}_y}{E\,I_y}\,\underline{e}_y} \tag{4.11}$$

- Le vecteur rotation de chaque section est colinéaire à l'axe neutre des contraintes.
- La fibre moyenne (axe Ox) est transformée en un cercle dans un plan orthogonal à la direction (4.10) de l'axe neutre.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- Les sections droites demeurent orthogonales à toutes les fibres dans la transformation.
- Toutes les fibres sont transformées en des cercles.

Autrement dit la flexion est encore ***circulaire***. Mais on remarque que la flexion s'effectue ***orthogonalement à l'axe neutre des contraintes***, qui ne coïncide qu'exceptionnellement avec la direction du moment de flexion $\underline{\mathcal{M}}$. Pour cette raison, la flexion est dite ***déviée***[9].

Lorsque les symétries de la section droite sont telles que $I_y = I_z$, la flexion est évidemment toujours circulaire.

Du point de vue pratique, il ressort de (4.11) que la courbure de la barre soumise à un moment de flexion $\underline{\mathcal{M}}$ donné est la plus faible lorsque $\underline{\mathcal{M}}$ est colinéaire à l'axe principal d'inertie de la section droite autour duquel l'inertie est maximale.[10].

5 Flexion composée d'une barre cylindrique

5.1 Définition

Le problème de la ***flexion composée*** d'une barre cylindrique est celui où les efforts surfaciques appliqués à l'extrémité S_ℓ (resp. S_0) définissent un torseur de résultante $\underline{\mathcal{X}}$ (resp. $-\underline{\mathcal{X}}$) parallèle à Ox, et de moment par rapport au centre d'inertie de la section égal à $\underline{\mathcal{M}}$ (resp. $-\underline{\mathcal{M}}$) parallèle au plan Oyz :

$$\underline{\mathcal{X}} = \mathcal{X}\,\underline{e}_x \tag{5.1}$$

$$\underline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_y\,\underline{e}_y + \mathcal{M}_z\,\underline{e}_z \tag{5.2}$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{torseur des efforts}\\ \text{surfaciques sur } S_\ell\end{array}\right] = [\,O\,,\,\underline{\mathcal{X}}\,,\,\underline{\mathcal{M}}\,] \tag{5.3}$$

De façon plus explicite ce problème est aussi appelé : problème de la flexion avec effort normal, l'effort $\underline{\mathcal{X}}$ étant l'***effort normal*** appliqué à la section S_ℓ.

5.2 Solution du problème et commentaires

La solution du problème s'obtient en appliquant le principe de superposition à partir des résultats des sections 2 et 4 ci-dessus. Il n'est donc pas nécessaire de la détailler ici.

On remarque que le champ de contrainte est uniaxial, indépendant de x :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \Big(\frac{\mathcal{X}}{S} - \frac{\mathcal{M}_z}{I_z}\,y + \frac{\mathcal{M}_y}{I_y}\,z\Big)\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x\ . \tag{5.4}$$

[9] On remarque sur (4.11) que $\frac{\mathrm{d}\underline{\omega}(x)}{\mathrm{d}x}$ est toujours situé dans l'angle aigu formé par $\underline{\mathcal{M}}$ et la direction principale d'inertie autour de laquelle l'inertie de la section droite est la plus faible.

[10] Lorsque la différence entre les moments d'inertie principaux est grande, pour cette orientation de $\underline{\mathcal{M}}$ la barre est sensible aux phénomènes d'instabilité.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L'axe neutre qui sépare, dans la section droite courante, la zone des fibres tendues de celle des fibres comprimées a pour équation, dans le plan de S :

$$\frac{\mathcal{X}}{S} - \frac{\mathcal{M}_z}{I_z}\, y + \frac{\mathcal{M}_y}{I_y}\, z = 0\ . \tag{5.5}$$

Il est parallèle à l'axe neutre du problème de la flexion sans effort normal pour le même moment de flexion $\underline{\mathcal{M}}$ mais ne passe pas par G si $\mathcal{X} \neq 0$ (figure 9).

Comme au paragraphe 4.3, la contrainte de traction ou de compression dans une fibre de la barre est proportionnelle à sa distance à l'axe neutre. Il en va de même pour les déformations.

Il peut se faire, selon les valeurs de $\mathcal{X}/S$, $\mathcal{M}_y/I_y$ et $\mathcal{M}_z/I_z$, que l'axe neutre soit extérieur à la section droite S. Dans ce cas les fibres de la barre sont soit toutes tendues, soit toutes comprimées.

Le chargement de la barre est défini par les trois paramètres scalaires $\mathcal{X}$, $\mathcal{M}_y$ et $\mathcal{M}_z$. La frontière initiale d'élasticité de la barre est engendrée par les valeurs de ces paramètres pour lesquelles la limite initiale d'élasticité du matériau constitutif en traction simple ou en compression simple est atteinte pour la première fois dans une fibre (problématique identique à celle du paragraphe 2.5). Sans entrer dans plus de détail il est clair que les fibres concernées, comme dans l'analyse menée précédemment (§ 3.4), sont les fibres les plus éloignées de l'axe neutre de part et d'autre de celui-ci.

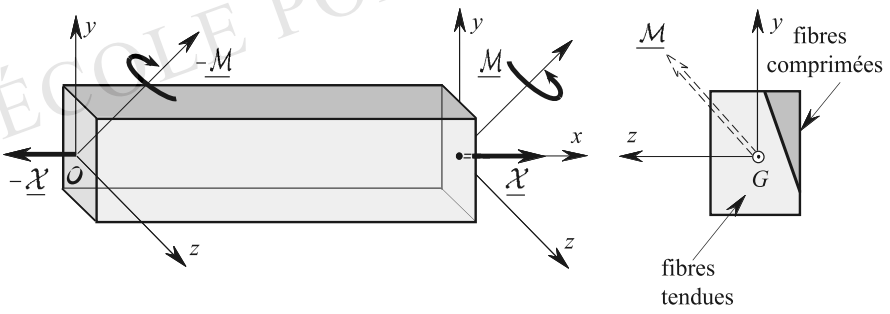


Figure 9 – Flexion composée : cas d'une barre prismatique de section droite rectangulaire

5.3 Problème de Saint Venant

Le problème de la flexion composée est un cas particulier du problème dit « de Saint Venant » qui concerne l'équilibre élastique d'une barre cylindrique (prismatique) soumise à des efforts appliqués à ses extrémités. Au-delà de la flexion composée on peut, au moyen des résultats établis au chapitre VIII (§ 7) et ci-dessus, traiter par le principe de superposition le cas où les torseurs des efforts appliqués aux extrémités sont de la forme :

$$[\,O\,,\mathcal{X}\,\underline{e}_x\,,\mathcal{C}\,\underline{e}_x + \mathcal{M}_y\,\underline{e}_y + \mathcal{M}_z\,\underline{e}_z\,] \quad \text{sur } S_\ell \tag{5.6}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

et $[\,O\,,-\mathcal{X}\underline{e}_x\,,\,-\mathcal{C}\underline{e}_x-\mathcal{M}_y\underline{e}_y-\mathcal{M}_z\underline{e}_z\,]$ sur S_0 ; il suffit en effet de superposer, à la solution précédente, celle du problème de la torsion.

Le cas général où la résultante du torseur des efforts surfaciques appliqués sur S_ℓ a aussi des composantes selon Oy et Oz, appelées composantes de l'***effort tranchant*** sur S_ℓ, a été résolu par Saint Venant. Le problème correspondant est connu sous le nom de problème de Saint Venant.

5.4 Applications pratiques

Les sollicitations de flexion sont très fréquentes dans la pratique quotidienne de l'ingéniérie civile ou mécanique, ce qui explique l'importance des solutions apportées au XIX$^{\text{e}}$ siècle aux problèmes d'équilibre élastique correspondants. Elles fournissent (éventuellement *a postiori*) un chemin scientifique pour adapter la conception et le dimensionnement d'une structure aux propriétés de ses matériaux constitutifs. Elles ont aussi permis, quand les performances techniques ont été mûres (par exemple : qualité des bétons, des aciers, des résines, etc...), l'invention de « nouveaux matériaux » conçus pour résister aux sollicitations appliquées.

Le ***béton armé***, précurseur d'autres actuels matériaux composites[(11)], est un exemple de tels matériaux nouveaux.

Le béton, « pierre artificielle » résistant fort bien à la compression mais étant doté d'une résistance à la traction faible et/ou non fiable, ne se prête pas à la constitution de barres susceptibles d'être soumises à des sollicitations de flexion. En introduisant dans la partie tendue de la barre des armatures longitudinales en acier (fer à béton), solidaires du béton par adhérence (armatures dites passives) on donne à la section composite ainsi constituée la résistance à la traction nécessaire pour que la barre résiste en flexion (figure 10).

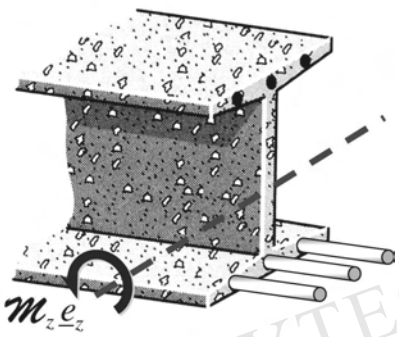


Figure 10 – Poutre en double-T, armée pour résister en flexion positive

(11) Encore que la technique des matériaux composites soit bien ancienne, comme en témoignent les ziggurats de Mésopotamie et « 6. Pharaon commanda ce jour-là même aux exacteurs qui étaient sur le peuple, et à ses commissaires, disant : 7. Vous ne donnerez plus de paille à ce peuple pour faire des briques, comme auparavant ; mais qu'ils aillent et qu'ils s'amassent de la paille. » (Exode, V).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Le ***béton précontraint*** est, quant à lui, l'exemple d'une technique constructive nouvelle dont l'explication réside simplement dans la solution du problème de flexion composée, mais dont la réalisation effective dépend essentiellement de la qualité du béton et de l'acier du point de vue du comportement différé (viscoélasticité, fluage, relaxation).

L'idée initiale consiste à mettre en place dans une poutre en béton, préalablement à sa mise sous charge, un champ de compression uniforme de telle sorte que sous les sollicitations de flexion, en application de (4.7), les contraintes dans le béton demeurent toutes compressives. La précontrainte est exercée par un câble ancré dans les deux sections d'extrémité de la poutre après mise en tension par des vérins (figure 11). On conçoit qu'il est essentiel pour la bonne performance de la poutre considérée, que la formule (4.7) assure le caractère compressif des contraintes tout au long de la vie de cette structure, c'est-à-dire que l'effort de compression engendré par la tension du câble actif soit sinon constant, du moins parfaitement maîtrisé malgré les comportements différés des matériaux.

Dans la pratique, les câbles de précontrainte, placés dans des gaines, suivent dans la poutre des trajets déterminés de façon optimale en fonction des charges supportées par les ouvrages.

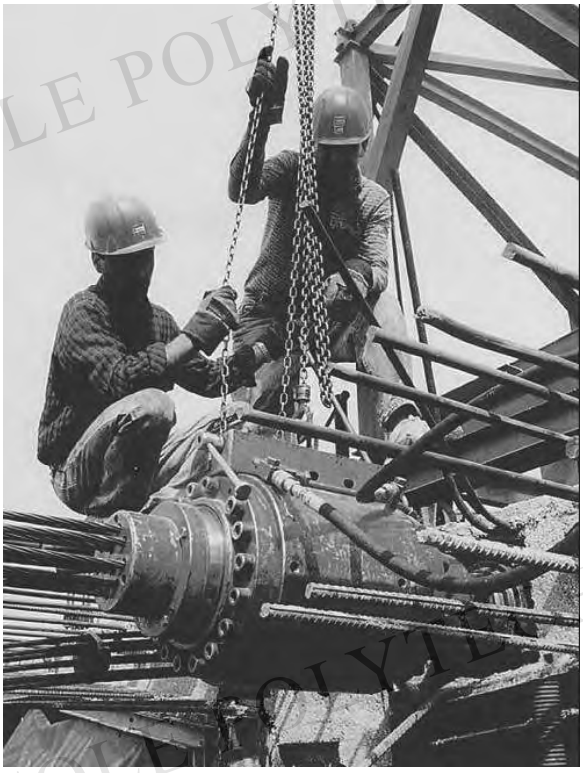


Figure 11 – Mise en tension de câbles de précontrainte

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

6 Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression

6.1 Position du problème

On considère une enveloppe sphérique de centre O de rayons intérieur et extérieur respectivement r_0 et r_1 (figure 12). En utilisant un système de coordonnées sphériques de centre O (cf. annexe II, section 4), les données sont de la forme suivante.

- Les forces de masses sont nulles :

$$\underline{F} = 0 \quad \text{sur } \Omega \,. \tag{6.1}$$

- Les données au contour portent exclusivement sur les efforts surfaciques : pression normale uniforme égale à p_0 exercée à l'intérieur de la sphère

$$\underline{T}^{\mathrm{d}} = p_0\, \underline{e}_r \qquad \text{pour } r = r_0 \quad (\partial S_0) \,, \tag{6.2}$$

pression normale uniforme égale à p_1 exercée à l'extérieur de la sphère

$$\underline{T}^{\mathrm{d}} = -p_1\, \underline{e}_r \qquad \text{pour } r = r_1 \quad (\partial S_1) \,. \tag{6.3}$$

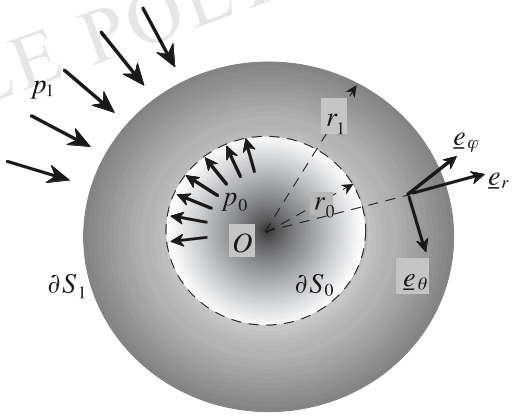


Figure 12 – Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression

6.2 Forme de la solution

Résolution par la méthode des déplacements. Les symétries de la géométrie, du chargement et du matériau constitutif homogène (isotrope) incitent à rechercher un ***champ de déplacement radial***, fonction de r seul, qu'il est commode de mettre sous la forme :

$$\underline{\xi} = r\, f\,(r)\, \underline{e}_r \,. \tag{6.4}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On en déduit les expressions de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et de $\underline{\underline{\sigma}}$ associées par la loi de comportement élastique linéaire, isotrope, dans la base locale orthonormée des coordonnées sphériques :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \big(r\,f'(r) + f(r)\big)\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + f(r)(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi)\,, \tag{6.5}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = (3\,\lambda + 2\,\mu) f(r)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + (\lambda + 2\,\mu)\,r\,f'(r)\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \lambda\,r\,f'(r)(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi)\,. \tag{6.6}$$

Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$(\lambda + 2\,\mu)\big(4\,f'(r) + r\,f''(r)\big) = 0 \tag{6.7}$$

dont on déduit

$$\underline{\xi} = (a\,r + \frac{b}{r^2})\,\underline{e}_r \quad (a \text{ et } b : \text{constantes à déterminer})\,. \tag{6.8}$$

Les expressions du champ de déformation et du champ de contrainte sont alors, sous formes explicites :

$$\varepsilon_{rr} = a - \frac{2\,b}{r^3} \quad , \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = a + \frac{b}{r^3} \quad , \quad \text{autres } \varepsilon_{ij} = 0\,; \tag{6.9}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = A - 2\,\dfrac{B}{r^3}\,, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = A + \dfrac{B}{r^3} \\ \text{autres } \sigma_{ij} = 0 \end{cases} \tag{6.10}$$

avec

$$A = (3\,\lambda + 2\,\mu)\,a \qquad \text{et} \qquad B = 2\,\mu\,b\,. \tag{6.11}$$

Le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ satisfait les conditions aux limites (6.2) et (6.3) qui permettent de déterminer A et B en fonction des données du problème :

$$A = \frac{p_0\,r_0^3 - p_1\,r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} \qquad B = \frac{1}{2}\,\frac{(p_0 - p_1)\,r_0^3\,r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} \tag{6.12}$$

et

$$\underline{\xi} = (\frac{A}{3\,\lambda + 2\,\mu}\,r + \frac{B}{2\,\mu\,r^2})\,\underline{e}_r\,. \tag{6.13}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

6.3 Commentaires

Équation de Navier, fonction de déplacement

L'équation (6.7) peut être obtenue directement en explicitant l'équation de Navier en coordonnées sphériques. On peut aussi remarquer que le champ de déplacement (6.4) est irrotationnel et dérive d'une fonction de déplacement $\varphi(r)$ (cf. chapitre VIII, § 5.2). Cette fonction doit alors vérifier l'équation (5.9) du chapitre VIII qui se réduit ici à :

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \underline{\xi} = 3\, f\,(r) + r\, f'\,(r) = 3\, a \quad \text{constante}\ , \tag{6.14}$$

intégrale première de l'équation de Navier (6.7).

Cas de la coque sphérique mince

On désigne par $e = r_1 - r_0$ l'épaisseur de la coque, par $R = (r_0 + r_1)/2$ son rayon moyen et l'on suppose que :

$$e \ll r_1 \qquad \text{(coque mince)}\ . \tag{6.15}$$

La solution se développe alors, en considérant $\dfrac{e}{R}$ comme infiniment petit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{rr} & = -\dfrac{p_0 + p_1}{2} + (p_0 - p_1)\,\dfrac{r - R}{e} \\ \sigma_{\theta\theta} & = \sigma_{\varphi\varphi} = \dfrac{(p_0 - p_1)\,R}{2e} - \dfrac{p_0 + p_1}{2} - \dfrac{(p_0 - p_1)(r - R)}{2e}\ . \end{array} \right. \tag{6.16}$$

Compte tenu de (6.15) on voit que l'on a :

$$|\,\sigma_{rr}\,| \ll |\,\sigma_{\theta\theta}\,| \quad \text{avec} \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} \simeq \frac{(p_0 - p_1)\,R}{2e} \tag{6.17}$$

Cette formule donnant la partie principale de la contrainte $\sigma_{\theta\theta} (= \sigma_{\varphi\varphi})$ dans le cas d'une enveloppe mince peut s'obtenir par le raisonnement élémentaire de statique appliqué à une demi-coque sphérique, qui est schématisé sur la figure 13 : en faisant l'hypothèse que la distribution des contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ est uniforme sur la section le problème devient, en effet,

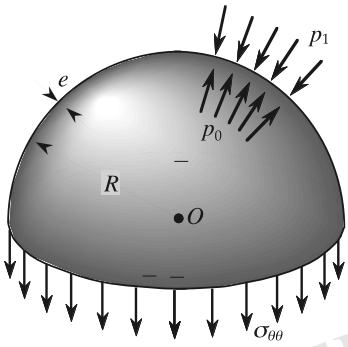


Figure 13 – Équilibre global d'une demi-coque sphérique mince

statiquement déterminé et l'on obtient, en annulant la résultante des efforts extérieurs exercés sur la demi-enveloppe,

$$2\pi\ \text{Re}\ \sigma_{\theta\theta} = \pi\, R^2 (p_0 - p_1) \tag{6.18}$$

d'où (6.17).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Autre façon de poser le problème

Il est clair que la même forme de solution obtenue au paragraphe 6.2 sera valable si les données sur la paroi extérieure par exemple portent sur le déplacement $\underline{\xi}$ et sont de la forme :

$$\underline{\xi}^{\mathrm{d}} = \delta_1 \, \underline{e}_r \qquad \text{sur } \partial S_1 \ . \tag{6.19}$$

La détermination des constantes a, b, A, B liées entre elles par les formules (6.10) se fera alors en fonction des données p_0 et δ_1. En conséquence, les expressions finales des composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ feront intervenir les constantes élastiques du matériau, alors que dans le cas précédent elles en étaient indépendantes.

Cavité sphérique dans un milieu élastique infini

Pour étudier le problème d'une cavité sphérique de rayon r_0 dans un milieu infini, on considère le problème du paragraphe 6.1 et l'on fait tendre le rapport r_1/r_0 vers l'infini. La donnée sur ∂S_∞ est du type (6.19) avec :

$$\underline{\xi}^{\mathrm{d}} = 0 \qquad \text{sur } \partial S_\infty \quad {}^{(12)} \ ; \tag{6.20}$$

la notion du milieu « infini » correspond en effet physiquement à un milieu assez vaste pour que tout ***déplacement soit « bloqué »*** à une distance suffisante.

On en déduit par (6.8) : $a = 0$. Puis par (6.10) il vient $A = 0$, ce qui ***implique*** la nullité des contraintes à l'infini [13], et $B = \dfrac{1}{2} p_0 \, r_0^3$.

La solution s'écrit ainsi pour $\underline{\xi}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\underline{\xi} = \frac{p_0 \, r_0^3}{4 \, \mu \, r^2} \, \underline{e}_r \ , \ \sigma_{rr} = -p_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 \ , \ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p_0}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 \ . \tag{6.21}$$

Cas de la sphère pleine

Dans le cas de la sphère pleine, il n'y a pas de cavité sur la figure 12. Le champ de déplacement est encore recherché sous la forme (6.4) et le raisonnement se poursuite à l'identique jusqu'à (6.11). Il n'y a qu'une condition aux limites, pour $r = r_1$, qui permet de déterminer A : il vient ainsi $A = -p_1$. La détermination de B est issue de celle de b. En effet, la fonction $r \, f \, (r)$, qui donne l'amplitude du déplacement $\underline{\xi}$ radial et indépendant de r, doit être nulle pour $r = 0$, faute de quoi ***l'hypothèse de bijectivité*** (chapitre I, § 3.2) ne serait pas satisfaite : la particule située initialement en $r = 0$ serait transportée sur la surface sphérique de rayon $|\underline{\xi}(0)|$. Il vient donc : $b = 0$ et $B = 0$.

Le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ est homogène :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p_1 \, \underline{\underline{\mathbb{1}}} \quad \text{(pression isotrope)} \ . \tag{6.22}$$

Le champ de déplacement s'écrit :

$$\underline{\xi} = -\frac{p_1}{3 \, \lambda + 2 \, \mu} r \, \underline{e}_r \quad \text{(à un déplacement rigidifiant près)} \ . \tag{6.23}$$

La forme de cette solution met en évidence qu'elle demeure valable pour un solide plein de forme quelconque soumis, en l'absence de forces de masse, à une pression normale uniforme p_1 à son contour (résultat qui s'établit directement sans difficulté).

(12) À un déplacement rigidifiant près évidemment.
(13) Il s'agit bien d'une implication.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Afin d'examiner comment l'on passe du cas de la sphère creuse à celui de la sphère pleine on pose $\phi = (r_0/r_1)^3$ et $\rho = (r/r_1)^3$. Les expressions (6.10, 6.12) des contraintes principales s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = -p_1 + (p_1 - p_0)\dfrac{\phi}{1-\phi}\,\dfrac{1-\rho}{\rho} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p_1 - (p_1 - p_0)\dfrac{\phi}{1-\phi}\,\dfrac{1+2\rho}{2\rho} \end{array} \right. . \tag{6.24}$$

On voit ainsi que pour une sphère de rayon extérieur donné, le tenseur des contraintes en un point donné (ρ fixé) tend vers le tenseur isotrope (6.22) quand le rayon de la cavité tend vers zéro ($\phi \to 0$). En ce sens, on peut dire que l'on passe continûment du cas de la sphère creuse à celui de la sphère pleine. En revanche, si l'on suit la surface intérieure de la sphère ($\rho = \phi > 0$), le tenseur des contraintes tend vers :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = -p_0 \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \dfrac{p_0}{2} - \dfrac{3}{2}\,p_1 \end{array} \right. \tag{6.25}$$

Si l'on s'intéresse par exemple à σ_{rr}, on voit que, lorsque $\phi \to 0$, le profil hyperbolique de σ_{rr} en fonction de ρ tend vers un diagramme bilinéaire : $\sigma_{rr} = -p_1$ pour $\phi < \rho \leq 1$ et $\sigma_{rr} = -p_0$ pour $\rho = \phi$. Ce comportement montre comment la présence d'une cavité, si petite soit-elle, modifie la répartitiion des contraintes dans la sphère ; on reviendra sur ce point dans le paragraphe suivant.

6.4 Limite initiale d'élasticité de la sphère creuse sous pression

Le chargement du système est défini par les deux paramètres p_0 et p_1. On se bornera ici à la recherche de sa frontière initiale d'élasticité avec les critères de Tresca et de von Mises pour le matériau constitutif homogène, isotrope.

Au point courant M de l'enveloppe sphérique (figure 12) les contraintes principales, dirigées selon la base orthonormée des coordonnées sphériques, sont données par (6.10) et (6.12). La fonction de charge de Tresca s'écrit :

$$f\big(\underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,\varphi)\big) = |\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}| - \sigma_0 = \frac{3B}{r^3} - \sigma_0 \tag{6.26}$$

soit

$$f\big(\underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,\varphi)\big) = \frac{3}{2}\,\frac{|p_0 - p_1|}{r_1^3 - r_0^3}\,\left(\frac{r_0 r_1}{r}\right)^3 - \sigma_0 \ . \tag{6.27}$$

Le déviateur des contraintes a pour valeurs principales

$$s_{rr} = -\frac{2B}{r^3} \qquad s_{\theta\theta} = s_{\varphi\varphi} = \frac{B}{r^3} \tag{6.28}$$

et la fonction de charge de von Mises s'écrit :

$$f\big(\underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,\varphi)\big) = \sqrt{3}\,\frac{B}{r^3} - k = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{|p_0 - p_1|}{r_1^3 - r_0^3}\,\left(\frac{r_0 r_1}{r}\right)^3 - k \ . \tag{6.29}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On voit sur (6.27) et (6.29) que les points les plus sollicités vis à vis de l'un ou l'autre critère sont toujours les points de la surface intérieure ∂S_0 de l'enveloppe sphérique (r minimal). De plus, la sollicitation ne dépend en fait que de la ***différence*** entre les deux pressions appliquées et elle lui est (évidemment) proportionnelle. On pose

$$\Delta p = (p_1 - p_0) \tag{6.30}$$

et les équations (6.27) et (6.29) permettent de déterminer les limites initiales d'élasticité de l'enveloppe sphérique pour Δp positive ou négative soit $(\Delta p)_0^+$ et $-(\Delta p)_0^-$:

$$(\Delta p)_0^+ = (\Delta p)_0^- = \frac{2}{3}\sigma_0 \left(1 - \frac{r_0^3}{r_1^3}\right) \qquad \text{(Tresca)} \tag{6.31}$$

$$(\Delta p)_0^+ = (\Delta p)_0^- = \frac{2}{3}\, k\sqrt{3} \left(1 - \frac{r_0^3}{r_1^3}\right) \quad \text{(von Mises)} \, . \tag{6.32}$$

Il est particulièrement intéressant d'examiner les conséquences de ces résultats dans le cas d'une sphère creuse de rayon r_1, dont le rayon de la surface intérieure tend vers zéro ($\phi = (r_0/r_1)^3 \to 0$). On voit, à partir des équations (6.31) et (6.32) ou directement à partir de (6.25) que :

$$\begin{cases} (\Delta p)_0^+ = (\Delta p)_0^- = \dfrac{2}{3}\,\sigma_0 & \text{(Tresca)} \\ (\Delta p)_0^+ = (\Delta p)_0^- = \dfrac{2}{3}\,k\sqrt{3} & \text{(von Mises)} \end{cases} \tag{6.33}$$

Ceci limite notamment la pression p_1 lorsque la pression p_0 est nulle alors qu'au contraire, pour la sphère pleine, l'expression (6.22) du champ de contrainte (champ de pression isotrope homogène), montre qu'il n'y a pas de limite pour la pression p_1. Du ***point de vue pratique***, la comparaison entre ces deux résultats met en évidence l'importance que peut avoir la présence d'un défaut dans un solide. Un résultat semblable est observé dans le cas d'une sphère creuse autour d'une inclusion indéformable.

7 Équilibre élastique d'un tube cylindrique sous pression

7.1 Position du problème

On considère un tube cylindrique circulaire de rayons intérieur et extérieur respectivement r_0 et r_1, d'axe Oz et de hauteur ℓ. On utilise un système de coordonnées cylindriques d'axe Oz centré en O dans la section de base S_0 (figure 14). Les données du problème sont les suivantes :

• forces de masse nulles

$$\underline{F} = 0 \quad \text{sur } \Omega \, , \tag{7.1}$$

• sur les parois intérieure et extérieure du tube

$$\underline{T}^{\mathrm{d}} = p_0\, \underline{e}_r \qquad \text{pour } r = r_0 \qquad (\partial S_0) \, , \tag{7.2}$$

$$\underline{T}^{\mathrm{d}} = -p_1\, \underline{e}_r \qquad \text{pour } r = r_1 \qquad (\partial S_1) \, , \tag{7.3}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

• sur les sections d'extrémités

(7.4) $T_r^{\mathrm{d}} = 0$ sur S_0 et S_ℓ ,

(7.5) $T_\theta^{\mathrm{d}} = 0$ sur S_0 et S_ℓ ,

et

(7.6) $4\xi_z^{\mathrm{d}} = 0$ sur S_0 ,

(7.7) $\xi_z^{\mathrm{d}} = \delta$ sur S_ℓ ,

ou bien

(7.8) $T_z^{\mathrm{d}} = -\sigma$ sur S_0 ,

(7.9) $T_z^{\mathrm{d}} = \sigma$ sur S_ℓ .

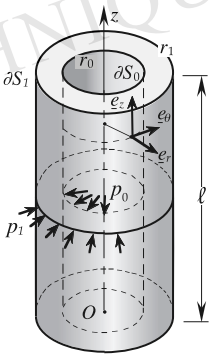


Figure 14: Équilibre élastique d'un tube cylindrique

7.2 Forme de la solution

Résolution par la méthode des déplacements. Compte tenu des symétries de la géométrie, du chargement et du matériau constitutif homogène (isotrope) on cherche le champ de déplacement sous la forme

(7.10) $$\underline{\xi} = r\, f\,(r)\, \underline{e}_r + g(z)\, \underline{e}_z$$

dont on déduit le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ associé par la loi de comportement élastique linéaire, isotrope, exprimés dans la base locale orthonormée des coordonnées cylindriques :

(7.11) $$\underline{\underline{\varepsilon}} = \big(f(r) + r\, f'(r)\big)\, \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + f(r)\, \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + g'(z)\, \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \ ,$$

(7.12) $$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \big(r\, f'\,(r) + 2\, f\,(r) + g'\,(z)\big)\, \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\mu \big(f\,(r) + r\, f'(r)\big)\, \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + 2\,\mu\, f(r)\, \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + 2\,\mu\, g'(z)\, \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \ .$$

Les équations d'équilibre se réduisent à

(7.13) $$\begin{cases} (\lambda + 2\,\mu)\big(3\, f'(r) + r\, f''(r)\,\big) = 0 \\ (\lambda + 2\,\mu)\, g''(z) = 0 \end{cases}$$

d'où :

(7.14) $$\underline{\xi} = (a\, r + \frac{b}{r})\, \underline{e}_r + c\, z\, \underline{e}_z \qquad (a,\, b,\, c : \text{constantes à déterminer}) \ .$$

Ce champ $\underline{\xi}$ satisfait les conditions (7.6 et 7.7), si celles-ci sont imposées ; elles déterminent alors c :

(7.15) $$c = \delta/\ell \ .$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Les expressions du champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et du champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ sont, sous formes explicites :

$$\text{(7.16)} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{rr} = a - \dfrac{b}{r^2} \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = a + \dfrac{b}{r^2} \qquad \varepsilon_{zz} = c \\ \text{autres } \varepsilon_{ij} = 0\,; \end{cases}$$

$$\text{(7.17)} \qquad \begin{cases} \sigma_{rr} = A - \dfrac{B}{r^2} \quad , \quad \sigma_{\theta\theta} = A + \dfrac{B}{r^2} \quad , \quad \sigma_{zz} = C \\ \text{autres } \sigma_{ij} = 0 \end{cases}$$

avec $\qquad A = 2(\lambda+\mu)\,a + \lambda\,c\,, \quad B = 2\,\mu\,b\,, \quad C = 2\,\lambda\,a + (\lambda + 2\,\mu)\,c\,,$

ou encore

$$\text{(7.18)} \qquad a = \frac{1}{E}\left(A - \nu(A+C)\right), \quad b = \frac{B}{2\,\mu}, \quad c = \frac{1}{E}\left(C - 2\,\nu\,A\right).$$

Le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ décrit par (7.17) satisfait les conditions aux limites (7.2) et (7.3) qui permettent de déterminer A et B, en fonction des données du problème sur les parois intérieure et extérieure :

$$\text{(7.19)} \qquad A = \frac{p_0\,r_0^2 - p_1\,r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \qquad B = \frac{(p_0 - p_1)\,r_0^2\,r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}$$

ce qui définit totalement la distribution de σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$.

La connaissance complète de σ_{zz} et du déplacement $\underline{\xi}$ nécessite de déterminer c et C.

- Si les conditions aux limites selon la direction z sur S_0 et S_ℓ portent sur le déplacement, C est déterminé par (7.15) et (7.18) à partir de (7.6) et (7.7), d'où :

$$\text{(7.20)} \qquad \sigma_{zz} = 2\,\nu\,A + E\,\frac{\delta}{\ell}$$

et

$$\text{(7.21)} \qquad \underline{\xi} = \Big(\Big(\frac{A(1+\nu)(1-2\,\nu)}{E} - \nu\frac{\delta}{\ell}\Big)\,r + \frac{B}{2\,\mu\,r}\Big)\,\underline{e}_r + z\frac{\delta}{\ell}\,\underline{e}_z\,.$$

En particulier, si $\delta = 0$ (longueur du tube maintenue constante), on a :

$$\text{(7.22)} \qquad \underline{\xi} = \Big(\frac{A(1+\nu)(1-2\,\nu)}{E}\,r + \frac{B}{2\,\mu\,r}\Big)\,\underline{e}_r$$

et l'on a affaire à un problème de ***déformation plane*** (cf. annexe III, section 2)[14].

[14] On remarquera que la solution du problème pour $\delta \neq 0$ s'obtient par une superposition de la solution pour $\delta = 0$ et de la solution du problème de la traction-compression donnée dans la section 2 : à titre d'exemple, la formule générale (7.21) donnant $\underline{\xi}$ résulte (au changement de notation près) de l'addition de (7.22) et (2.13).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- Si les conditions aux limites selon la direction z sur S_0 et S_ℓ portent sur le vecteur-contrainte, C est obtenu par (7.17) à partir de (7.8) et (7.9), d'où :

$$\sigma_{zz} = \sigma \tag{7.23}$$

et l'on achève de déterminer $\underline{\xi}$ par (7.18) :

$$\underline{\xi} = \big(\frac{(1-\nu)A - \nu\,\sigma}{E} r + \frac{B}{2\,\mu\,r}\big)\,\underline{e}_r + \frac{1}{E}(\sigma - 2\,\nu\,A) z\,\underline{e}_z\ . \tag{7.24}$$

En particulier, si $\sigma = 0$ (sections d'extrémités libres), on a :

$$\sigma_{zz} = 0$$

et l'on a affaire à un problème de ***contrainte plane*** (cf. annexe III, section 3).

7.3 Commentaires

Équation de Navier, fonction de déplacement

Les équations différentielles qui permettent de déterminer $f(r)$, $g(z)$ et donc $\underline{\xi}$ sous la forme (7.14), peuvent aussi s'obtenir directement en explicitant l'équation de Navier en coordonnées cylindriques.

On remarque également que le champ de déplacement (7.10) est irrotationnel et dérive d'une fonction de déplacement φ de la forme $\varphi(r,z) = \varphi_1(r) + \varphi_2(z)$. En explicitant l'équation (5.9) du chapitre VIII à satisfaire par φ il vient

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\underline{\xi} = 2\,f(r) + r\,f'(r) + g'(z) = \text{constante} \tag{7.25}$$

intégrale première de l'équation de Navier, dont on déduit :

$$\begin{cases} 2\,f(r) + r\,f'(r) &= 2\,a \quad \text{constante}\ , \\ g'(z) &= \ c \quad \text{constante}\ , \end{cases} \tag{7.26}$$

d'où l'expression (7.14) de $\underline{\xi}$.

Tube cylindrique circulaire mince

Avec les notations homologues de celles du paragraphe 6.3 on trouve :

$$|\,\sigma_{zz}\,| \ll |\,\sigma_{\theta\theta}\,| \quad \text{où} \quad \sigma_{\theta\theta} \simeq \frac{(p_0 - p_1)\,R}{e}\ , \tag{7.27}$$

formule que l'on peut obtenir par un raisonnement statique d'équilibre global analogue à celui de la figure 13.

Cavité cylindrique dans un milieu infini

Les données imposent les déplacements nuls à l'infini, d'où : $c = 0$, $a = 0$, $A = 0$ et $B = p_0\,r_0^2$. On en déduit pour $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\sigma_{rr} = -p_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \quad \sigma_{\theta\theta} = p_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \quad \sigma_{zz} = 0\ . \tag{7.28}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Récapitulatif des formules essentielles

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

• ***Traction-compression d'une barre cylindrique***

$$\underline{\underline{\sigma}} = E\,\frac{\delta}{\ell}\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$$

$$\underline{\xi} = \frac{\delta}{\ell}\big(x\,\underline{e}_x - \nu(y\,\underline{e}_y + z\,\underline{e}_z)\big)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\delta}{\ell}\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \nu\,\frac{\delta}{\ell}(\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)$$

$$\frac{\mathcal{X}}{S} = E\,\frac{\delta}{\ell}$$

$$\mathcal{X}_0^+ = \mathcal{X}_0^- = \sigma_0\,S \quad \text{(Tresca)}$$

$$\mathcal{X}_0^+ = \mathcal{X}_0^- = k\,\sqrt{3}\,S \quad \text{(von Mises)}$$

• ***Flexion normale d'une barre cylindrique***

$$\underline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_z\,\underline{e}_z$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\frac{\mathcal{M}_z}{I_z}\,y\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$$

$$\begin{cases} \xi_x = -\dfrac{\mathcal{M}_z}{E\,I_z}\,y\,x \\ \xi_y = \dfrac{\mathcal{M}_z}{E\,I_z}\Big(\dfrac{x^2}{2} + \nu\,\dfrac{y^2 - z^2}{2}\Big) \\ \xi_z = \nu\,\dfrac{\mathcal{M}_z}{E\,I_z}\,y\,z \end{cases}$$

$$\chi = \frac{\mathrm{d}\omega\,(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathcal{M}_z}{E\,I_z}$$

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\omega}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathcal{M}_z}{E\,I_z}\,\underline{e}_z$$

$$(\mathcal{M}_z)_0^+ = (\mathcal{M}_z)_0^- = \sigma_0\,\frac{I_z}{v} \quad \text{(Tresca)}$$

$$(\mathcal{M}_z)_0^+ = (\mathcal{M}_z)_0^- = k\,\sqrt{3}\,\frac{I_z}{v} \quad \text{(von Mises)}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

• ***Flexion d'une barre cylindrique***

$$\underline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_y\,\underline{e}_y + \mathcal{M}_z\,\underline{e}_z$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = (-\frac{\mathcal{M}_z}{I_z}\,y + \frac{\mathcal{M}_y}{I_y}\,z)\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$$

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\omega}(x)}{\mathrm{d}x} = (\frac{\mathcal{M}_z}{E\,I_z}\,\underline{e}_z + \frac{\mathcal{M}_y}{E\,I_y}\,\underline{e}_y)$$

• ***Sphère creuse sous pression***

$$\sigma_{rr} = A - 2\,\frac{B}{r^3}\ ,\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = A + \frac{B}{r^3}\ ,\ \text{autres } \sigma_{ij} = 0$$

$$\underline{\xi} = (\frac{A}{3\,\lambda + 2\,\mu}r + \frac{B}{2\,\mu\,r^2})\,\underline{e}_r$$

$$A = \frac{p_0\,r_0^3 - p_1\,r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} \qquad B = \frac{1}{2}\frac{(p_0 - p_1)r_0^3\,r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}$$

$$(\Delta p)_0^+ = (\Delta p)_0^- = \frac{2}{3}\sigma_0(1 - \frac{r_0^3}{r_1^3}) \quad \text{(Tresca)}$$

$$(\Delta p)_0^+ = (\Delta p)_0^- = \frac{2}{3}k\sqrt{3}\,(1 - \frac{r_0^3}{r_1^3}) \quad \text{(von Mises)}$$

• ***Tube cylindrique circulaire sous pression***

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2}\ ,\ \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2}\ ,\ \sigma_{zz} = 2\,\nu\,A + E\frac{\delta}{\ell} \quad ,\quad \text{autres } \sigma_{ij} = 0$$

$$\underline{\xi} = \big((\frac{A(1+\nu)(1-2\nu)}{E} - \nu\frac{\delta}{\ell})r + \frac{B}{2\,\mu\,r}\big)\,\underline{e}_r + z\frac{\delta}{\ell}\,\underline{e}_z$$

$$A = \frac{p_0\,r_0^2 - p_1\,r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \qquad B = \frac{(p_0 - p_1)r_0^2\,r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Exercices

Dans tous ces exercices l'***état initial***, sous chargement nul, pris comme ***référence*** pour le système étudié, est supposé ***naturel***.

IX.1 - Avec les notations et les mêmes hypothèses géométriques et de comportement que dans la section 7 du chapitre IX, on étudie l'équilibre d'un tube cylindrique sous l'action des seules forces extérieures suivantes : contraintes tangentielles parallèles au plan (Oxy), d'intensités constantes τ_0 et τ_1 exercées respectivement sur chacune des parois du tube $r = r_0$ et $r = r_1$.

Éléments de réponse.

Méthode des déplacements. On cherche $\underline{\xi}$ sous la forme $\underline{\xi} = f(r)\,\underline{e}_\theta$, d'où :

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(f' - \frac{f}{r})\,(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r)$ et $\underline{\underline{\sigma}} = \mu\,(f' - \frac{f}{r})\,(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r)$.

Les équations d'équilibre se réduisent à

$\mu(f'' + f'/r - f/r^2) = 0$ qui peut aussi s'obtenir directement en écrivant l'équation de Navier.

Conditions au contour :

$\sigma_{r\theta} = \tau_0$ pour $r = r_0$, $\sigma_{r\theta} = \tau_1$ pour $r = r_1$

$\tau_0\, r_0^2 = \tau_1\, r_1^2$ (équilibre global : $[\mathcal{F}_e] = 0$) .

Solution :

$\underline{\underline{\sigma}} = \tau_0 \frac{r_0^2}{r^2}(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r)$,

$\underline{\xi} = \frac{\tau_0}{2\,\mu}(r - \frac{r_0^2}{r})\,\underline{e}_\theta$ si l'on impose $\underline{\xi} = 0$ pour $r = r_0$.

Commentaire.

Les conditions sur les sections d'extrémités pour lesquelles cette solution est valable sont, par exemple, de la forme $\underline{T}^{\mathrm{d}} = 0$: sections libres de contrainte.

IX.2 - Avec les notations et les mêmes hypothèses géométriques et de comportement que dans la section 7 du chapitre IX, on étudie l'équilibre d'un tube cylindrique soumis sur ses parois intérieure et extérieure ($r = r_0$ et $r = r_1$) à des contraintes tangentielles parallèles à Oz, d'intensité constante respectivement égales à τ_0 et τ_1 et qui s'équilibrent sans force de masse.

Éléments de réponse.

Méthode des déplacements. On cherche $\underline{\xi}$ sous la forme $\underline{\xi} = f(r)\,\underline{e}_z$, d'où :

$\underline{\underline{\varepsilon}} = f'(r)\,(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r)\,/\,2$ et $\underline{\underline{\sigma}} = \mu\, f'(r)\,(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r)$.

Les équations d'équilibre se réduisent à

$\mu(f'' + f'/r) = 0$ qui peut aussi s'obtenir directement en écrivant l'équation de Navier.

Conditions au contour :

$\sigma_{rz} = \tau_0$ pour $r = r_0$, $\sigma_{rz} = \tau_1$ pour $r = r_1$

$\tau_0\, r_0 = \tau_1\, r_1$ (équilibre global : $[\mathcal{F}_e] = 0$) .

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Solution :
$\underline{\underline{\sigma}} = \tau_0 \dfrac{r_0}{r}(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r)$.
$\underline{\xi} = \dfrac{\tau_0\, r_0}{\mu} \ln \dfrac{r}{r_0}\underline{e}_z$ si l'on impose $\underline{\xi} = 0$ pour $r = r_0$.

Commentaire.

On remarque que cette solution, pour être valable, nécessite que soient appliqués, sur les sections d'extrémités, les vecteurs contraintes radiaux de la forme : $\underline{T}^{\mathrm{d}} = -\tau_0 \dfrac{r_0}{r}\underline{e}_r$ sur S_0 et $\underline{T}^{\mathrm{d}} = \tau_0 \dfrac{r_0}{r}\underline{e}_r$ sur S_ℓ . Le torseur de ces efforts sur chacune des bases est nul.

Dans le cas où les sections d'extrémités sont libres de contrainte, la solution est valable dans la partie courante du tube en application du principe de Saint Venant.

IX.3 - Effets thermiques. On considère un solide cylindrique parallèle à Ox, de longueur ℓ et de section S, constitué d'un matériau homogène, isotrope, thermoélastique linéaire. La surface latérale du cylindre est libre de contrainte ; il n'y a pas de force de masse. On se place dans l'hypothèse des petites perturbations. Dans l'état initial, pris comme état de référence, le champ de contrainte est nul (état initial naturel), et les sections d'extrémités S_0 et S_ℓ sont en contact sans frottement avec deux parois rigoureusement immobiles. À partir de cet état initial on impose au solide une augmentation de température τ uniforme. Déterminer les champs de contrainte, de déformation et de déplacement dans le solide ainsi que le torseur des efforts exercés sur la paroi $x = \ell$. Cas de l'acier : $E = 2,1 \times 10^5$ MPa, $\alpha = 1,25 \times 10^{-5}$ K^{-1}, pour $\tau = 20$ K.

Éléments de réponse :

Méthode des contraintes : les termes complémentaires (6.13) dans les équations (6.8) ou (6.9) du chapitre VIII sont nuls ($\underline{\mathrm{grad}}\,\tau = 0$, $\Delta\tau = 0$) .

Solution : champ uniaxial homogène $\underline{\underline{\sigma}} = -E\,\alpha\,\tau\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$,

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \alpha\,\tau(1+\nu)\,(\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)$ homogène, $\underline{\xi} = \alpha\,\tau(1+\nu)\,(y\,\underline{e}_y + z\,\underline{e}_z)$.

Le torseur des efforts exercés sur la paroi $x = \ell$ est celui de la force $E\,\alpha\,\tau\,S\underline{e}_x$ appliquée au centre de S_ℓ.

Commentaire.

En se référant au chapitre II (§ 6.4) on se trouve dans le cas où le champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}_\tau$ est géométriquement compatible (uniforme, égal à $\alpha\,\tau\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$), mais où aucun champ $\underline{\xi}_\tau$, correspondant ne permet de satisfaire les conditions en déplacements imposées au contour : les déformations élastiques associées au champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$, elles aussi géométriquement compatibles, permettent de satisfaire ces conditions au contour.

IX.4 - Compression avec confinement. On considère un solide cylindrique de section S, d'axe Oz, de hauteur ℓ, constitué d'un matériau homogène, linéairement élastique, isotrope. Étudier, dans l'hypothèse des petites perturbations, l'état d'équilibre de ce solide lorsqu'il est soumis, à partir de l'état initial naturel, aux sollicitations suivantes (expérience de compression entre plateaux sans frottement, avec pression de « confinement ») :

- forces de masse nulles,
- $\underline{T}^{\mathrm{d}} = -p\,\underline{n}$ sur la surface latérale,
- $T_x^{\mathrm{d}} = T_y^{\mathrm{d}} = 0$, $\xi_z^{\mathrm{d}} = 0$ sur S_0 ,
- $T_x^{\mathrm{d}} = T_y^{\mathrm{d}} = 0$, $\xi_z^{\mathrm{d}} = \delta$ sur S_ℓ , $(\delta \geq 0)$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Éléments de réponse

Champ de contrainte homogène dans le solide :

$\underline{\underline{\sigma}} = -p\,(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta) + (E\dfrac{\delta}{\ell} - 2\,\nu\,p)\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ (coordonnées cylindriques d'axe Oz).

Champ de déformation homogène :

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \big(-\dfrac{p}{E}(1+\nu)\,(1-2\,\nu) - \nu\dfrac{\delta}{\ell}\big)\,(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta) + \dfrac{\delta}{\ell}\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$.

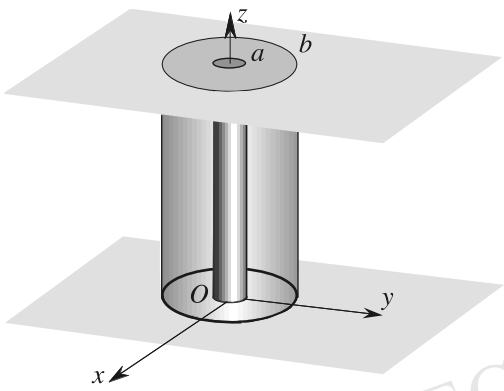
Champ de déplacement :

$\underline{\xi}(\underline{x}) = -\big(\dfrac{p}{E}(1+\nu)\,(1-2\,\nu) + \nu\dfrac{\delta}{\ell}\big)\,r\,\underline{e}_r + \dfrac{\delta}{\ell}\,z\,\underline{e}_z$ (à un déplacement rigidifiant près parallèle au plan Oxy).

IX.5 - Compression d'un solide composite. On étudie, dans l'hypothèse des petites perturbations la compression d'un solide composite défini comme suit : cylindre circulaire droit d'axe Oz, de hauteur ℓ, de rayon extérieur b, constitué d'un noyau coaxial cylindrique de section circulaire de rayon a, et d'une matrice annulaire comprise entre les rayons a et b ($a/b = \alpha$). Les matériaux constitutifs des deux éléments sont homogènes, linéairement élastiques, isotropes ; les caractéristiques élastiques sont E' et ν' pour le matériau du noyau, E'' et ν'' pour le matériau de la matrice. On suppose qu'il y a adhérence totale au contact entre le noyau et la matrice. Le cylindre est soumis, à partir de l'état initial naturel, à la sollicitation définie par :

- forces de masse nulles,
- $\underline{T}^{\mathrm{d}} = 0 \quad$ pour $\quad r = b$ (surface latérale) ,
- $T_x^{\mathrm{d}} = T_y^{\mathrm{d}} = 0\,,\ \xi_z^{\mathrm{d}} = 0 \quad$ sur S_0
- $T_x^{\mathrm{d}} = T_y^{\mathrm{d}} = 0\,,\ \xi_z^{\mathrm{d}} = \delta \quad$ sur $S_\ell\,,\ \delta \le 0$.

Déterminer les champs de contrainte, de déformation et de déplacement dans le solide. Calculer, en fonction de δ, l'effort résultant à exercer sur la section S_ℓ du solide composite.



Éléments de réponse.

• La condition à l'interface entre les deux éléments constitutifs du solide s'écrit en désignant par $'$ et $''$ les grandeurs relatives au noyau et à la matrice respectivement, pour $r = a$:
$\underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x})\cdot\underline{e}_r = \underline{\underline{\sigma}}''(\underline{x})\cdot\underline{e}_r$ (continuité du vecteur contrainte),
$\underline{\xi}'(\underline{x}) = \underline{\xi}''(\underline{x})$ (adhérence noyau-matrice).

• Compte tenu des symétries du problème (de géométrie, de chargement et de comportement) on cherche à le résoudre en utilisant les résultats de Ex. IX.4 pour le noyau et ceux du chapitre IX (section 7) pour la matrice.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Pour les solutions de ces deux problèmes $\underline{\xi}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ sont de la forme :

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \xi_r(r)\,\underline{e}_r + \frac{\delta}{\ell} z\,\underline{e}_z$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \frac{\mathrm{d}\,\xi_r}{\mathrm{d}r}\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{\xi_r}{r}\,\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\delta}{\ell}\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

$$\underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x}) = \sigma_{rr}(r)\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r)\,\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \sigma_{zz}\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \ .$$

Les conditions à l'interface $r = a$ se réduisent à : $\sigma'_{rr}(a) = \sigma''_{rr}(a)$ et $\xi'_r(a) = \xi''_r(a)$.

On pose $p = -\sigma'_{rr}(a) = -\sigma''_{rr}(a)$; la détermination de p par l'équation de continuité de $\xi_r(a)$ achève la résolution du problème.

On a :

$$\xi'_r(a) = -a\,\big(\frac{p}{E'}(1+\nu')\,(1-2\nu') + \nu'\frac{\delta}{\ell}\big)$$

$$\xi''_r(a) = -a\,\big(\nu''\frac{\delta}{\ell} - \frac{p}{E''}(1+\nu'')\frac{1+\alpha^2(1-2\,\nu'')}{1-\alpha^2}\big)$$

d'où :

$$p = (\nu''-\nu')\,\frac{\delta}{\ell}\,\big(\frac{(1-2\,\nu')\,(1+\nu')}{E'} + (1+\nu'')\frac{1+\alpha^2(1-2\,\nu'')}{E''(1-\alpha^2)}\big)^{-1} \ .$$

En portant cette valeur de p dans les expressions des champs $\underline{\xi}'$, $\underline{\underline{\varepsilon}}'$, $\underline{\underline{\sigma}}'$, et $\underline{\xi}''$, $\underline{\underline{\varepsilon}}''$ et $\underline{\underline{\sigma}}''$ on obtient la solution complète du problème.

En particulier :

$$\sigma'_{zz} = E'\frac{\delta}{\ell} - 2\,\nu'\,p \ \text{ et } \ \sigma''_{zz} = E''\frac{\delta}{\ell} + 2\,\nu''\,p\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \ .$$

L'effort résultant à exercer sur la section S_ℓ du solide composite est une force axiale $\underline{\Phi}$:

$$\underline{\Phi} = \pi\,b^2\,\frac{\delta}{\ell}\big(\alpha^2\,E' + (1-\alpha^2)\,E''$$
$$+\,2\,(\nu''-\nu')^2\alpha^2\,\big(\frac{(1+\nu')\,(1-2\nu')}{E'} + \frac{1+\nu''}{E''}\,\frac{1+\alpha^2(1-2\,\nu'')}{1-\alpha^2}\big)^{-1}\big)\,\underline{e}_z \ .$$

Commentaire.

On remarque que $p = 0$ si et seulement si $\nu' = \nu''$. p est positif (interface comprimée) pour $\delta < 0$ (expérience de compression entre plateaux) si $\nu'' > \nu'$. Si la matrice et le noyau n'étaient pas solidarisés à l'interface et s'il existait un jeu suffisant pour que les frontières des deux éléments pour $r = a$ demeurent libres de contrainte, la solution du problème serait l'état de compression simple dans chacun de ces éléments cylindriques. L'effort résultant à exercer serait une force axiale $\underline{\Phi}_0$:

$$\underline{\Phi}_0 = \pi\,b^2\,\frac{\delta}{\ell}\big(\alpha^2\,E' + (1-\alpha^2)\,E''\big) \ .$$

On constate donc que si et seulement si $\nu' = \nu''$ on a $\underline{\Phi} = \underline{\Phi}_0$.

Si $\nu' \neq \nu''$ l'intensité de la force à exercer sur le solide composite est toujours supérieure à $|\,\underline{\Phi}_0\,|$.

Cela signifie que, définissant le module « apparent » E_a du solide dans cette expérience par $E_\mathrm{a} = |\,\Phi\,|\,\ell\,/\,\pi\,b^2\,\delta$ on a : $E_\mathrm{a} \geq \alpha^2\,E' + (1-\alpha^2)\,E''$, où le deuxième membre représente la moyenne volumique des modules de Young des matériaux constitutifs. On donnera au chapitre X (§ 5.3) un encadrement valable pour E_a ***en toute généralité*** dès que la proportion relative des deux matériaux constitutifs est connue, indépendamment de leur distribution géométrique dans le solide. Celui-ci fournirait dans le cas présent la valeur approchée par défaut : $\big(\alpha^2\,\dfrac{1}{E'} + (1-\alpha^2)\,\dfrac{1}{E''}\big)^{-1}$.

IX.6 - Compression d'un échantillon en matériau anisotrope. Étudier, dans l'hypothèse des petites perturbations, l'équilibre d'un solide cylindrique d'axe Oz, de hauteur ℓ, constitué d'un matériau homogène, linéairement élastique, orthotrope de révolution autour de la direction $\underline{c}$ (cf. chapitre VII, § 5.7), soumis à partir de l'état initial naturel au chargement défini par :

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- forces de masse nulles,
- $\underline{T}^{\mathrm{d}} = 0$ sur la surface latérale,
- $\underline{T}^{\mathrm{d}} = p\,\underline{e}_z$ en tout point de la section d'extrémité $S_0\,(z=0)$,
- $\underline{T}^{\mathrm{d}} = -p\,\underline{e}_z$ en tout point de la section d'extrémité $S_\ell(z=\ell)$, où p est une constante.

Éléments de réponse.

- La solution est constituée du champ de contrainte homogène $\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ et du champ de déformation associé par la loi de comportement (formule 5.65 du chapitre VII,) écrite en transformation infinitésimale : ce champ est lui aussi homogène donc intégrable.
- Plus précisément, en posant $\alpha = (\underline{c}, \underline{e}_z)$, en prenant $\underline{a}$ et $\underline{e}_x$ dans le plan défini par $\underline{c}$ et $\underline{e}_z$, et en prenant $\underline{b} = \underline{e}_y$, les trièdres $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ et $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ étant orthonormés directs on a :

$\sigma_{aa} = -\dfrac{p}{2}(1-\cos 2\,\alpha)$, $\sigma_{ac} = \sigma_{ca} = -\dfrac{p}{2}\sin 2\,\alpha$, $\sigma_{cc} = -\dfrac{p}{2}(1+\cos 2\,\alpha)$, autres $\sigma_{\alpha\beta} = 0$;

et par la loi de comportement

$$\varepsilon_{aa} = -\frac{p}{2}\left(\frac{1-\cos 2\,\alpha}{E} - \frac{\nu'(1+\cos 2\alpha)}{E'}\right)$$

$$\varepsilon_{bb} = -\frac{p}{2}\left(-\frac{\nu(1-\cos 2\alpha)}{E} - \frac{\nu'(1+\cos 2\,\alpha)}{E'}\right)$$

$$\varepsilon_{cc} = -\frac{p}{2}\left(-\frac{\nu'(1-\cos 2\alpha)}{E'} + \frac{1+\cos 2\,\alpha}{E'}\right)$$

$$\varepsilon_{ac} = -\frac{p}{2}\,\frac{\sin 2\,\alpha}{2\,G} \quad , \quad \text{autres } \varepsilon_{\alpha\beta} = 0\ .$$

Commentaire.

À partir des formules ci-dessus on peut calculer les composantes ε_{ij} de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans la base $\underline{e}_x\,,\,\underline{e}_y\,,\,\underline{e}_z$.

Outre les composantes : $\varepsilon_{xx}\,,\,\varepsilon_{yy}\,,\,\varepsilon_{zz}$ on trouve :

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = -\frac{p}{4}\sin 2\,\alpha\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{E} - \frac{1+(1+2\,\nu')\cos 2\,\alpha}{E'} + \frac{\cos 2\,\alpha}{G}\right)\ ,$$

autres $\varepsilon_{ij} = 0$.

Si le matériau n'est pas isotrope on a $\varepsilon_{xz} \neq 0$ si $\alpha \neq 0$ ou $\pi/2$. Cela signifie que la déformation du cylindre se fait avec glissement (chapitre II, § 3.2) des directions orthogonales x et z : autrement dit le cylindre « s'écrase » et « se déverse » sur le côté (pour $p > 0$) s'il est sollicité hors de ses « axes d'orthotropie ». Ceci illustre la difficulté de la réalisation pratique d'une expérience de compression simple, ou de traction simple (cf. Chapitre VII, § 2.2), sur un échantillon en matériau anisotrope.

IX.7 - Effets thermiques. On considère un solide cylindrique d'axe Oz, de hauteur ℓ, de section droite circulaire S (rayon R), constitué d'un matériau homogène, isotrope, thermoélastique linéaire. Ce solide, dans l'état initial naturel et avec une distribution de température homogène T_0, est placé entre les plateaux d'une presse, supposés indéformables et parfaitement lisses, parallèles au plan Oxy. On donne un déplacement $\xi_z^{\mathrm{d}} = \delta$ ($\delta < 0$) au plateau supérieur, le plateau inférieur étant immobile, tandis qu'une variation de température de la forme $\tau = \tau_0\, f\,(r)$ à partir de T_0 s'établit à l'intérieur du solide (par suite d'une modification des conditions aux limites sur T) ; on suppose f continue et continûment différentiable pour $0 \leq r \leq R$. Il n'y a pas de forces de masse. En supposant que la liaison au contact entre S_0 ou S_ℓ et les plateaux est persistante, déterminer les déplacements et les contraintes dans le cylindre.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Éléments de réponse.

• On peut transformer le problème posé en un problème d'élasticité isotherme (chapitre VIII, § 4.3). Pour ce problème en posant :

$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + k\,\tau_0\,f\,(r)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$

$\rho\,\underline{F}' = -k\,\tau_0\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\,\underline{e}_r$

et avec les conditions aux limites :

$\underline{T}'^{\mathrm{d}} = k\,\tau_0\,f\,(R)\,\underline{e}_r$ pour $r = R$,

$T'^{\mathrm{d}}_x = T'^{\mathrm{d}}_y = 0$, $\xi^{\mathrm{d}}_z = 0$ sur S_0 ,

$T'^{\mathrm{d}}_x = T'^{\mathrm{d}}_y = 0$, $\xi^{\mathrm{d}}_z = \delta$ sur S_ℓ

(en faisant l'hypothèse que la liaison unilatérale sur S_0 et S_ℓ est persistante).

• On cherche le champ de déplacement solution sous la forme $\underline{\xi}(\underline{x}) = \xi_r(r)\,\underline{e}_r + \xi_z(z)\,\underline{e}_z$ qui dérive d'une fonction de déplacement $\varphi\,(\underline{x}) = \alpha\,(r) + \beta\,(z)$.

Les forces de masse dérivent du potentiel $\mathcal{V}'(\underline{x}) : \rho\,\mathcal{V}'(\underline{x}) = k\,\tau_0\,f\,(r)$.

On tire de la formule (5.9) du chapitre VIII :

$$(\lambda + 2\,\mu)\,\Big(\frac{\mathrm{d}^2\alpha(r)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\alpha\,(r)}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}^2\beta\,(z)}{\mathrm{d}z^2}\Big) = k\,\tau_0\,f\,(r) + C\ .$$

D'où, compte tenu des conditions aux limites sur $\xi_z(z) = \dfrac{\mathrm{d}\beta\,(z)}{\mathrm{d}z}$:

$$\xi_z(z) = \frac{\mathrm{d}\beta(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\delta}{\ell}z \text{ et } \xi_r(r) = \frac{\mathrm{d}\alpha(r)}{\mathrm{d}r} = A\,r + \frac{k\,\tau_0}{\alpha + 2\,\mu}\frac{1}{r}\int_0^r u\,f\,(u)\,\mathrm{d}u$$

puisque $\underline{\underline{\sigma}}$, et donc $\underline{\underline{\varepsilon}}$, doivent être finis pour $r = 0$.

La détermination de A se fait à partir de la condition aux limites sur les contraintes pour $r = R$:

$\sigma'_{rr} = \lambda\ \mathrm{div}\ \underline{\xi} + 2\,\mu\,\varepsilon_{rr}$, $\sigma'_{rr}(R) = k\,\tau_0\,f\,(R)$;

$$\mathrm{div}\ \underline{\xi} = \Delta\varphi = 2\,A + \frac{\delta}{\ell} + \frac{k\,\tau_0}{\lambda + 2\,\mu}f\,(r)$$

$$A = \frac{\mu\,k\,\tau_0}{(\lambda + \mu)\,(\lambda + 2\,\mu)}\frac{1}{R^2}\int_0^R u\,f\,(u)\,\mathrm{d}u - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\frac{\delta}{\ell}\ .$$

Les directions principales de $\underline{\underline{\sigma}}$ sont $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\theta$, $\underline{e}_z$ et on a :

$$\sigma_{rr} = k\,\tau_0\frac{1 - 2\,\nu}{1 - \nu}\Big(\frac{1}{R^2}\int_0^R u\,f\,(u)\,\mathrm{d}u - \frac{1}{r^2}\int_0^r u\,f\,(u)\,\mathrm{d}u\Big)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = k\,\tau_0\frac{1 - 2\,\nu}{1 - \nu}\Big(\frac{1}{R^2}\int_0^R u\,f\,(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{r^2}\int_0^r u\,f\,(u)\,\mathrm{d}u - f(r)\Big)$$

$$\sigma_{zz} = E\,\frac{\delta}{\ell} + k\,\tau_0\frac{2\,\nu\,(1 - 2\,\nu)}{1 - \nu}\frac{1}{R^2}\int_0^R u\,f\,(u)\,\mathrm{d}u - k\,\tau_0\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}f\,(r)\ .$$

Commentaire.

• L'équation (2.27) du chapitre VIII montre que, sauf singularité thermique sur l'axe du cylindre, l'équilibre thermique de ce solide n'est réalisé que lorsque la fonction f est constante (on retrouve alors les résultats de Ex. IX.3). Les autres répartitions de τ correspondent à des situations transitoires.

• Pour que la liaison sur S_0 et S_ℓ soit persistante il faut et suffit que dans la solution précédente on ait $\sigma_{zz}(r) \leq 0$ pour $0 \leq r \leq R$. D'où, en désignant par r_0 la valeur de r pour laquelle $\tau_0\,f\,(r)$ est minimum, la condition $\sigma_{zz}(r_0) \leq 0$:

$$\frac{\delta}{\ell} \leq \frac{k\,\tau_0}{E}\frac{(1 - 2\,\nu)}{1 - \nu}\Big(f(r_0) - 2\nu\frac{1}{R^2}\int_0^R u\,f\,(u)\,\mathrm{d}u\Big)\ .$$

IX.8 - Traction simple en transformation finie. Dans l'expérience de traction simple effectuée pour identifier la loi de comportement d'un caoutchouc ou d'un polymère la dilatation λ selon la direction de traction peut atteindre des valeurs de l'ordre

de 6 à 10. Une telle expérience doit donc être analysée en grandes déformations. Le problème d'évolution isotherme est modélisé comme suit.

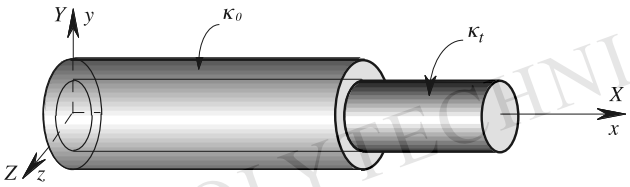
Éprouvette cylindrique constituée d'un matériau homogène, isotrope. Configuration initiale, de référence : longueur ℓ_0, section S_0, axe OX. Configuration actuelle : longueur $\ell(t) = \lambda(t)\,\ell_0$, pas de déplacement selon Ox de la section origine ($x = 0$).

Chargement :

- forces de masse nulles,
- surface latérale libre de contrainte,
- sections d'extrémités lisses : contraintes tangentielles nulles sur ces sections.

Le matériau est supposé élastique, incompressible.

Déterminer la relation entre la force de traction $Q(t)$ exercée sur l'éprouvette et la dilatation $\lambda(t)$ en fonction de l'expression $\overline{\psi}$ du potentiel thermodynamique (cf. Ex. VII.10).



Éléments de réponse.

On utilise l'approche par les déplacements hors des hypothèses de linéarisation.

• L'homogénéité et l'isotropie du matériau, la forme des données, incitent à rechercher une solution du problème d'évolution sous la forme d'une transformation homogène à chaque instant :

$x = \lambda\,X\ ,\ y = \lambda_2\,Y\ ,\ z = \lambda_3\,Z\ ,\ \lambda_2 = \lambda_3\ ,$

qui satisfait évidemment les données en déplacement. (λ et λ_2 sont des fonctions de t dont on ne fait plus apparaître explicitement la dépendance pour alléger les formules). On a alors :

$\underline{\underline{F}} = \lambda\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \lambda_2\,(\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)\ .$

L'incompressibilité du matériau permet de déterminer λ_2 :

$\det \underline{\underline{F}} = \lambda\,\lambda_2^2 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda^{-1/2}\ .$

• On utilise les résultats de Ex.VII.10 pour exprimer la loi de comportement élastique.

OX, OY, OZ sont directions principales de $\underline{\underline{e}}(\underline{X})$, donc de $\underline{\underline{\pi}}(\underline{X})$. Elles sont ici invariantes dans le transport convectif : $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ admet Ox, Oy et Oz comme directions principales.

$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \ = \sigma_1(\underline{x})\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \sigma_2(\underline{x})\,\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \sigma_3(\underline{x})\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\ .$

$\sigma_1(\underline{x}) = \lambda_1\,\rho_0 \dfrac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_1}(\lambda\,,\,\lambda^{-1/2}\,,\,\lambda^{-1/2}) + \eta\,(\underline{x})\ ,$

$\sigma_2(\underline{x}) = \lambda_2\,\rho_0 \dfrac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_2}(\lambda\,,\,\lambda^{-1/2}\,,\,\lambda^{-1/2}) + \eta\,(\underline{x})\ ,$

$\sigma_3(\underline{x}) = \lambda_3\,\rho_0 \dfrac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_3}(\lambda\,,\,\lambda^{-1/2}\,,\,\lambda^{-1/2}) + \eta\,(\underline{x})\ .$

$\overline{\psi}$ étant symétrique en λ_1, λ_2, λ_3 on a : $\dfrac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_2}(\lambda\,,\,\lambda^{-1/2}\,,\,\lambda^{-1/2}) = \dfrac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_3}(\lambda\,,\,\lambda^{-1/2}\,,\,\lambda^{-1/2})\ .$

Le scalaire $\eta\,(\underline{x})$ est laissé indéterminé en chaque point par la loi de comportement.

• Équations d'équilibre.

$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \Rightarrow \underline{\operatorname{grad}}\,\eta = 0$ sur Ω_t : le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ est donc constant.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Les conditions aux limites sur les sections d'extrémités sont satisfaites car Ox est direction principale pour $\underline{\underline{\sigma}}$. Les conditions aux limites sur la surface latérale déterminent η en fonction de λ :

$$\eta = -\lambda^{-1/2}\,\rho_0 \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_3}(\lambda\,,\,\lambda^{-1/2}\,,\,\lambda^{-1/2})\,.$$

Le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ est homogène, uniaxial :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho_0\big(\lambda \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_1}(\lambda\,,\,\lambda^{-1/2}\,,\,\lambda^{-1/2}) - \lambda^{-1/2}\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_3}(\lambda\,,\,\lambda^{-1/2}\,,\,\lambda^{-1/2})\big)\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x\,.$$

• La force de traction $Q(\lambda)$ est donnée par $Q(\lambda) = S\,\sigma_1$ où $S = S_0/\lambda$ d'où :

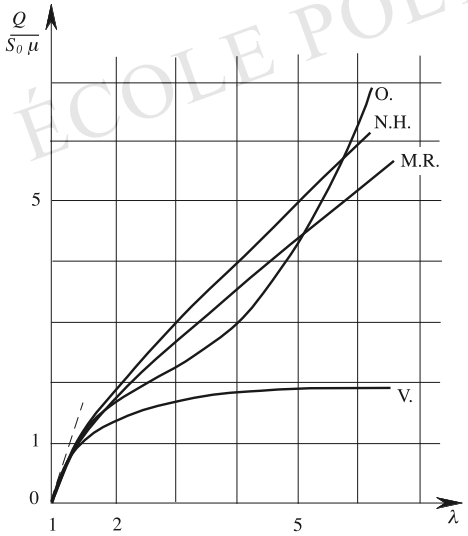
$$Q(\lambda) = S_0\,\rho_0\big(\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_1}(\lambda\,,\,\lambda^{-1/2}\,,\,\lambda^{-1/2}) - \lambda^{-3/2}\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_3}(\lambda\,,\,\lambda^{-1/2}\,,\,\lambda^{-1/2})\big)\,.$$

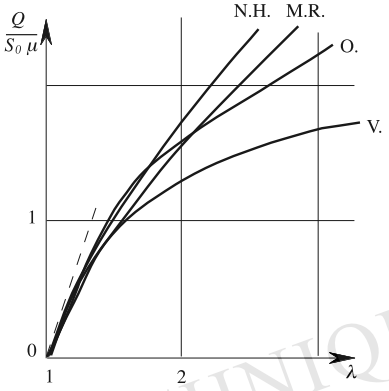
En posant $w(\lambda) = \rho_0\,\overline{\psi}(\lambda\,,\,\lambda^{-1/2}\,,\,\lambda^{-1/2})$,

il vient : $Q(\lambda) = S_0 \dfrac{\mathrm{d}w\,(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$.

• Cette formule générale valable pour tout matériau élastique, isotrope, incompressible, peut notamment être appliquée aux divers modèles de comportement examinés dans Ex.VII.11. Les résultats correspondants sont représentés sur la figure : on a identifié les comportements linéarisés donnés par chacun de ces modèles (les courbes ont toutes la même tangente initiale de pente 3) en adoptant pour les modèles de Mooney-Rivlin et de Ogden les valeurs numériques données dans Ex.VII.11.

• La validation expérimentale de ces modèles (expérience de L.R.G. Treloar par exemple) fait apparaître que le modèle d'Ogden à trois termes permet de rendre compte convenablement de l'inflexion caractéristique de la courbe de traction simple du caoutchouc ; le modèle de Mooney-Rivlin, et même le modèle Néo-Hookien très simple, peuvent aussi être utilisés avec profit.





Commentaire.

On constate sur cet exemple, comme indiqué au chapitre VII (§ 4.3), que l'indétermination laissée au niveau local par la loi de comportement est levée dans la résolution du problème par la prise en compte de toutes les équations dont celle de la liaison interne d'incompressibilité : le champ η est déterminé. On remarque aussi la conformité de la démarche suivie avec le schéma de résolution donné sur la figure 3 du chapitre VIII. (Bien noter que les équations de la statique pour $\underline{\underline{\sigma}}$ sont écrites sur la configuration actuelle). Une analyse tout à fait semblable permettrait d'étudier la traction équi-biaxiale, expérience utilisée elle aussi pour l'identification des lois de comportement du caoutchouc et des polymères : l'échantillon a

la forme d'un élément de plaque épaisse carré, ses faces supérieure et inférieure sont libres de contrainte tandis que l'on impose normalement aux faces latérales des élongations égales (une sollicitation de ce type, mais non homogène, est analysée dans Ex. IX.9).

IX.9 - Expansion d'une enveloppe sphérique en transformation finie. On considère une enveloppe dont les rayons intérieur et extérieur dans la configuration initiale de référence sont A et B, et qui est constituée d'un matériau homogène, isotrope, élastique, incompressible. Étudier le problème d'évolution correspondant au gonflement de cette enveloppe lorsqu'elle est soumise à l'extérieur à une pression constante p_{e} et à l'intérieur à une pression $p_{\mathrm{i}}(t)$ croissant à partir de p_{e}. Donner en particulier la relation entre $p_{\mathrm{i}}(t)$ et le paramètre géométrique $\lambda(A,t) = a(t)/A$ où $a(t)$ désigne le rayon intérieur de l'enveloppe dans la configuration actuelle, en fonction de l'expression $\overline{\psi}$ du potentiel thermodynamique du matériau (cf. Ex. VII.10). Cas du matériau Néo-Hookien (cf. Ex. VII.11). Cas de l'enveloppe «mince».

Éléments de réponse.

• L'homogénéité et l'isotropie du matériau, la forme des données, incitent à rechercher une solution du problème d'évolution sous la forme d'une transformation purement radiale à chaque instant.

$\underline{OM} = \lambda(R)\,\underline{OM}_0$ où $R = |\underline{OM}_0|$ (O : centre de l'enveloppe sphérique). (On ne fait plus apparaître explicitement la dépendance en t).

Désignant par $(R\,,\,\Theta\,,\Phi)$ et $(r\,,\,\theta\,,\,\varphi)$ respectivement les coordonnées sphériques de M_0 et M, et par $(\underline{e}_R\,,\,\underline{e}_\Theta\,,\,\underline{e}_\Phi)$ et $(\underline{e}_r\,,\,\underline{e}_\theta\,,\,\underline{e}_\varphi)$ les bases locales orthonormées en M_0 et M, on a :

$$\underline{\underline{F}}(R\,,\,\Theta\,,\,\Phi) = (R\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}R} + \lambda)\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_R + \lambda\,(\underline{e}_\theta + \underline{e}_\Theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\Phi)$$
$$= \lambda_1(R)\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_R + \lambda_2(R)\,\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\Theta + \lambda_3(R)\,\underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\Phi$$

où $\underline{e}_r = \underline{e}_R$, $\underline{e}_\theta = \underline{e}_\Theta$, $\underline{e}_\varphi = \underline{e}_\Phi$ car les bases en M_0 et M sont parallèles.

• L'incompressibilité du matériau permet de déterminer $\lambda\,(R)$. On a :

$$\det \underline{\underline{F}} = \lambda^3(R) + R\,\lambda^2(R)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}R} = \lambda^2(R)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}(R\,\lambda\,(R)) = 1\,,\ \text{d'où :}$$

$$\lambda\,(R) = (1 + \frac{A^3}{R^3}(\lambda^3(A) - 1))^{1/3}$$

$$\lambda_1(R) = \lambda^{-2}(R)\ ,\ \lambda_2(R) = \lambda_3(R) = \lambda\,(R)$$

(conservation du volume de l'enveloppe sphérique de rayons A et R dans κ_0 , a et r dans κ_t) .

• On utilise les résultats de Ex.VII.10 pour exprimer la loi de comportement élastique.

$\underline{e}_R\,,\,\underline{e}_\Theta\,,\,\underline{e}_\Phi$ sont directions principales de $\underline{\underline{e}}$ et $\underline{\underline{\pi}}$ en M_0 . Elles sont transportées convectivement selon les directions $\underline{e}_r\,,\,\underline{e}_\theta\,,\,\underline{e}_\varphi$, parallèles qui sont principales pour $\underline{\underline{\sigma}}$ en M :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \sigma_1(\underline{x})\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_2(\underline{x})\,\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \sigma_3(\underline{x})\,\underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi\ ,$$

$$\sigma_1(\underline{x}) = \lambda^{-2}(R)\,\rho_0\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\lambda_1}(\lambda^{-2}(R)\,,\,\lambda\,(R)\,,\,\lambda\,(R)) + \eta\,(r\,,\,\theta\,,\,\varphi)\ ,$$

$$\sigma_2(\underline{x}) = \lambda\,(R)\,\rho_0\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\lambda_2}(\lambda^{-2}(R)\,,\,\lambda\,(R)\,,\,\lambda(R)) + \eta\,(r\,,\,\theta\,,\varphi)\ ,$$

$$\sigma_3(\underline{x}) = \lambda\,(R)\,\rho_0\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\lambda_3}(\lambda^{-2}(R)\,,\,\lambda\,(R)\,,\,\lambda\,(R)) + \eta\,(r\,,\,\theta\,,\,\varphi)\ .$$

$\overline{\psi}$ étant symétrique en $\lambda_1\,,\,\lambda_2\,,\,\lambda_3$ on a :

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\lambda_2}(\lambda^{-2}(R)\,,\,\lambda\,(R)\,,\,\lambda(R)) = \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\lambda_3}(\lambda^{-2}(R)\,,\,\lambda\,(R)\,,\,\lambda\,(R))\ .$$

Le champ scalaire $\eta\,(r\,,\,\theta\,,\,\varphi)$ est laissé indéterminé par la loi de comportement.

• Équations d'équilibre.

div $\underline{\underline{\sigma}} = 0$ en coordonnées sphériques fournit : $\dfrac{\partial\eta(r\,,\,\theta\,,\,\varphi)}{\partial\theta} = 0$ et $\dfrac{\partial\eta(r\,,\,\theta\,,\,\varphi)}{\partial\varphi} = 0$;

η n'est donc fonction que de r .

Puis en remarquant qu'ici :

$$\frac{1}{r}(2\,\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) = -\frac{1}{R}\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\lambda\,(R)}$$

où l'on a posé $w\,(\lambda) = \rho_0\,\overline{\psi}\,(\lambda^{-2}\,,\,\lambda\,,\,\lambda)$, il vient par la première équation d'équilibre :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\lambda^{-2}(R)\,\rho_0\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\lambda_1}\big(\lambda^{-2}(R)\,,\,\lambda(R)\,,\,\lambda(R)\big)\right) + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{R}\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\lambda(R)} = 0\,.$$

En posant $H\,(R) = \eta\,(r) = \eta\,\big(R\,\lambda\,(R)\big)$ et compte tenu de $\mathrm{d}r/\mathrm{d}R = \lambda^{-2}(R)$:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}R}(R) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\lambda^{-2}(R)\rho_0\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\lambda_1}\big(\lambda^{-2}(R)\,,\,\lambda\,(R)\,,\,\lambda\,(R)\big)\right) + \frac{1}{R\,\lambda^2(R)}\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\lambda\,(R)}\,.$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

pour $r = a\,,\ R = A\,:\ \lambda^{-2}(A)\,\rho_0\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial\lambda_1}(A) + H\,(A) = -p_{\mathrm{i}}$

pour $r = b\,,\ R = B\,:\ \lambda^{-2}(B)\,\rho_0\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial\lambda_1}(B) + H\,(B) = -p_{\mathrm{e}}\,.$

• Le champ $\eta(r)$, ou $H(R)$, est ainsi déterminé en fonction du paramètre géométrique $\lambda(A)$. En effet $\lambda(A)$ étant donné, la fonction $\lambda\,(R)$ est connue et $H\,(R)$ est déterminé par intégration de l'équation différentielle à partir de la condition aux limites pour $R = B$.

En effectuant le changement de variable (licite) $R \mapsto \lambda\,(R)$:

$$H\,(R) = -p_{\mathrm{e}} - \lambda^{-2}(R)\,\rho_0\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\lambda_1}(R) + \int_{\lambda(B)}^{\lambda(R)}\Big(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\lambda}\Big)\frac{\mathrm{d}\lambda}{1-\lambda^3}\,.$$

Ceci détermine, par la condition aux limites pour $R = A$, la valeur de la pression intérieure p_{i} correspondant à $\lambda\,(A)$:

$$p_{\mathrm{i}} = p_{\mathrm{e}} + \int_{\lambda(B)}^{\lambda(A)}\Big(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\lambda}\Big)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^3-1}$$

où $w\,(\lambda) = \rho_0\,\overline{\psi}\,(\lambda^{-2}\,,\,\lambda\,,\,\lambda)$ et $\lambda^3(R) = 1 + \dfrac{A^3}{R^3}\big(\lambda^3(A) - 1\big)$.

• Pour le matériau Néo-Hookien

$w(\lambda) = \rho_0\,\overline{\psi}\,(\lambda^{-2}\,,\,\lambda\,,\,\lambda) = \dfrac{\mu}{2}(\lambda^{-4} + 2\,\lambda^2 - 3)$.

D'où : $p_{\mathrm{i}} = p_{\mathrm{e}} - 2\,\mu\displaystyle\int_{\lambda(A)}^{\lambda(B)}\frac{1+\lambda^3}{\lambda^5}\,\mathrm{d}\lambda\,,$

$$p_{\mathrm{i}} = p_{\mathrm{e}} + \mu\,\Big(\frac{1}{2\,\lambda^4(B)} - \frac{1}{2\,\lambda^4(A)} + \frac{2}{\lambda\,(B)} - \frac{2}{\lambda\,(A)}\Big)\,.$$

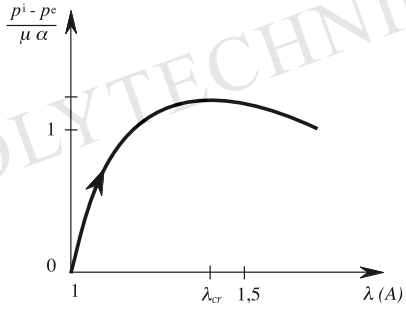
• Dans le cas d'une enveloppe mince, $(B-A)/A = \alpha \ll 1$, on obtient au 1er ordre en α :

$$p_{\mathrm{i}} \simeq p_{\mathrm{e}} + \alpha\,\frac{1}{\lambda^2(A)}\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\lambda}\big(\lambda\,(A)\big)\,.$$

• Pour le matériau Néo-Hookien : $p_{\mathrm{i}} \simeq p_{\mathrm{e}} + 2\,\mu\,\alpha\Big(\dfrac{1}{\lambda\,(A)} - \dfrac{1}{\lambda^7(A)}\Big)$.

La fonction $\Big(\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda^7}\Big)$ est monotone croissante à partir de la valeur 0 pour $\lambda = 1$ jusqu'à son maximum atteint pour $\lambda = \lambda_{\mathrm{cr}} = 7^{1/6} = 1,383$. Elle est ensuite décroissante.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE



Commentaire.

Au début de l'évolution, lorsque $\lambda(A)$ est voisin de 1 , on se trouve dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations permettant la linéarisation. La relation obtenue dans le cas du matériau Néo-Hookien par exemple se linéarise en $(p_\mathrm{i} - p_\mathrm{e}) \simeq 4\mu(1 - A^3/B^3)(\lambda(A) - 1)$ et l'on vérifie que ce résultat est identique à celui (6.12, 6.13) du paragraphe 6.2 ; en effet, le matériau étant incompressible, la constante de Lamé λ est infinie ; en outre, la constante matérielle μ du modèle Néo-Hookien est identifiée comme le module de cisaillement en transformation infinitésimale (cf. Ex. VIII.11). Pour l'enveloppe sphérique mince on a mis en évidence qu'au delà de cette période linéaire l'expansion nécessite une pression croissante tant que $\lambda\,(A) < \lambda_\mathrm{cr} \simeq 1,383$; au delà de λ_cr l'expansion se poursuit sous pression décroissante. On devra donc contrôler la pression durant l'opération de gonflage pour éviter une instabilité : ce problème modélise par exemple l'expansion d'un ballon de baudruche pour lequel ce type d'instabilité est bien connu. L'étude numérique de la correspondance entre $\lambda(A)$ et $(p_\mathrm{i} - p_\mathrm{e})$ pour diverses valeurs du paramètre A/B correspondant à une enveloppe sphérique épaisse montre la persistance du phénomène mis en évidence pour l'enveloppe mince.

$\frac{A}{B}$	$\lambda_\mathrm{cr} \simeq$	$\frac{(p_\mathrm{i} - p_\mathrm{e})_\mathrm{cr}}{\mu}\,\frac{A}{B - A}$
0,98	1,39	1,25
0,9	1,43	1,30
0,7	1,64	1,52
0,5	1,83	1,63

La formule générale établie pour $(p_\mathrm{i} - p_\mathrm{e})$ en fonction de $\lambda(A)$ permet l'étude du problème avec d'autres modèles de comportement isotrope, élastique, incompressible tels que ceux examinés dans Ex.VII.11.

La perte d'unicité de la correspondance entre $p_\mathrm{i}(t)$ et $\lambda(A, t)$ illustre les considérations du chapitre VIII (§ 1.3 et 3.1). On voit en particulier que la donnée de la sollicitation $p_\mathrm{i}(t)$ ne permet pas de définir le problème d'équilibre thermoélastique à cet instant sans connaître l'évolution antérieure.

IX.10 - Torsion en transformation finie. On étudie le problème d'évolution correspondant à la torsion d'une barre cylindrique de section circulaire, posé comme au chapitre VIII (section 7), hors de l'hypothèse des petites perturbations. On désigne par L et A la longueur et le rayon de la barre dans la configuration initiale de référence (état naturel). Le matériau constitutif est élastique, isotrope, incompressible : son comportement est défini par le matériau Néo-Hookien (cf. Ex. VII.11). En recherchant une solution en déplacement semblable à celle obtenue en petites perturbations, déterminer les efforts à exercer sur les bases pour réaliser cette expérience. Préciser l'hypothèse de la transformation infinitésimale et commenter.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Élément de réponse

• L'homologue en transformation finie de la solution en déplacement trouvée pour la barre de section circulaire (chapitre VIII, § 7.6) s'écrit en coordonnées cylindriques :

$r = R\ ,\ \theta = \Theta + \alpha\, Z\ ,\ z = Z\ ,\quad (OZ$ et Oz suivant l'axe de la barre)

où $(R,\, \Theta,\, Z)$ désignent les coordonnées dans la configuration initiale de référence, et $(r,\, \theta,\, z)$ les coordonnées dans la configuration actuelle chargée.

On en déduit :

$\underline{\underline{F}}\,(R,\, \Theta,\, Z) = \underline{e}_r \otimes \underline{e}_R + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\Theta + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_Z + \alpha\, R\, \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_Z$

en introduisant les bases locales orthonormées en M_0 et M (cf. Ex. II.6 pour la méthode).

On vérifie que $\det \underline{\underline{F}}\,(R,\, \Theta,\, Z) = 1$ (invariance du volume) par le calcul de $\underline{\underline{C}} = {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}}\,.\,\underline{\underline{F}}$, ou en remarquant que :

$\underline{\underline{F}}\,(R,\, \Theta,\, Z) = \underline{\underline{U}}\,(R,\, \Theta,\, Z)\,.\,(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \alpha\, R\, \underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_Z)$

avec $\underline{\underline{U}}\,(R,\, \Theta,\, Z) = \underline{e}_r \otimes \underline{e}_R + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\Theta + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_Z$.

• Avec le modèle Néo-Hookien la loi de comportement s'écrit (cf. Ex. VII.11) :

$\underline{\underline{\sigma}} = \mu\, \underline{\underline{F}}\,.\,{}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{F}} + \eta\, \underline{\underline{\mathbb{1}}}$ avec $\det \underline{\underline{F}} = 1$, η scalaire arbitraire.

Ici, avec l'expression trouvée pour $\underline{\underline{F}}$ dans la transformation choisie :

$\underline{\underline{\sigma}}\,(r,\, \theta,\, z) = \mu\, (\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \alpha\, r\, (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta) + \alpha^2\, r^2\, \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta) + \eta\,(r,\, \theta,\, z)\, \underline{\underline{\mathbb{1}}}$

où le champ η est laissé indéterminé.

• Équations d'équilibre :

$\mathrm{div}\ \underline{\underline{\sigma}} = 0$ en coordonnées cylindriques fournit

$\dfrac{\partial \eta}{\partial \theta}(r,\, \theta,\, z) = 0\ ,\ \dfrac{\partial \eta}{\partial z}(r,\, \theta,\, r) = 0\ ,\ \dfrac{\partial \eta}{\partial r}(r,\, \theta,\, z) = \mu\, \alpha^2\, r\ .$

Les conditions aux limites sur la surface latérale s'écrivent $\underline{\underline{\sigma}}\,(r,\, \theta\,,z)\,.\,\underline{e}_r = 0$ pour $r = A$, ce qui achève de déterminer le champ η :

$\eta\,(r) = \mu\,(\alpha^2 \dfrac{r^2 - A^2}{2} - 1)$ d'où :

$$\underline{\underline{\sigma}}\,(r,\, \theta,\, z) = \mu\, \alpha\, r\, (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta) + \mu\, \alpha^2\, \frac{r^2 - A^2}{2}\, \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \mu\, \alpha^2\, r^2\, \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta\ .$$

• On a construit une solution du problème correspondant aux conditions aux limites suivantes sur les sections d'extrémités.

Pour $z = L$: $T_r^{\mathrm{d}} = 0$, $T_\theta^{\mathrm{d}}(r) = \mu\, \alpha\, r$, $T_z^{\mathrm{d}}(r) = \mu\, \alpha^2\, \dfrac{r^2 - A^2}{2}$;

d'où les éléments de réduction du torseur résultant :

couple de torsion : $\underline{\mathcal{C}} = \mu\, \alpha\, \dfrac{\pi\, A^4}{2}\, \underline{e}_z = \mu\, \alpha\, J\, \underline{e}_z$,

effort normal (compressif) : $\underline{\mathcal{Z}} = -\mu\, \alpha^2\, \dfrac{\pi\, A^4}{4}\, \underline{e}_z = -\mu\, \alpha^2\, \dfrac{J}{2}\, \underline{e}_z$.

Pour $z = 0$: conditions opposées.

• Transformation infinitésimale et déformation infinitésimale.

La ***transformation*** infinitésimale impose deux conditions :

$\|\, \underline{\underline{\nabla \xi}}\, \| \ll 1\ \Rightarrow\ |\, \alpha\, Z\,| \ll 1$ pour $0 < Z < L\ \Rightarrow\ |\, \alpha\, L\,| \ll 1$

et $|\, \alpha\, R\,| \ll 1$ pour $0 < R < A\ \Rightarrow\ |\, \alpha\, A\,| \ll 1$.

La ***déformation*** infinitésimale $\|\, \underline{\underline{e}}\, \| \ll 1$, ne nécessite que la condition $|\, \alpha\, A\,| \ll 1$.

Sous cette condition $\underline{\underline{\sigma}}\,(r,\, \theta,\, z)$ se réduit à son premier terme :

$\underline{\underline{\sigma}}\,(r,\, \theta,\, z) \simeq \mu\, \alpha\, r\, (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta)$.

Il est commode, pour apprécier les ordres de grandeur de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{Z}$, d'écrire, en désignant par S la section de la barre :

$\underline{\mathcal{C}} = (\alpha\, A)\, \dfrac{\mu\, S\, A}{2}\, \underline{e}_z$, $\underline{\mathcal{Z}} = -(\alpha\, A)^2\, \dfrac{\mu\, S}{4}\, \underline{e}_z$

qui montrent que $\mathcal{Z}$ est alors du deuxième ordre.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Commentaire.

Dans le cas de la déformation finie on a mis en évidence la nécessité d'exercer un effort axial compressif, appliqué selon la distribution parabolique $T_z^{\mathrm{d}}(r)$ pour la solution homologue de celle trouvée pour la barre de section circulaire dans l'hypothèse des petites perturbations : absence de gauchissement, et de toute dilatation selon Oz. Cet effet du second ordre est connu sous le nom « d'effet Poynting ». Il signifie aussi, qu'en l'absence d'effort axial, la torsion d'une barre à section circulaire en déformation finie produirait un gauchissement et une dilatation axiale. (Pour les raisons indiquées au chapitre VIII (§ 7.6), ce gauchissement ne pouvait être du premier ordre).

On rappelle que pour le modèle Néo-Hookien la constante matérielle μ peut être identifiée sur l'expression linéarisée de la loi de comportement correspondante qui s'écrit : $\underline{\underline{\sigma}} = 2\,\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} + \overline{\omega}\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$; μ représente le module de cisaillement de ce matériau incompressible en transformation infinitésimale. On remarque que la contrainte de cisaillement $\sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta}$ conserve la même expression en transformation finie que dans la solution « H.P.P. », α représentant la rotation différentielle. Le couple de torsion demeure ***proportionnel*** à la rotation différentielle en transformation finie : $\mathcal{C} = (\mu\, J)\,\alpha$. Les déformées des fibres sont des hélices circulaires d'axe Oz. L'hypothèse des petites perturbations ajoute, aux conditions $|\,\alpha\, L\,| \ll 1$ et $|\,\alpha\, A\,| \ll 1$ de la transformation infinitésimale, la condition « $\alpha\, L\, A$ petit » des petits déplacements (cf. chapitre VIII, § 7.2).

Les résultats obtenus retrouvent et généralisent au cas de la ***déformation infinitésimale***, hors des hypothèses de la transformation infinitésimale et des petits déplacements, ceux trouvés en « H.P.P. » pour les contraintes et les efforts. L'hypothèse d'incompressibilité du matériau n'est évidemment pas restrictive dans cette conclusion car la solution construite en H.P.P. n'implique aucune variation de volume.

Le même résultat peut être établi pour une barre de section quelconque, de la façon suivante. Recherchant la solution sous la forme $r = R\ ,\ \theta = \Theta + \alpha\, Z\ ,\ z = Z + \alpha\,\varphi\,(R, \Theta)$, on montre qu'en déformation infinitésimale la fonction de gauchissement φ est déterminée, dans la configuration initiale de référence, par les mêmes équations $\Delta\varphi = 0$ sur S_0 et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial N} = (\underline{N} \wedge \underline{OM}_0)\cdot \underline{e}_Z$ sur ∂S_0 établies dans l'hypothèse des petites perturbations.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Chapitre X

Approches variationnelles en thermoélasticité linéarisée

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MOTS CLÉS

Champs de déplacement cinématiquement admissibles.
Champs de contrainte statiquement admissibles.
Dualisation. Théorème des travaux virtuels.
Convexité. Principes variationnels.
Minimum de l'énergie potentielle.
Minimum de l'énergie complémentaire.
Unicité. Encadrement énergétique.
Méthodes numériques. Approximation.
Formule de Clapeyron. Module apparent.
Théorème de réciprocité.
Champs d'autocontrainte. Inconnues hyperstatiques.
Paramètres de chargement. Théorème de Castigliano.
Théorème du potentiel minimum.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En bref...

Les approches variationnelles du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé s'appuient sur deux arguments mathématiques essentiels : la dualisation et la convexité. Le *théorème des travaux virtuels* exprime la dualisation des équations de l'équilibre écrites sur la configuration initiale de référence en utilisant, comme champs de vitesse virtuels, des champs de déplacements définis sur la configuration initiale avec la déformation linéarisée correspondante.

La loi de comportement thermoélastique linarisée qui intervient dans le problème dérive d'un potentiel strictement convexe, fonction du tenseur des déformations linéarisé ou, de façon duale, du potentiel convexe conjugué, fonction strictement convexe du tenseur ds contraintes de Cauchy (section 1).

Deux principes variationnels simples caractérisent un champ de déplacement et le champ de contrainte solutions du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé par une propriété de *minimum d'une fonctionnelle convexe* respectivement sur l'ensemble des champs cinématiquement admissibles et sur l'ensemble des champs statiquement admissibles. Ainsi, tout champ de déplacement solution rend minimale la fonctionnelle *Énergie potentielle* sur les champs cinématiquement admissibles avec les données du problème. De même, le champ de contrainte solution rend minimale la fonctionnelle *Énergie complémentaire* sur les champs statiquement admissibles. Il s'agit de deux principes variationnels duals ; les valeurs minimales des deux fonctionnelles, atteintes pour la solution du problème, sont opposées (sections 2 et 3).

Outre la démonstration des théorèmes d'*unicité* pour le champ de déplacement (à un éventuel déplacement rigidifiant près) et du champ de contrainte, solutions du problème, ces résultats conduisent aux *méthodes variationnelles* de résolution. On explore l'un ou l'autre des ensembles des champs de déplacement cinématiquement admissibles ou des champs de contrainte statiquement admissibles et l'on y minimise la fonctionnelle appropriée : c'est cette minimisation qui assure que le champ de contrainte ou le champ de déformation, associé par la loi de comportement au champ minimisant trouvé, satisfait les équations de champ et les conditions aux limites qui le concernent (sections 2 et 3).

Les méthodes variationnelles permettent d'introduire le concept de *solution approchée*. Elles sont exploitées analytiquement ou *numériquement*, notamment par discrétisation comme dans la méthode des éléments finis. La mise en œuvre simultanée des principes variationnels sur les déplacements et sur les contraintes permet d'aboutir à un encadrement énergétique de la solution (sections 3 et 4).

Dans le cas particulier de l'équilibre isotherme à partir de l'état initial naturel, les expressions du potentiel élastique et du potentiel conjugué sont des formes quadratiques homogènes ; l'énergie élastique du système dans son état d'équilibre élastique s'obtient par la *formule de Clapeyron*, tandis que le *théorème de réciprocité* exprime la symétrie qui existe entre deux états d'équilibre distincts pour un même système (section 5).

L'ensemble des champs de contrainte statiquement admissibles pour le problème est un espace affine dont l'espace des *champs d'autocontrainte* est l'espace vectoriel associé : les champs d'autocontrainte sont statiquement admissibles pour le problème avec des *données statiques nulles*. La dimension de cet espace vectoriel définit le degré d'hyperstaticité du problème. Le développement des champs d'autocontrainte sur une base définit un système d'*inconnues hyperstatiques* (section 6).

Considérant, dans l'hypothèse des petites perturbations, un même système soumis à des données statiques et cinématiques linéairement variables en fonction d'un nombre fini de *paramètres* de chargement et de déplacement, l'expression du travail virtuel des efforts extérieurs dans le théorème des travaux virtuels fait apparaître le produit de chacun de ces paramètres par son paramètre cinématique ou statique associé, qui se trouve ainsi défini (section 7).

Pour un tel système, constitué d'un matériau thermoélastique, le *théorème de Castigliano* fournit l'expression de la loi thermoélastique qui exprime le comportement global de ce système. Elle relie tous les paramètres statiques (chargement) à tous les paramètres cinématiques (déplacement). Elle s'exprime, de façon analogue à la loi de comportement thermoélastique locale du matériau constitutif, au moyen d'un potentiel convexe. Dans les mêmes conditions, le *théorème du potentiel minimum* permet de déterminer les valeurs des inconnues hyperstatiques dans un état d'équilibre thermoélastique : les inconnues hyperstatiques peuvent s'interpréter comme des paramètres de chargement supplémentaires dont les paramètres cinématiques associés doivent être nuls dans l'état d'équilibre thermoélastique (section 8).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Principales notations

Notation	Signification	1ère formule
$\underline{\underline{\sigma}}^0$	champ d'autocontrainte initial	(1.3)
$\hat{\underline{\xi}}$	champ de déplacement virtuel	(1.10)
$\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}$	déformation linéarisée associée à $\hat{\underline{\xi}}$	(1.10)
$\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}$	tenseur des complaisances élastiques	(1.21)
$\underline{\underline{\alpha}}$	tenseur des dilatations thermiques	(1.21)
$W(\tau, \underline{\xi}')$	énergie élastique de déformation de $\underline{\xi}'$	(2.10)
$\Phi(\underline{\xi}')$	travail virtuel des données en efforts dans $\underline{\xi}$	(2.11)
$W(\tau, \underline{\xi}') - \Phi(\underline{\xi}')$	énergie potentielle de $\underline{\xi}'$	(2.12)
$W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}')$	énergie élastique de contrainte de $\underline{\underline{\sigma}}'$	(3.8)
$\Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}')$	travail virtuel des forces de surfaces engendrées par $\underline{\underline{\sigma}}'$ dans les déplacements donnés	(3.9)
$W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}') - \Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}')$	énergie complémentaire de $\underline{\underline{\sigma}}'$	(3.10)
E_{a}	module apparent	(5.25)
$\langle\,\rangle$	symbole de la moyenne volumique	(5.29)
$\mathbb{A}(S_{T_i})$	espace vectoriel des champs d'autocontrainte pour le problème	(6.2)
$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}$	champ d'autocontrainte	(6.3)
$\mathbb{A}(\partial\Omega)$	espace vectoriel des champs d'autocontrainte pour le système	(6.6)
$\underline{X} = (X_1, \ldots, X_k)$	vecteur des inconnues hyperstatiques	(6.13)
$\boldsymbol{W}^*(\tau, \underline{X}')$	énergie élastique de contrainte, fonction de $\underline{X}'$	(6.14)
$\boldsymbol{W}^*(\tau, \underline{X}') - \Phi^*(\underline{X}')$	énergie complémentaire, fonction de $\underline{X}'$	(6.16)
$\underline{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n)$	paramètres de chargement	(7.16)
$\underline{q} = (q_1, \ldots, q_n)$	paramètres cinématiques	(7.16)
$\mathbb{A}$	espace vectoriel des $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}$ S.A. avec $\underline{Q} = 0$	(7.23)
$\mathcal{W}^*(\tau, \underline{Q}')$	énergie élastique de contrainte, fonction de $\underline{Q}'$	(8.5)
$\boldsymbol{W}^*(\tau, \underline{Q}', \underline{X}')$	énergie élastique de contrainte, fonction de $\underline{Q}'$ et de $\underline{X}'$	(8.21)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Méthodes directes et méthodes variationnelles 205
1.1 Rappel de la problématique 205
1.2 Méthodes directes de résolution 208
1.3 Méthodes variationnelles : présentation 208
1.4 Théorème des travaux virtuels 209
1.5 Notions sur la convexité 210
1.6 Expressions de la loi de comportement thermoélastique linéarisée 213
2 Minimum de l'énergie potentielle 214
2.1 Convexité de $\mathbb{C}\left(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}}\right)$ 214
2.2 Principe de minimum pour les déplacements 215
2.3 Expressions explicites de l'énergie élastique de $\underline{\xi}'$ 218
2.4 Unicité de la solution 218
2.5 Cas du matériau thermoélastique avec liaisons internes . 219
3 Minimum de l'énergie complémentaire 220
3.1 Convexité de $\mathbb{S}\left(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}}\right)$ 220
3.2 Principe de minimum pour les contraintes 220
3.3 Expressions explicites de l'énergie élastique de $\underline{\underline{\sigma}}'$ 223
3.4 Unicité de la solution 224
3.5 Combinaison des principes de minimum pour les déplacements et pour les contraintes 224
3.6 Cas du matériau thermoélastique avec liaisons internes . 226
4 Approches variationnelles 227
4.1 Réciproques des principes de minimum 227
4.2 Méthodes variationnelles 229
5 État initial naturel, équilibre isotherme 234
5.1 Expressions de l'énergie élastique 234
5.2 Formule de Clapeyron 236
5.3 Exemple d'application : module apparent d'un cylindre hétérogène 237
5.4 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti 240
6 Champs d'autocontrainte. Théorème du potentiel minimum 242
6.1 Champs d'autocontrainte 242
6.2 Minimum de l'énergie complémentaire, théorème du potentiel minimum 244
6.3 Commentaires 245
7 Problème paramétré 247
7.1 Objectifs de l'étude 247
7.2 Champs statiquement admissibles et champs cinématiquement admissibles pour le problème paramétré 247
7.3 Champs d'autocontrainte pour le problème paramétré . 250
7.4 Exemples de problèmes paramétrés 251
8 Théorèmes de l'énergie pour les problèmes paramétrés . 256
8.1 Théorème de Castigliano 256

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

8.2 Théorème du potentiel minimum 260
8.3 Équilibre isotherme et état initial naturel en élasticité linéaire 264
9 Pour conclure 265
10 Note historique 266
Récapitulatif des formules essentielles 269
Exercices 274

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Approches variationnelles en thermoélasticité linéarisée

1 Méthodes directes et méthodes variationnelles

1.1 Rappel de la problématique

Au chapitre VIII, après la définition de l'évolution thermoélastique quasi-statique d'un système, puis la description de la procédure de résolution correspondante, on s'est intéressé à la linéarisation de ce problème au voisinage d'un état initial connu.

À partir de l'état initial naturel, cette linéarisation ramène le problème d'évolution au problème de l'équilibre thermoélastique du système, ***dans la configuration initiale***, avec les valeurs actuelles des sollicitations. Les hypothèses de linéarisation énoncées alors (chapitre VIII, § 3.3) décrivent le domaine de pertinence pratique de cette simplification considérable du problème qui permet, notamment, de traiter indépendamment et préalablement le problème thermique, transformant ainsi le champ de température en une donnée du problème thermoélastique. En s'appuyant sur l'hypothèse plus forte des ***petites perturbations*** (chapitre VIII, § 3.5), on aboutit au même résultat à partir d'un état initial prrécontraint, qu'il soit autocontraint pour le problème ou préchargé : les équations pour le champ de déplacement et pour le champ de variation de contrainte à partir de l'état initial sont celles de l'équilibre thermoélastique linéarisé avec pour données les variations de sollicitations.

De plus, on a vu (chapitre VIII, § 4.3) qu'une transformation simple permet dans tous ces cas de se ramener à l'étude d'un problème isotherme. Cette propriété a été mise à profit dans l'exposé des méthodes de résolution directes du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé au chapitre VIII.

Enfin, il est essentiel de rappeleer l'importance de la forme des conditions aux limites, dont la nature ne doit pas varier entre la configuration initiale et la configuration actuelle sur les mêmes ***surfaces matérielles***.

Le présent chapitre est consacré à la présentation de ***méthodes variationnelles*** pour la détermination des champs de contrainte et de déplacement, solutions d'un problème d'équilibre thermoélastique linéarisé à partir d'un état initial naturel ou précontraint ; le champ de température est une donnée du problème. Les notations sont celles du chapitre VIII : $\underline{\underline{\sigma}}^0$ désigne le champ de précontrainte, qui est en équilibre avec le champ de force de masse $\underline{F}^0$ sur Ω_0 et, sur $S_{T_i}(0)$, avec T_i^0 composante du vecteur contrainte engendré par $\underline{\underline{\sigma}}^0$ au contour (chapitre VIII, § 2.3).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Les équations de ce problème, établies au chapitre VIII (§ 3.5), sont complétées par l'équation de saut du champ $\underline{\underline{\sigma}}$, en tenant compte des équations d'équilibre satisfaites dans la configuration initiale :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho_0 \underline{F} = 0 \qquad \text{sur } \Omega_0 \ ,$$

$$[\![\underline{\underline{\sigma}}]\!] . \underline{n} = 0 \qquad \text{sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}}$$

$$\rho = \rho_0 (1 - \operatorname{div} \underline{\xi}) \qquad \text{sur } \Omega_0$$

$$\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^0 = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}} \tau \qquad \text{sur } \Omega_0$$

$$T_i = T_i^{\mathrm{d}} \quad \text{sur } S_{T_i} = S_{T_i}(0)$$

$$\xi_i = \xi_i^{\mathrm{d}} \quad \text{sur } S_{\xi_i} = S_{U_i}(0) \ .$$

où l'on rappelle que, compte tenu de l'hypothèse faite sur l'état de précontrainte, les tenseurs $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ et $\underline{\underline{k}}$ sont relatifs à l'***état naturel*** du matériau constitutif (cf. chapitre VII, § 5.4).

Comme au chapitre VIII (§ 4.1), on simplifiera désormais l'écriture en ne faisant plus apparaître explicitement la référence à la configuration initiale par les notations $\Omega_0, \partial\Omega_0, \rho_0$. L'ensemble des équations de champs et des conditions aux limites auxquelles on se référera dans la suite apparaît ci-dessous (1.1 à 1.7)) : équations écrites ***sur la géométrie initiale avec la masse volumique initiale***.

(1.1) $$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{F} = 0 \qquad \text{sur } \Omega \ ,$$

(1.2) $$[\![\underline{\underline{\sigma}}]\!] . \underline{n} = 0 \qquad \text{sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}}$$

(1.3) $$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}} \tau \text{ sur } \Omega \ ;$$

(1.4) $$T_i = T_i^{\mathrm{d}} \quad \text{sur } S_{T_i} = S_{T_i}(0)$$

(1.5) $$\xi_i = \xi_i^{\mathrm{d}} \quad \text{sur } S_{\xi_i} = S_{U_i}(0) \ .$$

(1.6) $$S_{T_i} \cup S_{xi_i} = \partial\Omega \ \text{ et } \ S_{T_i} = \varnothing, \ i = 1, 2, 3$$

(1.7) $$\underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{\underline{\operatorname{grad}}}} \, \underline{\xi} + {}^{\mathrm{t}} \underline{\underline{\underline{\operatorname{grad}}}} \, \underline{\xi})/2 \ \text{ sur } \ \Omega \ .$$

La figure 1 schématise le problème ainsi posé

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

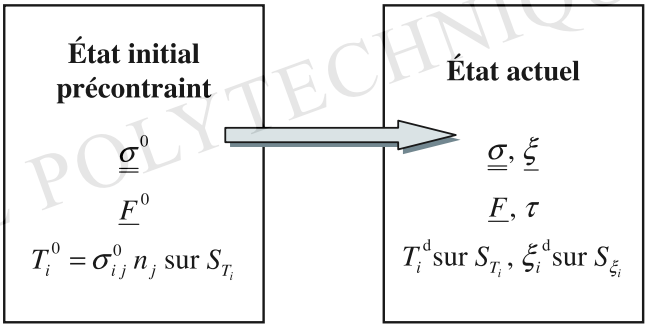


Figure 1 – Équilibre thermoélastique à partir d'un état initial précontraint

Du point de vue des conditions mathématiques de régularité des champs concernés, on se place dans le cadre général déjà discuté (chapitre VIII, § 4.2) :

- champs de contrainte ***continus et continûment différentiables par morceaux***,
- champs de déplacement ***continus, continûment différentiables par morceaux***, sur le volume Ω du système.

Les définitions des champs de contrainte statiquement admissibles et des champs de déplacement cinématiquement admissibles sont ainsi précisées.

Champs de contrainte statiquement admissibles avec $\underline{F}$ et $\underline{T}_i^{\mathrm{d}}$ sur S_{T_i}

(1.8)
$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{S}\,(\underline{F}\,, S_{T_i}\,, T_i^{\mathrm{d}}) \\ \Updownarrow \\ \underline{\underline{\sigma}} \text{ continu et continûment différentiable} \\ \text{par morceaux} \\ \underline{\underline{\sigma}} \text{ satisfait (1.1), (1.2), (1.4) .} \end{array}}$$

Champs de déplacement cinématiquement admissibles avec ξ_i^{d} sur S_{ξ_i}

(1.9)
$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{\xi} \in \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,, \xi_i^{\mathrm{d}}) \\ \Updownarrow \\ \underline{\xi} \text{ continu,} \\ \underline{\xi} \text{ continûment différentiable par morceaux} \\ \underline{\xi} \text{ satisfait (1.5) .} \end{array}}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Problématique

La problématique se met à nouveau sous la forme du schéma de la figure 2.

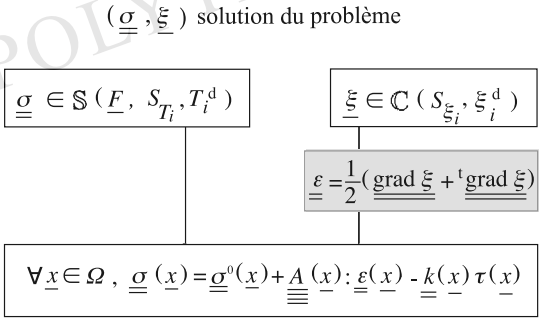


Figure 2 – Problématique de l'équilibre thermoélastique à partir d'un état initial précontraint

1.2 Méthodes directes de résolution

Le chapitre VIII a présenté les méthodes directes de résolution de ces problèmes, dans lesquelles, en exploitant le schéma de la figure 2 à partir de l'une où l'autre de ses extrémités, on cherche à construire les champs de contrainte et de déplacement solutions en ajustant leurs expressions de façon à satisfaire, de façon explicite, les équations de champs et les conditions aux limites.

Cette procédure ne permet d'envisager que la résolution exacte du problème. La notion même de solution approchée en est absente. Ainsi, dans le cadre de la méthode des contraintes par exemple, la construction de champs statiquement admissibles n'a d'intérêt que si elle aboutit à la solution du problème : hors de cette circonstance, elle ne permet de tirer aucune information sur cette solution sauf dans le cas particulier des solides élancés lorsque l'on peut faire appel au principe de Saint Venant. Il en va de même si l'on adopte la méthode des déplacements.

C'est là un inconvénient évident dans la mesure où les problèmes d'équilibre thermoélastique linéarisés se posent souvent dans des conditions de géométrie, de sollicitations, ou d'hétérogénéité du matériau constitutif qui n'en permettent pas la résolution analytique exacte.

1.3 Méthodes variationnelles : présentation

Idées directrices

Deux méthodes variationnelles simples vont être présentées, qui portent l'une sur les déplacements, l'autre sur les contraintes, et dont on se propose d'abord d'exposer l'esprit.

À titre d'exemple, pour la méthode variationnelle sur les contraintes, la démarche consiste, en reprenant le schéma de la figure 2, à rechercher directement le champ

de contrainte solution du problème en le caractérisant dans $\mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$ par la propriété d'extremum d'une fonctionnelle scalaire, sans avoir à procéder à la résolution indiquée dans la section 6 du chapitre VIII : en effet, c'est la minimisation de cette fonctionnelle sur $\mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$ qui assure que le champ de déformation, obtenu par la loi de comportement thermoélastique linéarisée à partir du champ de contrainte minimisant, est géométriquement compatible et conduit à un champ de déplacement cinématiquement admissible pour le problème.

De la même façon, la méthode variationnelle sur les déplacements débouche sur la minimisation d'une fonctionnelle scalaire sur $\mathbb{C}(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}})$, qui assure le caractère statiquement admissible du champ de contrainte associé par la loi de comportement thermoélastique linéarisée.

Ce type d'approches ouvre évidemment la voie à des procédures ***numériques*** de résolution. Il permet aussi d'envisager le concept d'***approximation*** dans la minimisation et l'on verra en outre que les méthodes variationnelles par les contraintes et par les déplacements, duales l'une de l'autre, permettent d'encadrer la solution du point de vue énergétique. Les acquis de l'analyse numérique et de l'analyse fonctionnelle, tant du point de vue des procédures de minimisation que des estimations d'erreurs, y seront mis à profit.

Arguments fondamentaux

Afin de faire aussi, de cet exposé de l'approche variationnelle des problèmes d'équilibre thermoélastique linéarisés, une introduction aux méthodes variationnelles en général, la présentation s'appuiera sur des arguments mathématiques que l'on s'efforcera de dégager des circonstances particulières présentes. Ces arguments sont la ***dualisation*** et la ***convexité***.

♦ ***Dualisation***

On a vu au chapitre V (§ 3.13 et 3.14) que les conditions de compatibilité géométrique pour un champ de taux de déformation d'une part, et les équations de la dynamique pour un champ de contrainte de Cauchy d'autre part, peuvent les unes et les autres être exprimées sous forme dualisée à travers le ***principe des puissances virtuelles***.

Les mêmes transformations mathématiques s'appliquent aux équations (1.1, 1.2 et 1.4) d'une part et aux équations (1.5 et 1.7) d'autre part. On aboutit aux expressions dualisées des conditions imposées aux champs de contrainte statiquement admissibles et aux champs de déplacement cinématiquement admissibles pour le problème. Ces expressions sont, comme les conditions dont elles sont issues, écrites sur la géométrie initiale $(\Omega, \partial\Omega)$; elles sont (implicitement) mises en œuvre dans les principes de minimum qui vont être établis (cf. 4.1).

1.4 Théorème des travaux virtuels

La ***dualisation mathématique*** des équations (1.1, 1.2) nécessite l'exploration des champs de vecteur continus, continûment différentiables par morceaux, sur Ω.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Ces mêmes conditions de régularité mathématique sont, comme on l'a vu, imposées aux champs de déplacement cinématiquement admissibles pour le problème, eux aussi définis sur Ω. Il s'ensuit que les champs de $\mathbb{C}(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}})$ pourront être utilisés dans la mise en œuvre de cette dualisation. Pour cette raison et pour la commodité ultérieure, on désignera par $\hat{\underline{\xi}}$ les ***champs virtuels*** dans l'énoncé dualisé ; par ailleurs, afin de bien mettre en évidence la généralité de cet énoncé qui s'applique à tout champ de contrainte continu par morceaux et continûment différentiable par morceaux sur Ω satisfaisant les équations (1.1 et 1.2), on conviendra de désigner un tel champ générique par $\underline{\underline{\sigma}}^*$.

On a ainsi l'énoncé :

$$
(1.10)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \forall\, \underline{\underline{\sigma}}^* \text{ continu et continûment différentiable par morceaux,} \\ \qquad \text{satisfaisant (1.1) et (1.2) sur } \Omega\ , \\ \forall\, \hat{\underline{\xi}} \text{ continu, continûment différentiable par morceaux, sur } \Omega\ , \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^* : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}\, \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \rho\, \underline{F} \cdot \hat{\underline{\xi}}\, \mathrm{d}\Omega \int_{\partial\Omega} \hat{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}a = 0 \\ \text{avec } \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} = (\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, \hat{\underline{\xi}} + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, \hat{\underline{\xi}})/2 \end{array} \right.
$$

Cet énoncé est évidemment identique à celui du principe des puissances virtuelles (chapitre V), appliqué au cas particulier de l'équilibre sur la configuration initiale notée $(\Omega, \partial\Omega)$, avec le changement de notations cohérent ($\hat{\underline{\xi}}$ et $\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}$) en lieu et place de ($\hat{\underline{U}}$ et $\hat{\underline{\underline{d}}}$). Bien qu'il ne traduise donc aucun résultat supplémentaire, mais parce qu'il prépare l'utilisation des champs de déplacement dans sa mise en œuvre, il est couramment appelé ***théorème des travaux virtuels*** et les intégrales correspondantes sont alors des ***énergies***.

1.5 Notions sur la convexité

Ensemble convexe

Considérant un espace vectoriel de dimension finie ou infinie, dont on désigne l'élément générique par $\underline{y}$ on définit une partie ***convexe*** $\mathbf{E}$ de cet espace par la propriété caractéristique :

$$
(1.11)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \forall\, \underline{y}^1 \in \mathbf{E}\,, \forall\, \underline{y}^2 \in \mathbf{E}\,, \\ \forall\, \lambda^1 \geq 0\,, \forall\, \lambda^2 \geq 0\,,\ \lambda^1 + \lambda^2 = 1\,, \\ \underline{y} = \lambda^1\, \underline{y}^1 + \lambda^2\, \underline{y}^2 \in \mathbf{E}\,. \end{array} \right.
$$

La définition précédente est équivalente à la formulation plus générale où l'on considère p éléments $\underline{y}^1, \underline{y}^2, \ldots, \underline{y}^p$ de $\mathbf{E}$ et on exprime que la combinaison convexe

$$
(1.12)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \underline{y} = \lambda^1\, \underline{y}^1 + \lambda^2\, \underline{y}^2 + \cdots + \lambda^p\, \underline{y}^p \\ \lambda^1 \geq 0\,, \lambda^2 \geq 0\,, \ldots,\ \lambda^p \geq 0\,,\ \lambda^1 + \lambda^2 + \cdots + \lambda^p = 1 \end{array} \right.
$$

appartient elle aussi à $\mathbf{E}$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Fonction convexe sur un ensemble convexe

♦ ***Définition***

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un ensemble $\mathbf{E}$, partie convexe d'un espace vectoriel. On définit la ***stricte convexité*** de f par la propriété suivante, illustrée sur la figure 3 :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, \underline{y}^1 \in \mathbf{E}\,,\ \forall\, \underline{y}^2 \neq y^1 \in \mathbf{E}\,, \\ \forall\, \lambda^1 > 0\,,\ \forall \lambda^2 > 0\,,\ \lambda^1 + \lambda^2 = 1\,, \\ \text{on a} \\ f\left(\lambda^1\, \underline{y}^1 + \lambda^2\, \underline{y}^2\right) < \lambda^1 f\left(\underline{y}^1\right) + \lambda^2 f\left(\underline{y}^2\right)\,. \end{array}\right. \tag{1.13}$$

Dans le cas où l'inégalité finale de (1.13) est large, la fonction est dite ***convexe***.

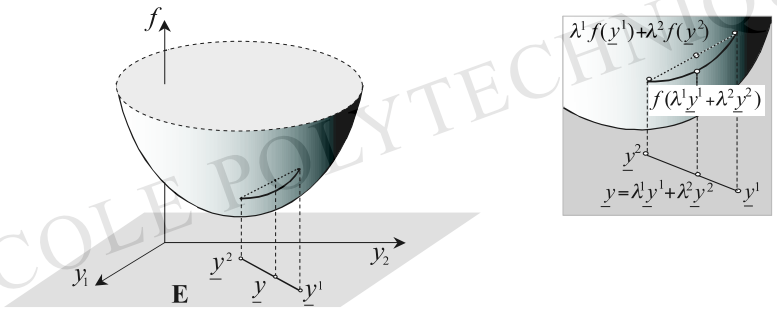


Figure 3 – Fonction f strictement convexe définie sur $\mathbf{E} = \mathbb{R}^2$

La définition (1.13) est équivalente à la formulation plus générale dans laquelle on considère p éléments $\underline{y}^1, \underline{y}^2, \ldots, \underline{y}^p$ de $\mathbf{E}$ et leur combinaison convexe (1.12) avec $\lambda^1 > 0, \lambda^2 > 0, \ldots, \lambda^p > 0$; on a alors :

$$f\left(\underline{y}\right) < \lambda^1 f\left(\underline{y}^1\right) + \lambda^2 f\left(\underline{y}^2\right) + \cdots + \lambda^p f\left(\underline{y}^p\right)\,. \tag{1.14}$$

♦ ***Propriété caractéristique si f est continûment différentiable***

Si f est continûment différentiable, la stricte convexité de f sur $\mathbf{E}$ est équivalente à la propriété[(1)] illustrée sur la figure 4 :

[(1)] L'application de l'inégalité (1.15) en $\underline{y}^1$ et $\underline{y}^2$ donne :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, \underline{y}^1 \in \mathbf{E}\,,\ \forall\, \underline{y}^2 \in \mathbf{E}\,,\ \underline{y}^2 \neq \underline{y}^1 \\ \dfrac{\partial f(\underline{y}^2)}{\forall \underline{y}}.(\underline{y}^2 - \underline{y}^1) > \dfrac{\partial f(\underline{y}^1)}{\partial \underline{y}} > (\underline{y}^2 - \underline{y}^1)\,. \end{array}\right.$$

Ce résultat généralise l'énoncé classique en dimension 1 : « la dérivée d'une fonction strictement convexe est une fonction strictement monotone ». C'est l'application de cette propriété au potentiel thermoélastique $\rho_0 \psi(T, \underline{e})$ qui démontre le résultat annoncé au chapitre VII (§ 4.2) sur la biunivocité de la relation de comportement thermoélastique en l'absence de liaisons internes.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

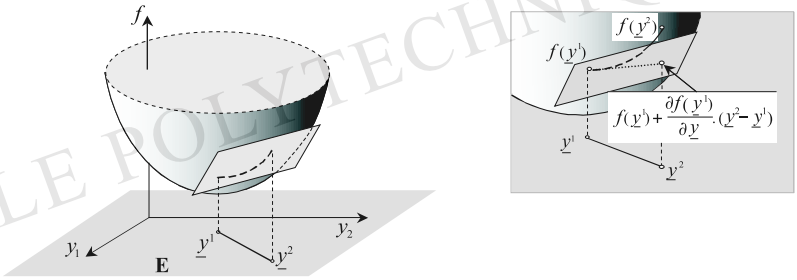


Figure 4 – Fonction f continûment différentiable, strictement convexe sur $\mathbf{E} = \mathbb{R}^2$

$$\text{(1.15)} \qquad \begin{cases} \forall\, \underline{y}^1 \in \mathbf{E}\,, \forall\, \underline{y}^2 \neq y^1 \in \mathbf{E}\,, \\ \text{on a :} \\ f\,(\underline{y}^2) - f\,(\underline{y}^1) > \dfrac{\partial f(\underline{y}^1)}{\partial \underline{y}}\,.\,(\underline{y}^2 - \underline{y}^1)\,. \end{cases}$$

♦ ***Condition suffisante si f est deux fois continûment différentiable***

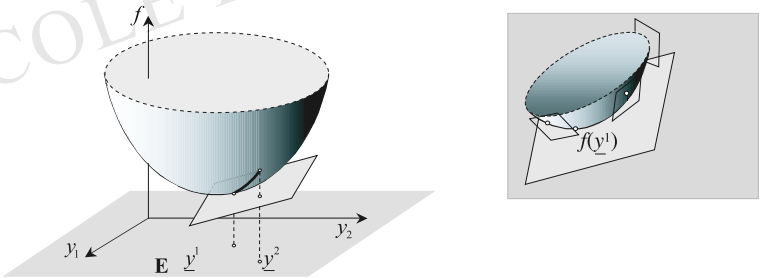


Figure 5 – Fonction deux fois continûment différentiable : condition suffisante de stricte convexité sur $\mathbf{E} = \mathbb{R}^2$

Si $\mathbf{E}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, d'élément générique $\underline{y} = (y_1\,,\, y_2\,, \ldots,\, y_n)$, et si f est deux fois continûment différentiable, la définie positivité de la forme quadratique définie par le Hessien (matrice symétrique des dérivées secondes) de f :

$$\text{(1.16)} \qquad \forall\, \underline{Y} \in \mathbb{R}^n\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} Y_i Y_j > 0\,.$$

implique la stricte convexité de f.

Cette propriété est illustrée sur la figure 5.

1.6 Expressions de la loi de comportement thermoélastique linéarisée

La loi de comportement thermoélastique linéarisée (1.3), peut être écrite en introduisant le potentiel $\rho\psi(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}})$, homologue de $\rho_0\psi(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}})$ dans la formule (5.3) du chapitre VII

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \,, \tag{1.17}$$

$$\rho\psi\,(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}}) = \left[\underline{\underline{\sigma}}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2}\, \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}}\,\tau : \underline{\underline{\varepsilon}} \right] - \rho\, \boldsymbol{s}_0 \tau - \frac{1}{2}\, \rho\, b\, \tau^2 \,. \tag{1.18}$$

On rappelle que ρ est constant (notation simplifiée de ρ_0) et que $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ et $\underline{\underline{k}}$, définis au chapitre VIII par les équations (**??**) dans l'état précontraint, sont assimilés à leurs valeurs dans l'état naturel (chapitre VIII, § 3.5). Le potentiel $\rho\psi$ n'étant défini qu'à une constante additive près, le choix fait dans (1.18) consiste à annuler sa valeur dans la configuration de référence : $\rho\psi\,(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}}) = 0$ pour $\tau = 0$ et $\underline{\underline{\varepsilon}} = 0$. En outre on remarque que, pour l'application de la formule (1.17) exprimant la loi de comportement thermoélastique, on peut se restreindre aux termes entre crochets dans (1.18).

On peut aussi introduire le potentiel $\rho\psi^*$, transformée de Legendre-Fenchel (cf. chapitre VII, § 4.2) de $\rho\psi$. La fonction $\rho\psi^*$ des variables τ et $\underline{\underline{\sigma}}$ est définie par la formule homologue de (4.21) au chapitre VII :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} \text{ étant lié à } \tau \text{ et } \underline{\underline{\varepsilon}} \text{ par la loi de comportement (1.17)} \\ \rho\psi^*\,(\tau, \underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \rho\psi\,(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}})\,. \end{cases} \tag{1.19}$$

On a alors, par dérivation de (1.19), compte tenu de (1.17) et des symétries de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\rho \frac{\partial \psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + (\underline{\underline{\sigma}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}) : \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\varepsilon}}\,. \tag{1.20}$$

C'est l'inversion de la loi de comportement (1.17) que l'on explicitera sous la forme homologue de (1.3) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^0 + \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} : \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\alpha}}\,\tau \,, \tag{1.21}$$

faisant apparaître

- le tenseur des ***complaisances*** élastiques $\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}$, qui a les mêmes propriétés de symétrie que le tenseur $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$,
- le tenseur des déformations sous contrainte nulle $\underline{\underline{\varepsilon}}^0$ qui est lié au tenseur $\underline{\underline{\sigma}}^0$ de précontrainte par

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^0 = -\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} : \underline{\underline{\sigma}}^0 \qquad \text{(cf. chapitre VII, § 5.3)} \,, \tag{1.22}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- le tenseur des coefficients de dilatation thermique $\underline{\underline{\alpha}}$

$$\underline{\underline{\alpha}} = -\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{k}} \,. \tag{1.23}$$

L'expression de $\rho\psi^*$ associée à la forme (1.18) de $\rho\psi$ par la transformation (1.19) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \rho\psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}) = \Big[\frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^0) : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^0) + (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^0) : \underline{\underline{\alpha}}\, \tau \Big] \\ + \frac{1}{2}\, \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{k}}\, \tau^2 + \rho\, \boldsymbol{s}_0\, \tau + \frac{1}{2}\, \rho\, b\, \tau^2 \,. \end{aligned} \tag{1.24}$$

On remarque qu'en conséquence du choix fait dans (1.18) pour l'expression du potentiel $\rho\psi$, la valeur du potentiel $\rho\psi^*$ est, elle aussi, nulle dans la configuration de référence. Par ailleurs, pour l'utilisation de la formule (1.20) exprimant $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en fonction de $\underline{\underline{\sigma}}$ et τ dans la loi de comportement thermoélastique, seuls les termes entre crochets de (1.24) sont concernés mais on prendra garde qu'ils ne sont pas associés par (1.19) à la partie entre crochets dans (1.18). (Cf. § 3.3, 3.5 et section 5).

♦ ***Convexité des potentiels*** $\rho\psi$ ***et*** $\rho\psi^*$

La stabilité du matériau thermoélastique dans son état naurel a été évoquée au chapitree VII (§ 5.5) et a permis d'établir les conditions restrictives auxquelles sont soumis les modules élastiques. En s'appuyant sur le théorème de Lejeune-Dirichlet et sa réciproque, on a posé que le caractère défini positif de la forme quadratique $\frac{1}{2}\, \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ est la condition de stabilité isotherme du matériau. Compte tenu de (1.16) cette condition implique la ***stricte convexité*** du potentiel $\rho\psi(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}})$ vis-à-vis de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ symétrique (c'est, en fait, la condition de stabilité).

On démontre alors la stricte convexité du potentiel conjugué défini par (1.19) par rapport à $\underline{\underline{\sigma}}$ symétrique.

On a en effet par (1.19) :

$$\rho\psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}^2) - \rho\psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}^1) = \underline{\underline{\sigma}}^2 : \underline{\underline{\varepsilon}}^2 - \underline{\underline{\sigma}}^1 : \underline{\underline{\varepsilon}}^1 + \rho\psi(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}}^1) - \rho\psi(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}}^2) \,; \tag{1.25}$$

par application de l'inégalité (1.15) au potentiel $\rho\psi$ stictement convexe de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ on en déduit, si $\underline{\underline{\varepsilon}}^1 \neq \underline{\underline{\varepsilon}}^2$

$$\rho\psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}^2) - \rho\psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}^1) > \underline{\underline{\sigma}}^2 : \underline{\underline{\varepsilon}}^2 - \underline{\underline{\sigma}}^1 : \underline{\underline{\varepsilon}}^1 + \rho\, \frac{\partial\psi(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}}^2)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^1 - \underline{\underline{\varepsilon}}^2) \,; \tag{1.26}$$

soit compte tenu de (1.17),

$$\rho\psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}^2) - \rho\psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}^1) > \underline{\underline{\varepsilon}}^1 : (\underline{\underline{\sigma}}^2 - \underline{\underline{\sigma}}^1) = \rho\, \frac{\partial\psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}^1)}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : (\underline{\underline{\sigma}}^2 - \underline{\underline{\sigma}}^1) \tag{1.27}$$

qui démontre la stricte convexité de $\rho\psi^*$ en $\underline{\underline{\sigma}}$.

2 Minimum de l'énergie potentielle

2.1 Convexité de $\mathbb{C}\,(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}})$

La définition des champs de déplacement cinématiquement admissibles avec les données ξ_i^{d} sur S_{ξ_i} a été précisée par la formule (1.8) au paragraphe 1.1. Il en résulte

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

de façon évidente que l'ensemble $\mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\xi_i^{\mathrm{d}})$ a une structure d'espace affine et est donc convexe en application de la définition (1.11).

L'objet de cette section est la mise en évidence d'une propriété d'extrémalité satisfaite par tout champ de déplacement solution du problème schématisé sur la figure 2, sur l'ensemble convexe $\mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\xi_i^{\mathrm{d}})$.

2.2 Principe de minimum pour les déplacements

Notations

On fait l'hypothèse de l'existence d'au moins une solution du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé défini par les équations (1.1 à 1.7). On convient de désigner par $\underline{\underline{\sigma}}\,,\underline{\xi}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ les champs correspondant à une telle solution.

La notation $\underline{\xi}'$ désigne un champ de déplacement ***quelconque cinématiquement admissible*** avec les données de ce problème :

$$\underline{\xi}' \in \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\xi_i^{\mathrm{d}})\,. \tag{2.1}$$

Démonstration

On applique le théorème des travaux virtuels (1.10) au système en choisissant d'abord comme champs $\underline{\underline{\sigma}}^*$ et $\hat{\underline{\xi}}$ respectivement les champs $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\xi}$ d'une solution du problème d'équilibre thermoélastique (1.1 à 1.7). Il vient :

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \rho\,\underline{F}\,.\,\underline{\xi}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} \underline{\xi}\,.\,\underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}a = 0\,. \tag{2.2}$$

On remarque alors que, puisque $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\xi}$ satisfont par hypothèse respectivement les conditions au contour (1.4) et (1.5), la dernière intégrale de (2.2) se décompose sous la forme

$$\int_{\partial\Omega} \underline{\xi}\,.\,\underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}a = \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^{\mathrm{d}}\xi_i\,\mathrm{d}a + \sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^{\mathrm{d}}\sigma_{ij}\,n_j\,\mathrm{d}a\,. \tag{2.3}$$

Il en résulte que (2.2) s'écrit finalement :

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \rho\,\underline{F}\,.\,\underline{\xi}\,\mathrm{d}\Omega - \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^{\mathrm{d}}\xi_i\,\mathrm{d}a - \sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^{\mathrm{d}}\sigma_{ij}\,n_j\,\mathrm{d}a = 0\,. \tag{2.4}$$

Pour une deuxième application du théorème des travaux virtuels (1.10) on choisit à nouveau comme champ $\underline{\underline{\sigma}}^*$ le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ de la même solution du problème d'équilibre thermoélastique que dans (2.4). Comme champ $\hat{\underline{\xi}}$, on considère un champ $\underline{\xi}'$ quelconque de la forme (2.1), c'est-à-dire cinématiquement admissible avec les données du problème. Les mêmes arguments que précédemment s'appliquent à $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\xi}'$ et conduisent à :

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}'\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \rho\,\underline{F}\,.\,\underline{\xi}'\,\mathrm{d}\Omega - \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^{\mathrm{d}}\xi_i'\,\mathrm{d}a - \sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^{\mathrm{d}}\sigma_{ij}\,n_j\,\mathrm{d}a = 0\,. \tag{2.5}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Par différence entre (2.5) et (2.4) il vient :

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}' - \underline{\underline{\varepsilon}})\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \rho\,\underline{F}\,.\,(\underline{\xi}' - \underline{\xi})\,\mathrm{d}\Omega - \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^{\mathrm{d}}\,(\xi_i' - \xi_i)\,\mathrm{d}a = 0\ . \tag{2.6}$$

Mettant à profit le fait que $(\underline{\underline{\sigma}},\,\underline{\xi})$ est une solution du problème on substitue dans la première intégrale de (2.6) l'expression de $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de τ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ fournie par la loi de comportement (1.17) :

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}' - \underline{\underline{\varepsilon}})\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \Big(\rho\frac{\partial\psi\,(\tau,\underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}}\Big) : (\underline{\underline{\varepsilon}}' - \underline{\underline{\varepsilon}})\,\mathrm{d}\Omega\ . \tag{2.7}$$

L'application de l'inégalité (1.15) à $\rho\psi$ strictement convexe de l'argument $\underline{\underline{\varepsilon}}$ donne alors [(2)] :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \rho\frac{\partial\psi\,(\tau,\underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}' - \underline{\underline{\varepsilon}})\,\mathrm{d}\Omega < \int_\Omega \rho\psi\,(\tau,\underline{\underline{\varepsilon}}')\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \rho\psi\,(\tau,\underline{\underline{\varepsilon}})\,\mathrm{d}\Omega \\ \text{si } \underline{\underline{\varepsilon}}' \neq \underline{\underline{\varepsilon}}\ . \end{cases} \tag{2.8}$$

D'où finalement, à partir de (2.6) :

$$\begin{cases} \forall\,(\underline{\underline{\sigma}},\,\underline{\xi},\,\underline{\underline{\varepsilon}}) \text{ solution}\ , \\ \forall\,\underline{\xi}' \in \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\,\xi_i^{\mathrm{d}}) \text{ tel que } \underline{\underline{\varepsilon}}' \neq \underline{\underline{\varepsilon}}\ , \\ \displaystyle\int_\Omega \rho\psi\,(\tau,\underline{\underline{\varepsilon}}')\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \rho\underline{F}\,.\,\underline{\xi}'\,\mathrm{d}\Omega - \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^{\mathrm{d}}\xi_i'\,\mathrm{d}a \\ \qquad\qquad > \displaystyle\int_\Omega \rho\psi\,(\tau,\underline{\underline{\varepsilon}})\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \rho\underline{F}\,.\,\underline{\xi}\,\mathrm{d}\Omega - \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^{\mathrm{d}}\xi_i\,\mathrm{d}a\ . \end{cases} \tag{2.9}$$

Définition des fonctionnelles

L'inégalité (2.9) met en évidence deux fonctionnelles [(3)] définies sur l'ensemble des champs de déplacement $\underline{\xi}'$ continus, continûment différentiables par morceaux, sur Ω.

La première

$$\boxed{W(\tau,\underline{\xi}') = \int_\Omega \rho\,\psi\,(\tau\,,\underline{\underline{\varepsilon}}')\,\mathrm{d}\Omega} \tag{2.10}$$

est ***l'énergie élastique*** (de déformation)[(4)] du ***champ virtuel*** $\underline{\xi}'$.

[(2)] On remarque que l'espace des champs de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}'$ engendré par $\mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\xi_i^{\mathrm{d}})$ est évidemment convexe.

[(3)] C'est-à-dire fonctions du ***champ*** $\underline{\xi}'$.

[(4)] Si $W(0,0) = 0$, c'est-à-dire si la valeur du potentiel $\rho\psi$ est nulle dans la configuration de référence (cf. § 1.6).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La seconde

$$\boxed{\Phi(\underline{\xi}') = \int_{\Omega} \rho\, \underline{F}, . \, \underline{\xi}' \, \mathrm{d}\Omega + \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^{\mathrm{d}} \, \xi_i' \, \mathrm{d}a} \tag{2.11}$$

représente le ***travail virtuel des données en efforts*** dans le champ de déplacement virtuel $\underline{\xi}'$.

Minimum de l'énergie potentielle

Avec les définitions précédentes l'inégalité (2.9) s'écrit simplement :

$$\begin{cases} \forall\, (\underline{\underline{\sigma}},\, \underline{\xi},\, \underline{\underline{\varepsilon}}) \text{ solution }, \ \forall \underline{\xi}' \in \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}}) \text{ tel que } \underline{\underline{\varepsilon}}' \neq \underline{\underline{\varepsilon}}\,, \\ W\,(\tau, \underline{\xi}') - \Phi\,(\underline{\xi}') > W\,(\tau, \underline{\xi}) - \Phi\,(\underline{\xi})\,. \end{cases} \tag{2.12}$$

La fonctionnelle $(W - \Phi)$ qui apparaît de part et d'autre de l'inégalité (2.12) est appelée ***énergie potentielle*** du champ $\underline{\xi}'$.

Le résultat établi peut alors s'énoncer :

$$\boxed{\begin{array}{c} \textbf{\textit{parmi tous les champs de déplacement}}\ \underline{\xi}' \\ \textbf{\textit{cinématiquement admissibles avec les données}}\ \xi_i^{\mathrm{d}} \text{ sur } S_{\xi_i}, \\ \textbf{\textit{tout champ}}\ \underline{\xi}\ \textbf{\textit{solution du problème}} \\ \textbf{\textit{minimise la fonctionnelle « énergie potentielle »}} \end{array}} \tag{2.13}$$

qui s'écrit

$$\boxed{(W - \Phi) \text{ Minimale sur } \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}})} \tag{2.14}$$

Cet énoncé exprime la propriété d'extrémalité satisfaite par tout champ de déplacement solution parmi tous les champs cinématiquement admissibles pour le problème, c'est-à-dire tous les champs de déplacement « candidats » à être solutions du problème. Son importance lui vaut l'appellation de ***principe*** de minimum pour les déplacements ou ***principe du minimum de l'énergie potentielle***.

Commentaires

Il est intéressant d'examiner comment l'énoncé (2.14) fait intervenir toutes les données du problème par comparaison avec le schéma de la figure 2.

- Le ***comportement*** du matériau constitutif intervient à travers l'expression de l'énergie élastique (de déformation) des champs de déplacement : fonctionnelle W de $\underline{\xi}'$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- Les ***données sur les efforts*** (forces de masse et données T_i^{d} sur S_{T_i}) interviennent par l'expression de leur travail virtuel dans les champs de déplacement : fonctionnelle Φ de $\underline{\xi}'$.
- Les ***données sur les déplacements*** (ξ_i^{d} sur S_{ξ_i}) sont prises en compte en restreignant la minimisation de l'énergie potentielle au convexe $\mathbb{C}\,(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}})$.

Le paragraphe 4.1 montrera de quelle manière l'énoncé (2.14) rejoint le schéma de résolution de la figure 2.

À noter que pour simplifier les formules on n'a jamais fait apparaître dans les expressions précédentes l'***hétérogénéité*** du matériau constitutif. On retiendra que tous les résultats obtenus et toutes les formules écrites sont valables pour un matériau constitutif thermoélastique hétérogène. Cela signifie par exemple que le principe de minimum ci-dessus est applicable à un solide constitué d'un matériau composite, assemblage de matériaux eux-mêmes homogènes, pourvu que la continuité du milieu résultant soit en permanence assurée c'est-à-dire qu'il y ait adhérence totale entre les constituants.

2.3 Expressions explicites de l'énergie élastique de $\underline{\xi}'$

En retenant pour $\rho\psi\,(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}}')$ les termes entre crochets de (1.18) on a :

$$\text{(2.15)} \qquad \begin{cases} W\,(\tau, \underline{\xi}') = \displaystyle\int_\Omega (\underline{\underline{\sigma}}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}' + \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}' - \underline{\underline{k}}\,\tau : \underline{\underline{\varepsilon}}')\,\mathrm{d}\Omega \\ \underline{\underline{\varepsilon}}' = (\underline{\underline{\mathrm{grad}\,\xi}}' + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\mathrm{grad}\,\xi}}')/2\ . \end{cases}$$

Dans le cas particulier du matériau isotrope on obtient :

- avec la constante de Lamé λ et le module de cisaillement μ

$$\text{(2.16)} \qquad W\,(\tau, \underline{\xi}') = \int_\Omega \big(\underline{\underline{\sigma}}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}' + \frac{\lambda}{2}(\ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}')^2 + \mu\ \mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\varepsilon}}')^2 - k\,\tau\ \ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}'\big)\,\mathrm{d}\Omega\ ,$$

- avec le module de Young E et le coefficient de Poisson ν

$$\text{(2.17)} \qquad W\,(\tau, \underline{\xi}') = \int_\Omega \big(\underline{\underline{\sigma}}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}' + \frac{E}{2(1+\nu)}(\frac{\nu}{1-2\nu}(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}')^2 + \ \mathrm{tr}\,(\underline{\underline{\varepsilon}}')^2) - \frac{E}{1-2\nu}\,\alpha\,\tau\ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}'\big)\,\mathrm{d}\Omega\ .$$

2.4 Unicité de la solution

On suppose l'existence de deux solutions pour le problème d'équilibre thermoélastique considéré, désignées respectivement par $(\underline{\underline{\sigma}}^1, \underline{\xi}^1, \underline{\underline{\varepsilon}}^1)$ et $(\underline{\underline{\sigma}}^2, \underline{\xi}^2, \underline{\underline{\varepsilon}}^2)$.

En remarquant que les champs $\underline{\xi}^1$ et $\underline{\xi}^2$ peuvent évidemment jouer le rôle de $\underline{\xi}'$ dans l'inégalité (2.12) vis-à-vis respectivement des solutions $(\underline{\underline{\sigma}}^2, \underline{\xi}^2, \underline{\underline{\varepsilon}}^2)$ et $(\underline{\underline{\sigma}}^1, \underline{\xi}^1, \underline{\underline{\varepsilon}}^1)$ on obtient :

$$\text{(2.18)} \qquad W\,(\tau, \underline{\xi}^1) - \Phi\,(\underline{\xi}^1) > W\,(\tau, \underline{\xi}^2) - \Phi\,(\underline{\xi}^2) \quad \text{si } \underline{\underline{\varepsilon}}^1 \neq \underline{\underline{\varepsilon}}^2$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

et

$$W(\tau, \underline{\xi}^2) - \Phi(\underline{\xi}^2) > W(\tau, \underline{\xi}^1) - \Phi(\underline{\xi}^1) \quad \text{si } \underline{\underline{\varepsilon}}^2 \neq \underline{\underline{\varepsilon}}^1 \tag{2.19}$$

Il en résulte que les champs $\underline{\underline{\varepsilon}}^1$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^2$ sont identiques et

$$W(\tau, \underline{\xi}^1) - \Phi(\underline{\xi}^1) = W(\tau, \underline{\xi}^2) - \Phi(\underline{\xi}^2)\,. \tag{2.20}$$

Ceci exprime simplement le fait que le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$, solution du problème, minimise la fonctionnelle $(W - \Phi)$, qui est strictement convexe du champ $\underline{\underline{\varepsilon}}'$, sur le convexe $\mathbb{C}(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}})$ et qu'il est donc unique.

L'***unicité*** du champ de ***déformation*** $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^1 = \underline{\underline{\varepsilon}}^2$ est ainsi démontrée. Elle implique l'***unicité*** du champ de ***contrainte*** $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^1 = \underline{\underline{\sigma}}^2$.

En revanche, l'***unicité*** du champ ***de déplacement*** solution $\underline{\xi}$ n'est assurée qu'***à un déplacement rigidifiant près*** dans le respect de l'hypothèse des petites perturbations. Les données ξ_i^{d} sur S_{ξ_i} qui définissent $\mathbb{C}(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}})$ peuvent réduire, voire annuler, cette indétermination.

2.5 Cas du matériau thermoélastique avec liaisons internes

On n'a pas développé, dans le cadre général du chapitre VII, la linéarisation de la loi de comportement thermoélastique en présence de liaisons internes. En effet, comme le montre par exemple le cas de la liaison interne d'incompressibilité, la présence de liaisons internes, sans modifier en rien les principes de la linéarisation, nécessite un contrôle soigneux des ordres de grandeur dans chaque cas particulier.

À l'issue d'une telle analyse menée dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale, la loi de comportement thermoélastique linéarisée se met sous la forme :

$$\begin{cases} \varphi_p(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 0 \quad , \quad p = 1, \dots, n \qquad (1 \leq n \leq 6) \\ \underline{\underline{\sigma}} = \rho \dfrac{\partial \psi(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} + \eta_p \dfrac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \\ \eta_p \text{ arbitraires}\,. \end{cases} \tag{2.21}$$

où les n relations ***linéaires***

$$\varphi_p(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 0 \quad , \quad p = 1, \dots, n \qquad (1 \leq n \leq 6) \tag{2.22}$$

expriment les liaisons internes (ce sont les expressions linéarisées des relations (4.29) du chapitre VII), et où le potentiel quadratique $\rho\psi(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}})$ n'est défini que sur l'espace vectoriel des tenseurs $\underline{\underline{\varepsilon}}$ symétriques satisfaisant (2.22) et est strictement convexe de $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Le principe de minimum pour les déplacements énoncé au paragraphe 2.2 est conservé, mais il porte désormais sur le convexe des champs de déplacement $\underline{\xi}'$ de $\mathbb{C}(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}})$ qui satisfont en outre les liaisons internes (2.22) :

$$(W - \Phi) \text{ Minimale sur } \begin{cases} \mathbb{C}(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}}) \\ \varphi_p(\underline{\underline{\varepsilon}}') = 0\,, p = 1, \dots, n \quad (1 \leq n \leq 6)\,. \end{cases} \tag{2.23}$$

Le résultat d'unicité (modulo un déplacement rigidifiant) du champ de déplacement solution du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé demeure valable. Il n'implique pas l'unicité stricte du champ de contrainte solution. Celui-ci est déterminé modulo un champ de tenseurs

inopérants statiquement admissible pour le problème avec des données $\underline{F}$ et T_i^{d} sur S_{T_i} nulles ; η_p désignant les n ***champs scalaires*** des multiplicateurs de Lagrange on peut énoncer :

$$\underline{\underline{\sigma}} \text{ unique modulo } \eta_p \frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}, \ (p = 1, \dots, n) \in \mathbb{S}(0, S_{T_i}, 0) \,. \tag{2.24}$$

(5)

Dans certains cas la forme des données du problème permet d'assurer l'unicité complète du champ $\underline{\underline{\sigma}}$.

3 Minimum de l'énergie complémentaire

3.1 Convexité de $\mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$

La convexité de l'ensemble $\mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$ des champs de contrainte statiquement admissibles avec les données $\underline{F}$, T_i^{d} sur S_{T_i}, défini par (1.8), est évidente par simple vérification de (1.11).

On rappelle (cf. chapitre VIII, § 4.2) que ces données du problème doivent être compatibles avec l'équilibre global du système ($[\mathcal{F}_e] = 0$) pour que $\mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$ ne soit pas vide et que le problème puisse avoir une solution.

L'objet de la présente section est de mettre en évidence une propriété d'extrémalité satisfaite par le champ de contrainte solution du problème d'équilibre thermoélastique schématisé sur la figure 2.

Dans son articulation générale et dans ses arguments, la démonstration de cette propriété est semblable à celle donnée au paragraphe 2.2. Certaines étapes et certains commentaires ne seront donc que brièvement repris.

3.2 Principe de minimum pour les contraintes

Notations

On fait à nouveau l'hypothèse de l'existence d'au moins une solution du problème pour laquelle on conserve l'écriture $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\xi}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ pour désigner les champs. La notation $\underline{\underline{\sigma}}'$ désigne un champ de contrainte ***quelconque statiquement admissible*** avec les données du problème :

$$\underline{\underline{\sigma}}' \in \mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}}) \,. \tag{3.1}$$

Démonstration

On applique le théorème des travaux virtuels (1.10) en prenant pour champ de déplacement virtuel $\hat{\underline{\xi}}$ le champ $\underline{\xi}$ d'une solution, et successivement pour champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^*$ le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ de la même solution et un champ $\underline{\underline{\sigma}}'$ quelconque de (3.1). Il vient, puisque $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}'$ sont tous deux en équilibre avec $\underline{F}$ sur Ω et T_i^{d} sur S_{T_i} :

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \rho \, \underline{F} \cdot \underline{\xi} \, \mathrm{d}\Omega - \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^{\mathrm{d}} \xi_i \, \mathrm{d}a - \sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^{\mathrm{d}} \, \sigma_{ij} \, n_j \, \mathrm{d}a \, = 0 \tag{3.2}$$

(5) Cf. la notion de champ d'autocontrainte pour le problème au paragraphe 6.1.

et

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma'}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\, \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \rho\, \underline{F} \cdot \underline{\xi}\, \mathrm{d}\Omega - \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^{\mathrm{d}} \xi_i \, \mathrm{d}a - \sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^{\mathrm{d}}\, \sigma'_{ij}\, n_j \, \mathrm{d}a = 0\,. \tag{3.3}$$

On en déduit par différence :

$$\int_\Omega (\underline{\underline{\sigma'}} - \underline{\underline{\sigma}}) : \underline{\underline{\varepsilon}}\, \mathrm{d}\Omega - \sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^{\mathrm{d}} (\sigma'_{ij} - \sigma_{ij})\, n_j \, \mathrm{d}a = 0\,. \tag{3.4}$$

On met à nouveau à profit le fait que $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\xi}, \underline{\underline{\varepsilon}})$ est une solution du problème pour substituer, dans la première intégrale de (3.4), l'expression de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en fonction de τ et $\underline{\underline{\sigma}}$ fournie par la loi de comportement sous la forme (1.20) :

$$\int_\Omega (\underline{\underline{\sigma'}} - \underline{\underline{\sigma}}) : \underline{\underline{\varepsilon}}\, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \rho\, \frac{\partial \psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : (\underline{\underline{\sigma'}} - \underline{\underline{\sigma}})\, \mathrm{d}\Omega\,. \tag{3.5}$$

L'application de l'inégalité (1.15) à $\rho\psi^*$ strictement convexe de l'argument $\underline{\underline{\sigma}}$ dans le deuxième membre de (3.5) s'écrit :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \rho\, \frac{\partial \psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : (\underline{\underline{\sigma'}} - \underline{\underline{\sigma}})\, \mathrm{d}\Omega < \int_\Omega \rho \psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma'}})\, \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \rho \psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}})\, \mathrm{d}\Omega \\ \text{si } \underline{\underline{\sigma'}} \neq \underline{\underline{\sigma}}\,. \end{cases} \tag{3.6}$$

D'où finalement, à partir de (3.4) :

$$\begin{cases} \forall\, (\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\xi}, \underline{\underline{\varepsilon}}) \text{ solution}\,, \\ \forall\, \underline{\underline{\sigma'}} \in \mathbb{S}\,(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})\,,\ \underline{\underline{\sigma'}} \neq \underline{\underline{\sigma}}\,, \\ \displaystyle\int_\Omega \rho\psi^*\,(\tau, \underline{\underline{\sigma'}})\, \mathrm{d}\Omega - \sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^{\mathrm{d}}\, \sigma'_{ij}\, n_j \, \mathrm{d}a \\ \qquad\qquad > \displaystyle\int_\Omega \rho\psi^*\,(\tau, \underline{\underline{\sigma}})\, \mathrm{d}\Omega - \sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^{\mathrm{d}}\, \sigma_{ij}\, n_j \, \mathrm{d}a\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

Définition des fonctionnelles

L'inégalité (3.7) met en évidence deux fonctionnelles définies sur l'ensemble des champs de contrainte $\underline{\underline{\sigma'}}$ continus et continûment différentiables, par morceaux :

La première

$$\boxed{W^*\,(\tau, \underline{\underline{\sigma'}}) = \int_\Omega \rho\psi^*\,(\tau\,, \underline{\underline{\sigma'}})\, \mathrm{d}\Omega} \tag{3.8}$$

est ***l'énergie élastique*** (de contrainte)[6] du champ $\underline{\underline{\sigma'}}$.

[6] Si $W(0,0) = 0$ on a aussi $W^*(0,0) = 0$ en conséquence de (1.19)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La seconde

$$\boxed{\Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}') = \sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^{\mathrm{d}}\, \sigma'_{ij}\, n_j \,\mathrm{d}a} \tag{3.9}$$

représente le ***travail virtuel des forces de surface engendrées par $\underline{\underline{\sigma}}'$ dans les déplacements donnés.***

Avec ces définitions, (3.7) s'écrit simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\, (\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\xi}}, \underline{\underline{\varepsilon}}) \text{ solution }, \ \forall\, \underline{\underline{\sigma}}' \in \mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}}) \ , \ \underline{\underline{\sigma}}' \neq \underline{\underline{\sigma}} \ , \\ W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}') - \Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}') > W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}) - \Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}) \end{array} \right. \tag{3.10}$$

Minimum de l'énergie complémentaire

La fonctionnelle $(W^* - \Phi^*)$ est appelée ***énergie complémentaire*** du champ $\underline{\underline{\sigma}}'$. Son opposée $(-W^* + \Phi^*)$ est aussi appelée ***énergie potentielle*** du champ $\underline{\underline{\sigma}}'$[7].

Le résultat (3.10) s'énonce alors :

$$\boxed{\begin{array}{c} \textbf{\textit{parmi tous les champs de contrainte }} \underline{\underline{\sigma}}' \\ \textbf{statiquement admissibles avec les données } \underline{F}, T_i^{\mathrm{d}} \textbf{ sur } S_{T_i}, \\ \textbf{\textit{le champ }} \underline{\underline{\sigma}} \textbf{\textit{ solution du problème}} \\ \textbf{\textit{minimise la fonctionnelle « énergie complémentaire »}} \end{array}} \tag{3.11}$$

qui s'écrit

$$\boxed{(W^* - \Phi^*) \ \text{ Minimale sur } \ \mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})} \tag{3.12}$$

On a ainsi établi le principe de minimum pour les contraintes, aussi appelé ***principe du minimum de l'énergie complémentaire***.

Commentaires

Toutes les données du problème interviennent évidemment dans l'énoncé (3.12)

- Le ***comportement*** du matériau constitutif définit l'expression de l'énergie élastique (de contrainte) des champs de contrainte : fonctionnelle W^* de $\underline{\underline{\sigma}}'$.
- Les ***données sur les déplacements*** (ξ_i^{d} sur S_{ξ_i}) sont incorporées dans la fonctionnelle Φ^* de $\underline{\underline{\sigma}}'$.

[7] Terminologies justifiées au paragraphe 3.5.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- Les ***données sur les efforts*** (forces de masses $\underline{F}$ et données T_i^{d} sur S_{T_i}) sont prises en compte en restreignant la minimisation de l'énergie complémentaire au convexe $\mathbb{S}(\underline{F}\,, S_{T_i}\,, T_i^{\mathrm{d}})$.

Le paragraphe 4.1, consacré à la réciproque des principes de minimum, montrera de quelle manière l'énoncé (3.12) rejoint le schéma de résolution de la figure 2.

Le commentaire fait au paragraphe 2.2 concernant l'hétérogénéité éventuelle du matériau constitutif est, évidemment, intégralement valable ici.

3.3 Expressions explicites de l'énergie élastique de $\underline{\underline{\sigma}}'$

Pour donner l'expression explicite (2.15) de W au paragraphe 2.3 on n'a retenu que les termes entre crochets dans l'expression (1.18) du potentiel $\rho\psi$, qui dépendent de $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Le potentiel $\rho\psi$ et la fonctionnelle W sont définis à une constante additive près, ce qui n'a évidemment aucune incidence sur l'écriture et la mise en œuvre du principe de minimum (2.14).

Pour l'explicitation du principe de minimum (3.12) on peut, de la même manière, se restreindre aux termes entre crochets dans l'expression (1.24) de $\rho\psi^*$, d'où :

$$W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}') = \int_\Omega \big(\frac{1}{2}(\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^0) : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : (\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^0) + (\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^0) : \underline{\underline{\alpha}}\,\tau\big)\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{3.13}$$

Mais on verra au paragraphe 3.5 que la combinaison des deux principes de minimum (2.14) et (3.12) permet d'aboutir à des inégalités d'encadrement dans lesquelles il est ***indispensable*** que les expressions adoptées pour $\rho\psi$ et $\rho\psi^*$ dans W et W^* soient reliées par la formule (1.19) de la transformation de Legendre.

L'expression de W^* qui doit alors être retenue, correspondant à celle donnée en (2.15) pour W est issue de (1.24) :

$$W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}') = \int_\Omega \big(\frac{1}{2}(\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^0) : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : (\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^0) + (\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^0) : \underline{\underline{\alpha}}\,\tau + \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{k}}\,\tau^2\big)\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{3.14}$$

Pour le matériau isotrope l'équation de comportement (1.21) s'écrit en fonction du module de Young E, du coefficient de Poisson ν et du coefficient linéique de dilatation thermique α :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^0 + \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \alpha\,\tau\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} \tag{3.15}$$

avec

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^0 = -\big(\frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}}^0 - \frac{\nu}{E}(\ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}^0)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}\big) \tag{3.16}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

et l'on obtient pour W^* :

$$W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}') = \int_\Omega \Big(\frac{1+\nu}{2\,E} \operatorname{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^0)^2 - \frac{\nu}{2\,E} (\operatorname{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^0))^2 + \alpha\,\tau\,\operatorname{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^0) + \frac{3\,E}{2(1-2\,\nu)}\,(\alpha\,\tau)^2 \Big)\,\mathrm{d}\Omega \tag{3.17}$$

et, avec la constante de Lamé λ et le module de cisaillement μ,

$$W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}') = \int_\Omega \frac{1}{4\mu} \Big(\operatorname{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^0)^2 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\operatorname{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^0))^2 \Big)\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \Big(k\,\tau\,\operatorname{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^0) + \frac{3}{2} (k\,\tau)^2 \Big)\,\mathrm{d}\Omega \tag{3.18}$$

3.4 Unicité de la solution

La fonctionnelle W^* est strictement convexe sur $\mathbb{S}\,(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$ par suite de la stricte convexité de $\rho\psi^*$ par rapport à son argument $\underline{\underline{\sigma}}'$ dans (3.8).

Il s'ensuit que la fonctionnelle $(W^* - \Phi^*)$ est strictement convexe sur $\mathbb{S}\,(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$. D'où le résultat suivant.

En supposant l'***existence de la solution*** du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé, le ***champ de contrainte*** $\underline{\underline{\sigma}}$ minimisant la fonctionnelle convexe $(W^* - \Phi^*)$ sur le convexe $\mathbb{S}\,(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$ est ***unique***. Il y a donc unicité du champ de contrainte solution du problème d'équilibre thermoélastique, dont on déduit l'unicité du champ de déformation solution et l'unicité du champ de déplacement solution à un déplacement rigidifiant H.P.P. près.

C'est évidemment le résultat déjà obtenu au paragraphe 2.4.

3.5 Combinaison des principes de minimum pour les déplacements et pour les contraintes

En combinant les résultats des paragraphes 2.2 et 3.2 on peut énoncer le théorème suivant.

En supposant l'existence de la solution du problème d'équilibre thermoélastique, ***le minimum de la fonctionnelle*** $(W - \Phi)$ ***sur*** $\mathbb{C}\,(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}})$ ***et le minimum de la fonctionnelle*** $(W^* - \Phi^*)$ ***sur*** $\mathbb{S}\,(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$ ***sont opposés***.

En effet en rappelant que $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\xi}, \underline{\underline{\varepsilon}}$ désignent les champs solutions du problème, on a, en application de (2.14) et (3.12) :

$$\operatorname*{Min}_{\mathbb{C}\,(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}})} (W - \Phi) = \int_\Omega \rho\psi(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}})\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \rho\,\underline{F} \cdot \underline{\xi}\,\mathrm{d}\Omega - \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^{\mathrm{d}}\,\xi_i\,\mathrm{d}a \tag{3.19}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

$$\underset{\mathbb{S}\,(\underline{\underline{F}},S_{T_i},T_i^{\mathrm{d}})}{\mathrm{Min}}\,(W^*-\Phi^*)=\int_\Omega \rho\psi^*(\tau,\underline{\underline{\sigma}})\,\mathrm{d}\Omega-\sum_i\int_{S_{\xi_i}}\xi_i^{\mathrm{d}}\,\sigma_{ij}\,n_j\,\mathrm{d}a\;. \tag{3.20}$$

On en déduit, en additionnant (3.19) et (3.20) :

$$\begin{aligned}\underset{\mathbb{C}\,(S_{\xi_i},\xi_i^{\mathrm{d}})}{\mathrm{Min}}\,(W-\Phi)+\underset{\mathbb{S}\,(\underline{\underline{F}},S_{T_i},T_i^{\mathrm{d}})}{\mathrm{Min}}\,(W^*-\Phi^*)&=\int_\Omega\left(\rho\psi(\tau,\underline{\underline{\varepsilon}})+\rho\psi^*(\tau,\underline{\underline{\sigma}})\right)\mathrm{d}\Omega\\&\quad-\int_\Omega\rho\,\underline{F}.\underline{\xi}\,\mathrm{d}\Omega-\sum_i\int_{S_{T_i}}T_i^{\mathrm{d}}\,\xi_i\,\mathrm{d}a-\sum_i\int_{S_{\xi_i}}\xi_i^{\mathrm{d}}\,\sigma_{ij}\,n_j\,\mathrm{d}a\;.\end{aligned} \tag{3.21}$$

La somme des trois dernières intégrales dans (3.21) appelle l'utilisation du théorème des travaux virtuels (1.10) avec les champs solutions $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\xi}$. L'égalité (3.21) devient alors :

$$\underset{\mathbb{C}\,(S_{\xi_i},\xi_i^{\mathrm{d}})}{\mathrm{Min}}\,(W-\Phi)+\underset{\mathbb{S}\,(\underline{\underline{F}},S_{T_i},T_i^{\mathrm{d}})}{\mathrm{Min}}\,(W^*-\Phi^*)=\int_\Omega\left(\rho\psi(\tau,\underline{\underline{\varepsilon}})+\rho\psi^*(\tau,\underline{\underline{\sigma}})-\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\mathrm{d}\Omega \tag{3.22}$$

dont le second membre est nul en conséquence de (1.19).

Le résultat annoncé, qui justifie l'appellation « énergie complémentaire » pour $(W^*-\Phi^*)$, est ainsi démontré :

$$\boxed{\underset{\mathbb{C}\,(S_{\xi_i},\xi_i^{\mathrm{d}})}{\mathrm{Min}}\,(W-\Phi)+\underset{\mathbb{S}\,(\underline{\underline{F}},S_{T_i},T_i^{\mathrm{d}})}{\mathrm{Min}}\,(W^*-\Phi^*)=0} \tag{3.23}$$

On insistera sur le fait que cette formule nécessite que les expressions utilisées pour les potentiels $\rho\psi$ et $\rho\psi^*$ soient reliées par la formule (1.19) de la transformation de Legendre-Fenchel.

Il se met aussi sous la forme :

$$\underset{\mathbb{S}(\underline{\underline{F}},S_{T_i},T_i^{\mathrm{d}})}{\mathrm{Max}}\,(-W^*+\Phi^*)=\underset{\mathbb{C}\,(S_{\xi_i},\xi_i^{\mathrm{d}})}{\mathrm{Min}}\,(W-\Phi)\;. \tag{3.24}$$

Autrement dit, avec la définition donnée plus haut de l'énergie potentielle d'un champ de contrainte statiquement admissible :

Pour la solution, l'énergie potentielle du champ de contrainte est égale à l'énergie potentielle du champ de déplacement.

En mettant (3.24) sous la forme d'une suiite d'inégalités on met en évidence un ***encadrement énergétique*** pour la solution du problème.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

$$
\begin{aligned}
&\forall \underline{\xi}' \in \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\xi_i^{\mathrm{d}})\ \ ,\ \ \forall \underline{\underline{\sigma}}' \in \mathbb{S}\,(\underline{F}\,,S_{T_i}\,,T_i^{\mathrm{d}})\,,\\
&-W^*(\tau,\underline{\underline{\sigma}}') + \Phi^*\,(\underline{\underline{\sigma}}') \leq -W^*\,(\tau\,,\underline{\underline{\sigma}}) + \Phi^*\,(\underline{\underline{\sigma}}) = \\
&\qquad\qquad = W(\tau,\underline{\xi}) - \Phi\,(\underline{\xi}) \leq W(\tau,\underline{\xi}') - \Phi\,(\underline{\xi}')
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

L'énergie potentielle de tout champ de déplacement de $\mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\xi_i^{\mathrm{d}})$ ***est supérieure ou égale à l'énergie potentielle de tout champ de contrainte de*** $\mathbb{S}\,(\underline{F}\,,S_{T_i}\,,T_i^{\mathrm{d}})$.

Le tableau de la figure 6 rassemble, sous une forme schématique, les résultats essentiels énoncés jusqu'ici (2.14, 3.12 et 3.23).

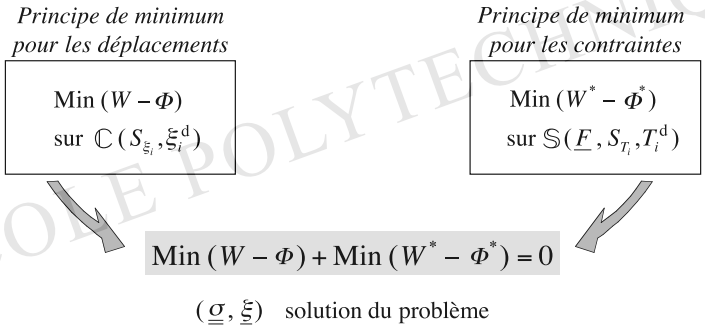


Figure 6 – Principes de minimum de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire

3.6 Cas du matériau thermoélastique avec liaisons internes

L'expression du potentiel $\rho\psi^*$ pour le matériau thermoélastique avec liaisons internes décrit au paragraphe 2.5, dans l'hypothèse des petites perturbations, provient du potentiel $\rho\psi$ par la transformation de Legendre-Fenchel (1.19).

Compte tenu de la loi de comportement (2.21) dans laquelle interviennent n multiplicateurs de Lagrange on voit que le potentiel $\rho\psi^*$ est convexe en $\underline{\underline{\sigma}}$ en conséquence de la stricte convexité de $\rho\psi$ en $\underline{\underline{\varepsilon}}$, mais n'est plus strictement convexe : en effet, $\rho\psi^*$ prend la même valeur pour tous les tenseurs de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ associés par (2.21) à un même tenseur de déformation linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

L'énoncé du principe de minimum pour les contraintes (3.12) est strictement conservé. On remarque qu'il n'implique plus l'unicité du champ de contrainte solution, comme on l'avait déjà indiqué au paragraphe 2.5, mais que l'unicité du champ de déplacement solution (modulo un déplacement rigidifiant H.P.P.) demeure valable.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

4 Approches variationnelles

4.1 Réciproques des principes de minimum

Les principes énoncés dans les sections 2 et 3 établissent

• que tout champ de déplacement $\underline{\xi}$ solution du problème d'équilibre thermoélastique rend minimale la fonctionnelle « énergie potentielle » sur l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles pour le problème avec les données ξ_i^{d} sur S_{ξ_i} ;

• que le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ solution du problème d'équilibre thermoélastique rend minimale la fonctionnelle « énergie complémentaire » sur l'ensemble des champs de contrainte statiquement admissibles pour le problème avec les données $\underline{F}$ sur Ω et T_i^{d} sur S_{T_i} .

On se propose d'établir les réciproques de ces principes, montrant ainsi qu'il s'agit de propriétés caractéristiques des champs solutions qui fourniront la base de méthodes variationnelles de résolution.

Réciproque du principe du minimum de l'énergie potentielle

En se reportant au schéma de la problématique présenté sur la figure 2, on voit que la question posée par la réciproque du principe du minimum de l'énergie potentielle est la suivante : si $\underline{\xi}$ est un champ de déplacement qui minimise $(W - \Phi)$ sur $\mathbb{C}\left(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}}\right)$, peut-on affirmer que le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ qui lui est associé par la loi de comportement thermoélastique

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \tag{4.1}$$

est statiquement admissible pour le problème avec les données $\underline{F}$ sur Ω et T_i^{d} sur S_{T_i} ?

La réponse à cette question est affirmative : c'est la minimisation de la fonctionnelle sur $\mathbb{C}\left(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}}\right)$ qui assure que le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ donné par (4.1) satisfait les équations (1.1), (1.2) et (1.4).

En effet compte tenu de la structure d'espace affine du convexe $\mathbb{C}\left(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}}\right)$, si le minimum de $(W - \Phi)$ existe, il correspond nécessairement à un (ou des) champ $\underline{\xi}$ pour lequel cette fonctionnelle est stationnaire. La nullité de la variation première de $(W - \Phi)$ s'écrit alors, pour un tel champ $\underline{\xi}$ et son champ de déformation linéarisée $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \rho \frac{\partial \psi\left(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{a}} \, \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \rho \, \underline{F} \cdot \underline{\xi}^{\mathrm{a}} \, \mathrm{d}\Omega - \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^{\mathrm{d}} \, \xi_i^{\mathrm{a}} \, \mathrm{d}a = 0 \\ \forall \, \underline{\xi}^{\mathrm{a}} \text{ tel que } \xi_i^{\mathrm{a}} = 0 \text{ sur } S_{\xi_i} \, , \; i = 1 \, , 2 \, , 3 \end{array} \right. \tag{4.2}$$

(que l'on peut rapprocher de (2.6)).

En reprenant le raisonnement mis en œuvre au chapitre V (§ 3.14) à propos de la formulation faible des équations de la dynamique, on voit que la formule (4.2) implique que le champ $\underline{\underline{\sigma}} = \rho \dfrac{\partial \psi(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$ est statiquement admissible pour le problème avec les données $\underline{F}$ et T_i^{d}

sur S_{T_i} :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \rho \frac{\partial \psi(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \in \mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}}) \,. \tag{4.3}$$

On a rappelé au paragraphe 3.1 ci-dessus la condition de compatibilité des données « statiques » $\mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$ du problème avec l'équilibre global du système $([\mathcal{F}_e]) = 0)$, qui est nécessaire pour que le problème posé ait une solution. On peut s'interroger ici sur la façon dont cette condition intervient dans l'application du principe du minimum de l'énergie potentielle. L'analyse montre que, lorsque cette compatibilité des données n'est pas vérifiée, la fonctionnelle $(W - \Phi)$ ne peut plus avoir un minimum fini : l'équation (4.2) n'est jamais satisfaite[8]. Ceci est à rapprocher de la remarque faite au paragraphe (3.14) du chapitre V.

La figure 7 schématise cette approche variationnelle qui correspond à la méthode de résolution directe par les déplacements (chapitre VIII, section 5).

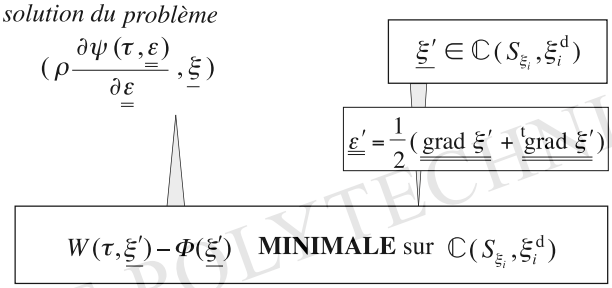


Figure 7 – Minimisation de l'énergie potentielle

Réciproque du principe du minimum de l'énergie complémentaire

Pour la réciproque du principe du minimum de l'énergie complémentaire, la question posée est la suivante : si $\underline{\underline{\sigma}}$ est le champ de contrainte qui minimise $(W^* - \Phi^*)$ sur $\mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$, peut-on affirmer que le champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ qui lui est associé par la loi de comportement thermoélastique

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \rho \frac{\partial \psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \tag{4.4}$$

est intégrable et qu'il permet de déterminer un champ de déplacement $\underline{\xi}$ cinématiquement admissible pour le problème avec les données ξ_i^{d} sur S_{ξ_i} ?

La réponse est encore affirmative : c'est la minimisation de la fonctionnelle $(W^* - \Phi^*)$ sur $\mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$ qui assure que le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ donné par (4.4) est géométriquement compatible dans l'hypothèse des petites perturbations et correspond à un champ $\underline{\xi}$ qui satisfait les conditions au contour (1.5).

En effet, ici encore, si le minimum de $(W^* - \Phi^*)$ existe, il correspond nécessairement à un champ $\underline{\underline{\sigma}}$ pour lequel cette fonctionnelle est stationnaire. La nullité de la variation première

[8] L'existence d'un minimum pour $(W - \Phi)$ implique que $\Phi(\underline{\xi}^{\mathrm{a}}) = 0$ pour les champs $\underline{\xi}^{\mathrm{a}}$ définis dans (4.2) et ***rigidifiants.***

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

de $(W^* - \Phi^*)$ s'écrit,

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \rho \frac{\partial \psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} \, \mathrm{d}\Omega - \sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^{\mathrm{d}} \, \sigma_{ij}^{\mathrm{a}} \, n_j \, \mathrm{d}a = 0 \\ \forall \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} \text{ tel que } \mathrm{div}\, \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} = 0 \text{ et } \sigma_{ij}^{\mathrm{a}} \, n_j = 0 \text{ sur } S_{T_i} \ , \ i = 1, 2, 3 \end{array} \right. \tag{4.5}$$

(que l'on peut rapprocher de (3.4)).

Cette équation implique la compatibilité géométrique du champ $\underline{\underline{\varepsilon}} = \rho \dfrac{\partial \psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$, intégrable en un champ $\underline{\xi}$ cinématiquement admissible pour le problème avec les données ξ_i^{d} sur S_{ξ_i} (le raisonnement est le même qu'aux chapitres III (§ 3.9) et V (§ 3.13) à propos de la formulation faible de la compatibilité géométrique en petites transformations) :

$$\rho \frac{\partial \psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = (\underline{\underline{\mathrm{grad}\, \xi}} + {}^t\underline{\underline{\mathrm{grad}\, \xi}})/2 \quad , \quad \underline{\xi} \in \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}}) \ . \tag{4.6}$$

L'intervention de la condition nécessaire de compatibilité des données statiques ($\underline{F}, T_i^{\mathrm{d}}$ sur S_{T_i}) est ici évidente : si cette condition n'est pas vérifiée, le convexe $\mathbb{S}\,(\underline{F}\, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$ est vide !

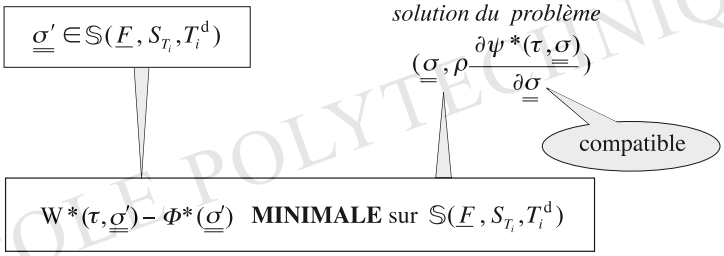


Figure 8 – Minimisation de l'énergie complémentaire

Cette approche variationnelle (figure 8) correspond à la méthode de résolution directe par les contraintes (chapitre VIII, section 6).

4.2 Méthodes variationnelles

Principe

Les schémas des figures 7 et 8 représentent les méthodes variationnelles de résolution du problème d'équilibre thermoélastique, homologues des deux méthodes directes exposées au chapitre VIII (sections 5 et 6). Comme on l'a vu, la minimisation exacte de la fonctionnelle « énergie potentielle » sur les champs de déplacement cinématiquement admissibles pour le problème avec les données ξ_i^{d} sur S_{ξ_i} ***ou*** la minimisation exacte de la fonctionnelle « énergie complémentaire » sur les champs de contrainte statiquement admissibles pour le problème avec les données $\underline{F}$ et T_i^{d} sur S_{T_i}, détermine complètement la solution du problème.

L'importance pratique de l'approche variationnelle ne réside pas dans l'application directe de ces résultats pour procéder analytiquement à la minimisation exacte de l'une ou l'autre de ces fonctionnelles. Une telle démarche ramènerait à la résolution

des équations écrites au chapitre VIII (sections 5 et 6) pour la méthode des déplacements ou la méthode des contraintes ! L'approche variationnelle permet, en revanche, d'introduire le concept de ***solution approchée*** en déplacement ou en contrainte du problème d'équilibre thermoélastique, en se référant à la minimisation approchée de l'une ou l'autre fonctionnelle.

Ainsi, la minimisation de $(W - \Phi)$ sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,, \xi_i^{\mathrm{d}})$ conduit à un champ de déplacement minimisant qui est une approximation du champ de déplacement solution (exacte) du problème. Ce champ de déplacement est, par construction, cinématiquement admissible pour le problème avec les données ξ_i^{d} sur S_{ξ_i} , mais le champ de contrainte qui lui est associé par la loi de comportement thermoélastique n'est en général pas statiquement admissible pour le problème avec les données $\underline{F}$ sur Ω et T_i^{d} sur S_{T_i} . S'il l'est, cela signifie que, par chance, on a obtenu la solution du problème !

De la même façon la minimisation de $(W^* - \Phi^*)$ sur un sous-ensemble de $\mathbb{S}\,(\underline{F}\,, S_{T_i}\,, T_i^{\mathrm{d}})$ conduit à un champ de contrainte minimisant, approximation du champ de contrainte solution (exacte) du problème. Ce champ est, par construction, statiquement admissible pour le problème avec les données $\underline{F}$ sur Ω et T_i^{d} sur S_{T_i} , mais le champ de déformation qui lui est associé par la loi de comportement thermoélastique n'est en général pas géométriquement compatible pour fournir un champ de déplacement cinématiquement admissible pour le problème avec les données ξ_i^{d} sur S_{ξ_i} .

Sans entrer dans le détail des mathématiques mises en œuvre dans ces méthodes (analyse fonctionnelle) il est clair que la norme impliquée dans ce concept de solution approchée est énergétique. Lorsque la mise en œuvre des deux méthodes variationnelles est possible sur le même problème elle fournit, par les inégalités (3.24), un encadrement énergétique de la solution qui permet souvent de borner inférieurement et supérieurement une grandeur caractéristique du comportement global du système étudié, dont la signification mécanique est concrètement accessible : complaisance apparente ou module apparent par exemple. Le raffinement des champs considérés permet de rapprocher les bornes et d'améliorer l'évaluation (cf. § 5.3). Si, par chance, les deux bornes trouvées sont égales, cela signifie que chacune des minimisations effectuées est exacte ; chaque méthode a permis de déterminer complètement la solution et les champs minimisants sont associés par la loi de comportement thermoélastique.

Pour la recherche analytique de solutions approchées en déplacement ou en contrainte on utilise souvent, de façon plus ou moins explicite, ***la méthode de Ritz*** qui consiste à développer le champ cherché sur un nombre fini, en général très réduit, de champs définis analytiquement qui satisfont les conditions pour être cinématiquement admissibles (resp. statiquement admissibles) et à minimiser l'énergie potentielle (resp. complémentaire) sur les coefficients de ce développement.

Méthodes numériques

L'application essentielle des méthodes variationnelles, qui explique leur importance considérable, est maintenant liée aux méthodes numériques parmi lesquelles on peut citer la ***méthode des éléments finis***. Il s'agit d'une méthode de ***discrétisation*** qui,

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

dans sa forme la plus simple, s'apparente à la précédente : on minimise la fonctionnelle énergétique considérée, $(W - \Phi)$ ou $(W^* - \Phi^*)$, sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,, \xi_i^{\mathrm{d}})$ ou de $\mathbb{S}\,(\underline{F}\,, S_{T_i}\,, T_i^{\mathrm{d}})$ engendré numériquement par discrétisation qui est, de ce fait, beaucoup plus vaste que ceux que l'on peut envisager analytiquement. Un exemple permet d'illustrer ce propos et d'introduire une autre perception de la méthode.

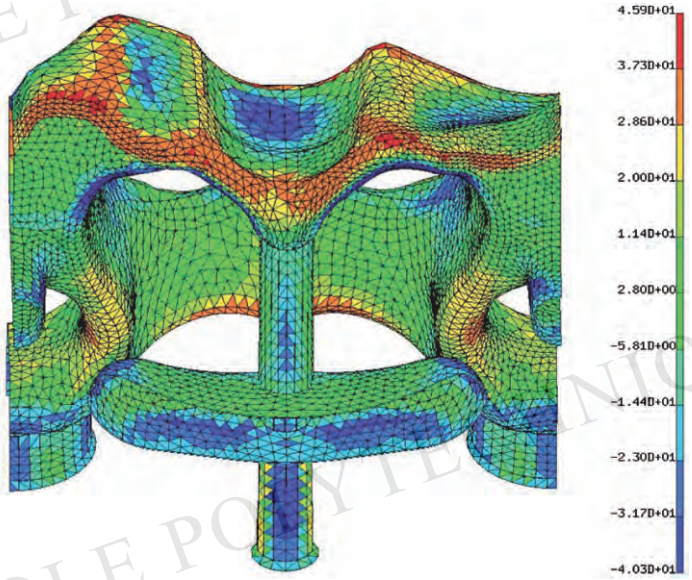


Figure 9 – Contraintes résiduelles en peau intérieure d'une culasse après trempe et revenu : représentation de la contrainte moyenne $\dfrac{1}{3}\ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}$ *(document communiqué par PSA–Peugeot Citroën)*

On considère à titre d'exemple le système tridimensionnel représenté sur la figure 9 pour lequel on se propose d'appliquer le principe du minimum de l'énergie potentielle pour obtenir une évaluation de son état d'équilibre thermoélastique. Pour ce faire, on décompose le solide étudié en un nombre fini d'éléments géométriques définis à partir des ***nœuds*** d'un ***maillage***). La figure 9 présente le cas simple d'un maillage où les éléments sont des tétraèdres, dont on voit les traces sous la forme de triangles qui décrivent de façon approchée le contour du solide.

Les champs de déplacements considérés pour l'application de la méthode sont obtenus par la réunion des champs de déplacement définis à l'intérieur de chaque tétraèdre de la façon suivante : dans un tétraèdre donné, le champ de déplacement est la fonction linéaire des coordonnées qui s'appuie sur les valeurs données du déplacement en chacun des quatre nœuds, sommets dudit tétraèdre. Si n est le nombre de nœuds du maillage, les paramètres dont dépend l'ensemble des champs de déplacement ainsi construits sont donc au nombre de $3n$. Ces champs de déplacement sont continus sur tout le domaine maillé et sont linéaires par morceaux ; leurs dérivées sont discontinues au franchissement des faces des tétraèdres[(9)].

La vérification du caractère cinématiquement admissible de ces champs nécessite aussi de considérer le respect des conditions aux limites sur les déplacements. Dans le cas (rare) où

[(9)] À noter qu'un tel sous-ensemble est utilisé avec profit pour la minimisation même lorsque la solution est continue et continûment différentiable (matériau constitutif homogène ou à hétérogénéité faible ; cf. chapitre VIII, § 4.2).

le contour du système étudié est formé de faces planes et où les conditions aux limites sur les déplacements ont la forme de fonctions linéaires (affines) des coordonnées, avec un choix pertinent du maillage, ces conditions sont satisfaites exactement en imposant les restrictions appropriées aux paramètres aux nœuds situés au contour. Dans le cas usuel tel que celui représenté sur la figure 9, les conditions aux limites seront satisfaites de la même manière, mais l'approximation correspondante sera, à l'évidence, d'autant meilleure que la finesse du maillage permettra une meilleure approximation géométrique du contour du solidé étudié.

La minimisation de l'énergie potentielle est effectuée par rapport aux $3n$ paramètres avec les conditions imposées. Il s'agit ainsi d'une application directe du principe de minimum sur les déplacements, où l'on explore un vaste sous-espace de l'espace $\mathbb{C}\left(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}}\right)$ des champs de déplacement cinématiquement admissibles pour le problème.

Le même exemple peut aussi être envisagé sous l'angle suivant. On abandonne la description continue du système, fondée sur la notion géométrique d'élément infinitésimal de milieu continu. On lui substitue une modélisation dans laquelles le système est un ***assemblage d'éléments finis*** construits à partir d'un maillage et uniquement liés entre eux aux nœuds de ce maillage : ce sont ici les tétraèdres. Les conditions aux limites sont imposées aux nœuds concernés du contour du système ainsi constitué. Le champ de déplacement sur chacun des éléments est défini à partir du champ des déplacements des nœuds par une fonction d'interpolation : ici cette fonction est linéaire en fonction des déplacements des nœuds situés aux quatre sommets du tétraèdre concerné. On calcule l'énergie élastique de chaque élément pour aboutir, par sommation, à l'énergie élastique du système discrétisé, fonction des déplacements des nœuds du maillage qui sont les paramètres de la minimisation.

Dans l'exemple présenté, les deux points de vue sont strictement équivalents mais, de fait, la deuxième approche se révèle plus féconde car elle laisse plus de place à « l'intuition mécanique » pour la construction des maillages, le choix des types d'éléments, des fonctions d'interpolation associées et des règles d'assemblages.

Les méthodes numériques permettent d'aborder la résolution des problèmes de thermoélasticité dans des géométries réalistes, sous des chargements complexes et pour un matériau constitutif hétérogène et isotrope. Elles soulèvent des questions qui relèvent de l'analyse fonctionnelle et de l'analyse numérique, telle que :

- La ***convergence*** (le raffinement du maillage entraîne-t-il et de quelle façon la convergence du champ minimisant obtenu numériquement vers la solution ?)
- L'***estimation d'erreur*** a priori
- La ***cohérence*** du schéma numérique.

À titre d'exemple, la figure 10 illustre une pratique usuelle qui consiste, à partir d'un premier calcul, à raffiner l'étude d'une partie du système particulièrement sollicitée.

Les performances des méthodes numériques et la qualité esthétique de la présentation des résultats qu'elles permettent d'obtenir (cf. figures 11 et 12) ne doivent pas occulter la nécessité d'une analyse critique desdits résultats. Leur fiabilité dépend entre autres de celle des conditions initiales, de la bonne écriture des conditions aux limites, pour ne rien dire des éventuelles erreurs de programmation que chacun peut commettre. Les solutions analytiques des problèmes classiques constituent « une boîte à outils » rustique qui permet, éventuellement avec le principe de Saint Venant, (et le bon sens), une analyse de vraisemblance du résultat d'un calcul.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

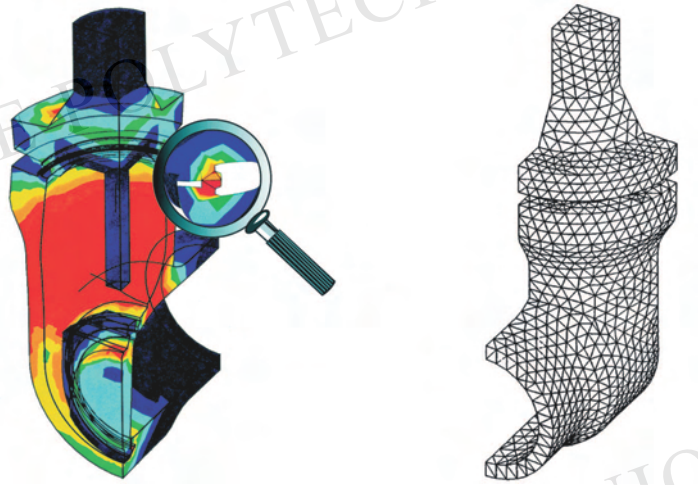


Figure 10 – Maillages et isocontraintes à 150° C sous 600 bars dans une vanne d'arrêt du circuit primaire d'une centrale nucléaire à eau pressurisée (Code_Aster ; document communiqué par EDF)

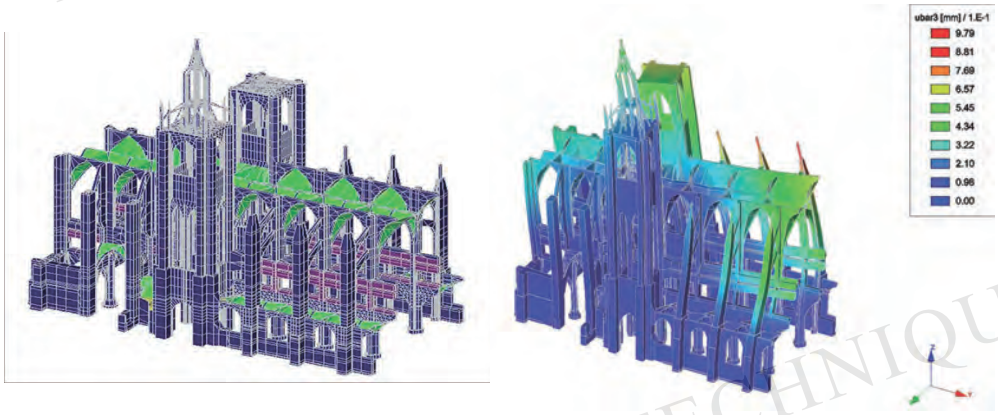


Figure 11 – Cathédrale de Strasbourg : représentation du maillage (57585 nœuds, 61549 éléments volumiques) et des déplacements verticaux dans le troisième mode de vibration de fréquence 1,74 Hz. (Logiciel CESAR –lcpc ; document communiqué par le Laboratoire central des ponts et chaussées)

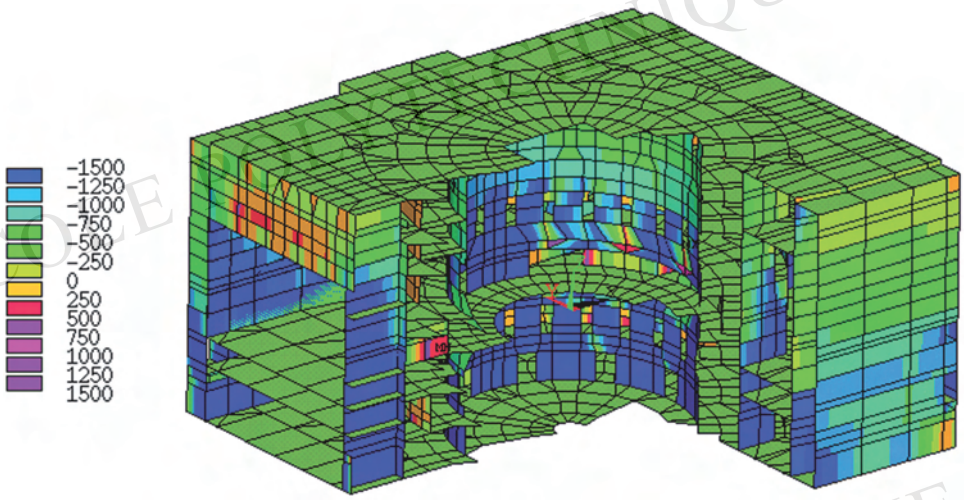


Figure 12 – Laser Megajoule (LMJ) : représentation de la composante σ_{zz} du tenseur des contraintes sous poids propre dans le hall d'expériences. (Logiciel ANSYS ; document communiqué par Géodynamique et structure)

5 État initial naturel, équilibre isotherme

5.1 Expressions de l'énergie élastique

Comme on l'a déjà rappelé, tout problème d'équilibre thermoélastique peut être ramené, par changement de variables et transformation des sollicitations, à un problème d'équilibre isotherme à partir de l'état initial naturel. Ceci justifie un examen plus précis de ce cas, mettant en évidence les résultats particuliers qui le concernent. Une fois ces propriétés établies, on n'oubliera pas qu'elles ne sont valables que sous les hypothèses spécifiées et que le report au problème général se fait à travers les formules de transformation données au chapitre VIII (§ 3.5 et 4.3).

On suppose donc désormais que le problème d'équilibre élastique étudié est ***isotherme*** à partir de l'***état initial de référence naturel*** : $\tau = 0$ et $\underline{\underline{\sigma}}^0 = 0$ dans la loi de comportement (1.3) qui devient :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{5.1}$$

inversée en (1.21) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} : \underline{\underline{\sigma}} \, . \tag{5.2}$$

Les expressions (1.18) et (1.24) des potentiels $\rho\psi$ et $\rho\psi^*$ s'écrivent alors :

$$\rho\psi\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) = \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{5.3}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

$$\rho\psi^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\sigma}}\,. \tag{5.4}$$

qui, conformément au choix fait au paragraphe 1.6, sont nulles dans l'état initial.

Pour l'application des principes de minimum (2.14) et (3.12) les fonctionnelles $W(\underline{\xi}')$, énergie élastique de déformation d'un champ $\underline{\xi}'$, et $W^*(\underline{\underline{\sigma}}')$, énergie élastique de contrainte d'un champ $\underline{\underline{\sigma}}'$, prennent les formes simples :

$$W(\underline{\xi}') = \frac{1}{2}\int_\Omega (\underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}')\,\mathrm{d}\Omega\,, \tag{5.5}$$

$$W^*(\underline{\underline{\sigma}}') = \frac{1}{2}\int_\Omega (\underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\sigma}}')\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{5.6}$$

En particulier pour le matériau isotrope :

$$\boxed{\begin{aligned} W(\underline{\xi}') &= \int_\Omega \Big(\frac{\lambda}{2}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}')^2 + \mu\,\mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\varepsilon}}')^2\Big)\,\mathrm{d}\Omega \\ W(\underline{\xi}') &= \int_\Omega \frac{E}{2(1+\nu)}\Big(\frac{\nu}{1-2\,\nu}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}')^2 + \mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\varepsilon}}')^2\Big)\,\mathrm{d}\Omega \end{aligned}} \tag{5.7}$$

et

$$\boxed{\begin{aligned} W^*(\underline{\underline{\sigma}}') &= \int_\Omega \Big(\frac{1+\nu}{2\,E}\,\mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\sigma}}')^2 - \frac{\nu}{2\,E}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}')^2\Big)\,\mathrm{d}\Omega \\ W^*(\underline{\underline{\sigma}}') &= \int_\Omega \frac{1}{4\,\mu}\Big(\mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\sigma}}')^2 - \frac{\lambda}{3\,\lambda+2\,\mu}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}')^2\Big)\,\mathrm{d}\Omega \end{aligned}} \tag{5.8}$$

Il est commode pour certaines applications, d'utiliser les expressions de $W(\underline{\xi}')$ et $W^*(\underline{\underline{\sigma}}')$ obtenues en introduisant les déviateurs $\underline{\underline{\varepsilon}}'^{\mathrm{d}}$ de $\underline{\underline{\varepsilon}}'$ et $\underline{\underline{s}}'$ de $\underline{\underline{\sigma}}'$ définis comme au chapitre VII (§ 5.4) :

$$\left\{\begin{array}{ll} \underline{\underline{\varepsilon}}'^{\mathrm{d}} & = \underline{\underline{\varepsilon}}' - (\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}'/3)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} \\ \underline{\underline{s}}' & = \underline{\underline{\sigma}}' - (\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}'/3)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} \end{array}\right. \tag{5.9}$$

Il vient ainsi :

$$W(\underline{\xi}') = \int_\Omega \Big(\frac{E}{6(1-2\,\nu)}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}')^2 + \frac{E}{2(1+\nu)}\,\mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\varepsilon}}'_{\mathrm{d}})^2\Big)\,\mathrm{d}\Omega \tag{5.10}$$

$$W(\underline{\xi}') = \int_\Omega \Big(\frac{3\lambda+2\mu}{6}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}')^2 + \mu\,\mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\varepsilon}}'_{\mathrm{d}})^2\Big)\,\mathrm{d}\Omega$$

et

$$W^*(\underline{\underline{\sigma}}') = \int_\Omega \Big(\frac{(1-2\,\nu)}{6\,E}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}')^2 + \frac{1+\nu}{2\,E}\,\mathrm{tr}\ (\underline{\underline{s}}')^2\Big)\,\mathrm{d}\Omega \tag{5.11}$$

$$W^*(\underline{\underline{\sigma}}') = \int_\Omega \Big(\frac{1}{6(3\lambda+2\,\mu)}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}')^2 + \frac{1}{4\mu}\mathrm{tr}\ (\underline{\underline{s}}')^2\Big)\,\mathrm{d}\Omega\,.$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

5.2 Formule de Clapeyron

Le rapprochement des formules (5.1) à (5.4) met en évidence que si l'on considère un tenseur de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et un tenseur de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ ***liés par la loi de comportement élastique*** (5.1 ou 5.2) les valeurs de la densité d'énergie élastique de déformation $\rho\psi(\underline{\underline{\varepsilon}})$ et de la densité d'énergie élastique de contrainte $\rho\psi^*(\underline{\underline{\sigma}})$ qui leur correspondent sont égales entre elles. Leur valeur commune a l'expression remarquable :

$$\rho\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \rho\psi^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{si (5.1) ou (5.2)} \,. \tag{5.12}$$

L'égalité (5.12) s'applique en chaque point du système étudié si et seulement si $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ et $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ y sont ***liés par la loi de comportement*** (5.1 ou 5.2).

En particulier, en désignant par $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\xi}, \underline{\underline{\varepsilon}})$ une solution du problème d'équilibre élastique du système, l'énergie élastique de déformation du champ $\underline{\xi}$ solution est

$$W(\underline{\xi}) = \int_\Omega \rho\psi(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\sigma}}\,\mathrm{d}\Omega \tag{5.13}$$

tandis que l'énergie élastique de contrainte du champ $\underline{\underline{\sigma}}$ solution est

$$W^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \int_\Omega \rho\psi^*(\underline{\underline{\sigma}})\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\sigma}}\,\mathrm{d}\Omega \,. \tag{5.14}$$

Ainsi, pour toute solution $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\xi})$ ***du problème d'équilibre élastique, l'énergie élastique*** $W(\underline{\xi})$ ***du champ de déplacement est égale à l'énergie élastique*** $W^*(\underline{\underline{\sigma}})$ ***du champ de contrainte. C'est par définition, l'énergie élastique du système dans cet état d'équilibre.***

De plus, en appliquant le théorème des travaux virtuels (1.10) aux champs $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\xi}$ on transforme le dernier terme de (5.13) et (5.14) et on obtient :

$$W(\underline{\xi}) = W^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega \rho\,\underline{F}\cdot\underline{\xi}\,\mathrm{d}\Omega + \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^{\mathrm{d}}\,\xi_i\,\mathrm{d}a + \sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^{\mathrm{d}}\,\sigma_{ij}\,n_j\,\mathrm{d}a\Big) \tag{5.15}$$

soit encore :

$$\boxed{W(\underline{\xi}) = W^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho\,\underline{F}\cdot\underline{\xi}\,\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \underline{\xi}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}a} \tag{5.16}$$

La formule (5.16) est connue sous le nom de ***formule de Clapeyron***[(10)]. Elle s'exprime par l'énoncé suivant, qui n'est valable, on le rappelle, que pour un équilibre élastique isotherme à partir de l'état initial de référence naturel :

[(10)] E. Clapeyron (1799-1864).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L'énergie élastique du système dans un état d'équilibre élastique est égale à la* MOITIÉ *du travail virtuel, dans le champ de déplacement $\underline{\xi}$, de* TOUS *les efforts extérieurs (équilibrés par le champ $\underline{\underline{\sigma}}$), qui s'exercent sur le système dans cet état d'équilibre.

On peut, compte tenu de (5.15), expliciter la suite des inégalités de l'encadrement énergétique (3.24) qui devient :

$$\text{(5.17)}\qquad \left\{\begin{array}{l} \forall\, \underline{\xi}' \in \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\,\xi_i^{\mathrm{d}})\,, \quad \forall\, \underline{\underline{\sigma}}' \in \mathbb{S}\,(\underline{F}\,,\,S_{T_i}\,,T_i^{\mathrm{d}})\,, \\ -W^*(\tau,\underline{\underline{\sigma}}') + \Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}') \leq \\ \quad \leq -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega \rho\,\underline{F}\cdot\underline{\xi}\,\mathrm{d}\Omega - \frac{1}{2}\sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^{\mathrm{d}}\,\xi_i\,\mathrm{d}a + \frac{1}{2}\sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^{\mathrm{d}}\sigma_{ij}\,n_j\,\mathrm{d}a \\ \quad\quad \leq W(\tau,\underline{\xi}') - \Phi(\underline{\xi}')\,. \end{array}\right.$$

En rapprochant (5.17) des définitions (2.11) et (3.9) de $\Phi(\underline{\xi})$ et $\Phi^*(\underline{\underline{\sigma}})$ on identifie le terme médian de cette double inégalité. Il vient :

$$\text{(5.18)}\qquad \left\{\begin{array}{l} \forall\, \underline{\xi}' \in \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\,\xi_i^{\mathrm{d}})\,, \quad \forall\, \underline{\underline{\sigma}}' \in \mathbb{S}\,(\underline{F}\,,\,S_{T_i}\,,T_i^{\mathrm{d}})\,, \\ -W^*(\tau,\underline{\underline{\sigma}}') + \Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}') \leq \dfrac{1}{2}\left[\Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}) - \Phi(\underline{\xi})\right] \leq W(\tau,\underline{\xi}') - \Phi(\underline{\xi}')\,. \end{array}\right.$$

Lorsque les données du problème portent exclusivement sur les déplacements au contour ou exclusivement sur les efforts surfaciques au contour et ne dépendent que d'un paramètre scalaire, cette formule d'encadrement permet notamment d'évaluer le module apparent du système sous ce type de sollicitation. On en verra un exemple au paragraphe suivant.

La figure 13 rassemble les résultats obtenus sous les hypothèses énoncées au paragraphe 5.1.

5.3 Exemple d'application : module apparent d'un cylindre hétérogène

Position du problème

On considère le problème de la compression simple isotherme d'un cylindre de section S, de hauteur ℓ, parallèle à Ox, entre deux plateaux indéformables parallèles à Oyz (figure 14). On désigne par S_0 et S_ℓ les sections droites d'extrémités du cylindre au contact des plateaux. L'état initial est naturel. Les sollicitations sont les suivantes :

- forces de masse nulles

$$\text{(5.19)}\qquad \underline{F} = 0\,,$$

- surface latérale libre de contrainte

$$\text{(5.20)}\qquad T_i^{\mathrm{d}} = 0 \qquad i = 1,\,2,\,3 \qquad \text{au contour}\,,$$

- conditions aux limites sur les sections d'extrémités : S_0 et S_ℓ sont des surfaces S_{T_i} $(i = 2,\,3)$, et S_{ξ_1} avec

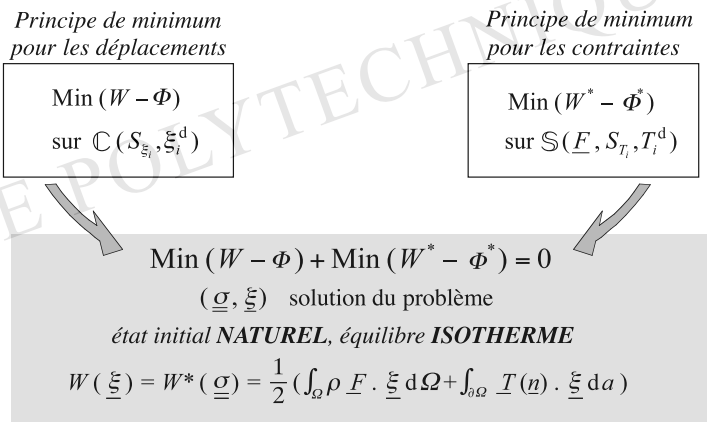


Figure 13 – Minimums de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire et formule de Clapeyron

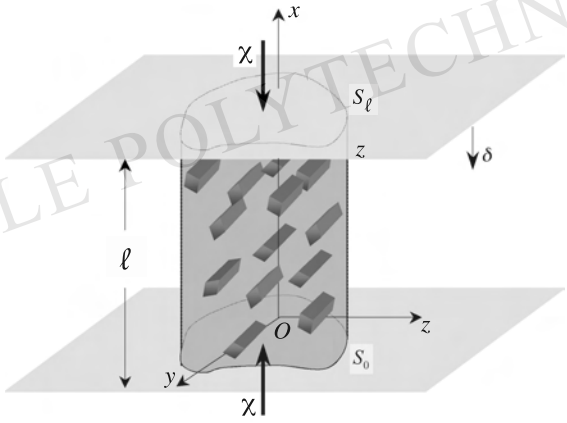


Figure 14 – Compression simple d'un cylindre hétérogène

(5.21) $\quad T_i^{\mathrm{d}} = 0 \quad i = 2,\, 3 \quad$ sur S_0 et S_ℓ

(5.22) $\quad \xi_1^{\mathrm{d}} = 0 \quad$ sur S_0

(5.23) $\quad \xi_1^{\mathrm{d}} = -\delta(\delta > 0) \quad$ sur S_ℓ .

Le matériau constitutif du cylindre est élastique linéaire, isotrope. ***Il n'est pas homogène*** : E et ν, λ et μ sont des fonctions des coordonnées spatiales. L'hétérogénéité peut être forte (cf. chapitre VIII, § 4.2) ; $E(\underline{x})$ et $\nu(\underline{x})$, $\lambda(\underline{x})$ et $\mu(\underline{x})$, peuvent être discontinus : il s'agit alors typiquement d'un matériau composite pour lequel on suppose assurée l'adhérence totale entre les constituants. En outre, des conditions d'intégrabilité pour les fonctions $E(\underline{x})$ et $\nu(\underline{x})$, $\lambda(\underline{x})$ et $\mu(\underline{x})$ sur le domaine Ω occupé par le cylindre apparaîtront implicitement sur les formules d'encadrement établies dans la suite.

On se propose de déterminer, ou d'approcher, la relation existant entre la force de compression $\mathcal{X}$ à exercer au moyen de plateaux et l'enfoncement δ du plateau supérieur.

Cette force de compression, avec les notations $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\xi}, \underline{\underline{\varepsilon}}$ pour les champs solutions, est donnée

par la formule :

$$\mathcal{X} = -\int_{S_\ell} \sigma_{xx}\, \mathrm{d}a \,. \tag{5.24}$$

Par analogie avec le cas du cylindre homogène, on définit le module apparent E_a du cylindre hétérogène par la relation :

$$\frac{\mathcal{X}}{S} = E_\mathrm{a} \frac{\delta}{\ell} \,. \tag{5.25}$$

Compte tenu des données du problème (5.19 à 5.23) et de la définition (5.21), les inégalités de l'encadrement énergétique (5.18) ont pour expression

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \frac{1}{2} \big(\underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) \big)\, \mathrm{d}\Omega - \delta \int_{S_\ell} \sigma'_{xx}\, \mathrm{d}a \le -\frac{\delta}{2} \int_{S_\ell} \sigma_{xx}\, \mathrm{d}a \\ = \frac{1}{2}\, \mathcal{X}\, \delta \le \int_\Omega \frac{1}{2} \big(\underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}'(\underline{x}) \big)\, \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{5.26}$$

et permettront, par l'utilisation de champs de contrainte statiquement admissibles pour le problème avec les données (5.19 à 5.21) et de champs de déplacement cinématiquement admissibles pour le problème avec les données (5.22 et 5.23), d'obtenir des estimations par défaut et par excès de $\mathcal{X}$ à δ donné, c'est-à-dire aussi des estimations par défaut et par excès de E_a.

Estimation par défaut

On prend pour $\underline{\underline{\sigma}}'$ un champ uniaxial homogène de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) = -\sigma'\, \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \qquad \forall\, \underline{x} \in \Omega \tag{5.27}$$

où σ' est un paramètre scalaire. Un tel champ est bien statiquement admissible pour le problème avec les données (5.19 à 5.21) : $\underline{\underline{\sigma}}' \in \mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^\mathrm{d})$. La première inégalité de (5.26) s'écrit alors, compte tenu de l'isotropie du matériau, en introduisant le module de Young et le coefficient de Poisson :

$$-\frac{\sigma'^2}{2} \int_\Omega \frac{1}{E(\underline{x})}\, \mathrm{d}\Omega + \sigma'\, S\, \delta \le \frac{1}{2}\, \mathcal{X}\, \delta \,. \tag{5.28}$$

On note :

$$\left\langle \frac{1}{E} \right\rangle = \frac{1}{\Omega} \int_\Omega \frac{1}{E(\underline{x})}\, \mathrm{d}\Omega \tag{5.29}$$

la moyenne volumique de $\dfrac{1}{E(\underline{x})}$ sur le volume Ω du cylindre. On obtient ainsi l'estimation par défaut

$$\begin{cases} \forall\, \sigma' > 0 \,, \\ -\sigma'^2 \left\langle \dfrac{1}{E} \right\rangle \dfrac{\ell}{\delta} + 2\, \sigma' < \dfrac{\mathcal{X}}{S} \end{cases} \tag{5.30}$$

dont l'optimum correspond à

$$\sigma' = \frac{\delta}{\ell} \Big/ \left\langle \frac{1}{E} \right\rangle \tag{5.31}$$

et donne l'estimation :

$$\frac{\delta}{\ell} \Big/ \left\langle \frac{1}{E} \right\rangle \le \frac{\mathcal{X}}{S} \,, \tag{5.32}$$

soit, pour le module apparent E_a défini par (5.25) :

$$\frac{1}{\langle 1/E \rangle} \le E_\mathrm{a} \,. \tag{5.33}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Estimation par excès

On prend pour $\underline{\xi}'$ un champ de déplacement de la forme :

$$\underline{\xi}'(\underline{x}) = \frac{\delta}{\ell}(\alpha\, y\, \underline{e}_y + \alpha\, z\, \underline{e}_z - x\, \underline{e}_x) \tag{5.34}$$

où α est un paramètre scalaire. Un tel champ est bien cinématiquement admissible pour le problème avec les données (5.22 et 5.23) : $\underline{\xi}' \in \mathbb{C}(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}})$. La dernière inégalité de (5.26) s'écrit alors, avec les coefficients d'élasticité $\lambda(\underline{x})$ et $\mu(\underline{x})$:

$$\frac{1}{2}\,\mathcal{X}\,\delta \leq \left(\frac{\delta}{\ell}\right)^2 \int_\Omega \Big(\frac{\lambda(\underline{x})}{2}(1-2\,\alpha)^2 + \mu(\underline{x})(1+2\,\alpha^2)\Big)\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{5.35}$$

En introduisant les moyennes volumiques de $\lambda(\underline{x})$ et $\mu(\underline{x})$ sur Ω, on obtient l'estimation par excès :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\,\alpha\,, \\ \dfrac{\mathcal{X}}{S} \leq \dfrac{\delta}{\ell}\,\Big\langle \lambda + 2\,\mu - 4\,\alpha\,\lambda + 4\,\alpha^2\,(\lambda+\mu)\Big\rangle \end{array}\right. \tag{5.36}$$

dont l'optimum, atteint pour $\alpha = \langle\lambda\rangle/2\langle\lambda+\mu\rangle$, est

$$\frac{\mathcal{X}}{S} \leq \frac{\delta}{\ell}\,\frac{\langle\mu\rangle\,\langle 3\lambda+2\mu\rangle}{\langle\lambda+\mu\rangle} \tag{5.37}$$

c'est-à-dire :

$$E_{\mathrm{a}} \leq \frac{\langle\mu\rangle\,\langle 3\lambda+2\mu\rangle}{\langle\lambda+\mu\rangle}\,. \tag{5.38}$$

Commentaires

Les résultats ainsi obtenus par l'utilisation de champs de contrainte et de déplacement simples sont résumés par l'encadrement du module apparent E_{a} obtenu en rapprochant (5.33) et (5.38) :

$$\frac{1}{\langle 1/E\rangle} \leq E_{\mathrm{a}} \leq \frac{\langle\mu\rangle\,\langle 3\lambda+2\mu\rangle}{\langle\lambda+\mu\rangle} \tag{5.39}$$

La borne inférieure de cet encadrement classique porte le nom de « borne de Reuss » et la borne supérieure est la « borne de Voigt ».

On remarque que, dans le cas du matériau homogène, les deux bornes de cet encadrement sont égales entre elles :

$$E = E_{\mathrm{a}} = \frac{\mu\,(3\,\lambda + 2\,\mu)}{\lambda+\mu} \tag{5.40}$$

on retrouve d'ailleurs, pour σ' et pour α, les valeurs connues dans la solution du problème de compression simple étudié au chapitre IX (§ 2.2) :

$$\sigma' = E\,\frac{\delta}{\ell} \quad , \quad \alpha = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} = \nu\,. \tag{5.41}$$

5.4 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

On considère, à partir de l'état d'équilibre initial naturel, deux états d'équilibre isotherme distincts d'un ***même système*** (repérés respectivement par les indices supérieurs 1 et 2) :

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- l'état d'équilibre 1 dans lequel la solution, définie par les champs $\underline{\underline{\sigma}}^1, \underline{\xi}^1, \underline{\underline{\varepsilon}}^1$, correspond à des forces de masse $\underline{F}^1$ dans Ω et à des efforts surfaciques $\underline{T}^1(\underline{n})$ sur $\partial\Omega$ vérifiant :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^1 + \rho\, \underline{F}^1 = 0 \qquad \text{dans } \Omega \tag{5.42}$$

$$\underline{T}^1(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}^1 \cdot \underline{n} \qquad \text{sur } \partial\Omega\ ; \tag{5.43}$$

- l'état d'équilibre 2, avec les grandeurs et formules homologues (au changement d'indice près).

Par application du théorème des travaux virtuels (1.10) au champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^1$ en prenant pour champ de déplacement virtuel le champ $\underline{\xi}^2$ on obtient :

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^1 : \underline{\underline{\varepsilon}}^2 \,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \rho\, \underline{F}^1 \cdot \underline{\xi}^2 \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T}^1(\underline{n}) \cdot \underline{\xi}^2 \,\mathrm{d}a\ ; \tag{5.44}$$

de même, avec les champs $\underline{\underline{\sigma}}^2$ et $\underline{\xi}^1$:

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^2 : \underline{\underline{\varepsilon}}^1 \,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \rho\, \underline{F}^2 \cdot \underline{\xi}^1 \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T}^2(\underline{n}) \cdot \underline{\xi}^1 \,\mathrm{d}a\ . \tag{5.45}$$

Les premiers membres de ces deux égalités se transforment en utilisant la loi de comportement (5.1), d'où :

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^1 : \underline{\underline{\varepsilon}}^2 \,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}^1 : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^2 \,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^2 : \underline{\underline{\varepsilon}}^1 \,\mathrm{d}\Omega \tag{5.46}$$

qui implique l'égalité des seconds membres de (5.44) et (5.45) :

(5.47)

$$\boxed{\int_\Omega \rho\, \underline{F}^1 \cdot \underline{\xi}^2 \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T}^1(\underline{n}) \cdot \underline{\xi}^2 \,\mathrm{d}a = \int_\Omega \rho\, \underline{F}^2 \cdot \underline{\xi}^1 \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T}^2(\underline{n}) \cdot \underline{\xi}^1 \,\mathrm{d}a}$$

Ce résultat est connu sous les nom de ***théorème de réciprocité*** ou ***théorème de Maxwell-Betti***. Il est évidemment directement lié à la forme quadratique des potentiels $\rho\psi(\underline{\underline{\varepsilon}})$ et $\rho\psi^*(\underline{\underline{\omega}})$. On l'énonce sous la forme suivante :

Le travail virtuel du système de forces extérieures $\underline{F}^1$ sur Ω et $\underline{T}^1(\underline{n})$ sur $\partial\Omega$, dans le champ de déplacement solution du problème d'équilibre élastique sous le système de forces extérieures $\underline{F}^2$ sur Ω et $\underline{T}^2(\underline{n})$ sur $\partial\Omega$ est égal au travail virtuel du système de forces extérieures $\underline{F}^2$ sur Ω et $\underline{T}^2(\underline{n})$ sur $\Omega\partial$, dans le champ de déplacement solution du problème d'équilibre élastique sous le système de forces extérieures $\underline{F}^1$ sur Ω et $\underline{T}^1(\underline{n})$ sur $\partial\Omega$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

6 Champs d'autocontrainte. Théorème du potentiel minimum

6.1 Champs d'autocontrainte

Champs d'autocontrainte pour le problème

Le concept de ***champ d'autocontrainte pour le problème*** a été introduit au chapitre VIII (§ 3.4). Il s'agit des champs de contrainte définis sur Ω, continus par morceaux et continûment différentiables par morceaux, qui sont en équilibre avec des valeurs nulles des données en efforts du problème, c'est-à-dire avec

$$\underline{F} = 0 \ \text{ sur } \Omega \ , \ T_i^{\mathrm{d}} = 0 \ \text{ sur } S_{T_i} \ . \tag{6.1}$$

En d'autres termes, avec les notations actuelles, ces champs sont, par définition, les éléments de $\mathbb{S}\,(\underline{0}\,, S_{T_i}\,, 0)$. On vérifie aisément que ce convexe est, en fait, un espace vectoriel que l'on notera $\mathbb{A}\,(S_{T_i})$:

$$\mathbb{A}\,(S_{T_i}) \equiv \mathbb{S}\,(\underline{0}\,, S_{T_i}\,, 0) \ . \tag{6.2}$$

C'est l'espace vectoriel des champs d'autocontrainte pour le problème, où le préfixe « auto » est associé à « problème » pour rappeler que dans cette définition on a annulé les ***données statiques du problème*** (1.1 à 1.7). On dit aussi qu'un tel champ $\underline{\underline{\sigma}}^a$ est ***autoéquilibré pour le problème***.

La définition duale de $\mathbb{A}\,(S_{T_i})$ résulte du principe des puissances virtuelles. On l'écrira ici avec les notations du théorème des travaux virtuels (1.10)

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} \in \mathbb{A}(S_{T_i}) \ , \ \forall \hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{A}C(S_{\xi_i}, 0) \ , \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}\, \mathrm{d}\Omega = 0 \ . \end{array} \right. \tag{6.3}$$

Champs d'autocontrainte pour le système

On remarque qu'en conséquence de la définition ci-dessus, les efforts au contour équilibrant un champ d'autocontrainte pour le problème ***ne sont pas nécessairement nuls sur*** S_{ξ_i} :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} \in \mathbb{A}(S_{T_i}) \equiv \mathbb{S}(\underline{0}, S_{T_i}, O) \quad \not\Rightarrow \quad \sigma_{ij}^{\mathrm{a}} n_j = 0 \quad \text{sur} \quad S_{\xi_i} \ . \tag{6.4}$$

On définit les ***champs d'autocontrainte pour le système*** : ce sont les champs de contrainte définis sur Ω, continus par morceaux et continûment différentiables par morceaux, qui sont en équilibre avec des valeurs nulles de tous les efforts extérieurs sur Ω et sur $\partial\Omega$; soit

$$\underline{F} = 0 \ \text{ sur } \ \Omega \ , \ \underline{T} = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \ . \tag{6.5}$$

Ces champs engendrent l'espace vectoriel $\mathbb{A}(\partial\Omega)$:

$$\mathbb{A}(\partial\Omega) \equiv \mathbb{S}(\underline{0}, \partial\Omega, \underline{0}) \tag{6.6}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

et l'on a évidemment

$$A(\partial\Omega) \subset \mathbb{A}(S_{T_i}) \,. \tag{6.7}$$

La définition duale de $\mathbb{A}$ à travers le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$\begin{cases} \forall \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} \in \mathbb{A}(\partial\Omega)\,, \\ \forall \hat{\underline{\xi}} \text{ continu, continûment différentiable par morceaux}\,, \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}\, \mathrm{d}\Omega = 0 \end{cases} \tag{6.8}$$

Il est opportun d'illustrer les définitions (6.2) et (6.6) au moyen de deux exemples de champs de contrainte thermiques comme évoqué au chapitre II (§ 6.4), en se plaçant dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations.

- Le premier exemple concerne un système soumis à un champ de force de masse nul sur Ω et à un champ de force surfacique nul sur $\partial\Omega$ (surface libre de contrainte). Un champ de variation thermique τ est imposé sur Ω qui engendre le champ de déformation thermique $\underline{\underline{\varepsilon}}_\tau = \underline{\underline{\alpha}}\,\tau$ supposé géométriquement incompatible, c'est-à-dire ne satisfaisant pas les conditions de compatibilité de Saint Venant (chapitre II, § 6.2).

  Ceci provoque la mise en place d'un champ de contrainte (thermique) $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}$ tel que la somme du champ de déformation élastique qui lui correspond et du champ $\underline{\underline{\varepsilon}}_\tau$ soit géométriquement compatible :

  $$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} : \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} + \underline{\underline{\varepsilon}}_\tau \quad \text{géométriquement compatible} \,. \tag{6.9}$$

  Le champ $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}$ est un ***champ d'autocontrainte pour le système***. En particulier, les résultats établis dans l'exercice (Ex. VI.12) sont valables pour ce champ et impliquent notamment que la contrainte normale $\underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} \cdot \underline{n}$ sur une facette quelconque dans le système ne peut être uniformément positive ou négative sur Ω.

- Le deuxième exemple est celui de l'exercice (Ex. IX.3), il concerne une barre cylindrique homogène soumise à un champ de force de masse nul sur Ω, dont la surface latérale est libre de contrainte et dont les sections d'extrémité sont bloquées par des parois indéformables lisses. Un champ de variation de température uniforme τ est imposé qui engendre le champ de déformation thermique $\underline{\underline{\varepsilon}}_\tau = \underline{\underline{\alpha}}\,\tau$. Le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}_\tau$ satisfait évidemment les conditions de compatibilité géométrique de Saint Venant ; en revanche, son intégration ne permet pas de satisfaire les conditions aux limites sur les déplacements ce qui provoque la mise en place d'un champ de contrainte (thermique) $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}$ aisément calculable. Le champ $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}$ ***n'est pas*** un champ d'autocontrainte pour le système ; en particulier, les résultats de l'exercice (Ex. VI.12) ne lui sont pas applicables. C'est un ***champ d'autocontrainte pour le problème*** :

  $$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} \notin \mathbb{A}(\partial\Omega) \\ \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} \in \mathbb{A}(S_{T_i})\,. \end{cases} \tag{6.10}$$

Degré d'hyperstaticité, inconnues hyperstatiques

Revenant au problème initial avec les données $\underline{F}$ sur Ω, T_i^{d} sur S_{T_i} et ξ_i^{d} sur S_{ξ_i}, on voit que le convexe $\mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$ a une structure d'espace affine dont $\mathbb{A}(S_{T_i})$ est l'espace vectoriel associé. Si les données statiques sont compatibles avec l'équilibre global du système (cf. § 3.1), $\mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$ n'est pas vide et l'on a :

$$\begin{cases} \forall \underline{\underline{\sigma}}^{*} \text{ fixe dans } \mathbb{S}\,(\underline{F}\,, S_{T_i}\,, T_i^{\mathrm{d}}) \quad , \\ \underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{S}\,(\underline{F}\,, S_{T_i}\,, T_i^{\mathrm{d}}) \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{*} + \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}\,,\ \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} \in \mathbb{A}(S_{T_i})\,. \end{cases} \tag{6.11}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Dans ce cas,

- si $\mathbb{A}(S_{T_i})$ est de dimension nulle, le problème est dit ***isostatique*** ou statiquement déterminé,
- si $\mathbb{A}(S_{T_i})$ est de dimension finie k, le problème est dit hyperstatique et la dimension de $\mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$, égale par définition à la dimension de $\mathbb{A}(S_{T_i})$, est le ***degré d'hyperstaticité du problème***[(11)].

Si les données statiques ne sont pas compatibles avec l'équilibre global du système (cf. § 3.1), $\mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$ est vide : le problème est ***hypostatique***.

En fait, pour le problème (1.1 à 1.7) posé dans le formalisme de la mécanique des milieux continus tridimensionnels classiques, l'espace vectoriel des champs d'autocontrainte $\mathbb{A}\,(S_{T_i})$ est toujours de dimension infinie.

On va néanmoins, dans le suite, expliciter le cas où $\mathbb{A}\,(S_{T_i})$ est de dimension finie k. Ceci permettra notamment de traiter par avance, au changement de notations près, le cas des structures constituées de milieux curvilignes pour lesquelles cette circonstance est la règle (cf. chapitre XI, § 4.5). On verra aussi (§ 6.3) que la formulation obtenue est adaptée pour l'interprétation de certaines méthodes numériques ou analytiques.

Si l'on suppose le degré d'hyperstaticité k fini, ≥ 1 on désigne par $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}_1, \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}_2, \ldots, \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}_k$ une base de $\mathbb{A}\,(S_{T_i})$, et $X_1, \ldots, X_k$ les « coordonnées » scalaires correspondantes. La formule (6.11) devient :

$$(6.12)\qquad \begin{cases} \forall\, \underline{\underline{\sigma}}^* \text{ fixe dans } \mathbb{S}\,(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}}) \quad , \\ \underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{S}\,(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}}) \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^* + X_\ell\, \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}_\ell \, . \end{cases}$$

Les $X_\ell\,(\ell = 1, \ldots, k)$ constituent un système d'***inconnues hyperstatiques*** pour le problème.

On notera :

$$(6.13)\qquad \underline{X} = (X_1, \ldots, X_k) \in \mathbb{R}^k \, .$$

6.2 Minimum de l'énergie complémentaire, théorème du potentiel minimum

Dans l'hypothèse précédente du degré d'hyperstaticité k fini, ≥ 1, on peut substituer l'expression (6.12) dans l'écriture des fonctionnelles W^* et Φ^*. Le champ $\underline{\underline{\sigma}}^*$ étant choisi et fixé dans $\mathbb{S}\,(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$ ainsi que la base dans $\mathbb{A}\,(S_{T_i})$, et le champ τ étant connu, W^* et Φ^* deviennent des ***fonctions*** des k inconnues hyperstatiques :

$$(6.14)\qquad W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}') = \boldsymbol{W}^*(\tau, \underline{X}') \, ,$$

$$(6.15)\qquad \Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}') = \boldsymbol{\Phi}^*\,(\underline{X}') \, .$$

(11) Il résulte évidemment de l'inclusion (6.7) que $\dim(\mathbb{A}) \leq \dim[\mathbb{A}(S_{T_i})]$. Cette inégalité met en évidence le rôle des conditions aux limites.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La stricte convexité de $(W^* - \Phi^*)$ en $\underline{\underline{\sigma}}'$ implique, par la définition (1.13), la stricte convexité de $(W^* - \Phi^*)$ en $\underline{X}'$.

Minimum de l'énergie complémentaire

Le principe de minimum (3.12) s'écrit alors :

$$\boldsymbol{W}^*(\tau, \underline{X}') - \boldsymbol{\Phi}^*(\underline{X}') \qquad \text{Minimale sur } \mathbb{R}^k \,. \tag{6.16}$$

Le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ solution est déterminé par les inconnues hyperstatiques $(X_1, \ldots, X_k) = \underline{X}$, solutions du système de k équations linéaires :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{X}'} (\boldsymbol{W}^* - \boldsymbol{\Phi}^*) = 0 \,. \tag{6.17}$$

Théorème du potentiel minimum

Le principe de minimum ci-dessus prend évidemment une forme encore simplifiée lorsque les ***données sur les déplacements sont nulles***, c'est-à-dire de la forme :

$$\xi_i^{\mathrm{d}} = 0 \qquad \text{sur } S_{\xi_i} \qquad i = 1, 2, 3 \,. \tag{6.18}$$

Les formules précédentes (6.16 et 6.17) s'écrivent alors :

$$\boldsymbol{W}^*(\tau, \underline{X}') \quad \text{Minimale sur } \mathbb{R}^k \tag{6.19}$$

et

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}^*}{\partial \underline{X}'} = 0 \,. \tag{6.20}$$

Ce résultat est connu sous le nom de ***théorème du potentiel minimum*** dans lequel le potentiel n'est autre que l'énergie élastique de contrainte des champs statiquement admissibles pour le problème avec les données $\underline{F}$ sur Ω et T_i^{d} sur S_{T_i}, exprimée en fonction des inconnues hyperstatiques.

6.3 Commentaires

Comme on l'a dit, les problèmes (1.1 à 1.7) ne relèvent pas, en général, de l'application directe des résultats précédents. Toutefois certaines méthodes utilisées pour la mise en œuvre du principe du minimum de l'énergie complémentaire se ramènent, en définitive, à l'application de la formule (6.17) (ou 6.20). On se bornera à en donner deux exemples.

Méthodes numériques de discrétisation

On a évoqué, au paragraphe 4.2, l'utilisation des méthodes numériques pour l'application des principes de minimum. Ainsi, pour la minimisation de l'énergie complémentaire on construit par discrétisation un sous-espace de champs de contrainte statiquement admissibles[12] sur lequel on recherche le minimum de $(\boldsymbol{W}^* - \boldsymbol{\Phi}^*)$: cette

[12] Parfois de façon approchée.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

démarche est représentée par la formule (6.3), dans laquelle les paramètres indépendants introduits par la discrétisation jouent le rôle des inconnues hyperstatiques. Le système (6.17) fournit l'expression analytique de la minimisation correspondante qui est effectuée numériquement.

Sous-structuration

Dans la pratique « manuelle » on peut aussi parfois ramener l'étude du problème posé à la minimisation de l'énergie complémentaire sur un sous-ensemble de $\mathbb{S}\left(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}}\right)$ qui soit de dimension finie.

C'est par exemple le cas lorsque l'on peut décomposer et structurer le problème étudié en un assemblage de problèmes élémentaires dont les solutions sont connues, en introduisant entre ceux-ci un nombre fini de paramètres de liaison du type « forces ». On procède alors à la minimisation de la fonctionnelle $(\boldsymbol{W}^* - \boldsymbol{\Phi}^*)$ par rapport à ces paramètres de liaison, sur le sous-espace de $\mathbb{S}\left(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}}\right)$ dont les champs de contrainte sont engendrés en assemblant les champs solutions des problèmes élémentaires.

La mise en œuvre pratique de ce type d'approche s'effectue par exemple, compte tenu des symétries géométriques et mécaniques,

- en relâchant certaines conditions aux limites en déplacements,
- en décomposant le système étudié en sous-systèmes et en relâchant les conditions de continuité en déplacements correspondantes.

Des paramètres de liaison de type « forces » sont alors introduits, associés aux conditions qui ont été relâchées

- « réactions » pour les conditions aux limites,
- « forces de liaisons » aux interfaces entre sous-systèmes.

Le choix des sous-systèmes constitutifs est fait de façon à conduire pour chacun d'eux à un problème dont la solution est connue en fonction des paramètres de liaison qui les concernent. Il reste à déterminer les valeurs réelles de ces paramètres de liaison en écrivant que les liaisons relâchées sont effectivement réalisées dans la solution du problème.

Le respect des liaisons peut être écrit directement en procédant au calcul explicite des déplacements concernés. On peut aussi le traiter par voie énergétique. En effet les forces de liaison jouent, pour les champs de contrainte ainsi obtenus par assemblage, le rôle d'inconnues hyperstatiques, dont le système (6.17) permet de déterminer les valeurs. Le théorème de Castigliano, démontré dans la suite (§ 8.1), qui interprète les dérivées partielles de l'énergie élastique de contrainte par rapport aux paramètres (inconnues hyperstatiques) en termes de déplacements met clairement en évidence l'équivalence entre ces deux méthodes.

Indépendamment de l'aspect lié au comportement élastique des matériaux constitutifs considérés ici, la démarche que l'on vient de décrire a un caractère général. Elle est mise en œuvre de façon systématique dans la résolution des problèmes hyperstatiques par la ***méthode des forces***, notamment pour les structures : on relâche des liaisons internes et externes et l'on détermine les valeurs réelles des forces de liaison associées en écrivant que les liaisons relâchées sont effectivement réalisées. La pratique de quelques exemples permettra l'appropriation de cette démarche.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

7 Problème paramétré

7.1 Objectifs de l'étude

Les équations (1.1 à 1.7), qui définissent le problème d'équilibre thermoélastique linéarisé, peuvent être structurées en deux groupes : d'une part, les ***équations générales*** (1.1, 1.2, 1.4 à 1.7), indépendantes du comportement du matériau constitutif, dans lesquelles interviennent les données statiques du problème ($\underline{F}\,, T_i^{\mathrm{d}}$ sur S_{T_i}), compatibles avec l'équilibre global du système, et les données en déplacements ou cinématiques (ξ_i^{d} sur S_{ξ_i}) ; d'autre part, l'équation (1.3) qui spécifie le comportement du matériau constitutif.

Cette distinction est apparente sur la figure 2. Elle permet d'envisager, pour un système donné du point de vue géométrique, la famille des problèmes définis par les équations générales dans lesquelles les surfaces S_{T_i} et S_{ξ_i} sont données et invariables, et où les données statiques ($\underline{F}$ et T_i^{d} sur ces S_{T_i}) et cinématiques (ξ_i^{d} sur ces S_{ξ_i}) dépendent linéairement d'un nombre fini de paramètres.

On verra dans la présente section comment il est possible de définir la notion de paramètres de chargement, et d'élargir les concepts de champs de contrainte statiquement admissibles et de champs de déplacement cinématiquement admissibles. Ceci conduira à une nouvelle expression du théorème des travaux virtuels dans laquelle le travail des efforts extérieurs apparaît comme le produit des paramètres de chargement par les paramètres cinématiques associés. Cette analyse est évidemment indépendante du comportement du matériau constitutif.

À partir de ces résultats, la section 8, introduisant le comportement thermoélastique du matériau constitutif, établira les relations énergétiques entre les valeurs des paramètres de chargement et celles des paramètres cinématiques associés dans un état d'équilibre thermoélastique. Ces relations décrivent, au niveau global, le ***comportement du système étudié***.

7.2 Champs statiquement admissibles et champs cinématiquement admissibles pour le problème paramétré

Paramétrages des données

Les surfaces S_{T_i} et S_{ξ_i} , qui interviennent dans l'écriture des conditions aux limites (1.4) et (1.5), étant définies une fois pour toutes, on suppose que les données statiques et cinématiques du problème sont paramétrées de la façon suivante.

- Les données statiques, $\underline{F}$ et T_i^{d} sur S_{T_i} qui sont ***non nulles*** dépendent linéairement de m paramètres scalaires Q_j sous la forme :

$$\text{(7.1)} \qquad \begin{cases} \underline{F}\,(Q_j) \quad , \; T_i^{\mathrm{d}}\,(Q_j)\,, \quad \text{linéaires des } Q_j\ , \\ Q_j \in \mathbb{R}\,,\ j = 1, \ldots, m\ . \end{cases}$$

- Les données cinématiques ξ_i^{d} sur S_{ξ_i} qui sont ***non nulles*** dépendent linéairement de p paramètres scalaires q_j sous la forme :

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

$$\text{(7.2)} \qquad \begin{cases} \xi_i^{\mathrm{d}}\,(q_j)\,, \quad \text{linéaires des } q_j\,, \\ q_j \in \mathbb{R}\,,\ j = (m+1)\,, \ldots,\ (m+p) = n\,. \end{cases}$$

Cela signifie que la donnée des m valeurs des Q_j de (7.1), la donnée des p valeurs des q_j de (7.2) et, s'il y a lieu, la donnée des $\underline{F}\,, T_i^{\mathrm{d}}$ ou ξ_i^{d} imposées nulles définissent les équations générales (1.1, 1.4, 1.5).

Champs statiquement admissibles pour le problème paramétré

Pour chaque « m-uplet » de valeurs des Q_j dans (7.1), l'espace des champs de contrainte statiquement admissibles pour le problème est défini par (1.8), soit $\mathbb{S}\left(\underline{F}\,(Q_j)\,, S_{T_i}\,, T_i^{\mathrm{d}}\,(Q_j)\right)$ que l'on notera aussi :

$$\text{(7.3)} \qquad \mathbb{S}_m(Q_j) = \mathbb{S}\left(\underline{F}\,(Q_j)\,, S_{T_i}\,, T_i^{\mathrm{d}}\,(Q_j)\right)\,.$$

Lorsque les Q_j décrivent $\mathbb{R}^m$, l'espace affine $\mathbb{S}_m\,(Q_j)$ engendre l'ensemble $\mathbb{S}$ de tous les champs statiquement admissibles pour le problème paramétré par les paramètres statiques Q_j :

$$\text{(7.4)} \qquad \mathbb{S} = \cup\,\{\mathbb{S}_m\,(Q_j)\}$$

qui a évidemment une structure d'espace vectoriel.

Cette définition de $\mathbb{S}$ s'exprime aussi de la façon suivante. En désignant par $\underline{\underline{\sigma}}^*$ un champ de $\mathbb{S}$, il existe un « m-uplet » de valeurs des Q_j, soit $Q_j^* = Q_j\,(\underline{\underline{\sigma}}^*)$, tel que :

$$\text{(7.5)} \qquad \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S}_m\,(Q_j^*)\,,$$

et l'application

$$\text{(7.6)} \qquad \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S} \to (Q_1^*\,, \ldots\,, Q_m^*) \in \mathbb{R}^m$$

est linéaire.

Champs cinématiquement admissibles pour le problème paramétré

De la même manière, pour chaque « p-uplet » de valeurs des q_j dans (7.2), l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles pour le problème est défini par (1.9), soit $\mathbb{C}\left(S_{\xi_i}\,, \xi_i^{\mathrm{d}}\,(q_j)\right)$ que l'on notera aussi :

$$\text{(7.7)} \qquad \mathbb{C}_p\,(q_j) = \mathbb{C}\left(S_{\xi_i}\,, \xi_i^{\mathrm{d}}\,(q_j)\right)\,.$$

Lorsque les q_j décrivent $\mathbb{R}^p$, l'espace affine $\mathbb{C}_p\,(q_j)$ engendre l'ensemble $\mathbb{C}$ de tous les champs cinématiquement admissibles pour le problème paramétré par les paramètres cinématiques q_j :

$$\text{(7.8)} \qquad \mathbb{C} = \cup\,\{\mathbb{C}_p\,(q_j)\}$$

qui est, lui aussi, un espace vectoriel.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La définition de $\mathbb{C}$ s'exprime aussi de la façon suivante. En désignant par $\hat{\underline{\xi}}$ un champ de $\mathbb{C}$, il existe un « p-uplet » de valeurs des q_j, soit $\hat{q}_j = q_j\,(\hat{\underline{\xi}})$, tel que :

$$\hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C}_p\,(\hat{q}_j)\,, \tag{7.9}$$

et l'application

$$\hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C} \to (\hat{q}_{m+1}, \ldots, \hat{q}_{m+p} = \hat{q}_n) \in \mathbb{R}^p \tag{7.10}$$

est linéaire.

Théorème des travaux virtuels

Soient alors $\underline{\underline{\sigma}}^*$ et $\hat{\underline{\xi}}$ deux champs quelconques de $\mathbb{S}$ et $\mathbb{C}$ respectivement. Compte tenu de (7.1, 7.3, 7.4, 7.7, 7.8) le théorème des travaux virtuels (1.10) s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S}\,,\ \forall \hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C}\,, \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^* : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \rho\,\underline{F}\,(Q_j^*)\,.\,\hat{\underline{\xi}}\,\mathrm{d}\Omega + \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^{\mathrm{d}}\,(Q_j^*)\,\hat{\xi}_i\,\mathrm{d}a \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^{\mathrm{d}}\,(\hat{q}_j)\,\sigma_{ik}^*\,n_k\,\mathrm{d}a\,. \end{array}\right. \tag{7.11}$$

On remarque qu'au second membre de (7.11) les termes où interviennent les données $\underline{F}$, T_i^{d} et $\underline{\xi}_i^{\mathrm{d}}$ nulles (s'il y a lieu) ont évidemment disparu dans l'explicitation du théorème des travaux virtuels (1.10). Ainsi les deux premiers termes de ce second membre sont linéaires en $\hat{\underline{\xi}}$; ils sont aussi linéaires en fonction des Q_j^* en raison de (7.1). Le dernier terme est linéaire en $\underline{\underline{\sigma}}^*$; il est aussi linéaire en fonction des $\hat{q}_j$ en raison de (7.2).

Il en résulte que les deux premiers termes du second membre de (7.11) peuvent se mettre sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, \hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C}\,, \\ \displaystyle\int_\Omega \rho\,\underline{F}\,(Q_j^*)\,.\,\hat{\underline{\xi}}\,\mathrm{d}\Omega + \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^{\mathrm{d}}\,(Q_j^*)\,\hat{\xi}_i\,\mathrm{d}a = \sum_{j=1}^m Q_j^*\,\hat{q}_j\,, \end{array}\right. \tag{7.12}$$

qui détermine les valeurs des m cofacteurs scalaires $\hat{q}_j$ des Q_j^*, et l'application

$$\hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C} \to (\hat{q}_1\,, \ldots,\, \hat{q}_m) \in \mathbb{R}^m \tag{7.13}$$

est linéaire.

De la même façon le dernier terme du second membre de (7.11) s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S}\,, \\ \displaystyle\sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^{\mathrm{d}}\,(\hat{q}_j)\sigma_{ik}^*\,n_k\,\mathrm{d}a = \sum_{j=m+1}^n Q_j^*\,\hat{q}_j\,, \end{array}\right. \tag{7.14}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

qui détermine les valeurs des p cofacteurs scalaires Q_j^* des $\hat{q}_j$, et l'application

$$\underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S} \to (Q_{m+1}^*, \dots, Q_{m+p}^* = Q_n^*) \in \mathbb{R}^p \tag{7.15}$$

est linéaire.

On obtient ainsi l'expression du ***theorème des travaux virtuels***

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall\, \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S}\,,\ \forall\, \hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C}\,, \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^* : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}\, \mathrm{d}\Omega = \sum_{j=1}^{n} Q_j^*\, \hat{q}_j = \underline{Q}^* \cdot \underline{\hat{q}} \end{array}} \tag{7.16}$$

dans laquelle la correspondance

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S} \to \underline{Q}^* = \underline{Q}\,(\underline{\underline{\sigma}}^*) \in \mathbb{R}^n \\ \text{définie par (7.6) et (7.15)}\,, \end{array} \right. \tag{7.17}$$

et la correspondance

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C} \to \underline{\hat{q}} = \underline{q}\,(\hat{\underline{\xi}}) \in \mathbb{R}^n \\ \text{définie par (7.10) et (7.13)}\,, \end{array} \right. \tag{7.18}$$

sont linéaires.

Les n paramètres Q_j^* , composantes de $\underline{Q}^* \in \mathbb{R}^n$, sont les ***paramètres de chargement*** du problème. Les n paramètres $\hat{q}_j$, composantes de $\underline{\hat{q}} \in \mathbb{R}^n$, sont les ***paramètres cinématiques*** ou paramètres de déformation associés.

On peut remarquer que les applications (7.17) et (7.18) ne sont pas bijectives. Ainsi, le noyau de (7.18) est le sous-espace vectoriel des champs $\hat{\underline{\xi}}$ de $\mathbb{C}$ tels que

$$\forall\, \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S}\,,\ \int_\Omega (\underline{\underline{\sigma}}^* : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}})\, \mathrm{d}\Omega = 0\,. \tag{7.19}$$

Il contient, en particulier, les champs de déplacement qui, dans $\mathbb{C}$, rigidifient le système.

L'étude du noyau de l'application (7.17) fait l'objet du paragraphe suivant.

7.3 Champs d'autocontrainte pour le problème paramétré

Pour un problème défini par un « m-uplet » de valeurs des $Q_j\,, (j = 1\,, \dots\,, m)\,,$ l'espace vectoriel des champs d'autocontrainte $\mathbb{A}(S_{T_i})$ défini par (6.2) est l'ensemble des champs de contrainte statiquement admissibles pour le problème défini par les valeurs nulles de ce « m-uplet » pour les $Q_j, (j = 1\,, \dots\,, m)$, et s'il y a lieu, par les données $\underline{F}$ et T_i^{d} nulles :

$$\mathbb{A}\,(S_{T_i}) \equiv \mathbb{S}_m\,(0)\,. \tag{7.20}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On remarquera que pour ces champs, les valeurs des autres Q_j , $(j = (m+1), \ldots, (m+p) = n)$, définis par (7.15) ne sont pas nécessairement nulles. Autrement dit :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} \in \mathbb{A}\,(S_{T_i}) \equiv \mathbb{S}_m\,(0) \not\Rightarrow \underline{Q}\,(\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}) = 0 \tag{7.21}$$

et la définition de $\mathbb{A}\,(S_{T_i})$, qui explicite (6.3) pour le problème paramétré, s'écrit ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} \in \mathbb{A}(S_{T_i}) \ , \ \forall \hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C}_p(0) \\ \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}\, \mathrm{d}\Omega = 0 \ . \end{array} \right. \tag{7.22}$$

Par définition, le noyau de l'application linéaire (7.17) est l'espace vectoriel $\mathbb{A}$ constitué des champs $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}$ tels que, dans (7.16) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} \in \mathbb{A} \ , \ \forall \hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C} \ , \\ \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}\, \mathrm{d}\Omega = 0 \ . \end{array} \right. \tag{7.23}$$

Il s'agit du sous-espace de $\mathbb{A}(S_{T_i})$ constitué des champs $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}$ pour lesquels ***tous*** les paramètres $Q_j, (j = 1, \ldots, n)$, sont nuls :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} \in \mathbb{A} \ \Leftrightarrow \ \underline{Q}(\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}) = 0 \ . \tag{7.24}$$

On remarque que la définition (7.23) est analogue à la définition duale (6.8) de l'espace vectoriel des champs d'autocontrainte pour le système mais ne lui est pas identique. En fait on a les inclusions :

$$\mathbb{A}\,(\partial\Omega) \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{A}(S_{T_i}) \ . \tag{7.25}$$

7.4 Exemples de problèmes paramétrés

Traction-compression d'une barre cylindrique

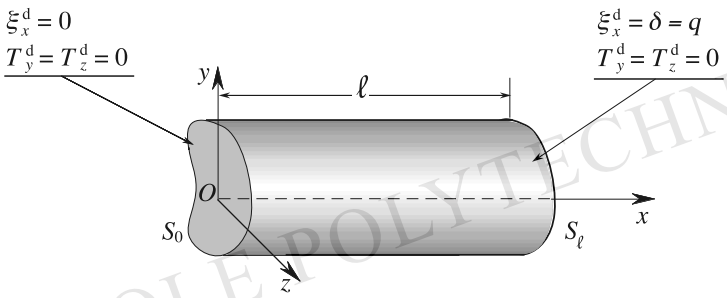


Figure 15 – Traction-compression d'une barre cylindrique : paramétrage des données

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

♦ *Paramétrage des données*

Le problème de la traction-compression d'une barre cylindrique a été étudié au chapitre IX (§ 2.1) ; les données sont ici les suivantes :

• forces de masses nulles

$$\underline{F} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{7.26}$$

• surface latérale libre de contrainte

$$\underline{T}^{\mathrm{d}} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega - S_0 - S_\ell \tag{7.27}$$

• données aux extrémités

$$T_y^{\mathrm{d}} = 0 \ , \ T_z^{\mathrm{d}} = 0 \quad \text{sur } S_0 \text{ et } S_\ell \tag{7.28}$$

$$\xi_x^{\mathrm{d}} = 0 \quad \text{sur } S_0 \ , \ \xi_x^{\mathrm{d}} = \delta \quad \text{sur } S_\ell \ . \tag{7.29}$$

En supposant que la donnée δ est un paramètre (figure 15) on définit une classe de problèmes dont les données satisfont aux hypothèses du paragraphe 7.2, et l'on pose :

$$\delta = q \ . \tag{7.30}$$

♦ *Champs statiquement admissibles et champs cinématiquement admissibles*

Les espaces vectoriels $\mathbb{S}$ et $\mathbb{C}$ sont définis par[13] :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^* = 0 & \text{dans } \Omega \\ [\![\underline{\underline{\sigma}}^*]\!] \cdot \underline{n} = 0 & \text{sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}^*} \\ \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega - S_0 - S_\ell \\ \sigma_{xy}^* = \sigma_{xz}^* = 0 & \text{sur } S_0 \text{ et } S_\ell \end{cases} \tag{7.31}$$

$$\hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\xi}_x = 0 & \text{sur } S_0 \\ \hat{\xi}_x = \hat{q} & \text{sur } S_\ell \end{cases} \tag{7.32}$$

♦ *Théorème des travaux virtuels*

Le théorème des travaux virtuels (1.10) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \forall\, \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S} \ , \ \forall \hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C} \ , \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^* : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} \, \mathrm{d}\Omega = \int_{S_\ell} \hat{q}\, \sigma_{xx}^* \, \mathrm{d}a = Q^* \hat{q} \end{cases} \tag{7.33}$$

homologue de (7.16) où le ***paramètre de chargement*** Q^* est défini par

$$\underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S} \to Q^* = \int_{S_\ell} \sigma_{xx}^* \, \mathrm{d}a \ , \tag{7.34}$$

qui explicite pour ce problème la correspondance linéaire (7.17).

[13] Les conditions de continuité et de différentiabilité sont désormais sous-entendues.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

♦ *Champs d'autocontrainte*

Le paramétrage de ce problème ne concerne que les données cinématiques. Les données statiques sont toutes nulles. La comparaison des définitions duales (7.16) et (7.22) de $\mathbb{S}$ et de $\mathbb{A}\,(S_{T_i})$ montre que ces deux espaces sont ici identiques :

$$\mathbb{A}\,(S_{T_i}) \equiv \mathbb{S}\ . \tag{7.35}$$

Par (7.23) on voit que $\mathbb{A}$ est le sous-espace de $\mathbb{A}\,(S_{T_i}) = \mathbb{S}$ dont les champs de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{\rm a}$ vérifient en outre la condition :

$$Q(\underline{\underline{\sigma}}^{\rm a}) = \int_{S_\ell} \sigma^{\rm a}_{xx}\,{\rm d}a = 0\ . \tag{7.36}$$

Flexion d'une barre cylindrique

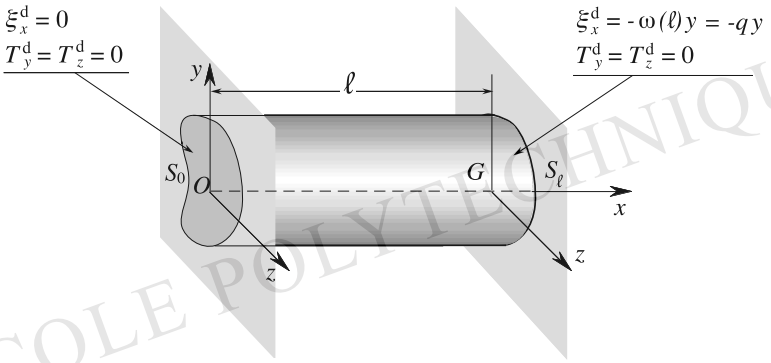


Figure 16 – Flexion circulaire d'une barre cylindrique : paramétrage des données

♦ *Paramétrage des données*

On reprend le problème de la flexion circulaire d'une barre cylindrique étudié au chapitre IX (§ 3.3) en le paramétrant de la façon suivante. Les données sont :

- forces de masse nulles :

$$\underline{F} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{7.37}$$

- surface latérale libre de contrainte :

$$\underline{T}^{\rm d} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega - S_0 - S_\ell \tag{7.38}$$

- données aux extrémités

$$T^{\rm d}_y = T^{\rm d}_z = 0 \quad \text{sur } S_0 \text{ et } S_\ell \tag{7.39}$$

$$\xi^{\rm d}_x = 0 \text{ sur } S_0\ ,\ \xi^{\rm d}_x = -\omega(\ell)\,y \text{ sur } S_\ell\ , \tag{7.40}$$

où $\omega\,(\ell)$ est le paramètre cinématique du problème (figure 16) :

$$\omega\,(\ell) = q\ . \tag{7.41}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

♦ *Théorème des travaux virtuels*

Les définitions des espaces vectoriels $\mathbb{S}$ et $\mathbb{C}$ des champs statiquement admissibles ou cinématiquement admissibles sont évidentes, semblables à celles du cas précédent :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^* = 0 & \text{dans } \Omega \\ [\![\underline{\underline{\sigma}}^*]\!] . \underline{n} = 0 & \text{sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}^*} \\ \underline{\underline{\sigma}}^* . \underline{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega - S_0 - S_\ell \\ \sigma^*_{xy} = \sigma^*_{xz} = 0 & \text{sur } S_0 \text{ et } S_\ell \end{cases} \tag{7.42}$$

$$\hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{S} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\xi}_x = 0 & \text{sur } S_0 \\ \hat{\xi}_x = -\hat{q}\, y & \text{sur } S_\ell \, . \end{cases} \tag{7.43}$$

Le théorème des travaux virtuels s'écrit :

$$\begin{cases} \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S} \, , \ \forall \hat{\underline{\underline{\xi}}} \in \ \mathbb{C} \, , \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^* : \hat{\underline{\underline{\xi}}} \, \mathrm{d}\Omega = \int_{S_\ell} -\hat{q}\, \ell\, \sigma^*_{xx} \, \mathrm{d}a \end{cases} \tag{7.44}$$

qui fait apparaître le paramètre de chargement Q^* et explicite la correspondance (7.17) :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S} \to Q^* = \int_{S_\ell} -\sigma^*_{xx}\, y \, \mathrm{d}a \, . \tag{7.45}$$

♦ *Champs d'autocontrainte*

De la même façon que dans l'exemple précédent on a

$$\mathbb{A}(S_{T_i}) \equiv \mathbb{S} \, . \tag{7.46}$$

L'espace vectoriel $\mathbb{A}$ est le sous-espace de $\mathbb{A}(S_{T_i})$ dont les champs de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}$ vérifient en outre la condition

$$Q(\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}) = - \int_{S_\ell} \sigma^{\mathrm{a}}_{xx}\, y \, \mathrm{d}a = 0 \, . \tag{7.47}$$

Sphère creuse sous pression

♦ *Paramétrage des données*

Le problème étudié au chapitre IX (section 6) d'une sphère creuse de rayons intérieur r_{i} et extérieur r_{e}, sous pression, peut être posé en paramétrant les données statiques par les valeurs des pressions intérieure et extérieure (figure 17) :

$$p_{\mathrm{i}} = Q_1 \, , \, p_{\mathrm{e}} = Q_2 \, . \tag{7.48}$$

Les données du problème sont ainsi :

- forces de masses nulles

$$\underline{F} = 0 \, , \tag{7.49}$$

- données au contour

$$\begin{cases} \underline{T}^{\mathrm{d}} = Q_1\, \underline{e}_r & \text{sur } \partial\Omega_{\mathrm{i}} \quad (r = r_{\mathrm{i}}) \\ \underline{T}^{\mathrm{d}} = -Q_2\, \underline{e}_r & \text{sur } \partial\Omega_{\mathrm{e}} \quad (r = r_{\mathrm{e}}) \, . \end{cases} \tag{7.50}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

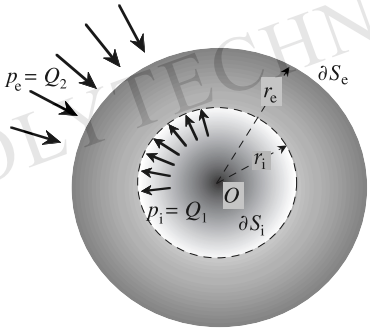


Figure 17 – Sphère creuse sous pression : paramétrage des données

♦ *Théorème des travaux virtuels*

L'espace $\mathbb{S}$ des champs statiquement admissibles est défini par :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^* = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ [\![\underline{\underline{\sigma}}^*]\!] . \underline{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}^*} \\ -\underline{\underline{\sigma}}^* . \underline{e}_r = Q_1^* \underline{e}_r \quad \text{sur } \partial\Omega_i \\ \underline{\underline{\sigma}}^* . \underline{e}_r = -Q_2^* \underline{e}_r \quad \text{sur } \partial\Omega_e \ . \end{cases} \tag{7.51}$$

Les champs $\hat{\underline{\xi}}$ cinématiquement admissibles ne sont astreints à aucune condition autre que les conditions de continuité et de différentiabilité habituelles. Le théorème des travaux virtuels s'écrit :

$$\begin{cases} \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S} \ , \ \forall \hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C} \ , \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^* : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega_i} Q_1^* \hat{\xi}_r \, \mathrm{d}a - \int_{\partial\Omega_e} Q_2^* \hat{\xi}_r \, \mathrm{d}a \end{cases} \tag{7.52}$$

qui met en évidence les paramètres cinématiques $\hat{q}_1$ et $\hat{q}_2$ en dualité avec les paramètres de chargement Q_1^* et Q_2^*. L'application (7.18) est ainsi explicitée :

$$\hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C} \to \hat{\underline{q}} = \underline{q}(\hat{\underline{\xi}}) = \begin{cases} \hat{q}_1 = \displaystyle\int_{\partial\Omega_i} \hat{\xi}_r \, \mathrm{d}a \ , \\ \hat{q}_2 = -\displaystyle\int_{\partial\Omega_e} \hat{\xi}_r \, \mathrm{d}a \ . \end{cases} \tag{7.53}$$

♦ *Champs d'autocontrainte*

En application de (7.22) et (7.23) on a :

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(S_{T_i}) \tag{7.54}$$

défini par

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} \in \mathbb{A} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} = 0 & \text{dans } \Omega \\ [\![\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}]\!] \cdot \underline{n} = 0 & \text{sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}} \\ \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} \cdot \underline{e}_r = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{\mathrm{i}} \\ \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} \cdot \underline{e}_r = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{\mathrm{e}} \, . \end{cases} \tag{7.55}$$

Commentaires

Les quelques exemples présentés ci-dessus illustrent les cas les plus couramment rencontrés dans le paramétrage des problèmes.

Pour les données statiques, il s'agit d'une ou plusieurs distributions de pression uniforme, imposées au contour du système, dont les intensités sont des paramètres, et éventuellement d'un champ de force de masse dont l'intensité est paramétrée. Les paramètres cinématiques correspondants sont obtenus par dualité.

Pour les données cinématiques, il s'agit, sur une ou plusieurs parties du contour du système, de déplacements rigidifiants imposés en totalité ou par certaines de leurs composantes. Les paramètres statiques correspondants sont obtenus par dualité : ce sont des composantes des éléments de réduction des torseurs associés aux distributeurs des déplacements imposés.

8 Théorèmes de l'énergie pour les problèmes paramétrés

8.1 Théorème de Castigliano

Objectif

L'objectif poursuivi ici est d'établir, au niveau global d'un système (souvent d'une structure, cf. chapitre XII), des relations « de comportement » entre les efforts exercés sur ce système et les déplacements observés. Dans ce but on se place dans le cadre des problèmes dépendant d'un nombre fini de paramètres de chargement. Le théorème de Castigliano exprime, dans le cas où le matériau constitutif est thermoélastique, la relation de comportement entre les paramètres de chargement, les paramètres cinématiques et le champ d'écart de température.

♦ Position du problème

On se place dans les hypothèses du paragraphe 7.2 concernant le paramétrage linéaire des données.

On suppose de plus, pour simplifier, que toutes les données cinématiques ξ_i^{d} sur S_{ξ_i} sont nulles :

$$\xi_i^{\mathrm{d}} = 0 \qquad \text{sur } S_{\xi_i} \, . \tag{8.1}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Cela signifie que toutes les données non nulles du problème concernent les efforts et sont définies par tous les paramètres de chargement $Q_j\,(j = 1, \ldots, n)$. Tous les paramètres cinématiques sont définis par dualité par (7.13).

L'état initial de référence est un état non chargé ($\underline{Q} = 0$) et l'état d'autocontrainte initial $\underline{\underline{\sigma}}^0$ est connu. Le champ d'écart de température τ est connu.

Énergie élastique de contrainte du système sous un chargement donné

On se place dans l'hypothèse où le matériau constitutif du système est sans liaisons internes.

Les résultats établis aux paragraphes 2.4 et 3.4 démontrent, pour chaque valeur du chargement $\underline{Q}$, l'unicité du champ de contrainte et du champ de déformation solutions du problème d'équilibre thermoélastique défini par les champs $\underline{\underline{\sigma}}^0$ et τ, et par le chargement $\underline{Q}$. On adoptera ici les notations $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})$ pour désigner ces champs solutions en y rappelant le paramétrage du problème. Ceci permet notamment de définir l'application :

$$\underline{Q} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}) \in \mathbb{S}\,. \tag{8.2}$$

On a aussi, aux paragraphes 2.4 et 3.4, établi l'unicité du champ de déplacement $\underline{\xi}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})$ solution du problème, modulo un éventuel champ de déplacement H.P.P. rigidifiant. Puisque ces champs de déplacement rigidifiant le système font partie du noyau de l'application (7.18), cette indétermination éventuelle est sans incidence sur la valeur du paramètre cinématique associé. Le « déplacement » du système dans la solution du problème d'équilibre thermoélastique est :

$$\underline{q}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}) = \underline{q}(\underline{\xi}^{\mathrm{e}})\,, \tag{8.3}$$

et l'on peut définir l'application :

$$\underline{Q} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \underline{q}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}) \in \mathbb{R}^n\,. \tag{8.4}$$

Considérant alors la fonctionnelle W^* définie par (3.8), on associe, à chaque valeur $\underline{Q}$ du chargement du système, la valeur de cette fonctionnelle dans l'état d'***équilibre thermoélastique*** du système sous ce chargement : celle-ci est calculée avec le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})$ solution du problème d'équilibre thermoélastique. On définit ainsi une fonction de $\underline{Q}$:

$$\forall\, \underline{Q} \in \mathbb{R}^n\,,\ \mathcal{W}^*(\tau, \underline{Q}) = W^*\big(\tau, \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})\big)\,. \tag{8.5}$$

Le théorème de Castigliano met en évidence les propriétés essentielles de cette fonction.

Théorème de Castigliano

Soient $\underline{Q}$ et $\underline{Q}'$ deux chargements du système auxquels correspondent respectivement les solutions $(\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}, \underline{\xi}^{\mathrm{e}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{e}})$ et $(\underline{\underline{\sigma}}'^{\mathrm{e}}, \underline{\xi}'^{\mathrm{e}}, \underline{\underline{\varepsilon}}'^{\mathrm{e}})$ du problème d'équilibre thermoélastique.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En appliquant le théorème des travaux virtuels sous la forme (7.16) aux champs $(\underline{\underline{\sigma}}'^{\mathrm{e}} - \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}) \in \mathbb{S}$ et $\underline{\underline{\xi}}^{\mathrm{e}} \in \mathbb{C}$, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{Q} \in \mathbb{R}^n \ , \ \forall \underline{Q}' \in \mathbb{R}^n \ , \\ \displaystyle\int_\Omega (\underline{\underline{\sigma}}'^{\mathrm{e}} - \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{e}} \, \mathrm{d}\Omega = (\underline{Q}' - \underline{Q}) \cdot \underline{q}^{\mathrm{e}} (\underline{Q}) \ . \end{array} \right. \tag{8.6}$$

On transforme le premier membre de cette équation en introduisant la loi de comportement (1.20) :

$$\int_\Omega (\underline{\underline{\sigma}}'^{\mathrm{e}} - \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}) : \rho \, \frac{\partial \psi^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} (\tau, \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}) \, \mathrm{d}\Omega = (\underline{Q}' - \underline{Q}) \cdot \underline{q}^{\mathrm{e}} (\underline{Q}) \ , \tag{8.7}$$

et, en tenant compte de la stricte convexité de $\rho\psi^*$, il vient comme au paragraphe 3.2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{Q} \in \mathbb{R}^n \ , \ \forall \underline{Q}' \in \mathbb{R}^n \ , \ \underline{Q}' \neq \underline{Q} \ , \\ \displaystyle\int_\Omega \rho\psi^* \, (\tau, \underline{\underline{\sigma}}'^{\mathrm{e}}) \, \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \rho\psi^* \, (\tau, \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}) \, \mathrm{d}\Omega > (\underline{Q}' - \underline{Q}) \cdot \underline{q}^{\mathrm{e}} \, (\underline{Q}) \ , \end{array} \right. \tag{8.8}$$

soit, avec la définition (8.5) de $\mathcal{W}^*$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{Q} \in \mathbb{R}^n \ , \ \forall \underline{Q}' \in \mathbb{R}^n \ , \ \underline{Q}' \neq \underline{Q} \ , \\ \mathcal{W}^* \, (\tau, \underline{Q}') - \mathcal{W}^* \, (\tau, \underline{Q}) > (\underline{Q}' - \underline{Q}) \cdot \underline{q}^{\mathrm{e}} \, (\underline{Q}) \ . \end{array} \right. \tag{8.9}$$

Cette inégalité, considérée du point de vue de la fonction $[\mathcal{W}^* \, (\tau, \underline{Q}') - \underline{Q}' \cdot \underline{q}^{\mathrm{e}} \, (\underline{Q})]$ de l'argument $\underline{Q}'$, montre que cette fonction est minimale pour $\underline{Q}' = \underline{Q}$:

$$\boxed{\mathcal{W}^* \, (\tau, \underline{Q}') - \underline{Q}' \cdot \underline{q}^{\mathrm{e}} \, (\underline{Q}) \quad \text{Minimale pour } \underline{Q}' = \underline{Q}} \tag{8.10}$$

La formulation classique de ce résultat exprime la condition d'extrémalité (8.10) en introduisant le gradient de $\mathcal{W}^*(\tau, \underline{Q}')$. Il vient ainsi :

$$\boxed{\underline{q}^{\mathrm{e}} \, (\underline{Q}) = \frac{\partial \mathcal{W}^*}{\partial \underline{Q}'} (\tau, \underline{Q})} \tag{8.11}$$

Cette formule, explicitée sous la forme

$$q_j^{\mathrm{e}} \, (\underline{Q}) = \frac{\partial \mathcal{W}^*}{\partial Q'_j} (\tau, \underline{Q}) \tag{8.12}$$

exprime le ***théorème de Castigliano.***[(14)]

[(14)] Carlo Alberto Castigliano (1847-1884). (Cf. section 10).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

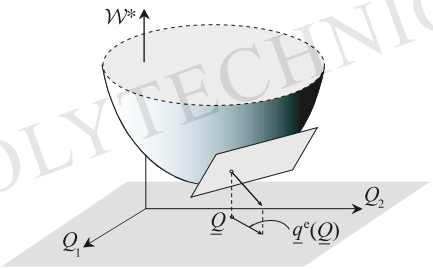


Figure 18 – Représentation schématique du théorème de Castigliano ($\underline{Q} \in \mathbb{R}^2$).

L'inégalité (8.9) suffit en toute généralité pour prouver la ***convexité stricte*** de $\mathcal{W}^*(\tau, \underline{Q})$ par rapport à $\underline{Q}$. Avec (8.11) elle devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{Q} \in \mathbb{R}^n \ , \ \forall \underline{Q}' \in \mathbb{R}^n \ , \ \underline{Q}' \neq \underline{Q} \ , \\ \mathcal{W}^*(\tau, \underline{Q}') - \mathcal{W}^*(\tau, \underline{Q}) > \left[\dfrac{\partial \mathcal{W}^*}{\partial \underline{Q}'}(\tau, \underline{Q}) \right] . (\underline{Q}' - \underline{Q}) \end{array} \right. \tag{8.13}$$

où l'on reconnait la condition (1.15). Enfin, en rapprochant (8.7) et (8.11), on remarque que l'on a :

$$\int_\Omega (\underline{\underline{\sigma}}'^{\mathrm{e}} - \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}) : \rho \, \frac{\partial \psi^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\tau, \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}) \, \mathrm{d}\Omega = (\underline{Q}' - \underline{Q}) \, . \, \frac{\partial \mathcal{W}^*}{\partial \underline{Q}'}(\tau, \underline{Q}) \ . \tag{8.14}$$

La figure 18 représente schématiquement ces résultats.

Loi de comportement thermoélastique du système

L'équation (8.11) exprime la loi de comportement thermoélastique du système dans la classe de problèmes paramétrés considérée. Elle fournit $\underline{q}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})$ en fonction de $\underline{Q}$ et du champ τ sous une forme semblable à l'équation de comportement thermoélastique du matériau (1.20) qui donne $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en fonction de $\underline{\underline{\sigma}}$ et τ. La fonction $\mathcal{W}^*(\tau, \underline{Q})$ joue, pour le système, le rôle homologue de celui de $\rho\psi^*$ (potentiel thermoélastique) pour le matériau dans (1.20). C'est, on l'a vu, une fonction strictement convexe de son argument $\underline{Q}$.

Cette interprétation est particulièrement intéressante lorsque l'on applique le théorème de Castigliano à un sous-système d'un système global : par exemple, à un élément dans la méthode des éléments finis.

Mise en œuvre du théorème de Castigliano

L'usage classique du théorème de Castigliano concerne le calcul des structures. Les paramètres de chargement sont, dans ce cas les intensités des charges appliquées au système ; lorsqu'il s'agit de forces concentrées, les paramètres associés sont les valeurs algébriques des déplacements dans les directions de ces forces. On utilise alors le théorème de Castigliano pour des calculs de déplacements.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Il peut même être employé pour déterminer un déplacement qui ne correspond à aucune charge réellement appliquée :

- pour cela on ajoute au chargement $\underline{Q}$ du système une charge fictive, paramétrée par un paramètre supplémentaire Q_{f}, pour laquelle le déplacement cherché est le paramètre cinématique dual q_{f} ;
- on détermine

$$\mathcal{W}^*\left(\tau, \underline{Q}, Q_{\mathrm{f}}\right) \quad \text{pour le système} \tag{8.15}$$

- on applique la formule (8.12) pour déterminer $q_{\mathrm{f}}^{\mathrm{e}}$ en y annulant l'intensité de la force fictive Q_{f} :

$$q_{\mathrm{f}}^{\mathrm{e}}\left(\underline{Q}\right) = \frac{\partial \mathcal{W}^*}{\partial Q_{\mathrm{f}}}(\tau, \underline{Q}\,, 0)\,. \tag{8.16}$$

Cette méthode est connue sous le nom de méthode du chargement (ou du sollicitant) « évanouissant ».

Il s'agit là de méthodes de calcul élégantes mais dont l'intérêt et l'efficacité doivent être expliqués : en effet, l'écriture même de $\mathcal{W}^*(\tau, \underline{Q})$ ou de $\mathcal{W}^*(\tau, \underline{Q}, Q_{\mathrm{f}})$ nécessite la connaissance du champ $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}$ solution du problème correspondant.

En mettant à part le recours au théorème de Castigliano dans des analyses théoriques, les raisons essentielles qui permettent l'utilisation pratique de ce théorème tiennent au fait que l'on pourra se satisfaire, pour l'écriture de $\mathcal{W}^*$, d'une solution approximative en contrainte. Celle-ci sera par exemple obtenue en raccordant de façon approchée les solutions exactes de problèmes concernant des sous-systèmes ou des structures : l'expression de $\mathcal{W}^*$ résulte alors de la simple addition des contributions (scalaires) correspondant à ces sous-systèmes ou sous-structures. Le théorème de Castigliano détermine ensuite le déplacement cherché. Cette méthode a été largement utilisée et validée dans le cadre de la Résistance des Matériaux classique.

8.2 Théorème du potentiel minimum

Objectif

Le théorème du potentiel minimum établi dans la section 6 a montré que, pour un problème de degré d'hyperstaticité fini, la détermination des valeurs réelles des inconnues hyperstatiques correspond à la minimisation, par rapport aux inconnues hyperstatiques $\underline{X}'$, de la fonction $\boldsymbol{W}^*\left(\tau, \underline{X}'\right) - \boldsymbol{\Phi}^*\left(\underline{X}'\right)$ (ou de la fonction $\boldsymbol{W}^*\left(\tau, \underline{X}'\right)$ seule si les déplacements imposés sont tous nuls). Ensuite, à l'occasion des commentaires donnés au paragraphe 6.3, on a évoqué la démarche de résolution des systèmes hyperstatiques par la méthode des forces, qui consiste à relâcher des liaisons externes et internes au système étudié et à déterminer les valeurs des forces de liaision en écrivant que ces liaisons sont effectivement réalisées.

Pour les problèmes paramétrés le théorème de Castigliano a interprété, en termes de déplacements, les dérivées partielles de l'énergie élastique de contrainte exprimée en fonction des paramètres de chargement.

En s'intéressant à des problèmes paramétrés, dont le dégré d'hyperstaticité est fini, le théorème du potentiel minimum, dans une synthèse des résultats précédents, va mettre en évidence les rôles parallèles joués par les paramètres de chargement et les inconnues hyperstatiques.

Position du problème

On suppose, comme au paragraphe 8.1, que les données sont paramétrées linéairement et que toutes les données cinématiques ξ_i^{d} sur S_{ξ_i} sont nulles :

$$\xi_i^{\mathrm{d}} = 0 \quad \text{sur } S_{\xi_i} \; ; \tag{8.17}$$

tous les paramètres de chargement $Q_j\,, (j = 1\,, \ldots\,, n)$, définissent toutes les données non nulles du problème.

L'état initial de référence est un état non chargé $(\underline{Q} = 0)$, et l'état de contrainte initial $\underline{\underline{\sigma}}^0$ est connu. Le champ d'écart de température τ est connu.

$\mathbb{A}\,(S_{T_i})$ est l'espace vectoriel des champs d'autocontrainte comme au paragraphe 7.3, et on a :

$$\mathbb{A}\,(S_{T_i}) = \mathbb{S}_n\,(0)\,. \tag{8.18}$$

On suppose, comme au paragraphe 6.2, que cet espace vectoriel est de dimension finie k et on désigne par $\underline{\underline{\sigma}}_\ell^{\mathrm{a}}\,(\ell = 1\,, \ldots\,, k)$ une base de $\mathbb{A}(S_{T_i})$.

Pour chaque valeur $\underline{Q}'$ du chargement on choisit dans $\mathbb{S}_n(\underline{Q}')$ un champ de contrainte fixe noté $\underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{Q}')$; ce choix est fait, en pratique, de telle sorte que l'application

$$\underline{Q}' \to \underline{\underline{\sigma}}^*\,(\underline{Q}') \tag{8.19}$$

soit linéaire.

$\underline{Q}'$ parcourant $\mathbb{R}^n$, et $\underline{X}'$ parcourant $\mathbb{R}^k$, on décrit les espaces $\mathbb{S}_n\,(\underline{Q}')$ et $\mathbb{S}$ en appliquant la formule (6.12). On obtient ainsi :

$$\underline{\underline{\sigma}}' \in \mathbb{S} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\, \underline{Q}' \in \mathbb{R}^n\,, \exists\, \underline{X}' \in \mathbb{R}^k \text{ tels que} \\ \underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}}^*\,(\underline{Q}') + X'_\ell\, \underline{\underline{\sigma}}_\ell^{\mathrm{a}}\,. \end{cases} \tag{8.20}$$

L'énergie élastique de contrainte de tout champ $\underline{\underline{\sigma}}'$ de $\mathbb{S}$, est $W^*\,(\tau, \underline{\underline{\sigma}}')$ définie par (3.8) et s'exprime alors comme une fonction de $\underline{Q}')$ et $\underline{X}'$ à travers (8.19) et (8.20). On écrira :

$$\begin{cases} \forall \underline{Q}' \in \mathbb{R}^n\,,\ \forall \underline{X}' \in \mathbb{R}^k \\ \boldsymbol{W}^*\,(\tau, \underline{Q}', \underline{X}') = W^*\,(\tau,\, \underline{\underline{\sigma}}^*\,(\underline{Q}') + X'_\ell\, \underline{\underline{\sigma}}_\ell^{\mathrm{a}})\,. \end{cases} \tag{8.21}$$

Le théorème du potentiel minimum met en évidence les propriétés de $\boldsymbol{W}^*$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Théorème du potentiel minimum

Le raisonnement est semblable à ceux mis en œuvre aux paragraphes 6.2 et 8.1.

On considère $\underline{Q}$, un chargement quelconque du système. Reprenant les notations du paragraphe 8.1, $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})$, $\underline{\underline{\xi}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})$, $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})$ sont les champs solutions du problème d'équilibre thermoélastique et $\underline{q}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})$ est le « déplacement » du système dans la solution. On désigne par $\underline{X}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})$ la valeur des inconnues hyperstatiques dans la solution, c'est-à-dire, qu'en application de (8.20) :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}) = \underline{\underline{\sigma}}^{*}(\underline{Q}) + X_{\ell}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})\,\underline{\underline{\sigma}}_{\ell}^{\mathrm{a}} \,. \tag{8.22}$$

$\underline{Q'}$ désignant un chargement quelconque du système et $\underline{X'}$ une valeur quelconque des inconnues hyperstatiques, le champ $\underline{\underline{\sigma}}'$ défini par (8.20)

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}}^{*}(\underline{Q'}) + X'_{\ell}\,\underline{\underline{\sigma}}_{\ell}^{\mathrm{a}} \tag{8.23}$$

est un champ quelconque de $\mathbb{S}_n(\underline{Q'})$.

En appliquant le théorème des travaux virtuels (7.16) aux champs $(\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}))$ de $\mathbb{S}$ et $\underline{\underline{\xi}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})$ de $\mathbb{C}$, il vient comme au paragraphe 8.1 :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \underline{Q} \in \mathbb{R}^n \,,\ \forall \underline{Q'} \in \mathbb{R}^n \,,\ \forall \underline{X'} \in \mathbb{R}^k \\ \displaystyle\int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})) : \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})\,\mathrm{d}\Omega = (\underline{Q'} - \underline{Q}) \cdot \underline{q}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}) \,. \end{array}\right. \tag{8.24}$$

On transforme à nouveau le premier membre de cette équation en y introduisant la loi de comportement thermoélastique du matériau sous la forme (1.20) :

$$\int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})) : \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\tau, \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}))\,\mathrm{d}\Omega = (\underline{Q'} - \underline{Q}) \cdot \underline{q}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}) \,. \tag{8.25}$$

De la stricte convexité de $\rho\psi^*$ on déduit :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \underline{Q} \in \mathbb{R}^n \,,\ \forall \underline{Q'} \in \mathbb{R}^n \,,\ \underline{Q'} \neq \underline{Q} \,,\ \forall \underline{X'} \in \mathbb{R}^k \,, \\ \displaystyle\int_{\Omega} \rho\psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}')\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} \rho\psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}))\,\mathrm{d}\Omega > (\underline{Q'} - \underline{Q}) \cdot \underline{q}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}) \,, \end{array}\right. \tag{8.26}$$

c'est-à-dire, avec la définition (8.21) de $\boldsymbol{W}^*(\tau, \underline{Q'}, \underline{X'})$:

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \underline{Q} \in \mathbb{R}^n \,,\ \forall \underline{Q'} \in \mathbb{R}^n \,,\ \underline{Q'} \neq \underline{Q} \,,\ \forall \underline{X'} \in \mathbb{R}^k \,, \\ \boldsymbol{W}^*(\tau, \underline{Q'}, \underline{X'}) - \boldsymbol{W}^*(\tau, \underline{Q}, \underline{X}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})) > (\underline{Q'} - \underline{Q}) \cdot \underline{q}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}) \,. \end{array}\right. \tag{8.27}$$

Considérée du point de vue de la fonction $(\boldsymbol{W}^*(\tau, \underline{Q'}, \underline{X'}) - \underline{Q'} \cdot \underline{q}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}))$ des arguments $\underline{Q'}$ et $\underline{X'}$, cette dernière inégalité montre que cette fonction est minimale pour $\underline{Q'} = \underline{Q}$ et $\underline{X'} = \underline{X}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})$:

$$\boxed{\boldsymbol{W}^*(\tau, \underline{Q'}, \underline{X'}) - \underline{Q'} \cdot \underline{q}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}) \quad \text{Minimale pour } \underline{Q'} = Q \text{ et } \underline{X'} = \underline{X}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})} \tag{8.28}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

De la même façon que pour le théorème de Castigliano, on exprime la condition d'optimalité (8.28) en introduisant les gradients de $\boldsymbol{W}^*(\tau, \underline{Q}', \underline{X}')$ par rapport à $\underline{Q}'$ et $\underline{X}'$. D'où :

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{W}^*}{\partial \underline{X}'}(\tau, \underline{Q}\,, \underline{X}^{\mathrm{e}}\,(\underline{Q})) = 0} \tag{8.29}$$

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{W}^*}{\partial \underline{Q}'}(\tau, \underline{Q}\,, \underline{X}^{\mathrm{e}}\,(\underline{Q})) = \underline{q}^{\mathrm{e}}\,(\underline{Q})} \tag{8.30}$$

Ces résultats expriment le ***théorème du potentiel minimum.***

L'inégalité (8.27) établit la ***stricte convexité*** de $\boldsymbol{W}^*(\tau, \underline{Q}', \underline{X}')$ vis-à-vis de ses arguments $\underline{Q}'$ et $\underline{X}'$. Avec (8.29) et (8.30) elle prend la forme de la condition (1.15) :

(8.31)

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \underline{Q} \in \mathbb{R}^n\ ,\ \forall \underline{Q}' \in \mathbb{R}^n\ ,\ \underline{Q}' \neq \underline{Q}\ ,\ \forall \underline{X}' \in \mathbb{R}^k\ , \\ \\ \boldsymbol{W}^*\,(\tau, \underline{Q}', \underline{X}') - \boldsymbol{W}^*\,(\tau, \underline{Q}, \underline{X}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})) > \left[\dfrac{\partial \boldsymbol{W}^*}{\partial \underline{Q}'}(\tau, \underline{Q}, \underline{X}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}))\right] \cdot (\underline{Q}' - \underline{Q}) \\ \qquad\qquad + \left[\dfrac{\partial \boldsymbol{W}^*}{\partial \underline{X}'}(\tau, \underline{Q}, \underline{X}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}))\right] \cdot (\underline{X}' - \underline{X}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}))\ . \end{array}\right.$$

La formule (8.29) représente k équations qui déterminent $\underline{X}^{\mathrm{e}}\,(\underline{Q})$ en fonction de $\underline{Q}$. On retrouve le résultat du paragraphe 6.2 : à $\underline{Q}$ donné, les valeurs des inconnues hyperstatiques pour la solution du problème d'équilibre thermoélastique minimisent la fonction $\boldsymbol{W}^*$.

De plus la formule (8.30) détermine le « déplacement » du système dans l'état d'équilibre thermoélastique. Elle rappelle évidemment la formule (8.11) du théorème de Castigliano, mais les fonctions $\mathcal{W}^*$ et $\boldsymbol{W}^*$ figurant dans l'une et dans l'autre sont différentes. En fait, en reprenant la définition (8.5) on voit que :

$$\mathcal{W}^*(\tau, \underline{Q}) \equiv \boldsymbol{W}^*(\tau, \underline{Q}, \underline{X}^{\mathrm{e}}\,(\underline{Q}))\,; \tag{8.32}$$

il est clair alors, compte tenu de (8.29), que les formules (8.30) et (8.11) sont équivalentes.

La formule (8.29) et l'énoncé correspondant dans le cas où l'état initial est naturel et l'équilibre isotherme sont souvent attribués à Menabrea. Lorsque l'état initial est précontraint, ou lorsque $\tau \neq 0$, on obtient le théorème de Colonnetti.

Tous les commentaires faits aux paragraphes 6.1 et 6.3 concernant le degré d'hyperstaticité, et au paragraphe 8.1 sur l'utilisation la plus courante du théorème de Castigliano peuvent être repris ici.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Le théorème du potentiel minimum (8.28, 8.29 et 8.30) est d'usage très fréquent en calcul des structures dans le cadre de la méthode des forces pour la résolution des systèmes hyperstatiques. On traite alors de structures et la présentation générale mais relativement abstraite donnée ci-dessus, notamment en ce qui concerne les champs $\underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{Q}')$ et la correspondance (8.19) ou les inconnues hyperstatiques, prend un aspect plus concret. Comme les paramètres de chargement, les inconnues hyperstatiques ont souvent des significations mécaniques simples : réactions d'appuis, moments d'encastrement, efforts dans certains éléments de la structure étudiée. Le champ $\underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{Q}')$, qui correspond à $\underline{X}' = 0$, est le champ de contrainte dans la structure dite « isostatique associée ».

Le théorème de Menabrea (8.29) rejoint alors très directement le théorème de Castigliano (8.11). C'est ainsi que, si l'on prend une réaction d'appui, laissée indéterminée par la statique, comme paramètre de chargement supplémentaire, on pourra déterminer sa valeur dans l'état d'équilibre élastique en écrivant que le déplacement associé, obtenu par (8.12), est nul : on aboutit alors exactement à l'équation (8.29). Il en va de même si l'on exprime, au moyen du théorème de Castigliano l'égalité des déplacements de deux points adjacents de deux sous-structures dont on a relâché la liaison en introduisant la force de liaison correspondante : on aboutit exactement, à la formule (8.29).

8.3 Équilibre isotherme et état initial naturel en élasticité linéaire

Les résultats ci-dessus, démontrés et écrits sous forme générale c'est-à-dire sans référence explicite au caractère linéaire ou affine de la loi de comportement entre $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et τ, prennent des formes plus simples dès que l'on introduit ces considérations.

Ainsi, le matériau étant ***linéairement élastique***, et l'équilibre étant ***isotherme*** à partir de l'état initial de référence ***naturel*** ($\underline{\underline{\sigma}}^0 = 0$), on sait (cf. paragraphe 5.2, formule (5.14)) que, dans l'état d'équilibre élastique sous le chargement $\underline{Q}$, avec les notations déjà explicitées pour les champs $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})$, $\underline{\xi}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})$, $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})$, on a

$$W\big(\underline{\xi}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})\big) = W^*\big(\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})\big) = \frac{1}{2}\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{8.33}$$

En appliquant à cette égalité le théorème des travaux virtuels (1.10) on obtient la ***formule de Clapeyron*** pour $\mathcal{W}^*(\underline{Q})$ définie par (8.5).

$$\forall\,\underline{Q} \in \mathbb{R}^n\,,\ \mathcal{W}^*(\underline{Q}) = W^*\big(\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})\big) = \frac{1}{2}\,\underline{Q}\,.\,\underline{q}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})\,. \tag{8.34}$$

Le ***théorème de Castigliano*** exprime $\underline{q}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})$ en fonction de $\underline{Q}$ par l'équation (8.11). En rapprochant (8.11) et (8.34) on trouve que $\underline{q}^{\mathrm{e}}(\underline{Q})$ est une fonction linéaire de $\underline{Q}$ (résultat attendu en application du principe de superposition)

$$\boxed{\underline{q}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}) = \underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}}\,.\,\underline{Q}} \tag{8.35}$$

et que, de plus, $\underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}}$ est ***symétrique***.

Le ***théorème de réciprocité*** de Maxwell Betti (5.47) exprime cette symétrie. Considérant deux états d'équilibre élastique relatifs à deux valeurs différentes d'un

même paramétrage des données on a, avec des notations évidentes :

$$\boxed{\underline{Q}^1 \cdot \underline{q}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}^2) = \underline{Q}^2 \cdot \underline{q}^{\mathrm{e}}(\underline{Q}^1)} \tag{8.36}$$

Pour le ***théorème du potentiel minimum***, on part de la définition (8.21) où l'on tient compte de l'expression (5.6) de $W^*(\underline{\underline{\sigma}}')$. Il vient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{Q}' \in \mathbb{R}^n \ , \ \forall \underline{X}' \in \mathbb{R}^k \\ \\ \boldsymbol{W}^* \left(\underline{Q}' \, , \, \underline{X}' \right) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega \left(\underline{\underline{\sigma}}^* \left(\underline{Q}' \right) + X'_\ell \, \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}_\ell \right) : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \left(\underline{\underline{\sigma}}^* \left(\underline{Q}' \right) + X'_\ell \, \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}_\ell \right) \mathrm{d}\Omega \, . \end{array} \right. \tag{8.37}$$

L'application (8.19) qui définit $\underline{\underline{\sigma}}^* \left(\underline{Q}' \right)$ en fonction de $\underline{Q}'$ a été supposée linéaire. Il en résulte que $\boldsymbol{W}^* \left(\underline{Q}' \, , \underline{X}' \right)$ est une forme quadratique en $\underline{Q}'$ et $\underline{X}'$ et que les équations (8.29) déterminent $\underline{X}^{\mathrm{e}} \left(\underline{Q} \right)$ fonction linéaire de $\underline{Q}$.

9 Pour conclure ...

Ce long chapitre consacré aux théorèmes de l'énergie en thermoélasticité linéaire est loin d'être exhaustif.

C'est ainsi qu'à propos des principes d'extremum on a choisi de ne présenter que les principes à ***un*** champ (champ de déplacement, champ de contrainte). On doit signaler que d'autres principes variationnels sont utilisés dans la conception et la mise en œuvre de méthodes de résolution numérique des problèmes d'élasticité, qui font intervenir simultanément deux champs (par exemple : principe de Reissner).

En ce qui concerne les théorèmes de Castigliano et du potentiel minimum, on a choisi de n'en donner que les formes classiques : celles-ci font intervenir les fonctions $\mathcal{W}^*$ et $\boldsymbol{W}^*$ portant sur les paramètres de chargement $\underline{Q}$ et les inconnues hyperstatiques $\underline{X}$, grandeurs ***statiques***. Il va de soi que des théorèmes duals des précédents pourraient être établis, portant sur les grandeurs cinématiques, au moyen de fonctions $\mathcal{W}$ et $\boldsymbol{W}$.

Enfin, la théorie des paramètres de chargement serait, elle aussi, susceptible d'autres applications que celles présentées dans la section 8. Il est notamment possible de généraliser la démarche suivie dans l'exemple traité au paragraphe 5.3, qui permet d'aboutir à un encadrement (par défaut et par excès) de la valeur d'un paramètre de chargement unique, au cas de plusieurs paramètres.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

10 Note historique

On trouvera ci-dessous quelques pages extraites d'un article publié en 1984 dans la revue italienne *Meccanica* par le Professeur Gaetano Fichera, qui permettent de situer historiquement quelques noms et résultats cités notamment dans ce chapitre[(15)].

Gabrio Piola, born of a noble Milanese family, concentrated at first on the study of astronomy. He then dedicated himself to private tutoring. One of his students was Francesco Brioschi who was to contribute so much to the reawakening of interest in mathematical studies in Italy. Piola, profound scholar that he was of the analytical mechanics of Lagrange, was the first to introduce the Lagrangian components of stress in a continuum. A concept taken up again by Kirchhoff so that in all modern studies of continuum mechanics, especially (curiously) abroad, the Lagrange stress tensor is called the Piola-Kirchhoff tensor.

Piola is on the whole still little known in our country, even among mathematicians. One Giovanni Veladini spoke of him, in the style of his times, in a commemoration at the Reale Instituto Lombardo of which Piola had been member and also president : « Piola was gentle in manner, fluent in conversation, disposed to tolerate the defects of others, franck in expressing his opinion, never ungracious in sustaining it ; although in appearance healthy and sturdy, he was not strong and frequent illness assailed him ... He died with the name of the Lord on his lips the 9th day November of 1850 ».

... If the figure of Piola is little known, Luigi Federigo Menabrea occupies, instead, a prominent place in Italian history of the nineteenth century. Engineer and officer in the Corps of Engineers of the Sardinian Army, he taught at the Turin Military (where he himself had been a pupil of Giovanni Plana), and gave courses in descriptive geometry, mechanics and strength of materials there. He later took part in important military assignments, some in wartime, distinguishing himself at Palestro and Solferino and organizing the sieges of Ancona, Capua Gaeta, for which he was decorated with the Gold Medal and promoted to lieutenant general. In 1859 he had directed the works for the flooding of the plain between the Dora and the Sesia, to delay the Austrian advance. In recognition he received the title of Marquis of Val Dora, Menabrea also held high political offices in Italy and abroad. He was president of the Cabinet in 1867.

It is singular that while engaged in such intense military and political activity, he should still have found time for his scientific studies. His name is linked to the principle of minimum for an elastic body constrained on a part of its boundary, subjected to given surface forces on the remaining part of the boundary and loaded with given body forces. According Menabrea's minimum principle, the equilibrium configuration of the body is the one which corresponds to stresses minimizing the difference between the work of the elastic strain and that of the constraint reaction ; the class of the admitted stresses is that constituted by the stresses balancing the body forces and the forces assigned on the unconstrained part of the boundary. This result, announced in 1858, was given definite formulation in a Note of the *Academia delle Scienze di Torino 1871.*

And here we must speak of Carlo Alberto Castigliano (l847-1884) who, experienced engineer that he was, was the first to realize the importance of Menabrea's principle. Castigliano's life was brief and not easy. Born in a family of few means, his studies, in mathematics first and then engineering, cost him many sacrifices. He worked as engineer for the railways of Northern Italy, but he always continued his scientific research. His studies led him to reformulate Menabrea's principle of minimum, which some authors today erroneously call « Castigliano's principle ». More important, he used it with great ability, through the variational equations deduced from it, to solve important practical problems of engineering. It is significant that Castigliano's results were applied in the construction of various bridges, for road as well as railway crossings. Just one example is the iron bridge over the Cellina torrent at Montereale in Friuli, with a span of a good 83 meters, truly avant-garde for the technology of those times.

Later, Luigi Donati (1846-1932) continued the work of Menabrea and Castigliano. Donati

[(15)] Invited paper.
This article was taken from a lecture given by the author at the University of Palermo on December 16, 1977 and published in the *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (vol. XXVIII. st. II). The editors of this publication have kindly given *Meccanica* permission to publish this abbreviated version of the lecture in English.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

was professor at the Schools of Engineering of Milan and of Bologna, where he also taught mathematical physics at the Univercity. He stated the theorem of minimum, which Menabrea and Castigliano considered only for particular elastic systems and mainly for technical purposes, for a general elastic solid. Gurtin in his Monograph on Elasticity, which appeared in 1972 in the *Handbuch der Physik*, observed that the compatibilily equations for stresses (analogous to Saint Venant's compatibility equations for strains), universally attributed to Beltrami for case of null body forces (1892) and to Michell for the general cases (1900), were, as regards this case, already known to Donati as far back as 1894.

Two of the mathematicians mentioned above made fundamental contributions to the mathematical theory of elasticity : Eugenio Beltrami and, especially, Enrico Betti.

Betti, born in Padua in 1823, took part as a young man in the First Italian War of Independence. He fought at Curtatone and Montanara in the Tuscan University Battalion which was commanded by the mathematician Ottaviano Fabrizio Mossatti. And it was in succession to Mossotti that Betti took the chair in mathematical physics at Pisa in 1857, a position which he held until his death in 1892. He was elected member of Parliament and then nominated senator in 1884. It would be impossible to mention here all of Betti's scientific production, multiform and complex, ranging from algebra to topology, theory of elasticity, theory of potential and several other subjects. I cite only those relevant to the theme considered here, his contributions to elasticity.

The name of Betti is tied, above all, to the celebrated *reciprocal theorem*, which affirms that if an elastic solid is subjected to two different systems of forces (each constituted by body and surface forces), the work done by the first system on the displacements corresponding to the second system is equal to the work of the second on the displacements corresponding to the first. This theorem, included today in the general theorems for linear partial differential systems, called Green's, contains the whole linear theory of elastostatics, as the modern theory of partial differential equations has shown. In fact, not only existence and uniqueness theorems for the various problems concerning linear elasticity can be drawn from this theorem, but (as Mauro Picone has shown) methods for the actual calculation of the solutions as well. Betti himself used his reciprocal theorem to extend Green's method for solving problems of elasticity. Green's method had already been used in Dirichlet's classic problem of potential theory.

Even if not connected with our theme, I cannot leave Enrico Betti without mentioning his discovery of those famous numbers universally known today in topology as Betti numbers. These numbers indicate for every multidimensional complex the indices of connection ot the various dimensions. For his reciprocal theorem and for the discovery of Betti numbers (two subjects extremely distant from each other), the name of Betti will always rank among those of the great mathematicians.

Mathematician of equal stature was Eugenio Beltrami, born in Cremona in 1835. Beltrami had a difficult youth. He was expelled for political motives from the Collegio Ghislieri of Pavia, where he was attending the courses in mathematics at the University. Later, in 1859, he lost his job, in truth modest, with the Lombardo-Veneto railways for similar reasons. But as Luigi Cremona said in his commemoration of Beltrami at the *Accademia dei Lincei*, « his good fortune accorded with that of Italy : only a few months later the cannon of Magenta freed Lombardy ». With this new freedom and encouraged by Brioschi who had been his professor at Pavia, Beltrami could dedicate himself to his studies of mathematics. In 1862 he became professor of complemental algebra at Bologna. He went on to obtain tenure in geodesy at Pisa the following year. He returned to Bologna in 1866, to the chair of theoretical mechanics. After teaching at Rome and Pavia, he returned to Rome definitely in 1891, to occupy the chair of mathematical physics. In 1898, now a scientist of renown, he succeeded Francesco Brioschi as president of the *Accademia dei Lincei* and during the last year of his life was appointed senator of the Reign. He died in 1900.

Beltrami's work embraces a wide number of the helds of mathematics then known : analytic geometry, mathematical analysis, fluid mechanics, rational mechanics, elasticity, potential theory, heat theory, acoustics. But he shall be remembered above all as founder of the great school of differential geometry, one of the most successful fields of Italian mathematics, that would later find in Luigi Bianchi, Gregorio Ricci-Curbastro and Tullio Levi-Civita its maximum exponents.

Beltrami's contribution to the theory of elasticity was strongly influenced by his sharp insight into differential geometry. He discovered that the general equations for elasticity in curvilinear coordinates, given by Lamé, are bound to the euclidean structure of the space. He then succeeded in extending these same equations to constant curvature spaces, delivering at the same time as Clifford, even if not with the same incisiveness, one of

the earliest examples of the use of non-euclidean space in physical problems. In this he was precursor of those developments which were later to assume such amazing aspects with the work of Albert Einstein. In numbering Beltrami's contributions to elasticity, we must not forget that he gave the first rigorous demonstration of the sufficiency of Saint Venant's compatibility conditions for strain components, as well as the general solution of the equilibrium for a continuum when the stresses are the unknown functions, a solution which was later erroneously attributed to others for a long time.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Récapitulatif des formules essentielles

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

• ***Théorème des travaux virtuels***

$$\forall \underline{\underline{\sigma}}^* \begin{cases} \text{continu et continûment différentiable, par morceaux ,} \\ \text{div } \underline{\underline{\sigma}}^* + \rho \underline{F} = 0 \text{ sur } \Omega \\ [\![\underline{\underline{\sigma}}^*]\!] \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}^*} \end{cases}$$

$$\forall \hat{\underline{\xi}} \quad \text{continu, continûment différentiable par morceaux ,}$$

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^* : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} \, \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \rho \, \underline{F} \cdot \hat{\underline{\xi}} \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} \hat{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}a = 0$$

• ***Convexité***

$$f(\underline{y}) = f(y_1, \ldots, y_n) \text{ strictement convexe sur } \mathbf{E}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \forall \underline{y}^1 , \quad \forall \underline{y}^2 \neq \underline{y}^1 \in \mathbf{E} , \\ \forall \lambda^1 > 0 , \forall \lambda^2 > 0 , \lambda^1 + \lambda^2 = 1 , \\ f(\lambda^1 \underline{y}^1 + \lambda^2 \underline{y}^2) < \lambda^1 f(\underline{y}^1) + \lambda^2 f(\underline{y}^2) \end{cases}$$

ou, si f de classe C^1, si et seulement si

$$\begin{cases} \forall \underline{y}^1 \in \mathbf{E} \quad \forall \underline{y}^2 \neq \underline{y}^1 \in \mathbf{E} \\ f(\underline{y}^2) - f(\underline{y}^1) > \dfrac{\partial f(\underline{y}^1)}{\partial \underline{y}} \cdot (\underline{y}^2 - \underline{y}^1) \end{cases}$$

ou, si f de classe C^2, si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \, \partial y_j} Y_i Y_j \quad \text{définie positive}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- ***Minimum de l'énergie potentielle***

$$\text{Min } \{W(\tau, \underline{\xi}') - \Phi(\xi')\} \text{ sur } \mathbb{C}(S_{\xi_i}\,,\, \xi_i^{\mathrm{d}})$$

$$\underline{\xi}' \in \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\, \xi_i^{\mathrm{d}}) \quad \Leftrightarrow \quad \xi_i' = \xi_i^{\mathrm{d}} \text{ sur } S_{\xi_i} \qquad i = 1,\, 2,\, 3$$

$$W(\tau, \underline{\xi}') = \int_\Omega \rho\, \psi(\tau, \underline{\underline{\varepsilon}}')\, \mathrm{d}\Omega \text{ (énergie élastique de déformation de } \underline{\xi}')$$

$$\Phi\,(\underline{\xi}') = \int_\Omega \rho\, \underline{F}\,.\,\underline{\xi}'\, \mathrm{d}\Omega + \sum_i \int_{S_{T_i}} T_i^{\mathrm{d}}\, \xi_i'\, \mathrm{d}a$$

$$W(\tau, \underline{\xi}') - \Phi\,(\underline{\xi}') : \text{ énergie potentielle de } \underline{\xi}'$$

Matériau isotrope, élasticité linéaire

$$W(\tau, \underline{\xi}') = \int_\Omega \big(\underline{\underline{\sigma}}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}' + \frac{\lambda}{2}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}')^2 + \mu\ \mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\varepsilon}}')^2 - k\,\tau\ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}'\big)\, \mathrm{d}\Omega$$

- ***Minimum de l'énergie complémentaire***

$$\text{Min } \{W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}') - \Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}')\} \text{ sur } \mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}\,, T_i^{\mathrm{d}})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}' \in \mathbb{S}\,(\underline{F},\, S_{T_i}\,,\, T_i^{\mathrm{d}}) \ \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{div}\ \underline{\underline{\sigma}}' + \rho\, \underline{F} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ [\![\, \underline{\underline{\sigma}}' \,]\!]\,.\,\underline{n} = 0 \qquad \text{sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}'} \\ \sigma_{ij}'\, n_j = T_i^{\mathrm{d}} \quad \text{sur } S_{T_i} \quad i = 1,\, 2,\, 3 \end{cases}$$

$$W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}') = \int_\Omega \rho\, \psi^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}')\, \mathrm{d}\Omega \quad \text{(énergie élastique de contrainte de } \underline{\underline{\sigma}}')$$

$$\Phi^*\,(\underline{\underline{\sigma}}') = \sum_i \int_{S_{\xi_i}} \xi_i^{\mathrm{d}}\, \sigma_{ij}'\, n_j\, \mathrm{d}a$$

$$W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}') - \Phi^*\,(\underline{\underline{\sigma}}') \quad \text{énergie complémentaire de } \underline{\underline{\sigma}}'$$

$$-W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}') + \Phi^*\,(\underline{\underline{\sigma}}') \quad \text{énergie potentielle de } \underline{\underline{\sigma}}'$$

Matériau isotrope, élasticité linéaire

$$W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}') = \int_\Omega \big(\frac{1+\nu}{2\,E}\ \mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^0)^2 - \frac{\nu}{2\,E}\,(\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^0))^2 + \alpha\,\tau\ \mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}^0) + \frac{3\,E}{2\,(1-2\,\nu)}\,(\alpha\,\tau)^2\big)\, \mathrm{d}\Omega$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- ***Encadrement énergétique de*** $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\xi})$ solution du problème

$$\forall\, \underline{\xi}' \in \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\, \xi_i^{\mathrm{d}}) \quad , \quad \forall\, \underline{\underline{\sigma}}' \in \mathbb{S}\,(\underline{F}\,,\, S_{T_i}\,,\, T_i^{\mathrm{d}}) \;:$$
$$-W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}') + \Phi^*\,(\underline{\underline{\sigma}}') \leq -W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}) + \Phi^*\,(\underline{\underline{\sigma}}) =$$
$$= W(\tau, \underline{\xi}) - \Phi\,(\underline{\xi}) \leq W(\tau, \underline{\xi}') - \Phi\,(\underline{\xi}')$$

- ***Équilibre isotherme, élasticité linéaire, état initial naturel***

$$W\,(\underline{\xi}') = \frac{1}{2}\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}'\,\mathrm{d}\Omega \quad , \quad W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}') = \frac{1}{2}\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} : \underline{\underline{\sigma}}'\,\mathrm{d}\Omega$$

isotropie :
$$W\,(\underline{\xi}') = \int_\Omega \big(\frac{\lambda}{2}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}')^2 + \mu\,\mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\varepsilon}}')^2\big)\,\mathrm{d}\Omega$$
$$W\,(\underline{\xi}') = \int_\Omega \frac{E}{2\,(1+\nu)}\,\big(\frac{\nu}{1-2\,\nu}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}')^2 + \ \mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\varepsilon}}')^2\big)\,\mathrm{d}\Omega$$
$$W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}') = \int_\Omega \big(\frac{1+\nu}{2\,E}\,\mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\sigma}}')^2 - \frac{\nu}{2\,E}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}')^2\big)\,\mathrm{d}\Omega$$
$$W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}') = \int_\Omega \frac{1}{4\,\mu}\big(\mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\sigma}}')^2 - \frac{\lambda}{3\,\lambda + 2\mu}\,(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}')^2\big)\,\mathrm{d}\Omega$$

Formule de Clapeyron : énergie élastique du système

$$W\,(\underline{\xi}) = W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho\,\underline{F}\,.\,\underline{\xi}\,\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \underline{\xi}\,.\,\underline{\underline{\sigma}}\,.\,\underline{n}\,\mathrm{d}a$$

Encadrement énergétique de $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\xi})$ solution du problème

$$\forall\, \underline{\xi}' \in \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\, \xi_i^{\mathrm{d}}) \quad , \quad \forall\, \underline{\underline{\sigma}}' \in \mathbb{S}\,(\underline{F}\,,\, S_{T_i}\,,\, T_i^{\mathrm{d}}) \;:$$
$$-W^*(\tau, \underline{\underline{\sigma}}') + \Phi^*\,(\underline{\underline{\sigma}}') \leq \frac{1}{2}[\Phi^*\,(\underline{\underline{\sigma}}) - \Phi\,(\underline{\xi})] \leq W(\tau, \underline{\xi}') - \Phi\,(\underline{\xi}')$$

Théorème de réciprocité (Maxwell-Betti)

$$\int_\Omega \rho\,\underline{F}^1\,.\,\underline{\xi}^2\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T}^1\,(\underline{n})\,.\,\underline{\xi}^2\,\mathrm{d}a = \int_\Omega \rho\,\underline{F}^2\,.\,\underline{\xi}^1\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T}^2\,(\underline{n})\,.\,\underline{\xi}^1\,\mathrm{d}a$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- ***Paramètres de chargement***

$$\forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S}\,,\ \forall \hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C}\,,\ \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^* : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}\, d\Omega = \underline{Q}^* \,.\, \hat{\underline{q}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}^* \to \underline{Q}^* = \underline{Q}\,(\underline{\underline{\sigma}}^*) \\ \hat{\underline{\xi}} \to \hat{\underline{q}} = \underline{q}\,(\hat{\underline{\xi}}) \end{array}\right\} \text{ linéaires}$$

- ***Théorème de Castigliano***

$$\underline{q}^{\mathrm{e}}\,(\underline{Q}) = \frac{\partial\, \mathcal{W}^*}{\partial \underline{Q}'}\,(\tau, \underline{Q})$$

- ***Théorème de Menabrea***

champs d'autocontrainte

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}} \in \mathbb{A}\,(S_{T_i}) = \mathbb{S}\,(0, S_{T_i}, 0) = \mathbb{S}_n(0)$$

inconnues hyperstatiques

$$\underline{\underline{\sigma}}^*\,(\underline{Q}') \in \mathbb{S}_n\,(\underline{Q}')$$
$$\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}_\ell\,,\ \ell = 1\,, ...,\ k\,,\ \text{base de } \mathbb{A}\,(S_{T_i})$$
$$\Rightarrow\ \underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}}^*\,(\underline{Q}') + X'_\ell\, \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{a}}_\ell \in \mathbb{S}_n\,(\underline{Q}')$$
$$\underline{X}' = (X'_1\,, ...,\ X'_k) \in \mathbb{R}^k$$

potentiel minimum

$$\boldsymbol{W}^*\,(\tau, \underline{Q}', \underline{X}') = W^*\,(\tau, \underline{\underline{\sigma}}')$$
$$\frac{\partial\, \boldsymbol{W}^*}{\partial \underline{X}'}\,(\tau, \underline{Q}\,,\ \underline{X}^{\mathrm{e}}\,(\underline{Q})) = 0$$
$$\frac{\partial\, \boldsymbol{W}^*}{\partial\, \underline{Q}'}\,(\tau, \underline{Q}\,,\ \underline{X}^{\mathrm{e}}\,(\underline{Q})) = \underline{q}^{\mathrm{e}}\,(\underline{Q})$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- ***Équilibre isotherme, état initial naturel***

  Formule de Clapeyron

$$\mathcal{W}^*\left(\underline{\underline{Q}}\right) = \frac{1}{2}\,\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{q}}^{\mathrm{e}}\left(\underline{\underline{Q}}\right)$$

  Théorème de réciprocité

$$\underline{\underline{Q}}^1 \cdot \underline{\underline{q}}^{\mathrm{e}}\left(\underline{\underline{Q}}^2\right) = \underline{\underline{Q}}^2 \cdot \underline{\underline{q}}^{\mathrm{e}}\left(\underline{\underline{Q}}^1\right)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Exercices

X.1 - Énergie élastique en torsion. Pour le problème de la torsion élastique isotherme d'une barre cylindrique à partir de l'état initial naturel étudié au chapitre VIII (section 7), déterminer les énergies élastiques de déformation et de contrainte du système dans l'état d'équilibre élastique pour la valeur $\mathcal{C}$ du couple de torsion.

Éléments de réponse :

On applique la formule de Clapeyron. À l'équilibre, la section S_0 étant immobile, on a :

$$W\,(\underline{\xi}) = W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\int_{S_\ell} \underline{T}^{\rm d}\cdot\underline{\xi}\,{\rm d}a\ ,$$

qui se réduit à $W\,(\underline{\xi}) = W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{S_\ell}(T_x^{\rm d}\,\xi_x + T_y^{\rm d}\,\xi_y)\,{\rm d}a$;

d'où : $W\,(\underline{\xi}) = W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}) = \dfrac{1}{2}\,\mu\,J\,\alpha^2\,\ell = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\mathcal{C}^2}{\mu\,J}\,\ell$.

Commentaire.

On pourrait aussi poser ce problème de torsion avec, sur S_0 et S_ℓ, les données mixtes suivantes (cf. Ex. X.8) : sur S_0 , $\underline{\xi}^{\rm d} = 0$; sur S_ℓ , $\xi_x^{\rm d} = -\alpha\,\ell\,y$, $\xi_y^{\rm d} = \alpha\,\ell\,x$, $T_z^{\rm d} = 0$.
Ces données peuvent être paramétrées linéairement en introduisant le paramètre cinématique $q = \alpha\,\ell$. Le paramètre de chargement associé, défini par dualité est :

$$Q = \int_{S_\ell}(-y\,T_x + x\,T_y)\,{\rm d}a = \mathcal{C}\ .$$

La solution du problème de torsion élastique fournit la relation entre Q et q dans l'état d'équilibre élastique :

$$Q = \frac{\mu\,J}{\ell}\,q \quad\text{et}\quad W\,(\underline{\xi}) = W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\,Q\,q = \frac{1}{2}\,\frac{\mu\,J}{\ell}\,q^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\ell}{\mu\,J}\,Q^2\ .$$

X.2 - Énergie élastique en flexion composée. On considère le problème de la flexion composée d'une barre cylindrique tel qu'étudié au chapitre IX, section 5. Déterminer les énergies élastiques de déformation et de contrainte du système dans l'état d'équilibre élastique pour les valeurs $\underline{\mathcal{X}}$ de l'effort normal et $\underline{\mathcal{M}}$ du moment de flexion. Interpétation en termes de paramètres de chargement.

Éléments de réponse :

- On applique la formule de Clapeyron. À l'équilibre, la section étant immobile :

$$W\,(\underline{\xi}) = W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\int_{S_\ell}\underline{T}^{\rm d}\cdot\underline{\xi}\,{\rm d}a = \frac{1}{2}\int_{S_\ell}T_x^{\rm d}\cdot\xi_x\,{\rm d}a$$

$$W\,(\underline{\xi}) = W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2\,E}\int_{S_\ell}\Big(\frac{\mathcal{X}}{S} - \frac{\mathcal{M}_z}{I_z}\,y + \frac{\mathcal{M}_y}{I_y}\,z\Big)^2\,{\rm d}a$$

$$W\,(\underline{\xi}) = W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}) = \Big(\frac{\mathcal{X}^2}{2\,E\,S} + \frac{\mathcal{M}_z^2}{2\,E\,I_z} + \frac{\mathcal{M}_y^2}{2\,E\,I_y}\Big)\,\ell\ .$$

- On peut poser le problème avec sur S_0 et S_ℓ les données :
sur S_0 : $\xi_x^{\rm d} = 0$, $T_y^{\rm d} = 0$, $T_z^{\rm d} = 0$;
sur S_ℓ : $\xi_x^{\rm d} = \delta - \omega_z\,y + \omega_y\,z$, $T_y^{\rm d} = 0$, $T_z^{\rm d} = 0$.
Ces données peuvent être paramétrées linéairement en introduisant les paramètres cinématiques :
$q_1 = \delta$, $q_2 = \omega_z$, $q_3 = \omega_y$;

les paramètres de chargement, définis par dualité sont :

$$Q_1 = \int_{S_\ell} \sigma_{xx}\,\mathrm{d}a = \mathcal{X}\,, \quad Q_2 = -\int_{S_\ell} y\,\sigma_{xx}\,\mathrm{d}a = \mathcal{M}_z\,, \quad Q_3 = \int_{S_\ell} z\,\sigma_{xx}\,\mathrm{d}a = \mathcal{M}_y\,.$$

Dans l'état d'équilibre élastique on a : $\underline{q} = \underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}}\,.\,\underline{Q}$

$$q_1 = \frac{\ell}{E\,S}\,Q_1\,,\ q_2 = \frac{\ell}{E\,I_z}\,Q_2\,,\ q_3 = \frac{\ell}{E\,I_y}\,Q_3$$

et

$$W\,(\underline{\xi}) = W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\,\underline{Q}\,.\,\underline{q} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\ell}{E\,S}\,Q_1^2 + \frac{\ell}{E\,I_z}\,Q_2^2 + \frac{\ell}{E\,I_y}\,Q_3^2\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{E\,S}{\ell}\,q_1^2 + \frac{E\,I_z}{\ell}\,q_2^2 + \frac{E\,I_y}{\ell}\,q_3^2\Big)\,.$$

X.3 - On considère un système en matériau élastique linéaire soumis, à partir de l'état initial naturel, aux trois cas de charge suivants :

1° chargement isotherme dans lequel les efforts sont : forces de masse $\underline{F}^1$ dans Ω, forces surfaciques $\underline{T}^1$ sur $\partial\Omega$,

2° autre chargement isotherme dans lequel les efforts sont : $\underline{F}^2$ dans Ω, $\underline{T}^2$ sur $\partial\Omega$,

3° chargement isotherme dans lequel les efforts sont : forces de masse $\underline{F} = \underline{F}^1 + \underline{F}^2$ dans Ω, forces surfaciques $\underline{T} = \underline{T}^1 + \underline{T}^2$ sur $\partial\Omega$.

Exprimer l'énergie élastique du système à l'équilibre sous le troisième chargement.

Éléments de réponse :

On applique la formule de Clapeyron et le théorème de Maxwell-Betti ; il vient par exemple :

$$W_{(1+2)} = W^*_{(1+2)} = W_1\,(= W_1^*) + W_2\,(= W_2^*) + \int_\Omega \rho\,\underline{F}^1\,.\,\underline{\xi}^2\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T}^1\,.\,\underline{\xi}^2\,\mathrm{d}a$$

où les indices indiquent que les valeurs des fonctionnelles sont prises dans les états d'équilibre correspondant aux chargements concernés. Dans le cas d'un problème dépendant d'un nombre fini de paramètres de chargement :

$$\mathcal{W}^*_{(1+2)} = \mathcal{W}_1^* + \mathcal{W}_2^* + \underline{Q}^1\,.\,\underline{q}^{\mathrm{e}}\,(\underline{Q}^2)\,.$$

Commentaire.

On remarque la présence du terme croisé,.

X.4 - On considère la barre cylindrique traitée dans Ex. X.1 et Ex. X.2, que l'on étudie dans l'état d'équilibre élastique obtenu par superposition des problèmes de torsion et de flexion composée à partir de l'état initial naturel. Déterminer l'énergie élastique de la barre dans cet état défini par les valeurs $\mathcal{X}$, $\underline{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{C}$ de l'effort normal, du moment de flexion et du couple de torsion.

Éléments de réponse :

On applique les résultats de Ex. X.3 compte tenu de Ex. X.1 et Ex. X.2. Les axes étant placés comme dans l'étude du problème de la flexion, le terme croisé de la formule établie dans Ex. X.3 s'écrit :

$$\alpha \int_{S_\ell} \Big(\frac{\mathcal{X}}{S} - \frac{\mathcal{M}_z}{I_z}\,y + \frac{\mathcal{M}_y}{I_y}\,z\Big)\,\varphi\,(y,z)\,\mathrm{d}a - \alpha \int_{S_0} \Big(\frac{\mathcal{X}}{S} - \frac{\mathcal{M}_z}{I_z}\,y + \frac{\mathcal{M}_y}{I_y}\,z\Big)\,\varphi\,(y,z)\,\mathrm{d}a = 0$$

($\varphi\,(y,z)$: fonction de gauchissement).

D'où : $W\,(\underline{\xi}) = W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}) = \Big(\dfrac{\mathcal{X}^2}{2\,E\,S} + \dfrac{\mathcal{M}_z^2}{2\,E\,I_z} + \dfrac{\mathcal{M}_y^2}{2\,E\,I_y} + \dfrac{\mathcal{C}^2}{2\,\mu\,J}\Big)\,\ell\,.$

Commentaire.

Cette formule est utilisée en calcul des structures pour définir la densité d'énergie élastique de contrainte pour l'élément de milieu curviligne.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

X.5 - Module de compression apparent pour un solide en matériau hétérogène. On considère un solide plein, de volume Ω, constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope non homogène. On désigne par $\lambda(\underline{x}), \mu(\underline{x}), E(\underline{x}), \nu(\underline{x})$ les coefficients d'élasticité caractérisant le comportement isotherme de ce matériau en chaque point. On se propose d'évaluer le module élastique de compression apparent K_a pour ce solide, défini comme suit : une pression p uniforme appliquée au contour du solide produit une variation du volume Ω : $\delta\Omega = -\dfrac{p}{K_a}\,\Omega$. Encadrer K_a au moyen des principes variationnels.

Éléments de réponse :

- Par la formule de Clapeyron :
  $W^*(\underline{\underline{\sigma}}) = W(\underline{\xi}) = -\dfrac{p}{2}\displaystyle\int_{\partial\Omega} \underline{\xi}\,.\,\underline{\mathrm{d}a} = -\dfrac{p}{2}\,\delta\Omega$.
- Principe de minimum pour les déplacements :
  $\Phi(\underline{\xi}) = -p\,\delta\Omega$.
  Avec $\underline{\xi}' = \alpha\,\underline{x}$, C.A. pour le problème, où α est le paramètre de minimisation :
  $W(\underline{\xi}') = \dfrac{3}{2}\,\alpha^2 \displaystyle\int_\Omega (3\,\lambda(\underline{x}) + 2\,\mu(\underline{x}))\,\mathrm{d}\Omega$
  $\Phi(\underline{\xi}') = -p\displaystyle\int_{\partial\Omega} \underline{\xi}'\,.\,\underline{\mathrm{d}a} = -\alpha\,p\displaystyle\int_{\partial\Omega} \underline{x}\,.\,\underline{\mathrm{d}a} = -3\,\alpha\,p\,\Omega$.
  D'où par (3.25) : $\dfrac{p}{2}\,\delta\Omega \le \dfrac{3}{2}\,\alpha^2\,\langle 3\,\lambda + 2\,\mu\rangle\,\Omega + 3\,\alpha\,p\,\Omega$
  où $\langle\,\rangle$ désigne la valeur moyenne sur Ω.
  Le second membre est minimal pour $\alpha = -p/\langle 3\,\lambda + 2\,\mu\rangle$ et il vient :
  $\delta\Omega \le -\dfrac{3\,p}{\langle 3\,\lambda + 2\,\mu\rangle}\,\Omega$ d'où $3\,K_a \le \langle 3\,\lambda + 2\,\mu\rangle$.
  En introduisant $\langle K\rangle$, valeur moyenne sur Ω du module élastique de compression local $K(\underline{x})$ on a :
  $3\langle K\rangle = \langle 3\,\lambda + 2\,\mu\rangle$ et $K_a \le \langle K\rangle$.
- Principe de minimum pour les contraintes :
  $\forall \underline{\underline{\sigma}}'$ S.A. pour le problème, $\Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}') = 0$. En particulier $\Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$.
  Avec $\underline{\underline{\sigma}}' = -p\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}$, S.A. pour le problème :
  $W^*(\underline{\underline{\sigma}}') = \dfrac{p^2}{2}\displaystyle\int_\Omega \dfrac{3\,(1-2\nu(\underline{x}))}{E(\underline{x})}\,\mathrm{d}\Omega = \dfrac{p^2}{2}\left\langle\dfrac{1}{K}\right\rangle\Omega$.
  Par (3.25) : $\dfrac{p}{2}\,\delta\Omega \ge -\dfrac{p^2}{2}\left\langle\dfrac{1}{K}\right\rangle\Omega$ d'où $\dfrac{1}{K_a} \le \left\langle\dfrac{1}{K}\right\rangle$.
- Encadrement : $\dfrac{1}{\langle K\rangle} \le \dfrac{1}{K_a} \le \left\langle\dfrac{1}{K}\right\rangle$.

Commentaire.

L'encadrement obtenu est semblable à celui du paragraphe 5.3. Les bornes sont égales dans le cas du matériau homogène. La borne supérieure $\langle K\rangle$ pour K_a est la borne de Voigt ; la borne inférieure $\langle K^{-1}\rangle^{-1}$ est la borne de Reuss.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

X.6 - Tenseur des complaisances élastiques apparent pour un solide. On considère un solide plein, de volume Ω, constitué d'un matériau élastique linéaire non homogène ($\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}(\underline{x})$: tenseur des complaisances élastiques). Ce solide est soumis, à partir de l'état naturel, au chargement isotherme défini par : $\underline{F} = 0 \quad \text{sur } \Omega\,, \quad \underline{T} = \underline{T}^{\mathrm{d}} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad \text{avec } \underline{T}^{\mathrm{d}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}}\,.\,\underline{n}(\underline{x})$ où $\underline{n}(\underline{x})$ est la normale au contour $\partial\Omega$ au point courant M, et où $\underline{\underline{\Sigma}}$ désigne un tenseur symétrique constant qui est le paramètre du problème. On se place dans l'hypothèse des petites perturbations.

1° Décrire l'ensemble $\mathbb{S}(\underline{\underline{\Sigma}})$ des champs de contrainte statiquement admissibles pour le problème pour la valeur $\underline{\underline{\Sigma}}$ de son paramètre.

2° Préciser l'ensemble $\mathbb{C}$ des champs de déplacement cinématiquement admissibles pour le problème.

3° On note $\langle f \rangle$ la moyenne volumique d'une grandeur f sur Ω. Démontrer que :
$\forall\, \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S}(\underline{\underline{\Sigma}})\,,\ \forall\, \hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C} \quad \text{on a : } \langle \underline{\underline{\sigma}}^* : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \langle \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} \rangle\,.$
En déduire que $\forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S}(\underline{\underline{\Sigma}}) \quad \text{on a } \langle \underline{\underline{\sigma}}^* \rangle = \underline{\underline{\Sigma}}\,.$

4° On désigne par $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\xi}$, la solution du problème d'équilibre élastique correspondant au chargement défini par $\underline{\underline{\Sigma}}$. Montrer que la formule $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega} : \underline{\underline{\Sigma}}$ permet de définir un tenseur de complaisance élastique « apparent » $\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega}$, dépendant du solide Ω, qui possède les mêmes symétries que celles démontrées pour les tenseurs de complaisance élastique dans le cas général.
La correspondance entre $\underline{\underline{\Sigma}}$ et le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ étant évidemment linéaire, on désigne par $\underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}^{\Omega}$ le champ de tenseur qui la décrit : $\forall\, M \in \Omega \quad , \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}^{\Omega}(\underline{x}) : \underline{\underline{\Sigma}}\,.$
Donner l'expression de $\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega}$ en fonction des champs $\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}$ et $\underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}^{\Omega}$.

5° $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}(\underline{x})$ désignant le tenseur des modules d'élasticité du matériau constitutif, $\langle \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \rangle$ sa moyenne volumique, on introduit $\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{m}}$ défini par l'inversion de la relation $\underline{\underline{\sigma}}' = \langle \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \rangle : \underline{\underline{\varepsilon}}'$:

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \langle \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \rangle : \underline{\underline{\varepsilon}}' \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\varepsilon}}' = \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{m}} : \underline{\underline{\sigma}}'\,.$$

Démontrer l'encadrement :
$\forall\, \underline{\underline{\Sigma}}$ symétrique, $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{m}} : \underline{\underline{\Sigma}} \leq \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega} : \underline{\underline{\Sigma}} \leq \underline{\underline{\Sigma}} : \langle \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} \rangle : \underline{\underline{\Sigma}}\,.$

Éléments de réponse :

1° Le champ de contrainte homogène $\underline{\underline{\sigma}}'$ défini par :
$\forall\, M \in \Omega\,,\ \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}}\,,$
est statiquement admissible pour le problème pour la valeur $\underline{\underline{\Sigma}}$ de son paramètre. (Ceci implique la compatibilité des données statiques : $[\mathcal{F}_e] = 0$).
$\mathbb{S}(0\,, \partial\Omega\,, \underline{T}^{\mathrm{d}}) = \mathbb{S}(\underline{\underline{\Sigma}})$ est défini par :
$\mathrm{div}\ \underline{\underline{\sigma}}' = 0 \text{ sur } \Omega\,,$
$[\![\, \underline{\underline{\sigma}}' \,]\!]\,.\,\underline{n} = 0 \text{ sur } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}'}$ (surface de discontinuité éventuelle).
$\underline{\underline{\sigma}}'\,.\,\underline{n} = \underline{T}^{\mathrm{d}} = \underline{\underline{\Sigma}}\,.\,\underline{n} \text{ sur } \partial\Omega\,.$
2° $\mathbb{C}$ est défini par : $\underline{\xi}'$ continu, continûment différentiable par morceaux sur Ω.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

3° Par le théorème des travaux virtuels :
$\forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S}(\underline{\underline{\Sigma}}) \quad , \quad \forall \hat{\underline{\xi}} \in \mathbb{C}$,
$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^* : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} \hat{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}a = \int_\Omega \underline{\underline{\Sigma}} : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} \, \mathrm{d}\Omega = \underline{\underline{\Sigma}} : \int_\Omega \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} \, \mathrm{d}\Omega$$
d'où : $\langle \underline{\underline{\sigma}}^* : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \langle \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} \rangle$.
En choisissant $\hat{\underline{\xi}}$ de la forme $\hat{\underline{\xi}}(\underline{x}) = \hat{\underline{\underline{\alpha}}} \cdot \underline{x}$, $\hat{\underline{\underline{\alpha}}}$ symétrique quelconque, (champ de déformation homogène), il vient :
$\forall \hat{\underline{\underline{\alpha}}}$ symétrique, $\langle \underline{\underline{\sigma}}^* \rangle : \hat{\underline{\underline{\alpha}}} = \underline{\underline{\Sigma}} : \hat{\underline{\underline{\alpha}}}$
et, compte tenu de la symétrie de $\langle \underline{\underline{\sigma}}^* \rangle$ et de $\underline{\underline{\Sigma}}$ on a : $\langle \underline{\underline{\sigma}}^* \rangle = \underline{\underline{\Sigma}}$.
4°

- Compte tenu de la linéarité du problème on peut écrire la formule : $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega} : \underline{\underline{\Sigma}}$.
- La symétrie $(\Lambda_{\mathrm{a}}^{\Omega})_{i\,j\,k\,\ell} = (\Lambda_{\mathrm{a}}^{\Omega})_{i\,j\,\ell\,k}$ sera choisie par commodité pour assurer une écriture symétrique de $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle$ en fonction des composantes de $\underline{\underline{\Sigma}}$ symétrique. La symétrie $(\Lambda_{\mathrm{a}}^{\Omega})_{i\,j\,k\,\ell} = (\Lambda_{\mathrm{a}}^{\Omega})_{j\,i\,k\,\ell}$ est imposée par la symétrie de $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle$.
- La symétrie $(\Lambda_{\mathrm{a}}^{\Omega})_{i\,j\,k\,\ell} = (\Lambda_{\mathrm{a}}^{\Omega})_{k\,\ell\,i\,j}$ se démontre par le théorème de Maxwell-Betti.
  Avec des notations évidentes, il vient par (5.46) : $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \underline{\xi}^2 \cdot \underline{\underline{\Sigma}}^1 \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}a = \int_{\partial\Omega} \underline{\xi}^1 \cdot \underline{\underline{\Sigma}}^2 \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}a$
  d'où, par le théorème des travaux virtuels $\displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{\Sigma}}^1 : \underline{\underline{\varepsilon}}^2 \, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \underline{\underline{\Sigma}}^2 : \underline{\underline{\varepsilon}}^1 \, \mathrm{d}\Omega$,
  et donc $\underline{\underline{\Sigma}}^1 : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega} : \underline{\underline{\Sigma}}^2 = \underline{\underline{\Sigma}}^2 : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega} : \underline{\underline{\Sigma}}^1$ qui démontre la symétrie indiquée.
- La définition même de $\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega}$ devient, en introduisant $\underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}^{\Omega}$:
  $\forall \underline{\underline{\Sigma}}$ symétrique , $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \langle \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \langle \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}^{\Omega} \rangle : \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega} : \underline{\underline{\Sigma}}$,
  d'où : $\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega} = \langle \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}^{\Omega} \rangle$.
  Pour le matériau homogène, la solution est $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}$ d'où : $\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega} = \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}$.
  5°
- Principe de minimum pour les contraintes :
  $\Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \quad , \quad W^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\partial\Omega} \underline{\xi} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}a = \frac{1}{2} \int_\Omega \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, \mathrm{d}\Omega = \dfrac{\Omega}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega} : \underline{\underline{\Sigma}}$;
  on choisit pour $\underline{\underline{\sigma}}' \in \mathbb{S}(\underline{\underline{\Sigma}})$ le champ homogène $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\Sigma}}$
  $\Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}') = 0 \quad , \quad W^*(\underline{\underline{\sigma}}') = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} : \underline{\underline{\Sigma}} \, \mathrm{d}\Omega = \dfrac{\Omega}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \langle \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} \rangle : \underline{\underline{\Sigma}}$.
  D'où, par (3.25), la borne supérieure :
  $\forall \underline{\underline{\Sigma}}$ symétrique , $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega} : \underline{\underline{\Sigma}} \leq \langle \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} \rangle : \underline{\underline{\Sigma}}$.
- Principe de minimum pour les déplacements :
  $W(\underline{\xi}) - \Phi(\underline{\xi}) = -\dfrac{\Omega}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega} : \underline{\underline{\Sigma}}$;
  on choisit pour $\underline{\xi}'$ le champ de déformation homogène $\underline{\xi}'(\underline{x}) = \underline{\underline{\alpha}}' \cdot \underline{x}$, $\underline{\underline{\alpha}}'$ symétrique, paramètre d'optimisation :
  $\Phi(\underline{\xi}') = \displaystyle\int_{\partial\Omega} \underline{\xi}' \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}a = \int_\Omega \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{\alpha}}' \, \mathrm{d}\Omega = \Omega \, \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\alpha}}'$,
  $W(\underline{\xi}') = \displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{\alpha}}' : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\alpha}}' \, \mathrm{d}\Omega = \dfrac{\Omega}{2} \underline{\underline{\alpha}}' : \langle \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \rangle : \underline{\underline{\alpha}}'$.
  D'où par (3.25) :
  $\forall \underline{\underline{\Sigma}}$ symétrique , $\forall \underline{\underline{\alpha}}'$ symétrique , $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\alpha}}' - \dfrac{1}{2} \underline{\underline{\alpha}}' : \langle \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} \rangle : \underline{\underline{\alpha}}' \leq \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega} : \underline{\underline{\Sigma}}$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

On maximise le premier membre en $\underline{\underline{\alpha}}'$; le maximum est atteint pour la valeur $\underline{\underline{\alpha}}$ telle que :
$\langle \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} \rangle : \underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{\Sigma}}$ d'où $\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{m}} : \underline{\underline{\Sigma}}$.
On en déduit la borne inférieure de l'encadrement :
$\forall\, \underline{\underline{\Sigma}}$ symétrique , $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{m}} : \underline{\underline{\Sigma}} \leq \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega} : \underline{\underline{\Sigma}}$.

Commentaire.

- L'interprétation en termes de paramètres de chargement (cf. section 7) est évidente en se reportant à l'expression (7.16) du théorème des travaux virtuels : le chargement $\underline{Q}$ est défini par $\underline{\underline{\Sigma}}$ et le « déplacement » $\hat{\underline{q}}$ du système est représenté par $\displaystyle\int_{\Omega} \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}}\, \mathrm{d}\Omega = \Omega \langle \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} \rangle$; $\underline{Q} \,.\, \hat{\underline{q}} = \Omega\, \underline{\underline{\Sigma}} : \langle \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} \rangle$.
- L'exemple traité en Ex. X.5 est le cas particulier de cette approche générale pour lequel $\underline{\underline{\Sigma}} = -p\, \underline{\underline{\mathbb{1}}}$. On a alors : $\dfrac{\delta\, \Omega}{\Omega} = -p\, (\underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega} : \underline{\underline{\mathbb{1}}})$ d'où $\dfrac{1}{K_{\mathrm{a}}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega} : \underline{\underline{\mathbb{1}}}$.
  Par les inégalités ci-dessus : $\underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}_{\mathrm{m}} : \underline{\underline{\mathbb{1}}} \leq \dfrac{1}{K_{\mathrm{a}}} \leq \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \langle \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} \rangle : \underline{\underline{\mathbb{1}}}$
  d'où, pour le matériau isotrope : $\dfrac{1}{\langle K \rangle} = \dfrac{1}{\langle 3\,\lambda + 2\,\mu \rangle} \leq \dfrac{1}{K_{\mathrm{a}}} \leq \left\langle \dfrac{1-2\,\nu}{E} \right\rangle = \left\langle \dfrac{1}{K} \right\rangle$.
- Il est clair qu'une théorie semblable à la précédente peut être développée dans le but de définir le tenseur des modules élastiques apparent $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega}$, en partant d'une sollicitation imposée par la donnée sur $\partial\Omega$ du champ de déplacement $\underline{\xi}$ sous la forme $\underline{\xi}^{\mathrm{d}} = \underline{\underline{E}} \,.\, \underline{x}$ ($\underline{\underline{E}}$ symétrique constant). On démontre, par les raisonnements homologues des précédents, l'encadrement :
  $\forall\, \underline{\underline{E}}$ symétrique , $\underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_{\mathrm{m}} : \underline{\underline{E}} \leq \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_{\mathrm{a}}^{\Omega} : \underline{\underline{E}} \leq \underline{\underline{E}} : \langle \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \rangle : \underline{\underline{E}}$.
  Un cas particulier de cette approche sera l'essai œdométrique (cf. Ex. VIII.3) effectué sur un matériau élastique linéaire isotrope non homogène, pour lequel $\underline{\underline{E}} = -\dfrac{\delta}{\ell}\, \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$, où l'on trouve, pour le module œdométrique apparent $E_{\mathrm{a}}^{\mathrm{oe}} = Q\,\ell / S\,\delta$, l'encadrement :
  $\dfrac{1}{\langle \lambda + 2\,\mu \rangle} \leq \dfrac{1}{E_{\mathrm{a}}^{\mathrm{oe}}} \leq \left\langle \dfrac{1+\nu}{E} \right\rangle \left\langle \dfrac{1-2\,\nu}{E} \right\rangle \Big/ \left\langle \dfrac{\nu}{E} \right\rangle$.
- L'exemple traité au paragraphe 5.3 ne se rattache, quant à lui, à aucune de ces deux approches.
- Ceci fournit une illustration, non exhaustive, des multiples façons d'envisager la définition d'un matériau homogène « équivalent » à un matériau non homogène constituant un solide donné, qui se retrouvent aussi dans la théorie de l'homogénéisation.

X.7 - Compression avec frottement. Un solide cylindrique de section S , de hauteur ℓ , parallèle à Oz , constitué d'un matériau homogène élastique linéaire isotrope est placé entre les deux plateaux (parallèles à Oxy) d'une presse. L'état initial est naturel et l'on procède au chargement du solide en maintenant immobile le plateau de cote $z = 0$, et en imposant au plateau de cote $z = \ell$ un déplacement parallèle à Oz égal à $\xi_z^{\mathrm{d}} = -\delta\, (\delta > 0)$. La surface latérale du solide est libre de contrainte. La température est maintenue constante. On suppose que le contact entre le solide et les plateaux de la presse est à adhérence totale, c'est-à-dire qu'aucun glissement n'est possible dans ces interfaces. Il n'y a pas de force de masse. Exprimer l'encadrement « énergétique » fourni par l'application des principes de minimum en déplacement et en contrainte. Préciser les résultats dans les cas où l'on utilise pour $\underline{\xi}'$ un champ linéaire et pour $\underline{\underline{\sigma}}'$ un champ homogène.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Éléments de réponse :

- $\underline{\xi}' \in \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\,\xi_i^{\rm d}) \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \xi'_x = \xi'_y = 0 \text{ sur } S_0 \text{ et } S_\ell \\ \xi'_z = 0 \text{ sur } S_0\,,\ \xi'_z = -\delta \text{ sur } S_\ell \end{array} \right.$

$\underline{\underline{\sigma}}' \in \mathbb{S}\,(\underline{F}\,,\,S_{T_i}\,,\,T_i^{\rm d}) \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \text{div } \underline{\underline{\sigma}}' = 0 \\ \\ \underline{\underline{\sigma}}'\,.\,\underline{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega - S_0 - S_\ell \end{array} \right.$

- Compte tenu des données on a :
  $\forall\,\underline{\xi}' \in \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\,\xi_i^{\rm d})\,,\ \Phi\,(\underline{\xi}') = 0\,;$
  $\forall\,\underline{\underline{\sigma}}' \in \mathbb{S}\,(\underline{F}\,,\,S_{T_i}\,,\,T_i^{\rm d})\,,\ \Phi^*\,(\underline{\underline{\sigma}}') = -\delta \displaystyle\int_{S_\ell} \sigma'_{zz}\,{\rm d}a\,;$
  par la formule de Clapeyron :
  $W\,(\underline{\xi}) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{S_\ell} -\delta\,\sigma_{zz}\,{\rm d}a = \dfrac{1}{2}\,\delta\,Z$
  où $Z = -\displaystyle\int_{S_\ell} \sigma_{zz}\,{\rm d}a$ désigne la force, comptée positivement en compression, exercée par les plateaux sur le solide.
- L'encadrement (5.18) s'écrit alors :
  $\forall\,\underline{\underline{\sigma}}' \in \mathbb{S}\,(\underline{F}\,,\,S_{T_i}\,,\,T_i^{\rm d})\,,\ \forall\,\underline{\xi}' \in \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\,\xi_i^{\rm d})\,,$
  $-2\,W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}')/\delta - 2\displaystyle\int_{S_\ell} \sigma'_{zz}\,{\rm d}a \le Z \le 2\,W\,(\underline{\xi}')/\delta\,.$
- $\underline{\xi}'$ linéaire $\in \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\,\xi_i^{\rm d})$ est nécessairement de la forme $\underline{\xi}' = -\delta\,\dfrac{z}{\ell}\,\underline{e}_z$ d'où $\underline{\underline{\varepsilon}}' = -\dfrac{\delta}{\ell}\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ et $2\,W\,(\underline{\xi}')/\delta = S\,\dfrac{\delta}{\ell}\,(\lambda + 2\,\mu)$.
- $\underline{\underline{\sigma}}'$ homogène $\in \mathbb{S}\,(\underline{F}\,,\,S_{T_i}\,,\,T_i^{\rm d})$ est nécessairement de la forme $\underline{\underline{\sigma}}' = \sigma'\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ où σ' est arbitraire.
  On a : $-2\,W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}')/\delta - 2\displaystyle\int_{S_\ell} \sigma'_{zz}\,da = -S\left(\dfrac{\ell}{\delta}\,\dfrac{\sigma'^2}{E} + 2\,\sigma'\right)$
  dont le maximum, atteint pour $\sigma' = -E\,\delta/\ell$, vaut $S\,E\,\delta/\ell$.
- On obtient l'encadrement : $S\,E\,\dfrac{\delta}{\ell} \le Z \le S\,(\lambda + 2\,\mu)\,\dfrac{\delta}{\ell} = S\,E\,\dfrac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\,\nu)}\,\dfrac{\delta}{\ell}\,.$

Commentaire.

On remarque que pour $\nu = 0$, l'encadrement donne la valeur exacte $Z = S\,E\,\delta/\ell$: l'adhérence aux interfaces solide-plateaux n'a en effet pas d'influence puisqu'il n'y a pas « d'effet Poisson ».
Pour $\nu = 1/2$ la borne supérieure devient infinie : en effet l'incompressibilité du matériau implique que tout tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}'$ de trace non nulle correspond à $\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}') = +\infty$ (à rapprocher des méthodes de pénalisation en analyse numérique) ; on doit donc, pour l'application du principe de minimum pour les déplacements, utiliser des champs $\underline{\xi}'$ à divergence nulle.

Pour $\nu = 1/4$ par exemple, on obtient $S\,E\,\dfrac{\delta}{\ell} \le Z \le \dfrac{6}{5}\,S\,E\,\dfrac{\delta}{\ell}$, résultat qui serait à améliorer par la construction de champs plus raffinés.
L'interprétation du problème en termes de paramètres de chargement (section 7) est évidente : le paramètre cinématique est $q = \delta$ et le paramètre de chargement, défini par dualité, est $Q = Z$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

X.8 - Évaluations de l'inertie de torsion. Le problème de la torsion élastique d'une barre cylindrique (chapitre VIII, section 7) est ici posé avec, sur S_0 et S_ℓ, les données mixtes (cf. Ex. X.1) :

S_0 : $\xi_x^{\rm d} = \xi_y^{\rm d} = 0 \quad , T_z^{\rm d} = 0$

S_ℓ : $\xi_x^{\rm d} = -\alpha\,\ell\,y \quad , \xi_y^{\rm d} = \alpha\,\ell\,x\,, \; T_z^{\rm d} = 0\,.$

1° En considérant les champs de déplacement et de contrainte de la forme :

$\xi'_x = -\alpha\,z\,y\,,\ \xi'_y = \alpha\,z\,x\,,\ \xi'_y = \alpha\,f\,(x,y)$ pour $\underline{\xi}'$,

$\sigma'_{ij} = 0$ sauf $\sigma'_{xz} = \sigma'_{zx} = \mu\,\alpha\,\dfrac{\partial\,g}{\partial\,y}$ et $\sigma'_{yz} = \sigma'_{zy} = -\mu\,\alpha\,\dfrac{\partial g}{\partial x}$ pour $\underline{\underline{\sigma}}'$,

où f et g sont des fonctions de (x,y) satisfaisant des conditions que l'on précisera, montrer que l'encadrement « énergétique » (3.24) peut se mettre sous la forme :

$$-\mu\,\alpha\int_{S_\ell}\Big(\Big(\frac{\partial g}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial g}{\partial y}\Big)^2-4g\Big)\,{\rm d}a \le \mathcal{C} \le \mu\,\alpha\int_{S_\ell}\Big(\Big(\frac{\partial f}{\partial x}-y\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial y}+x\Big)^2\Big)\,{\rm d}a\,.$$

2° Vérifier que si $\underline{\xi}'$ et $\underline{\underline{\sigma}}'$ correspondent à la solution exacte du problème, l'encadrement se réduit à l'égalité déterminant l'inertie de torsion J de la barre.

3° Une théorie élémentaire utilisée pour déterminer approximativement l'inertie de torsion d'une barre cylindrique de section quelconque consiste à supposer que les répartitions des contraintes de cisaillement sur les bases demeurent identiques à celles déterminées dans le cas de la section circulaire : formule (7.36) du chapitre VIII à partir du centre d'inertie de la section. Placer la valeur approchée ainsi obtenue pour J par rapport à la valeur exacte. En désignant par I_1 et I_2 les moments d'inertie principaux de la section, montrer que l'on a aussi la majoration : $J \le 4\,I_1\,I_2\,/(I_1+I_2)$.

4° Application à la détermination approchée de l'inertie de torsion d'une barre de section carrée.

Éléments de réponse :

1°

$$\underline{\xi}' \in \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\,\xi_i^{\rm d}) \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} \xi'_x = \xi'_y = 0 \text{ sur } S_0 \\ \xi'_x = -\alpha\,\ell\,y \quad , \quad \xi'_y = \alpha\,\ell\,x \text{ sur } S_\ell \end{array}\right.$$

$$\underline{\underline{\sigma}}' \in \mathbb{S}\,(\underline{\underline{F}},\,S_{T_i}\,,\,T_i^{\rm d}) \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} {\rm div}\,\underline{\underline{\sigma}}' = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \sigma'_{zz} = 0 \text{ sur } S_0 \text{ et } S_\ell \\ \underline{\underline{\sigma}}'\,.\,\underline{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega - S_0 - S_\ell \end{array}\right.$$

- Les champs $\underline{\xi}'$ proposés sont cinématiquement admissibles avec les données du problème sous réserve que f soit continue et continûment dérivable par morceaux.
  Les champs $\underline{\underline{\sigma}}'$ proposés sont statiquement admissibles avec les données du problème si g est C^1 et C^2 par morceaux et si $g(x\,,\,y)$ est constante sur ∂S ; on prendra, sans restreindre la généralité : $g = 0$ sur ∂S.
- Compte tenu des données on a :
  $\forall\,\underline{\xi}' \in \mathbb{C}\,(S_{\xi_i}\,,\xi_i^{\rm d})\,,\ \Phi\,(\underline{\xi}') = 0\,,$
  et, par la formule de Clapeyron

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

$W(\underline{\xi}) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{S_\ell} (-\alpha\,\ell\,y\,\sigma_{zx} + \alpha\,\ell\,x\,\sigma_{zy})\,\mathrm{d}a = \dfrac{1}{2}\,\alpha\,\ell\,\mathcal{C}$

où $\mathcal{C} = \displaystyle\int_{S_\ell} (-y\,\sigma_{zx} + x\,\sigma_{zy})\,\mathrm{d}a$ est le couple de torsion exercé sur la base S_ℓ.

- Pour les champs de la forme proposée dans $\mathbb{C}(S_{\xi_i}, \xi_i^{\mathrm{d}})$ et $\mathbb{S}(\underline{F}, S_{T_i}, T_i^{\mathrm{d}})$:

$W(\underline{\xi}') = \dfrac{\mu\,\alpha^2\,\ell}{2}\displaystyle\int_S \Big(\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - y\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial y} + x\Big)^2\Big)\,\mathrm{d}a$

$W(\underline{\underline{\sigma}}') = \dfrac{\mu\,\alpha^2\,\ell}{2}\displaystyle\int_S \Big(\Big(\frac{\partial g}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial g}{\partial y}\Big)^2\Big)\,\mathrm{d}a$

$\Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}') = -\mu\,\alpha^2\,\ell\displaystyle\int_S \Big(y\frac{\partial g}{\partial y} + x\frac{\partial g}{\partial x}\Big)\,\mathrm{d}a = \mu\,\alpha^2\ell\int_S 2\,g\,\mathrm{d}a$ (en appliquant la formule de la divergence à $\displaystyle\int_S \mathrm{div}\,(g\,x\,\underline{e}_x + g\,y\,\underline{e}_y)\,\mathrm{d}a$ compte tenu de ce que $g = 0$ sur ∂S).

Dans l'état d'équilibre élastique, $\mathcal{C} = \mu\,\alpha\,J$ d'où :

$$-\int_{S_\ell} \Big(\Big(\frac{\partial g}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial g}{\partial y}\Big)^2 - 4g\Big)\,\mathrm{d}a \le J \le \int_{S_\ell} \Big(\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - y\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial y} + x\Big)^2\Big)\,\mathrm{d}a$$

avec $g = 0$ sur ∂S.

2° La solution du problème est définie par les fonctions harmoniques conjuguées φ et ψ (chapitre VIII, section 7) et on a, par comparaison :

$f = \varphi$, $g = \psi - (x^2+y^2)/2$ avec $\psi = (x^2+y^2)/2$ sur ∂S et $\Delta g = -2$ sur S.

Par substitution il vient :

$$-\int_{S_\ell} \Big(\Big(\frac{\partial g}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial g}{\partial y}\Big)^2 - 4g\Big)\,\mathrm{d}a \le J \le \int_{S_\ell} \Big(\Big(\frac{\partial g}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial g}{\partial y}\Big)^2\Big)\,\mathrm{d}a\ ;$$

en appliquant la formule de la divergence à $\displaystyle\int_S \mathrm{div}\,\big(g\,(\underline{\mathrm{grad}}\,g)\big)\,\mathrm{d}a$ on montre l'égalité des deux bornes de l'inégalité double.

3° La méthode « élémentaire » proposée donne pour $\mathcal{C}$ la valeur $\mathcal{C} = \displaystyle\int_{S_\ell} \mu\,\alpha\,r^2\,da$,

d'où $J = \displaystyle\int_{S_\ell} r^2\,\mathrm{d}a$ où r désigne le rayon-vecteur à partir du centre d'inertie de la section.

La valeur obtenue pour J est donc le moment d'inertie polaire de la section par rapport à son centre d'inertie. Cette valeur n'est autre que le minimum obtenu pour la borne supérieure de l'encadrement de J si l'on se restreint pour f à des fonctions linéaires de x et y. ***La théorie « élémentaire » fournit une évaluation par excès de*** J.

On place les axes Ox et Oy selon les axes principaux d'inertie. La majoration proposée pour J s'obtient en optimisant la borne supérieure correspondant à $f(x,y) = Axy$ (A : paramètre). Si $I_1 \neq I_2$, elle est meilleure que celle fournie par la théorie élémentaire car

$4\,I_1\,I_2/(I_1+I_2) \le \displaystyle\int_{S_\ell} r^2\,\mathrm{d}a = I_1 + I_2$.

4° Section carrée de côté $2\,a$.

En plaçant les axes Ox et Oy selon les médianes du carré

- avec $f = 0$: $J \le \dfrac{8}{3}\,a^4 \simeq 2,67\,a^4$
- avec $g = A\,(x^2-a^2)(y^2-a^2)$, et en optimisant par rapport à A la borne inférieure de J ainsi obtenue :

$\dfrac{20}{9}\,a^4 \simeq 2,22\,a^4 \le J$.

Commentaire.

La formulation du problème en termes de paramètres de chargement (section 7) est évidente (cf. Ex. X.1) :

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

$q = \alpha\,\ell$, $Q = \mathcal{C}$.

L'application des formules du calcul des variations aux deux intégrales encadrant J permet de montrer que la borne inférieure est maximale lorsque g , nulle sur ∂S est à laplacien constant égal à -2 sur S , et que la borne supérieure est minimale lorsque f est harmonique sur S et vérifie $\dfrac{\partial f}{\partial n} = n_1\,y - n_2\,x$ sur ∂S . Ceci confirme la vérification donnée ci-dessus.

Pour la section carrée, un choix de fonctions f et g plus raffinées permet un meilleur encadrement de J dont la valeur exacte est $J = 2,2496\,a^4$.

On a vérifié au chapitre VIII (§ 7.4) que la solution donnée au problème de la torsion élastique est invariante par rapport au choix des axes Ox , Oy et de l'origine O dans S_0. Le problème a été posé ici sans spécifier la position de ces axes et on peut vérifier que l'encadrement ci-dessus en est, lui aussi, indépendant : l'expression de la borne inférieure est intrinsèque ; elle prend la même valeur si, dans le changement de coordonnées, les expressions des fonctions g correspondent à la même fonction du point courant M , vérifiant $g = 0$ sur ∂S ; l'expression de la borne supérieure est inchangée si, dans le changement de coordonnées la fonction f est modifiée selon la formule (7.24) du chapitre VIII.

X.9 – Dislocation-vis. Le solide étudié est un tube limité par deux cylindres circulaires coaxiaux d'axe Oz et de rayons r_0 et $r_1\,(r_1 > r_0)$ et par deux bases S_0 et S_ℓ distantes de $\ell \gg r_1$. Le tube est fendu suivant le demi-plan méridien xOz . L'état initial est naturel et la température est maintenue constante. Le matériau constitutif est homogène, linéairement élastique, isotrope.

1° On se propose de produire un déplacement relatif des deux lèvres du tube parallèlement à Oz . Montrer que le champ de déplacement défini, en coordonnées cartésiennes par :

$$\xi_x = 0\,, \quad \xi_y = 0\,, \quad \xi_z = A\,\theta$$

où A est une longueur donnée ($A \ll r_0$) et où θ désigne l'angle polaire autour de Oz par rapport à Ox , satisfait l'équation de Navier sans force de masse. En déduire les efforts extérieurs à imposer pour produire ce champ de déplacement. Déterminer, dans l'état d'équilibre correspondant, l'énergie élastique du solide.

2° En maintenant les efforts extérieurs ci-dessus, on soude l'une à l'autre les deux lèvres du tube, et l'on relâche le système. Montrer qu'il est possible, par superposition, de construire une solution du nouveau problème d'équilibre élastique, valable au sens du principe de Saint Venant, qui permet de déterminer l'état d'autocontrainte dans le tube et les déformations correspondantes. Calculer l'énergie élastique du tube dans cet état d'équilibre sous chargement nul (au sens du principe de Saint Venant).

Éléments de réponse :

1° On a : $\operatorname{div} \underline{\xi} = 0$ et $\operatorname{div}(\underline{\operatorname{grad}}\,\underline{\xi}) = 0$; l'équation de Navier sans force de masse est vérifiée.

- $\underline{\underline{\varepsilon}} = \dfrac{A}{2\,r}\,(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta)$ d'où $\underline{\underline{\sigma}} = \mu\dfrac{A}{r}\,(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta)$.
- Efforts extérieurs à imposer au contour.

  Surfaces $r = r_0$ et $r = r_1$ libres de contrainte ;

  base S_0 : $\underline{T}^{\mathrm{d}} = -\mu\dfrac{A}{r}\,\underline{e}_\theta$; base S_ℓ : $\underline{T}^{\mathrm{d}} = \mu\dfrac{A}{r}\,\underline{e}_\theta$;

  lèvre 0^+ : $\underline{T}^{\mathrm{d}} = -\mu\dfrac{A}{r}\,\underline{e}_z$; lèvre $2\,\pi^-$: $\underline{T}^{\mathrm{d}} = \mu\dfrac{A}{r}\,\underline{e}_z$.

  Sur la base S_ℓ (resp. S_0) les contraintes de cisaillement imposées $\underline{T}^{\mathrm{d}}$ ont une résultante nulle et sont équivalentes au couple $\mathcal{C} = \pi\,\mu\,A\,(r_1^2 - r_0^2)$ (resp. $-\mathcal{C}$) selon Oz .

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Sur la lèvre $2\,\pi^-$ (resp. 0^+) la résultante des contraintes de cisaillement est :
$\underline{Z} = \ell\,\mu\,A\,\ln\dfrac{r_1}{r_0}\,\underline{e}_z$ (resp. $-\underline{Z}$).

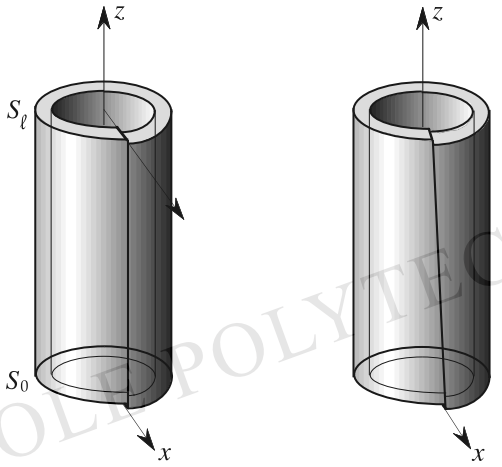
- Par la formule de Clapeyron on détermine l'énergie élastique $W\,(\underline{\xi}) = W^*\,(\underline{\underline{\sigma}})$ en remarquant que les contraintes de cisaillement appliquées sur S_0 et S_ℓ ont une contribution nulle (elles ne travaillent pas dans le chargement du système) :
$W\,(\underline{\xi}) = W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}) = \pi\,\ell\,\mu\,A^2\,\ln\dfrac{r_1}{r_2}$.

2° Après cette histoire de chargement le tube soudé est sous chargement extérieur nul. La solution de ce problème s'obtient en superposant à la précèdente une solution qui respecte la continuité des déplacements dans tout le tube et notamment sur les lèvres solidarisées et qui corresponde à des contraintes de cisaillement opposées de celles précédemment trouvées sur les bases S_0 et S_ℓ et sur la partie débordante de chaque lèvre, de façon à ainsi annuler les efforts extérieurs totaux.

- Faute de connaître cette solution, on superpose celle du problème de la torsion du tube circulaire (chap. VIII, § 7.6) sous le couple $-\mathcal{C}$. Elle respecte la continuité des déplacements et permet d'annuler le ***torseur*** des efforts de cisaillement sur chacune des bases S_0 et S_ℓ. Ainsi et en négligeant les effets dus à l'extrémité débordante de chaque lèvre puisque $A \ll r_0 \ll \ell$, la solution totale est acceptable du point de vue du principe de Saint Venant pour l'équilibre du tube sous chargement extérieur nul après solidarisation des lèvres.
- Champ de déplacement final : $\xi_r = 0 \quad , \quad \xi_\theta = -2\,A\,z\,r/(r_1^2 + r_0^2) \quad , \quad \xi_z = A\,\theta$;
champ de contrainte : $\underline{\underline{\sigma}} = \mu\,A\big(\dfrac{1}{r} - \dfrac{2r}{r_1^2 + r_0^2}\big)\,(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta)$;
on en déduit les contraintes de cisaillement sur S_0 et S_ℓ dont les torseurs sont nuls, et les efforts sur les facettes méridiennes :
la résultante sur une section du tube de normale $\underline{e}_\theta$ (lèvre $2\,\pi^-$ par exemple) est
$\underline{Z}^0 = \ell\,\mu\,A\big(\ln\dfrac{r_1}{r_0} - \dfrac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2 + r_0^2}\big)\,\underline{e}_z$.
- On applique les résultats de Ex. X.3 et Ex. X.4 ; dans l'état final :

$$W\,(\underline{\xi}) = W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}) = \pi\,\ell\,\mu\,A^2\,\ln\frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{2}\,\frac{\mathcal{C}^2\ell}{\mu\,J} - \frac{C^2\ell}{\mu\,J}$$

$$W\,(\underline{\xi}) = W^*\,(\underline{\underline{\sigma}}) = \pi\,\ell\,\mu\,A^2\,\Big(\ln\frac{r_1}{r_0} - \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2 + r_0^2}\Big)\,.$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Commentaire.

On contrôle, en supposant par exemple $A > 0$, que les orientations des déplacements et des efforts dans l'état final sont celles prévisibles par le bon sens ; on remarque en particulier la torsion en retour après solidarisation et relâchement. Ce problème, qui met en évidence et permet de calculer l'énergie élastique stockée dans le « défaut » ainsi créé, est utilisé comme modèle en physique des solides : la « dislocation-vis ».

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Annexe III

Éléments d'élasticité plane

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MOTS CLÉS

Déformation plane. Contrainte plane.
Problèmes bidimensionnels.
Fonction de contraintes. Fonction d'Airy.
Compatibilité bidimensionnelle.
Compatibilité transversale.
Approximation des tranches minces.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En bref...

Les problèmes d'équilibre en *déformation plane* sont caractérisés par le fait que leur solution comporte un champ de déplacement parallèle à un plan (Oxy) et indépendant de la coordonnée transversale orthogonale (z). Lorsque le système concerné est constitué d'un matériau homogène dont le comportement est thermoélastique linéaire, isotrope, les données géométriques, mécaniques et thermiques, qui définissent un tel problème peuvent être précisées. La résolution du problème d'équilibre thermoélastique linéarisé tridimensionnel ainsi posé se ramène à celle d'un *problème bidimensionnel* posé sur la *section droite du système* étudié. Celui-ci a la forme d'un problème d'équilibre thermoélastique linéarisé régulier où les tenseurs bidimensionnels des contraintes et des déformations linéarisées sont associés par la *loi de comportement élastique bidimensionnelle de déformation plane*, déduite de la loi de comportement thermoélastique tridimensionnelle du matériau constitutif. La solution du problème d'équilibre thermoélastique tridimensionnel initial est obtenue en complétant le champ de contrainte par une composante principale selon Oz, calculée à partir du champ bidimensionnel (section 2).

Les problèmes d'équilibre en *contrainte plane* sont, eux, caractérisés par les propriétés du champ de contrainte solution : celui-ci est plan parallèlement à Oxy et il est indépendant de la coordonnée z. Pour un système constitué d'un matériau homogène, thermoélastique linéaire isotrope, on définit la forme des données associées à ce type de problèmes. La résolution amène à celle d'un *problème bidimensionnel* posé sur la *section droite du système* étudié, qui se révèle être *identique* à celui mis en évidence pour la déformation plane sauf en ce qui concerne la relation associant les tenseurs bidimensionnels des contraintes et des déformations linéarisées. La *loi de comportement élastique bidimensionnelle* qui intervient est en effet celle de la *contrainte plane*, déduite, elle aussi, de la loi de comportement thermoélastique tridimensionnelle du matériau constitutif. La solution du problème d'équilibre thermoélastique initial est obtenue en complétant le champ de déplacement par une composante transversale selon Oz. Les conditions pour que ceci soit possible se révèlent très contraignantes en raison de la *compatibilité géométrique transversale* des déformations. Les problèmes d'équilibre thermoélastique linéarisés en contrainte plane ne sont le plus souvent valables que dans l'approximation des *tranches minces* (section 3).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Principales notations

Notation	Signification	1ère formule
$\underline{F}_2\,(\underline{x}_2)$	force de masse parallèle à Oxy	(2.4)
$\underline{\xi}_2(\underline{x}_2)$	déplacement bidimensionnel	(2.10)
grad_2	gradient bidimensionnel	(2.15)
div_2	divergence bidimensionnelle	(2.15)
$\underline{\underline{\varepsilon}}_2(\underline{x}_2)$	déformation bidimensionnelle partie bidimensionnelle de $\underline{\underline{\varepsilon}}$	(2.16) (3.13)
$\underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2)$	partie bidimensionnelle de $\underline{\underline{\sigma}}$ contrainte bidimensionnelle	(2.20) (3.8)
Δ_2	laplacien bidimensionnel	(2.40)
$\mathcal{V}(\underline{x}_2)$	potentiel des forces de masse	(2.42)
$\phi(\underline{x}_2)$	fonction d'Airy	(2.43)
$\Delta_2\Delta_2$	bilaplacien bidimensionnel	(2.45)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Problèmes plans 293
2 Équilibre thermoélastique en déformation plane 293
2.1 Tenseur des déformations plan 293
2.2 Champ de déplacement de déformation plane 294
2.3 Équilibre thermoélastique pour un matériau homogène, isotrope, en déformation plane 294
2.4 Résolution par la méthode des déplacements 296
2.5 Résolution par la méthode des contraintes 300
2.6 Le problème bidimensionnel de la déformation plane . . 302
2.7 Équation de Beltrami bidimensionnelle 303
2.8 Cas où les forces de masse dérivent d'un potentiel ; fonction d'Airy 304
2.9 Tube cylindrique sous pressions, en déformation plane . 305
3 Équilibre thermoélastique en contrainte plane 306
3.1 Tenseur des contraintes plan 306
3.2 Champ de contrainte plane 306
3.3 Équilibre thermoélastique pour un matériau homogène, isotrope, en contrainte plane 307
3.4 Résolution 308
3.5 Tube cylindrique sous pression en contrainte plane . . . 314
Récapitulatif des formules essentielles 315

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Éléments d'élasticité plane

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1 Problèmes plans

On se propose de donner un aperçu élémentaire sur l'étude des problèmes d'équilibre thermoélastique linéaires dans le cas où le matériau constitutif est homogène, isotrope, dans les conditions de ***l'élasticité plane.***

Dans cette présentation succincte, on s'attachera essentiellement

- à définir les problèmes tridimensionnels de ***déformation plane*** et de ***contrainte plane*** en thermoélasticité,
- à montrer comment la résolution d'un tel problème se ramène ou amène à celle d'un problème d'équilibre thermoélastique ***bidimensionnel***, ce qui permet, par la réduction du nombre des fonctions inconnues et des variables, une simplification importante, notamment par l'introduction de la fonction de contrainte ou fonction d'Airy.

De nombreux traités classiques permettront au lecteur d'approfondir le sujet, en particulier en ce qui concerne l'utilisation des fonctions de variables complexes.

On doit aussi signaler que le concept ainsi introduit de problèmes en déformation plane ou en contrainte plane a une portée générale, qui dépasse le cadre des hypothèses du comportement élastique, de l'homogénéité et de l'isotropie du matériau constitutif.

2 Équilibre thermoélastique en déformation plane

2.1 Tenseur des déformations plan

Soit $Oxyz$ un repère orthonormé. On dit que le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est plan parallèlement à Oxy s'il est de la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{xx}\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \varepsilon_{xy}\,\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \varepsilon_{yx}\,\underline{e}_y \otimes \underline{e}_x + \varepsilon_{yy}\,\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \tag{2.1a}$$

que l'on écrira aussi :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{\alpha\beta}\,\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \qquad \alpha, \beta = x, y \ ^{(1)} \tag{2.1b}$$

en introduisant les indices grecs α , β pour les vecteurs bases dans le plan Oxy.

(1) Sommation sur les indices répétés.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

2.2 Champ de déplacement de déformation plane

Par rapport à une configuration de référence, on dit que le champ de déplacement $\underline{\xi}$ d'un système continu tridimensionnel est de déformation plane parallèlement à Oxy s'il possède les propriétés suivantes : $\xi_x\,,\xi_y\,,\xi_z$ désignant ses composantes,

$$\left\{\begin{array}{l}\xi_z = 0\\ \xi_x \text{ et } \xi_y \text{ indépendantes de } z\end{array}\right. \tag{2.2}$$

ou encore :

$$\boxed{\begin{array}{c}\xi_z = 0\\ \dfrac{\partial \xi_x}{\partial z} = \dfrac{\partial \xi_y}{\partial z} \equiv 0\end{array}} \tag{2.3}$$

Il est évident que ces hypothèses impliquent qu'en chaque point le tenseur des déformations linéarisé correspondant est ***plan*** parallèlement à Oxy de la forme (2.1). De plus le champ de déformation linéarisée est ***indépendant de*** z.

2.3 Équilibre thermoélastique pour un matériau homogène, isotrope, en déformation plane

On va s'intéresser aux problèmes d'équilibre thermoélastique pour un solide en matériau homogène, isotrope, dont la résolution aboutit à la détermination d'un champ de déplacement $\underline{\xi}$ de la forme (2.2).

Il va de soi qu'un problème n'est, en règle générale, pas posé en tant que problème de déformation plane mais que, compte tenu de l'isotropie du matériau constitutif, la forme des données (forces de masse et champ d'écart de température dans le volume, forces surfaciques et déplacements au contour) incitera à rechercher la solution sous la forme (2.2). Cette hypothèse sera justifiée a posteriori par la construction de la solution (cf. chapitre VIII, § 3.1 et 4.4).

Compte tenu des résultats acquis au chapitre VIII (§ 4.3) on ne considérera que des problèmes d'équilibre élastique isotherme représentant, soit le problème posé initialement lorsque celui-ci est lui-même isotherme, soit le problème isotherme associé à un problème posé initialement avec variation thermique. En conséquence les hypothèses énoncées dans la suite relativement aux données se réfèreront aux données de ce problème isotherme associé. On rappelle que les champs de déplacement solutions d'un problème d'équilibre thermoélastique et de son problème isotherme associé sont identiques : en conséquence la notion de problème de déformation plane est conservée entre ces deux problèmes

Position du problème d'équilibre élastique en déformation plane

Le système considéré, de volume Ω, a une forme cylindrique, parallèle à Oz. On désigne par ℓ sa hauteur et par S sa section droite ; S_0 et S_ℓ sont les sections d'extrémités, de cotes $z = 0$ et $z = \ell$ (figure 1).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

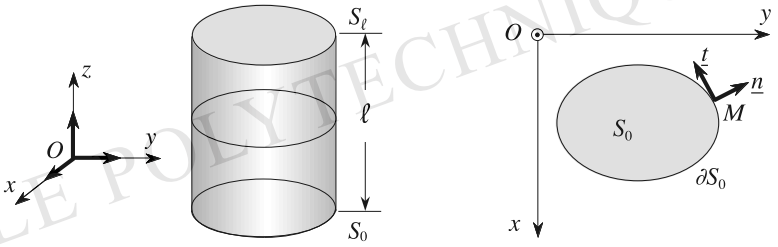


Figure 1 – Problème d'équilibre élastique en déformation plane

Les données du problème d'équilibre élastique sont supposées de la forme suivante.

• ***Forces de masse.***

Les forces de masse sont parallèles à Oxy et indépendantes de z. Elles peuvent donc être définies sur S, section droite quelconque de Ω et en particulier sur S_0 :

$$\underline{F}\,(\underline{x}) = \underline{F}_2\,(\underline{x}_2) \quad , \quad \underline{x}_2 \in S_0 \quad , \quad \underline{x} = \underline{x}_2 + z\,\underline{e}_z \quad , \quad 0 \leq z \leq \ell\,, \tag{2.4}$$

où $\underline{x}_2$ désigne la projection sur Oxy du vecteur-position du point courant dans la section S, et $\underline{F}_2$ est un vecteur bidimensionnel parallèle au plan Oxy de S_0.

• ***Données au contour sur S_0 et S_ℓ.***

S_0 et S_ℓ sont des surfaces S_{ξ_z} : la composante ξ_z de $\underline{\xi}$ est imposée ***nulle*** :

$$\xi_z\,(\underline{x}) = \xi_z^{\mathrm{d}}\,(\underline{x}) = 0 \text{ sur } S_0 \text{ et } S_\ell\,. \tag{2.5}$$

S_0 et S_ℓ sont des surfaces S_{T_x} et S_{T_y} : les composantes T_x et T_y de la force surfacique $\underline{T}$ sont imposées ***nulles*** :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_x\,(\underline{x}) = T_x^{\mathrm{d}}\,(\underline{x}) = 0\,, \\ \\ T_y\,(\underline{x}) = T_y^{\mathrm{d}}\,(\underline{x}) = 0\,, \quad \text{sur } S_0 \text{ et } S_\ell\,. \end{array} \right. \tag{2.6}$$

• ***Données au contour sur la surface latérale.***

Les données sur la surface latérale de Ω sont ***indépendantes*** de z : elles sont définies en fonction du vecteur-position bidimensionnel $\underline{x}_2$ sur le contour ∂S_0 de S_0.

Pour la direction Oz, ∂S_0 est décomposé en $(\partial S_0)_{\xi_z}$ et $(\partial S_0)_{T_z}$ complémentaires. Les données correspondantes sont ***nulles*** :

$$\xi_z^{\mathrm{d}}\,(\underline{x}_2) = 0 \quad \text{sur } (\partial S_0)_{\xi_z} \tag{2.7}$$

$$T_z^{\mathrm{d}}(\underline{x}_2) = 0 \quad \text{sur } (\partial S_0)_{T_z} \tag{2.8}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Les deux autres données concernent les composantes des vecteurs $\underline{\xi}\,(\underline{x})$ et $\underline{T}\,(\underline{x})$ selon deux directions orthogonales du plan Oxy indépendantes de z, en chaque point de $(\partial\Omega - S_0 - S_\ell)$. Les conditions au contour correspondantes s'écrivent :

$$(2.9)\qquad \begin{cases} \underline{T}_i\,(\underline{x}) = \underline{T}_i^{\mathrm{d}}\,(\underline{x}_2) \quad \text{sur } (\partial S_0)_{T_i} \\ \underline{\xi}_i\,(\underline{x}) = \xi_i^{\mathrm{d}}\,(\underline{x}_2) \quad \text{sur } (\partial S_0)_{\xi_i} \\ (\partial S_0)_{T_i} \cup (\partial S_0)_{\xi_i} = \partial S_0 \quad , \quad (\partial S_0)_{T_i} \cap (\partial S_0)_{\xi_i} = \varnothing\,,\ i = 1,2 \\ \underline{x} = \underline{x}_2 + z\,\underline{e}_z \quad , \quad 0 \le z \le \ell \end{cases}$$

où les directions $i = 1$ et 2 correspondent, en général, à la normale et à la tangente à ∂S_0 au point courant M (figure 1).

Remarque

Pour un problème d'équilibre thermoélastique avec variation de température, les conditions précédentes doivent être remplies pour le problème isotherme associé. On peut remarquer que ceci est en particulier vérifié lorsque les données « mécaniques » du problème initial ont elles-mêmes la forme indiquée par (2.4 à 2.9) et que le champ d'écart de température τ donné est indépendant de z.

2.4 Résolution par la méthode des déplacements

Forme du champ de déplacement

La forme des données ci-dessus (2.4 à 2.9) incite à rechercher la solution du problème par la méthode des déplacements en supposant a priori pour le champ $\underline{\xi}$ la forme (2.2) : champ de déplacement de déformation plane parallèlement à Oxy, qui est indépendant de z. Ce champ de déplacement sur Ω peut être défini à partir d'un champ vectoriel ***bidimensionnel*** $\underline{\xi}_2(\underline{x}_2)$ sur la section S_0 :

$$(2.10)\qquad \underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{\xi}_2(\underline{x}_2) \quad , \quad \underline{x}_2 \in S_0 \quad , \quad \underline{x} = \underline{x}_2 + z\,\underline{e}_z \quad , \quad 0 \le z \le \ell\,.$$

On suit alors les étapes de la résolution, représentée sur la figure 9 du chapitre VIII, au moyen de l'équation de Navier.

Conditions aux limites sur les déplacements

Compte tenu de la forme de $\underline{\xi}$ on a évidemment :

$$(2.11)\qquad \begin{cases} \xi_z\,(\underline{x}) = 0 \quad \text{sur } S_0 \text{ et } S_\ell\,, \\ \xi_z\,(\underline{x}) = 0 \quad \text{sur } (\partial\Omega - S_0 - S_\ell)\,, \end{cases}$$

satisfaisant ainsi les conditions aux limites avec les données (2.5) et (2.7).

Les deux autres conditions aux limites sur les déplacements, issues de (2.9), s'imposent au champ $\underline{\xi}_2$ sur $(\partial S_0)_{\xi_i}$:

$$(2.12)\qquad (\xi_2)_i(\underline{x}_2) = \xi_i^{\mathrm{d}}(x_2) \quad \text{sur } (\partial S_0)_{\xi_i}\,.$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Équation de Navier

L'équation de Navier tridimensionnelle (chapitre VIII, § 5.2)

$$(\lambda+\mu)\,\underline{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\underline{\xi})+\mu\,\mathrm{div}\,(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\xi})+\rho\,\underline{F}=0 \tag{2.13}$$

s'explicite en une première équation scalaire selon Oz

$$(\lambda+\mu)\,\frac{\partial}{\partial z}\,(\mathrm{div}\,\underline{\xi})+\mu\,\Delta\xi_z+\rho\,F_z=0 \tag{2.14}$$

qui est automatiquement satisfaite, et deux autres équations scalaires selon Ox et Oy :

$$\left\{\begin{array}{l}(\lambda+\mu)\dfrac{\partial}{\partial x}\,(\mathrm{div}\,\underline{\xi})+\mu\,\Delta\xi_x+\rho\,F_x=0\\[2ex](\lambda+\mu)\dfrac{\partial}{\partial y}\,(\mathrm{div}\,\underline{\xi})+\mu\,\Delta\xi_y+\rho\,F_y=0\end{array}\right.$$

qui représentent une équation vectorielle bidimensionnelle dans le plan Oxy pour le champ $\underline{\xi}_2(\underline{x}_2)$:

$$(\lambda+\mu)\,\underline{\mathrm{grad}}_2\,(\mathrm{div}_2\,\underline{\xi}_2)+\mu\,\mathrm{div}_2\,(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}_2\,\underline{\xi}_2)+\rho\,\underline{F}_2=0 \quad {}^{(2)}\,. \tag{2.15}$$

Champ de contrainte associé

Le champ de déformation linéarisée qui correspond à ce champ de déplacement $\underline{\xi}$ est, par construction, de déformation plane parallèlement à Oxy, indépendant de z :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{x})=\underline{\underline{\varepsilon}}_2\,(\underline{x}_2)\quad,\quad \underline{x}_2\in S_0\quad,\quad \underline{x}=\underline{x}_2+z\,\underline{e}_z\quad,\quad 0\le z\le\ell\,, \tag{2.16}$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}_2$, défini par la formule bidimensionnelle

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_2=(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}_2\,\underline{\xi}_2+{}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\mathrm{grad}}}_2\,\underline{\xi}_2)/2\,, \tag{2.17}$$

est le champ de déformation linéarisée bidimensionnel du champ $\underline{\xi}_2$ dans le plan Oxy.

Le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ associé à $\underline{\underline{\varepsilon}}$ par la loi de comportement tridimensionnelle

$$\underline{\underline{\sigma}}=\lambda(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}+2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} \tag{2.18}$$

est, lui aussi, indépendant de z. En outre, compte tenu de ce que $\underline{\underline{\varepsilon}}$ satisfait (2.1), on voit par substitution dans (2.18) que $\underline{\underline{\sigma}}$ est, en tout point de Ω, de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}=\sigma_{\alpha\beta}\,\underline{e}_\alpha(\otimes)\underline{e}_\beta+\sigma_{zz}\,\underline{e}_z\otimes\underline{e}_z\quad,\quad \alpha,\beta=x,y \tag{2.19}$$

(2) L'indice inférieur 2 rappelle que les opérateurs différentiels se rapportent au plan Oxy.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

où les $\sigma_{\alpha\beta}$ et σ_{zz} ne dépendent pas de z. Le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ est donc défini sur Ω à partir du champ scalaire σ_{zz} et du champ tensoriel ***bidimensionnel*** $\underline{\underline{\sigma}}_2$ définis sur S_0 :

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2) + \sigma_{zz}\,(\underline{x}_2)\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \\ \underline{x}_2 \in S_0 \quad , \quad \underline{x} = \underline{x}_2 + z\,\underline{e}_z \quad , \quad 0 \leq z \leq \ell\ . \end{array}\right. \tag{2.20}$$

En explicitant alors la loi de comportement (2.18) on voit que les champs $\underline{\underline{\varepsilon}}_2$ et $\underline{\underline{\sigma}}_2$ se correspondent en chaque point de S_0 par la relation ***bidimensionnelle*** :

$$\underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2) = \lambda\,(\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}_2\,(\underline{x}_2)\,)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}_2 + 2\,\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}_2\,(\underline{x}_2) \tag{2.21}$$

où l'on a posé : $\underline{\underline{\mathbb{1}}}_2 = \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha$ ($\alpha = x, y$). Il en résulte immédiatement, puisque $\underline{\underline{\varepsilon}}_2$ est bidimensionnel, que le champ σ_{zz} se déduit du champ $\underline{\underline{\sigma}}_2$ par la relation

$$\sigma_{zz}\,(\underline{x}_2) = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2) = \nu\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2) \tag{2.22}$$

qui exprime que $\varepsilon_{zz}\,(\underline{x}) = 0$.

Conditions aux limites sur les contraintes

Par sa forme (2.20) le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ satisfait automatiquement les conditions aux limites sur S_0 et S_ℓ :

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{zx}\,(\underline{x}) \equiv 0 = T_x^{\mathrm{d}}\,(\underline{x}) \quad \text{sur } S_0 \text{ et } S_\ell \\ \sigma_{zy}\,(\underline{x}) \equiv 0 = T_y^{\mathrm{d}}\,(\underline{x}) \quad \text{sur } S_0 \text{ et } S_\ell\ . \end{array}\right. \tag{2.23}$$

Sur la surface latérale, relativement à la direction Oz, on a en désignant par $\underline{n}\,(\underline{x}) = \underline{n}_2\,(\underline{x}_2)$ la normale à $(\partial\Omega - S_0 - S_\ell)$

$$\underline{e}_z \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\,(\underline{x}) = \underline{e}_z \cdot \underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2) \cdot \underline{n}_2\,(\underline{x}_2) = 0 \tag{2.24}$$

qui satisfait (2.8). Les conditions au contour (2.9) s'écrivent, quant à elles :

$$(\underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2) \cdot \underline{n}_2\,(\underline{x}_2))_i = T_i^{\mathrm{d}}\,(\underline{x}_2) \text{ sur } (\partial S_0)_{T_i}\ ,\ i = 1, 2 \tag{2.25}$$

et concernent donc les composantes du vecteur-contrainte bidimensionnel $\underline{T}_2\,(\underline{x}_2) = \underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2) \cdot \underline{n}_2\,(\underline{x}_2)$ au point courant de ∂S_0.

Récapitulation

On voit ainsi que la résolution du problème d'équilibre élastique tridimensionnel dans les conditions indiquées (2.4 à 2.9) pour les données, se ramène à celle d'un problème d'équilibre élastique ***bidimensionnel*** posé sur la section droite S_0 du système.

Elle prend comme inconnue principale un champ de déplacement ***bidimensionnel de déformation plane*** $\underline{\xi}_2$, fonction de $\underline{x}_2$ coordonnée spatiale bidimensionnelle dans S_0, et construit des champs de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}_2$ et de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}_2$ bidimensionnels [(3)].

[(3)] Le caractère tensoriel de ces champs sur la section S est évidemment intrinsèque, indépendant du repère orthonormé Oxy introduit.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

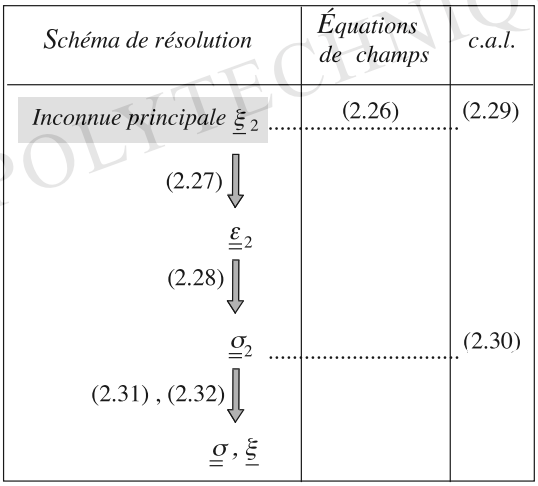


Figure 2 – Problème d'équilibre élastique en déformation plane : résolution par la méthode des déplacements

Les équations de ce problème bidimensionnel sont rassemblées ci-après (en allégeant les notations) :

équation de Navier bidimensionnelle

$$(\lambda + \mu)\, \underline{\underline{\mathrm{grad}_2}}\, (\mathrm{div}_2\, \underline{\xi}_2) + \mu\, \mathrm{div}_2\, (\underline{\underline{\mathrm{grad}_2}}\, \underline{\xi}_2) + \rho\, \underline{F}_2 = 0\ , \tag{2.26}$$

équation géométrique bidimensionnelle

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_2 = (\underline{\underline{\mathrm{grad}_2}}\, \underline{\xi}_2 + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\mathrm{grad}_2}}\, \underline{\xi}_2)/2\ , \tag{2.27}$$

« loi de comportement élastique bidimensionnelle »

$$\underline{\underline{\sigma}}_2 = \lambda\, (\mathrm{tr}\, \underline{\underline{\varepsilon}}_2)\, \underline{\underline{\mathbb{1}}}_2 + 2\, \mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}_2\ , \tag{2.28}$$

conditions aux limites bidimensionnelles

$$(\xi_2)_i = \xi_i^{\mathrm{d}} \qquad \text{sur } (\partial S_0)_{\xi_i} \tag{2.29}$$

$$(\underline{\underline{\sigma}}_2 \,.\, \underline{n}_2)_i = T_i^{\mathrm{d}} \qquad \text{sur } (\partial S_0)_{T_i}\ . \tag{2.30}$$

La solution du problème tridimensionnel, champ de déplacement $\underline{\xi}$ et champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ tridimensionnels sur Ω, se déduit des champs $\underline{\xi}_2$ et $\underline{\underline{\sigma}}_2$ par :

$$\begin{cases} \underline{\xi}\, (\underline{x}) = \underline{\xi}_2\, (\underline{x}_2) & (2.31) \\ \underline{\underline{\sigma}}\, (\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}_2\, (\underline{x}_2) + \nu\, \big(\mathrm{tr}\, \underline{\underline{\sigma}}_2\, (\underline{x}_2)\big)\, \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z & (2.32) \\ \underline{x}_2 \in S_0\ ,\ \underline{x} = \underline{x}_2 + z\, \underline{e}_z\ ,\ 0 \leq z \leq \ell\ . \end{cases}$$

Le schéma de résolution est représenté sur la figure 2.

2.5 Résolution par la méthode des contraintes

Forme du champ de contrainte

Compte tenu des résultats obtenus dans l'approche précédente on cherche à construire le champ $\underline{\underline{\sigma}}$, solution du problème tridimensionnel, à partir d'un champ bidimensionnel $\underline{\underline{\sigma}}_2$, fonction de $\underline{x}_2$ seul sur la section droite S_0 du système par (2.32) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2) + \nu\,(\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2)\,)\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \\ \\ \underline{x}_2 \in S_0\ , \quad \underline{x} = \underline{x}_2 + z\,\underline{e}_z\ , \quad 0 \leq z \leq \ell\ . \end{array} \right.$$

On reprend le schéma de résolution par la méthode des contraintes de la figure 10 du chapitre VIII pour le problème tridimensionnel.

Conditions aux limites sur les contraintes

Par les mêmes arguments qu'au paragraphe précédent on voit que les conditions aux limites sur les contraintes sur S_0 et S_ℓ, et sur la surface latérale pour la composante selon Oz, sont automatiquement satisfaites ; les deux autres conditions sur les contraintes sur la surface latérale s'écrivent sous la forme (2.25).

Équations d'équilibre

L'équation d'équilibre tridimensionnelle :

$$\mathrm{div}\ \underline{\underline{\sigma}} + \rho\,\underline{F} = 0 \quad \text{sur } \Omega \tag{2.33}$$

s'explicite en une équation selon Oz qui est automatiquement satisfaite, et deux équations scalaires dans le plan Oxy qui représentent une équation vectorielle bidimensionnelle pour le champ $\underline{\underline{\sigma}}_2$:

$$\mathrm{div}_2\ \underline{\underline{\sigma}}_2 + \rho\,\underline{F}_2 = 0 \quad \text{sur } S_0\ . \tag{2.34}$$

Champ de déformation associé

Le champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ associé à $\underline{\underline{\sigma}}$ s'écrit en chaque point de Ω :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{x}) = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x}) - \frac{\nu}{E}\,(\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x})\,)\underline{\underline{\mathbb{1}}}\,; \tag{2.35}$$

en y substituant l'expression (2.32) de $\underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x})$ on obtient :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{x}) = \frac{1+\nu}{E}\big(\underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2) - \nu\,(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2))\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}_2\big)\ ,\ \underline{x}_2 \in S_0\ ,\ \underline{x} = \underline{x}_2 + z\,\underline{e}_z\ ,\ 0 \leq z \leq \ell\ , \tag{2.36}$$

qui montre que ce champ est plan parallèlement à Oxy et indépendant de z (c'est le calcul inverse de celui effectué au paragraphe précédent !). On posera encore :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{x}) = \underline{\underline{\varepsilon}}_2\,(\underline{x}_2)\ ,\ \underline{x}_2 \in S_0\ ,\ \underline{x} = \underline{x}_2 + z\,\underline{e}_z\ ,\ 0 \leq z \leq \ell\ . \tag{2.37}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Conditions de compatibilité géométrique

Les conditions de compatibilité géométrique (chapitre II, section 6) pour un champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ de la forme (2.37) se réduisent à une seule équation scalaire aux dérivées partielles du deuxième ordre, les autres étant automatiquement satisfaites :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x\, \partial y} = 0 \qquad (Oxy \text{ orthonormé}) \,. \tag{2.38}$$

Cette équation exprime la compatibilité géométrique des composantes $\varepsilon_{\alpha\beta}$ de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans le plan Oxy, c'est-à-dire la compatibilité géométrique du champ bidimensionnel $\underline{\underline{\varepsilon}}_2$ dans son plan.

Champ de déplacement

Si l'équation (2.38) est vérifiée, par intégration sur Ω du champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ donné par (2.36) on obtient des champs $\underline{\xi}$ de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\xi}\,(\underline{x}) = \underline{\xi}_2\,(\underline{x}_2) + \text{mouvement rigidifiant arbitraire H.P.P.} \,, \\ \underline{x}_2 \in S_0 \,,\ \underline{x} = \underline{x}_2 + z\,\underline{e}_z \,,\ 0 \leq z \leq \ell \,, \end{array} \right. \tag{2.39}$$

où $\underline{\xi}_2\,(\underline{x}_2)$ est un champ bidimensionnel du plan Oxy, fonction de $\underline{x}_2$, obtenu par l'intégration bidimensionnelle du champ $\underline{\underline{\xi}}_2\,(\underline{x}_2)$.

Conditions aux limites sur les déplacements

Les conditions aux limites avec les données (2.5) sur S_0 et S_ℓ réduisent le mouvement rigidifiant arbitraire figurant au second membre de (2.39) à un mouvement rigidifiant arbitraire dans le plan Oxy, qui peut être inclus dans $\underline{\xi}_2$: la composante ξ_z de $\underline{\xi}$ est identiquement nulle, tandis que les autres composantes de $\underline{\xi}$ sont indépendantes de z.

La condition sur la surface latérale dans la direction Oz est alors automatiquement satisfaite.

Il reste pour $\underline{\xi}_2$ à satisfaire les conditions aux limites (2.12) sur $(\partial S_0)_{\xi_i}$, ce qui détermine en règle générale le mouvement rigidifiant arbitraire dans le plan Oxy.

Récapitulation

La résolution par la méthode des contraintes du problème tridimensionnel posé au paragraphe 2.3 se ramène à celle du ***même problème bidimensionnel*** mis en évidence au paragraphe 2.4 à partir de la méthode des déplacements (résultat attendu). L'inconnue principale est alors le champ bidimensionnel $\underline{\underline{\sigma}}_2$, fonction de $\underline{x}_2$ sur la section S_0, et l'on construit les champs $\underline{\underline{\varepsilon}}_2$ puis $\underline{\xi}_2$ bidimensionnels. Le système d'équations pour cette résolution s'écrit :

équation d'équilibre bidimensionnelle (2.34)

$$\mathrm{div}_2\, \underline{\underline{\sigma}}_2 + \rho\, \underline{F}_2 = 0 \,,$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

« loi de comportement élastique bidimensionnelle » (2.36)

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_2 = \frac{1+\nu}{E}\left(\underline{\underline{\sigma}}_2 - \nu\,(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}_2)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}_2\right)$$

équation de compatibilité géométrique bidimensionnelle (2.38)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x\,\partial y} = 0 \qquad (Oxy \text{ orthonormé}) ,$$

équation géométrique bidimensionnelle (2.27)

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_2 = (\underline{\underline{\mathrm{grad}_2\ \xi_2}} + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\mathrm{grad}_2\ \xi_2}})/2 ,$$

conditions aux limites bidimensionnelles (2.29) et (2.30)

$$(\underline{\xi}_2)_i = \xi_i^{\mathrm{d}} \qquad \text{sur } (\partial S_0)_{\xi_i}$$

$$(\underline{\underline{\sigma}}_2 \,.\, \underline{n}_2)_i = \underline{T}_i^{\mathrm{d}} \qquad \text{sur } (\partial S_0)_{T_i}$$

La solution $(\underline{\underline{\sigma}}\,,\,\underline{\xi})$ du problème tridimensionnel se déduit de la solution $(\underline{\underline{\sigma}}_2\,,\,\underline{\xi}_2)$ du problème bidimensionnel par les formules (2.31) et (2.32).

Le schéma de résolution est représenté sur la figure 3.

Schéma de résolution	*Équations de champs*	*c.a.l.*
Inconnue principale $\underline{\underline{\sigma}}_2$	(2.34)	(2.30)
(2.36) ⇓		
$\underline{\underline{\varepsilon}}_2$	(2.38)	
$\int$ (2.27) ⇓		
$\underline{\xi}_2$		(2.29)
(2.31) , (2.32) ⇓		
$\underline{\underline{\sigma}}\,,\,\underline{\xi}$		

Figure 3 – Problème d'équilibre élastique en déformation plane : résolution par la méthode des contraintes

2.6 Le problème bidimensionnel de la déformation plane

Il est important de noter que les formules (2.28) et (2.36), inverses l'une de l'autre, expriment la loi de comportement élastique bidimensionnelle ***pour les problèmes de***

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

déformation plane. Il s'agit de la relation existant entre les tenseurs bidimensionnels $\underline{\underline{\varepsilon}}_2$ et $\underline{\underline{\sigma}}_2$ du problème associé au problème tridimensionnel posé au paragraphe 2.3.

Ce problème plan, défini par les équations (2.26) à (2.30), ou par les équations (2.34, 2.36, 2.27, 2.29 et 2.30) a strictement la même structure que les problèmes d'équilibre élastique linéarisés tridimensionnels étudiés au chapitre VIII. La forme des conditions aux limites assure son caractère régulier ou bien posé [4].

2.7 Équation de Beltrami bidimensionnelle

On peut, comme au chapitre VIII (§ 6.2), exprimer la condition (2.38) en fonction de $\underline{\underline{\sigma}}_2$ au moyen de (2.36) ; il vient :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu\, \Delta_2 (\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}_2) = 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x\, \partial y}\ . \tag{2.40}$$

Cette équation se transforme [5] en tenant compte de (2.34) ; on obtient ainsi l'équation scalaire :

$$\Delta_2 (\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}_2) + \frac{1}{1-\nu} \rho\ \mathrm{div}_2\ \underline{F}_2 = 0 \tag{2.41}$$

qui est l'***équation de Beltrami-Michell*** du problème d'équilibre élastique en déformation plane.

On aboutit alors au schéma de résolution de la figure 4.

On peut remarquer sur les schémas des figures 2 ou 3 qu'il n'y a pas redondance au niveau des équations de champs entre les équations d'équilibre et la condition de compatibilité géométrique ou l'équation de Beltrami-Michell pour le problème bidimensionnel (3 équations de champs scalaires pour le champ tensoriel bidimensionnel symétrique $\underline{\underline{\sigma}}_2$). Il est intéressant d'examiner, à partir du schéma de résolution de la figure 12 du chapitre VIII pour le problème tridimensionnel, la cohérence de ce résultat en ce qui concerne les équations de Beltrami. On voit que, compte tenu de la forme (2.32) de $\underline{\underline{\sigma}}$, parmi les six équations de Beltrami tridimensionnelles

- les équations en (x, z) et (y, z) sont identiquement vérifiées,
- l'équation en (z, z) est (2.41) ,
- les équations en (x, x) , (x, y) et (y, y) sont chacune équivalentes à (2.41) si (2.34) est vérifiée.

Autrement dit, avec la terminologie du chapitre VIII (§ 6.2), l'équation (2.41) est bien l'unique équation de Beltrami du problème, si les équations d'équilibre (2.34) sont prises comme équations de champs et non plus seulement comme conditions aux limites comme l'indiquait la figure 12 du chapitre VIII dans le cas tridimensionnel.

[4] L'unicité de la solution de ce problème est obtenue comme pour les problèmes tridimensionnels car le caractère défini positif de la forme quadratique dont dérive la formule (2.28) est assuré par la stabilité isotherme dans l'état naturel du matériau élastique : $(3\,\lambda + 2\,\mu) > 0$ et $\mu > 0 \Rightarrow (\lambda + \mu) > 0$ et $\mu > 0$.

[5] En additionnant (2.38), la dérivée par rapport à x de l'équation (2.34) relative à x et la dérivée par rapport à y de l'équation (2.34) relative à y.

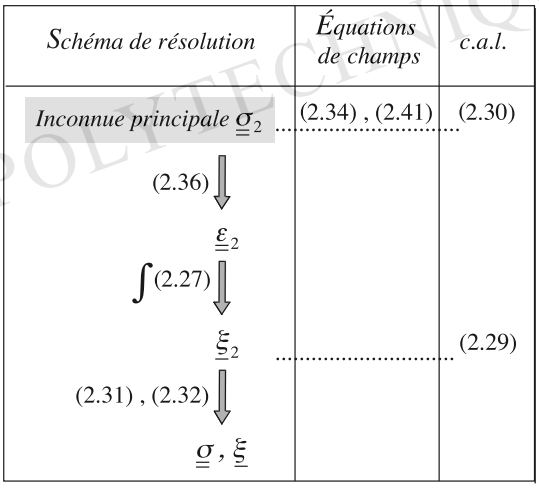


Figure 4 – Problème d'élasticité en déformation plane : résolution par la méthode des contraintes ; équation de Beltrami-Michell

2.8 Cas où les forces de masse dérivent d'un potentiel ; fonction d'Airy

On suppose que les forces de masse $\underline{F}$, de la forme (2.4), dérivent d'un potentiel bidimensionnel :

$$\underline{F}_2(\underline{x}_2) = -\underline{\mathrm{grad}}_2\, \mathcal{V}\,(\underline{x}_2)\ . \tag{2.42}$$

On peut alors résoudre l'équation d'équilibre (2.34) en introduisant une fonction scalaire $\phi(\underline{x}_2)$ appelée ***fonction d'Airy*** ou ***fonction de contraintes*** [6], et en posant :

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{xx} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \rho\, \mathcal{V} \\ \sigma_{yy} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho\, \mathcal{V} \\ \sigma_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial y}\ . \end{array}\right. \tag{2.43}$$

On a alors :

$$\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}_2 = \Delta_2 \phi + 2\rho\, \mathcal{V} \tag{2.44}$$

et l'équation de Beltrami-Michell s'écrit, en fonction de ϕ :

$$\Delta_2 \Delta_2 \phi + \frac{1-2\,\nu}{1-\nu} \rho\, \Delta_2\, \mathcal{V} = 0\ . \tag{2.45}$$

[6] G.B. Airy (1801-1892).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La résolution du problème est ainsi ramenée à la détermination de la fonction ϕ satisfaisant l'équation (2.45) et les conditions aux limites (2.30) et (2.29).

En particulier, si les forces de masse dérivent d'un potentiel harmonique $\Delta_2 \mathcal{V} = 0$, ce qui est notamment le cas des forces de masse constantes, l'équation (2.45) devient :

$$\Delta_2 \Delta_2 \phi = 0 \tag{2.46}$$

ce qui signifie que la fonction d'Airy doit alors être ***biharmonique*** [7].

Il est clair que la formulation du problème permettant de déterminer la fonction de contraintes n'est aisée que lorsque toutes les conditions aux limites du problème bidimensionnel concernent les contraintes, c'est-à-dire sont de la forme (2.30).

On peut remarquer que la définition (2.43) de $\underline{\underline{\sigma_2}}$ à partir de la fonction de contrainte ϕ se met sous la forme tensorielle intrinsèque :

$$\underline{\underline{\sigma_2}} = (\Delta_2 \phi + \rho\, \mathcal{V})\, \underline{\underline{\mathbb{1}_2}} - \underline{\underline{\mathrm{grad}_2}}\, (\mathrm{grad}_2\ \phi)\ . \tag{2.47}$$

Ceci permet notamment d'obtenir l'expression des composantes de $\underline{\underline{\sigma_2}}$ en coordonnées polaires ; on a en effet alors :

$$\Delta_2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{grad}_2}}\, (\mathrm{grad}_2\ \phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}\, \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\Big)\, (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r) + \Big(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\Big)\, \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta\ ,$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = \dfrac{\partial^2 \phi}{r^2\, \partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi}{\partial r} + \rho\, \mathcal{V} \\ \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \rho\, \mathcal{V} \\ \sigma_{r\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta}\Big)\ . \end{array} \right. \tag{2.48}$$

2.9 Tube cylindrique sous pressions, en déformation plane

L'équilibre élastique isotherme d'un tube cylindrique sous pressions intérieure et extérieure étudié au chapitre IX (section 7), dans le cas où les données au contour imposent un déplacement nul des sections d'extrémités selon l'axe du tube, est un exemple de problème d'équilibre élastique en déformation plane.

En reprenant les notations du chapitre IX (§ 7.1, fig. 14) on vérifie en effet que les données de ce problème correspondent à la position du problème précisée au paragraphe 2.3 ci-dessus.

[7] $\Delta_2 \Delta_2 \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$ (bilaplacien nul).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Forces de masse :

$$F = 0 \qquad \text{conforme à (2.4)} .$$

Données au contour sur S_0 et S_ℓ :

$$\xi_z^{\mathrm{d}} = 0 \qquad \text{conforme à (2.5)} , \tag{2.49}$$

$$T_r^{\mathrm{d}} = 0 \quad , \quad T_\theta^{\mathrm{d}} = 0 \qquad \text{conforme à (2.6)} . \tag{2.50}$$

Données au contour sur la surface latérale :

$$\underline{T}^{\mathrm{d}} = p_0\, \underline{e}_r \qquad \text{pour } r = r_0 , \tag{2.51}$$

$$\underline{T}^{\mathrm{d}} = -p_1\, \underline{e}_r \qquad \text{pour } r = r_1 , \qquad \text{conformes à (2.8) et (2.9)} . \tag{2.52}$$

La solution s'écrit, en coordonnées cylindriques (sans expliciter les valeurs des constantes A et B déterminées par les conditions aux limites pour $r = r_0$ et $r = r_1$) :

$$\underline{\xi} = \Big(\frac{A(1+\nu)(1-2\,\nu)}{E} + \frac{B}{2\mu\, r}\Big)\, \underline{e}_r \tag{2.53}$$

qui est bien de la forme (2.31), et :

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \quad , \quad \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \quad , \quad \sigma_{zz} = 2\,\nu\, A \quad , \quad \text{autres } \sigma_{ij} = 0 , \tag{2.54}$$

qui est conforme à (2.32) avec :

$$\underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2) = A\, \underline{\underline{\mathbb{1}}}_2 - \frac{B}{r^2}(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r - \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta) \tag{2.55}$$

et

$$\sigma_{zz}(\underline{x}_2) = \nu\, \mathrm{tr}\, \underline{\underline{\sigma}}_2(\underline{x}_2) \qquad (\underline{x} = \underline{x}_2 + z\, \underline{e}_z) . \tag{2.56}$$

La fonction d'Airy correspondante, biharmonique, est :

$$\phi(r,\theta) = A\frac{r^2}{2} - B\, \ln\, r . \tag{2.57}$$

3 Équilibre thermoélastique en contrainte plane

3.1 Tenseur des contraintes plan

Le tenseur des contraintes en un point est dit plan parallèlement à Oxy, s'il est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{xx}\, \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \sigma_{xy}\, \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \sigma_{yx}\, \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x + \sigma_{yy}\, \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \tag{3.1a}$$

ou encore :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{\alpha\beta}\, \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \qquad \alpha, \beta = x, y . \tag{3.1b}$$

3.2 Champ de contrainte plane

$\underline{\underline{\sigma}}$ est un champ de contrainte plane parallèlement à Oxy s'il satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} \text{ est indépendant de } z , \\ \underline{\underline{\sigma}} \text{ est plan parallèlement à } Oxy \text{ en tout point ;} \end{cases} \tag{3.2}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

soit :

(3.3)
$$\boxed{\begin{aligned} &\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \\ &\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial z} \equiv 0 \end{aligned}}$$

3.3 Équilibre thermoélastique pour un matériau homogène, isotrope, en contrainte plane

On va s'intéresser aux problèmes d'équilibre élastique pour un solide en matériau homogène, isotrope, dont la résolution aboutit à la détermination d'un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ de la forme (3.2).

Comme au paragraphe 2.3 à propos des problèmes de déformation plane, il est clair qu'un problème n'est, en règle générale, pas posé a priori comme « de contrainte plane » ; c'est la forme des données qui incitera à en rechercher une solution dont le champ de contrainte satisfasse les conditions (3.2). L'hypothèse sera justifiée a posteriori par la résolution du problème. On verra que les problèmes pour lesquels l'hypothèse se voit ainsi strictement justifiée sont rares (§ 3.4).

On se bornera dans la suite, pour la simplicité de l'exposé, à l'étude des problèmes d'équilibre élastique ***isothermes***. On doit toutefois remarquer que l'argumentation avancée au paragraphe 2.3 n'est ici plus valable : la notion de contrainte plane n'est pas systématiquement conservée entre un problème d'équilibre thermoélastique avec variation de température et son problème isotherme associé.

Position du problème d'équilibre élastique en contrainte plane

Le système considéré, de volume Ω, a une forme cylindrique, parallèle à Oz (figure 5). Toutes les notations sont identiques à celles du paragraphe 2.3.

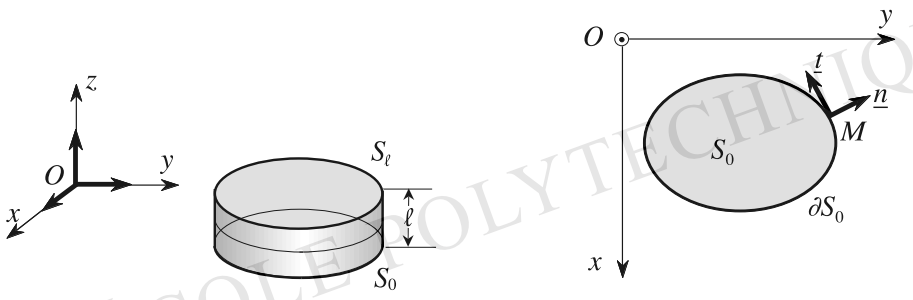


Figure 5 – Problème d'équilibre élastique en contrainte plane

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Les données du problème d'équilibre élastique sont supposées de la forme suivante.

• ***Forces de masse.***

Elles sont parallèles à Oxy et indépendantes de z :

$$\underline{F}\,(\underline{x}) = \underline{F}_2\,(\underline{x}_2) \quad , \quad \underline{x}_2 \in S_0 \quad , \quad \underline{x} = \underline{x}_2 + z\,\underline{e}_z \quad , \quad 0 \leq z \leq \ell\ . \tag{3.4}$$

• ***Données au contour sur*** S_0 ***et*** S_ℓ .

S_0 et S_ℓ sont des surfaces libres de contrainte :

$$\underline{T}^{\mathrm{d}} = 0 \qquad \text{sur } S_0 \text{ et } S_\ell\ . \tag{3.5}$$

• ***Données au contour sur la surface latérale.***

Les données sur la surface latérale de Ω sont ***indépendantes de*** z et sont exprimées sur le contour ∂S_0 de S_0.

Pour la direction Oz, la donnée concerne, en tout point de ∂S_0, la composante T_z du vecteur-contrainte qui est imposée ***nulle*** :

$$T_z^{\mathrm{d}}\,(\underline{x}_2) = 0 \quad \text{sur } \partial S_0\ . \tag{3.6}$$

Les deux autres conditions au contour sont identiques à (2.9) :

$$\left\{\begin{array}{l} T_i\,(\underline{x}) = T_i^{\mathrm{d}}\,(\underline{x}_2) \quad \text{sur } (\partial S_0)_{T_i} \\ \xi_i\,(\underline{x}) = \xi_i^{\mathrm{d}}\,(\underline{x}_2) \quad \text{sur } (\partial S_0)_{\xi_i} \\ (\partial S_0)_{T_i} \cup (\partial S_0)_{\xi_i} = \partial S_0\ ,\ (\partial S_0)_{T_i} \cap (\partial S_0)_{\xi_i} = \varnothing\ ,\ i = 1,2 \\ \underline{x} = \underline{x}_2 + z\,\underline{e}_z\ ,\ 0 \leq z \leq \ell\ . \end{array}\right. \tag{3.7}$$

Dans la pratique les conditions au contour (3.7) ne portent, le plus souvent, que sur le vecteur-contrainte : $(\partial S_0)_{\xi_i}$ est vide, $i = 1, 2$.

Remarque

Pour un problème d'équilibre thermoélastique avec variation de température les conditions de la contrainte plane sont satisfaites si les données « mécaniques » du problème ont la forme indiquée par (3.4 à 3.7) et si le champ d'écart de température $\tau(\underline{x})$, donné, est indépendant de z.

3.4 Résolution

On utilise la méthode des contraintes en suivant les étapes du schéma de la figure 10 du chapitre VIII, comme au paragraphe 2.5 ci-dessus.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Forme du champ de contrainte

On suppose a priori pour le champ de contrainte la forme (3.2) : champ de contrainte plane parallèlement à Oxy, qui est indépendant de z. Ce champ de contrainte tridimensionnel sur Ω peut être défini à partir d'un champ tensoriel bidimensionnel $\underline{\underline{\sigma}}_2$ sur S_0 :

$$\underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2)\ ,\ \underline{x}_2 \in S_0\ ,\ \underline{x} = \underline{x}_2 + z\,\underline{e}_z\ ,\ 0 \leq z \leq \ell\ . \tag{3.8}$$

Conditions aux limites sur les contraintes

Les conditions aux limites sur les contraintes (3.5) sur S_0 et S_ℓ, et (3.6) sur ∂S_0 sont automatiquement satisfaites en conséquence de la forme (3.2) choisie pour $\underline{\underline{\sigma}}$.

Les deux autres conditions aux limites sur les contraintes (3.7) sur la surface latérale s'expriment, comme aux paragraphes 2.4 et 2.5, par l'équation identique à (2.25) :

$$(\underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2)\cdot\underline{n}_2\,(\underline{x}_2))_i = T_i^{\mathrm{d}}\,(\underline{x}_2) \quad \text{sur } (\partial S_0)_{T_i}\ , \quad i = 1,2 \tag{3.9}$$

et concernent donc les composantes du vecteur-contrainte bidimensionnel $\underline{T}_2\,(\underline{x}_2) = \underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2)\cdot\underline{n}_2\,(\underline{x}_2)$.

Équations d'équilibre

L'équation d'équilibre selon Oz est automatiquement satisfaite.

Les deux autres équations, dans le plan Oxy, se traduisent par l'équation vectorielle bidimensionnelle concernant le champ $\underline{\underline{\sigma}}_2$ déjà écrite au paragraphe 2.5 :

$$\mathrm{div}_2\ \underline{\underline{\sigma}}_2 + \rho\,\underline{F}_2 = 0\ . \tag{3.10}$$

Champ de déformation associé

Le champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ associé à $\underline{\underline{\sigma}}$ par la loi de comportement élastique est défini en chaque point de Ω par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{x}) = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x}) - \frac{\nu}{E}\,(\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x})\,)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}\ . \tag{3.11}$$

En y substituant l'expression (3.8) de $\underline{\underline{\sigma}}\,(\underline{x})$ on voit que $\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{x})$ s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{x}) = \varepsilon_{\alpha\beta}\,\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta + \varepsilon_{zz}\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad , \quad \alpha,\beta = x,y \tag{3.12}$$

où les $\varepsilon_{\alpha\beta}$ et ε_{zz} sont indépendantes de z. Le champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est donc défini sur Ω à partir du champ scalaire ε_{zz} et du champ tensoriel ***bidimensionnel*** $\underline{\underline{\varepsilon}}_2$ définis sur S_0 :

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\underline{x}) = \underline{\underline{\varepsilon}}_2\,(\underline{x}_2) + \varepsilon_{zz}\,(\underline{x}_2)\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \\ \underline{x}_2 \in S_0\ ,\ \underline{x} = \underline{x}_2 + z\,\underline{e}_z\ ,\ 0 \leq z \leq \ell\ . \end{array}\right. \tag{3.13}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

En explicitant la loi de comportement, on voit que $\underline{\underline{\varepsilon}}_2$ et $\underline{\underline{\sigma}}_2$ se correspondent en chaque point de S_0 par la relation ***bidimensionnelle***

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_2\,(\underline{x}_2) = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2) - \frac{\nu}{E}\,(\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2)\,)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}_2 \tag{3.14}$$

tandis que le champ ε_{zz} se déduit de $\underline{\underline{\sigma}}_2$ par :

$$\varepsilon_{zz}\,(\underline{x}_2) = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}_2\,(\underline{x}_2)\ . \tag{3.15}$$

Condition de compatibilité géométrique

Compte tenu de la forme (3.13) du champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ les conditions de compatibilité géométrique se réduisent à quatre équations scalaires aux dérivées partielles du deuxième ordre.

On doit ainsi satisfaire l'équation (3.16), déjà écrite au paragraphe 2.5

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\,\partial y} = 0\ : \tag{3.16}$$

elle exprime la compatibilité géométrique des composantes $\varepsilon_{\alpha\beta}$ de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans le plan Oxy, c'est-à-dire l'intégrabilité du champ bidimensionnel $\underline{\underline{\varepsilon}}_2$ dans son plan. On doit aussi satisfaire les trois équations

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = 0\ ,\ \frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial x\,\partial y} = 0\ ,\ \frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = 0\ , \tag{3.17}$$

qui imposent que ε_{zz} soit une fonction linéaire (affine) des coordonnées x et y :

$$\varepsilon_{zz}\,(\underline{x}_2) = a\,x + b\,y + c\ . \tag{3.18}$$

Les équations (3.17) expriment la compatibilité géométrique de la déformation transversale $\varepsilon_{zz}(\underline{x}_2)$ dans (3.13).

Champ de déplacement

Si l'équation (3.16) est vérifiée, l'intégration du champ $\underline{\underline{\varepsilon}}_2$, compatible, sur S_0 détermine, à un mouvement rigidifiant (H.P.P.) près parallèle à Oxy, un champ de déplacement bidimensionnel $\underline{\xi}_2$ fonction de la variable position $\underline{x}_2$.

Si les trois équations (3.17) sont vérifiées, l'intégration du champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sur Ω est possible et fournit le champ de déplacement $\underline{\xi}$ tridimensionnel sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{\xi}\,(\underline{x}) = \underline{\xi}_2\,(\underline{x}_2) - (a\,\underline{e}_x + b\,\underline{e}_y)\,\dfrac{z^2}{2} + (a\,x + b\,y + c)\,z\,\underline{e}_z \\ \qquad\qquad + \text{mouvement rigidifiant (H.P.P.) arbitraire} \\ \underline{x}_2 \in S_0\ ,\ \underline{x} = \underline{x}_2 + z\,\underline{e}_z\ ,\ 0 \le z \le \ell\ . \end{array}\right. \tag{3.19}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Conditions aux limites sur les déplacements

Le champ de déplacement $\underline{\xi}$ doit satisfaire les conditions au contour sur $(\partial S_0)_{\xi_i}$ dans (3.7), qui ne portent que sur les composantes du vecteur déplacement $\underline{\xi}\,(\underline{x})$ dans le plan Oxy c'est-à-dire sur :

$$\underline{\xi}_2\,(\underline{x}_2) - (a\,\underline{e}_x + b\,\underline{e}_y)\,\frac{z^2}{2} + \text{déplacement rigidifiant H.P.P. dans } Oxy\ .$$

On remarque que si $(\partial S_0)_{\xi_i}$ n'est pas vide, l'indépendance des conditions (3.7) vis-à-vis de z concerne le terme $(a\,\underline{e}_x + b\,\underline{e}_y)$; en particulier, si les deux composantes de $\underline{\xi}$ dans le plan Oxy sont données en un point de ∂S_0 alors, d'après (3.18), $\varepsilon_{zz}\,(\underline{x}_2)$ est constant.

Récapitulation

En rassemblant les résultats ci-dessus on remarque que la résolution par la méthode des contraintes du problème d'équilibre élastique posé dans les conditions indiquées (3.4 à 3.7) amène à la résolution d'un problème d'équilibre élastique ***bidimensionnel*** posé sur la section droite S_0 du système, auquel s'imposent des ***conditions supplémentaires*** liées à la compatibilité géométrique transversale des déformations et à la compatibilité des déplacements avec les conditions aux limites sur la surface latérale s'il y a lieu.

♦ ***Problème bidimensionnel de la contrainte plane***

Les équations de ce problème bidimensionnel sont les suivantes :

équation d'équilibre bidimensionnelle (3.10)

$$\mathrm{div}_2\ \underline{\underline{\sigma}}_2 + \rho\,\underline{F}_2 = 0 \quad ,$$

« loi de comportement élastique bidimensionnelle » (3.14)

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_2 = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}}_2 - \frac{\nu}{E}\,(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}_2)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}_2\ ,$$

équation de compatibilité bidimensionnelle (3.16)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x\,\partial y} = 0 \qquad (Oxy \text{ orthonormé})\ ,$$

équation géométrique bidimensionnelle

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_2 = (\underline{\underline{\mathrm{grad}_2\ \xi_2}} + {}^{\mathrm{t}}\underline{\underline{\mathrm{grad}_2\ \xi_2}})/2\ , \tag{3.20}$$

conditions aux limites bidimensionnelles sur les contraintes (3.9)

$$\underline{\underline{\sigma}}_2 \cdot \underline{n}_2 = T_i^{\mathrm{d}} \quad \text{sur } (\partial S_0)_{T_i}\ .$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

♦ ***Compatibilité géométrique de la déformation transversale, compatibilité des déplacements avec les conditions aux limites***

Aux équations précédentes s'adjoignent l'équation de la déformation transversale (3.15)

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}_2 \ ,$$

les équations de compatibilité de la déformation transversale (3.17)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = 0 \ ,$$

la condition aux limites sur les déplacements (3.7)

$$\xi_i = \xi_i^{\mathrm{d}} \quad \text{sur } (\partial S_0)_{\xi_i} \ .$$

♦ ***Schéma de résolution***

Le schéma de résolution global est représenté sur la figure 6.

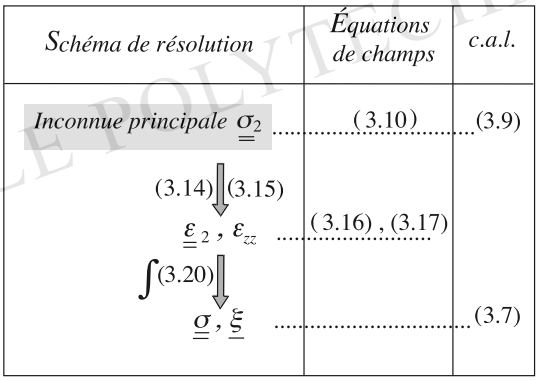


Figure 6 – Problème d'équilibre élastique en contrainte plane : résolution par la méthode des contraintes

On remarque que du point de vue du champ de contrainte bidimensionnel $\underline{\underline{\sigma}}_2$ et du champ de déformation bidimensionnel $\underline{\underline{\varepsilon}}_2$ qui lui est associé, le problème ainsi posé est formellement identique à celui posé au paragraphe 2.5 pour la résolution du problème de la déformation plane par la méthode des contraintes (figure 3). La loi de comportement élastique bidimensionnelle de déformation plane (2.36) sur la figure 3 est remplacée, sur la figure 6, par la loi de comportement élastique ***bidimensionnelle de contrainte plane*** (3.14).

Ceci revient à dire que, pour un système donné, constitué d'un matériau élastique homogène isotrope dont les caractéristiques élastiques sont E et ν.

Si aucune condition au contour sur la surface latérale ne porte sur les déplacements, la solution du problème bidimensionnel de la déformation

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

plane fournit, par simple transformation formelle, la solution du problème bidimensionnel de la contrainte plane homologue. Il suffit pour obtenir la seconde de remplacer dans les formules littérales exprimant la première :

$$\text{(3.21)} \qquad \begin{cases} E \text{ par } E(1+2\,\nu)/(1+\nu)^2 \\ \\ \nu \text{ par } \nu/(1+\nu)\ . \end{cases}$$

Il en résulte aussi que l'on obtient facilement, par la correspondance (3.21), l'équation de Beltrami homologue de (2.41) pour le problème bidimensionnel de la contrainte plane :

$$\text{(3.22)} \qquad \Delta_2(\operatorname{tr} \underline{\underline{\sigma}}_2) + (1+\nu)\,\rho\,\operatorname{div}_2 \underline{F}_2 = 0$$

relative à la compatibilité bidimensionnelle de $\underline{\underline{\varepsilon}}_2$.

Dans le cas où les forces de masse dérivent d'un potentiel $\mathcal{V}$ on peut à nouveau introduire la fonction d'Airy par les mêmes formules (2.43) : $\underline{\underline{\sigma}}_2$ satisfait alors les équations (3.10). La fonction d'Airy ϕ doit vérifier l'homologue de (2.45) en contrainte plane :

$$\text{(3.23)} \qquad \Delta_2\Delta_2\phi + (1-\nu)\,\rho\,\Delta_2\,\mathcal{V} = 0$$

On constate aussi que le schéma de la figure 6 est plus contraint que celui de la figure 3, en raison de l'intervention de la déformation transversale ε_{zz}. Ainsi la compatibilité géométrique du champ ε_{zz} exprimée par (3.17) impose par (3.18) et (3.15) que $\operatorname{tr} \underline{\underline{\sigma}}_2$ soit une fonction linéaire (affine) des coordonnées x et y. Cette condition n'a aucune raison d'être satisfaite par la solution du problème bidimensionnel, qui est déterminée indépendamment lorsqu'aucune condition au contour sur la surface latérale ne porte sur les déplacements. Si une condition au contour sur la surface latérale porte sur les déplacements, la résolution est plus complexe car cette condition (3.7), qui intervient dans le problème bidimensionnel, concerne le champ de déplacement $\underline{\xi}$ complet donné par (3.19).

Ainsi, le passage du problème bidimensionnel de la contrainte plane au problème réel tridimensionnel met en évidence que l'hypothèse de la contrainte plane (3.2) est, en règle générale, trop forte pour permettre la résolution du problème tridimensionnel.

On remarque que les incompatibilités qui interviennent au niveau des déformations et, s'il y a lieu, des déplacements, ont un caractère ***transversal***, c'est-à-dire qu'elles sont liées à la variable z. Aussi, dans la pratique, on admet que ces équations peuvent ne pas être satisfaites lorsque le solide étudié est mince : c'est l'approximation des ***tranches minces*** (ℓ petit devant le plus petit diamètre de S_0). Le fait que les équations (3.17) ne soient pas satisfaites signifie que si l'on empile des tranches minces les unes sur les autres, leurs déformations ne sont pas compatibles : décollement entre la face inférieure de l'une et la face supérieure de l'autre : un solide épais n'est pas un simple empilement de tranches minces [8].

[8] Ceci met en évidence l'importance qu'il y a, pour le problème d'équilibre élastique en contrainte plane, à suivre le schéma de résolution de la méthode par les contraintes sous la forme donnée sur

3.5 Tube cylindrique sous pression en contrainte plane

Le même problème d'équilibre élastique isotherme d'un tube cylindrique sous pressions intérieure et extérieure rappelé au paragraphe 2.9 fournit, lorsque les données imposent des forces surfaciques nulles sur les extrémités S_0 et S_ℓ, un exemple d'équilibre élastique en contrainte plane.

Avec les mêmes notations on vérifie que les ***données*** correspondent à la position du problème précisée au paragraphe 3.3 ci-dessus. En effet (2.49) est remplacée par

$$T_z^{\mathrm{d}} = 0 \tag{3.24}$$

qui, avec (2.50), est conforme à (3.5) ; on remarque aussi que (2.51) et (2.52) sont conformes à (3.6) et n'introduisent aucune condition sur les déplacements dans (3.7).

La solution s'écrit, en coordonnées cylindriques, avec les mêmes constantes A et B qu'au paragraphe 2.9, déterminées à partir des conditions aux limites (2.51) et (2.52) :

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \quad , \quad \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \quad , \quad \sigma_{zz} = 0 \quad , \quad \text{autres } \sigma_{ij} = 0 \, , \tag{3.25}$$

qui est bien de la forme (3.8) avec

$$\underline{\underline{\sigma}}_2 = A \, \underline{\underline{\mathbb{1}}}_2 - \frac{B}{r^2} \, (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r - \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta) \, , \tag{3.26}$$

et

$$\underline{\xi} = \big(\frac{A(1-\nu)}{E} r + \frac{B}{2\,\mu\, r}\big) \, \underline{e}_r - 2\,\nu \frac{A}{E} z \, \underline{e}_z \tag{3.27}$$

qui est de la forme (3.19) avec

$$\underline{\xi}_2 = \big(\frac{A(1-\nu)}{E} r + \frac{B}{2\mu\, r}\big) \, \underline{e}_r \tag{3.28}$$

et où l'on vérifie aussi la relation (3.15) entre ε_{zz} et $\mathrm{tr}\, \underline{\underline{\sigma}}_2$.

On remarque que $\underline{\underline{\sigma}}_2$ est constant ce qui signifie que, pour ce problème, les conditions (3.17) sont rigoureusement satisfaites : la compatibilité géométrique transversale des déformations est assurée hors de toute approximation de tranches minces.

Enfin on vérifie que l'expression (3.28) de $\underline{\xi}_2$ s'obtient à partir de (2.53) par la transformation (3.21).

la figure 10 du chapitre VIII, où les équations de compatibilité sont écrites sur les déformations : on peut ainsi juger, du point de vue mécanique, du caractère approché de ce type de solutions, ce qui serait plus difficile en utilisant directement les équations de Beltrami. On comprend aussi pourquoi la méthode de résolution par les déplacements n'est pas présentée dans ce cas.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Récapitulatif des formules essentielles

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

• ***Déformation plane***

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}_2 \ , \ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_2 + \nu(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}_2)\, \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

équation d'équilibre

$$\mathrm{div}_2\ \underline{\underline{\sigma}}_2 + \rho\, \underline{F}_2 = 0$$

loi de comportement bidimensionnelle

$$\underline{\underline{\sigma}}_2 = \lambda\, (\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}_2)\, \underline{\underline{\mathbb{1}}}_2 + 2\,\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}_2$$
$$\underline{\underline{\varepsilon}}_2 = \frac{1+\nu}{E}\, (\, \underline{\underline{\sigma}}_2 - \nu\, (\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}_2) \underline{\underline{\mathbb{1}}}_2\,)$$

équation de Navier

$$(\lambda + \mu)\, \underline{\mathrm{grad}}_2\, (\mathrm{div}_2\ \underline{\xi}_2) + \mu\ \mathrm{div}_2\, (\underline{\underline{\mathrm{grad}}}_2\ \underline{\xi}_2) + \rho\, \underline{F}_2 = 0$$

équation de compatibilité

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x\, \partial y} = 0 \qquad (Oxy \text{ orthonormé})$$

équation de Beltrami

$$\Delta_2(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}_2) + \frac{1}{1-\nu}\rho\ \mathrm{div}_2\ \underline{F}_2 = 0$$

fonction d'Airy, si $\underline{F}_2 = -\underline{\mathrm{grad}}_2\, \mathcal{V}$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \rho\, \mathcal{V}$$
$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho\, \mathcal{V}$$
$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial y}$$
$$\Delta_2 \Delta_2 \phi + \frac{1-2\,\nu}{1-\nu}\rho\, \Delta_2\, \mathcal{V} = 0$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- ***Contrainte plane***

  équation d'équilibre

  $$\mathrm{div}_2\ \underline{\underline{\sigma}}_2 + \rho\,\underline{F}_2 = 0$$

  loi de comportement bidimensionnelle

  $$\underline{\underline{\varepsilon}}_2 = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}}_2 - \frac{\nu}{E}\,(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}_2)\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}_2$$

  équation de compatibilité

  $$\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\,\partial y} = 0 \qquad (Oxy \text{ orthonormé})$$

  équation de Beltrami

  $$\Delta_2(\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\sigma}}_2) + (1+\nu)\,\rho\ \mathrm{div}_2\ \underline{F}_2 = 0$$

  fonction d'Airy, si $\underline{F}_2 = -\underline{\mathrm{grad}}_2\,\mathcal{V}$

  $$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \rho\,\mathcal{V}$$
  $$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \rho\,\mathcal{V}$$
  $$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}$$
  $$\Delta_2\Delta_2\phi + (1-\nu)\,\rho\,\Delta_2\,\mathcal{V} = 0$$

- ***Passage de la déformation plane à la contrainte plane***

  E remplacé par $E(1+2\nu)/(1+\nu)^2$

  ν remplacé par $\nu/(1+\nu)$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Bibliographie

ACHENBACH, J.D. (1973) – *Wave Propagation in Elastic Solids*. North-Holland, Amsterdam.

ATTEIA, M. & DEDIEU, J.P. (1981) – Minimization of energy in nonlinear elasticity. *Nonlinear problems of Analysis in Geometry and Mechanics*, (M. ATTEIA, D. BANCEL, I. GUMONSKI ed.). Pitman, Boston, pp. 73-79.

BALL, J.M. (1977) – Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **63**, 337-403.

BALL, J.M., KNOPS, R.J. & MARSDEN, J.E. (1978) – Two examples in nonlinear elasticity. *Proc. Conf. on Nonlinear analysis, Besançon, 1977*. Springer Verlag, Berlin, pp. 41-49.

BAMBERGER, Y. (1981, 1997) – *Mécanique de l'ingénieur*. Hermann, Paris, 1981 (vol. 1 & 2), 1997 (vol. 3 & 4).

BELLET, D. & BARRAU, J.J. (1990) – *Cours d'élasticité*. Cépaduès éditions, Toulouse.

BELTRAMI, E. (1886) – Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell. *Memorie della Reale Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, série IV, **VII**.

BELTRAMI, E. (1892) – Osservazioni sulla Nota precedente. *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, série V, **I**, Roma, 141-142.

BEREST, P. (1997) *Calcul des variations*. Ellipses, Paris.

BOEHLER, J.P. (1978) – Loi de comportement anisotrope des milieux continus. *J. Mécanique*, **17**, 2, 153-190.

BOEHLER, J.P. & SAWCZUCK, A. (1977) – On yielding of oriented solids. *Acta mechanica*, **27**, 185-206.

BONNET, M. (1999) – *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*. John Wiley, Chichester.

BONVALET, M. (1992) – *Les principes de la mécanique*. Masson, Paris.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

BOUSSINESQ, J. (1885) – *Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et des mouvements des solides élastiques, principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent dans ces solides des efforts quelconques exercés sur une petite partie de leur surface ou de leur intérieur*. Gauthier-Villars, Paris.

BROUSSE, P. (1981) – *Mécanique analytique : puissances virtuelles, équations de Lagrange,applications*. Vuibert, Paris.

BRUN, E.A., MARTINOT-LAGARDE, A. & MATHIEU, J. (1968) – *Mécanique des fluides*. Dunod,Paris.

de BUHAN P., DORMIEUX L., & SALENÇON J. (1998) – Modélisation multipolaire de la résistance d'un milieu renforcé par inclusions. *C.R. Ac. Sc. Paris*, **326**, IIb, 163-170.

BUI, H.D. (1970) – Évolution de la frontière du domaine élastique des métaux avec écrouissage plastique et comportement élasto-plastique d'un agrégat de cristaux cubiques.*Mémorial de l'artillerie française, Sciences et techniques de l'armement*, **1**,141-165.

BUI, H.D. (1978) – *Mécanique de la rupture fragile*. Masson, Paris.

CIARLET, P.G. (1986) – *Élasticité tridimensionnelle*. Masson, Paris.

CIARLET, P.G. (1988) – *Mathematical Elasticity*, vol. I. North-Holland, Amsterdam.

CIARLET, P.G. & GEYMONAT, G. (1982) – Sur les lois de comportement en élasticité non-linéaire compressible. *C.R. Ac. Sc. Paris*, Série A, **295**, 423-426.

COIRIER, J. (1997) – *Mécanique des milieux continus. Concepts de base*. Dunod, Paris.

COLEMAN, B.D. & NOLL, W. (1959) – On the thermostatics of continuous media. *Arch. Rational Mech. Anal*, **4**, 97-128.

COLONNETTI, G. (1960) – *L'équilibre des corps déformables*. Dunod, Paris.

COSSERAT, E. & COSSERAT, F. (1909) – *Théorie des corps déformables*. Hermann, Paris.

COURBON, J. (1971) – *Résistance des matériaux*. Dunod, Paris.

COURBON, J. (1972) – *Calcul des structures*. Dunod, Paris.

COUSSY, O. (1995) – *Mechanics of Porous Continua*. John Wiley, Chichester.

DAUTRAY, R. & LIONS, J.L. (2000) – *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

DAVET, J.L. (1985) – Sur les densités d'énergie en élasticité non linéaire : confrontation de modèles et de travaux expérimentaux. *Ann. Ponts et Chaussées*, **35**, 2-33.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DUVAUT, G. (1990) – *Mécanique des milieux continus*. Masson, Paris.

EIRICH, F.R. (1956, 1967) – *Rheology : Theory and Applications*. Academic Press, New York, 1956 (vol. 1), 1958 (vol. 2), 1960 (vol. 3), 1967 (vol. 4).

ERINGEN, A.C. (1962) – *Nonlinear Theory of Continuous Media*. McGraw-Hill, New York.

ERINGEN, A.C. (1967) – *Mechanics of continua*. John Wiley, New York.

FILONENKO-BORODICH, M. (1965) – *Theory of Elasticity*. Dover, New York.

FRANÇOIS, D., PINEAU, A. & ZAOUI, A. (1991, 1993) – *Comportement mécanique des matériaux*. Hermès, Paris, 1991 (vol. 1), 1993 (vol. 2).

FREUDENTHAL, A.M. (1966) – *Introduction to the Mechanics of Solids*. John Wiley, New York.

FREY, F. (1990) – *Analyse des structures et milieux continus*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.

FROCHT, M.M. (1941, 1948) – *Photoelasticity*. John Wiley, New York, 1941 (vol. 1), 1948 (vol. 2).

FUNG, Y.C. (1994) – *A First Course in Continuum Mechanics*. 3rd ed. Prentice Hall.

GEIRINGER, H. (1937) – Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes. *Mem. Sc. Math.*, **86**, Gauthier-Villars, Paris.

GERMAIN, P. (1962) – *Mécanique des milieux continus*. Masson, Paris.

GERMAIN, P. (1973) – *Cours de mécanique des milieux continus*. Masson, Paris.

GERMAIN, P. (1973) – La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. *J. Mécanique*, **12**, 2, 236-274.

GERMAIN, P. (1986) – *Mécanique*. Ellipses, Paris.

GERMAIN, P. & MULLER, P. (1980) – *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Masson, Paris ; 2ème éd. 1995.

GORDON, J.E. (1988) – *The New Science of Strong Materials*. Princeton Univ. Press, Princeton.

GREEN, A.E. & ADKINS, J.E. (1970) – *Large elastic deformations*. 2nd ed. Clarendon Press, Oxford.

GREEN, A.E. & ZERNA, W. (1954) – *Theoretical Elasticity*. Clarendon Press, Oxford.

GURTIN, M.E. (1972) – The linear theory of elasticity. *Handbuch der Physik*. IV a/2, Springer.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

GURTIN, M.E. (1981) – *Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, New York.

HALPHEN, B. & SALENÇON, J. (1987) – *Élasto-plasticité*. Presses de l'ENPC, Paris.

HASHIN, Z. & SHTRICKMAN, S. (1963) – A variational approach to the theory of the elastic behavior of mutiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **11**, 2, 127-140.

HEYMAN, J. (1998) – *Structural analysis. A historical approach*. Cambridge Univ. Press, Cambridge U.K.

HIBBELER, R.C. (1997) – *Structural Analysis*. 3rd edn., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J.

HIBBELER, R.C. & FAN S.C. (1997) – *Engineering Mechanics, Statics*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J.

HJELMSTAD, K.D. (1997) – *Fundamentals of Structural Mechanics*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J.

JOHN, F. (1972) – Uniqueness of non-linear elastic equilibrium for prescribed boundary displacements and sufficiently small strains. *Comm. Pure Appl. Math.*, **25**, 1972, 617-634.

KÖTTER, F. (1903) – Die Bestimmung des Druckes an gekrümmeten Gleitflächen, eine Aufgabe aus der Lehre vom Erddruck. *Berl. Akad. Bericht*, 229.

LAMÉ, G & CLAPEYRON, E. (1828) – Sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences,* sc. math. & phys., **4**, 463-562, Bachelier, Paris, 1834.

LANDAU, L. & LIFCHITZ, E. (1967) – *Théorie de l'élasticité*. Éditions Mir, Moscou.

LANDAU, L. & LIFCHITZ, E. (1994) – *Mécanique des fluides*. Ellipses, Paris.

LEKHNITSKII, S.G. (1963) – *Theory of Elasticity of a Anisotropic Elastic Body*. Holden-Day, San Francisco.

LEMAITRE, J. & CHABOCHE, J.L. (1985) – *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris.

LE TALLEC, P. (1981) – *Les problèmes d'équilibre d'un corps hyperélastique incompressible en grandes déformations*. Th. D. Sc. Univ. Pierre et Marie Curie, Paris.

LE TALLEC, P. & ODEN, J.J. (1981) – Existence and characterization of hydrostatic pressure in finite deformations of incompressible elastic bodies. *J. Elasticity*, **11**, 341-358.

LIN, T.H. (1968) – *Theory of Inelastic Structures*. John Wiley, New York.

LOVE, A.E.H. (1944) – *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, New York.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

LUBLINER, J. (1990) – *Plasticity Theory*. Macmillan, New York.

MAISONNEUVE, O. (1973) – *Sur le Principe de Saint Venant*. Th. D. Sc., Univ. Poitiers.

MALVERN, L.E. (1969) – *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall.

MANDEL, J. (1966) – *Cours de mécanique des milieux continus*. Gauthier-Villars, Paris.

MANDEL, J. (1973) – Équations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques. *Int. J. Solids and Structures*, **9**, 6, 725-740.

MANDEL, J. (1974) – *Introduction à la mécanique des milieux continus déformables*. Éditions scientifiques de Pologne, Varsovie.

MANDEL, J. (1978) – *Propriétés mécaniques des matériaux*. Eyrolles, Paris.

MARSDEN, J.E. & HUGHES, Th.J.R. (1978) – Topics in the mathematical foundations of elasticity. *Nonlinear Analysis and Mechanics : Heriot-Watt Symposium vol.2*. Pitman, London, pp. 30-285.

MARSDEN, J.E. & HUGHES, Th.J.R. (1983) – *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.

MARSDEN, J.E. & HUGHES, Th.J.R. (1994) – *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover, New York.

MASE, G.E. (1970) – *Theory and problems of Continuum Mechanics*, Schaum's outline series. McGraw-Hill, New York.

MIKHLIN, S.G. (1964) – *Variational Methods in Mathematical Physics*.Pergamon Press, Oxford.

VON MISES R. (1945) – On Saint Venant's Principle. *Bull. Amer. Soc.*, **51**, 555-562.

MONTÁNS, F. J. (2002) – Graphical Relationship among Lamé Ellipsoid and Mohr's Circles. A Graphical View of Mohr's Circles. *J. Eng. Mech.,* **128**, 3, 371-375.

MORERA, G. (1892) – Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo. *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, série V, **I**, Roma, 137-141.

MULLER, P. (1990) – *Résistance des structures*. Hermès, Paris.

MURNAGHAN, F.D. (1951) – *Finite Deformation of an Elastic Solid*. John Wiley, New York.

MUSKHELISHVILI, N.I. (1953) – *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff, Groningen.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

NECAS, J. & HLAVÁCEK, I. (1981) – *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-plastic Bodies,an Introduction*. Elsevier, Amsterdam.

ODEN, J.T. (1972) – *Finite Elements of Nonlinear Continuum*. McGraw-Hill, New York.

ODEN, J.T. (1979) – Existence theorems for a class of problems in non-linear elasticity. *J. Math. Anal. Appl.*, **69**, 51-83.

OGDEN, R.W. (1972) – Large deformation isotropic elasticity : On the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids. *Proc. Roy. Soc. London*, A, **328**,567-583.

OGDEN, R.W. (1997) – *Non-linear elastic deformations*. Dover, New York.

PALAMÁ, A. (1976) – On Saint Venant's Principle in Three-dimensional Elasticity. *Meccanica*, **11**, 2, 98-101.

PRAGER, W. (1961) – *Introduction to Mechanics of Continua*. Gin & Co, New York.

PRIGOGINE, I. (1968) – *Introduction à la thermodynamique des phénomènes irréversibles*. Dunod, Paris.

QUÉRÉ, Y. (1988) – *Physique des matériaux*. Ellipses, Paris.

QUÉRÉ, Y. (1998) – *Physics of Materials*. Gordon & Breach.

SAINT VENANT (BARRÉ de), A.J-C. (1853) – Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, etc. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences*, sc. math & phys., **14**, 233-560, Paris, 1856.

SAINT VENANT (BARRÉ de), A.J-C. (1863) – Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope. *J. Math. Pures et Appliquées*, 2^{e} série, VIII, 257-295 et 353-430.

SAINT VENANT (BARRÉ de), A.J-C. (1864) – *Résumé des leçons données à l'École des ponts et chaussées par* NAVIER, 3ème édition avec notes et appendices, Dunod, Paris, 1864.

SALENÇON, J. (1977) – *Applications of the Theory of Plasticity in Soil Mechanics*. John Wiley, Chichester.

SALENÇON, J. (1983) – *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'ENPC, Paris.

SALENÇON, J. (1983) – *Viscoélasticité appliquée au calcul des structures*. Presses de l'ENPC, Paris.

SALENÇON, J. (1990) – An introduction to the yield design theory and its applications to soil mechanics. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **9**, 5, 477-500.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

SEGEL, L.E. (1987) – *Mathematics Applied to Continuum Mechanics*. Dover, New York.

SMITH, J.O. & CHANG K.L. (1953) – Stresses due to tangential and normal loads on an elastic solid with application to some contact stress problems. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **75**, 157-166.

SOKOLOVSKI, V.V. (1960) – *Statics of soil media*. Butterworths Sci. Publ., London.

SOLOMON, L. (1968) – *Élasticité linéaire*. Masson, Paris.

SOUTHWELL, R.V. (1941) – *An Introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists*. Oxford Univ. Press, Oxford.

STERNBERG, E. (1954) – On Saint Venant's Principle. *Quart. Appl. Math.*, **11**, 393-402.

STERNBERG, E. & ROSENTHAL, F. (1952) – The elastic sphere under concentrated loads.*J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **74**, 413-421.

STOKER, J.J. (1968) – *Nonlinear Elasticity*. Gordon and Breach, New York.

SUQUET, P. (1981) – Approach by homogenization of some linear problems in solid mechanics, *Proc. CNRS Int. Symp. 319 "Plastic Behavior of anisotropic solids"*. CNRS éd., Paris,pp. 77-117.

SUQUET, P. (1982) – Une méthode duale en homogénéisation : application aux milieux élastiques. *J. Mec. Th. & Appl.*, numéro spécial, 79-98.

SZABO, I. (1974) – Die Geschichte der Materialkonstanten der linearen Elastizitätstheorie homogener isotroper Stoffe. *Die Bautechnik*, **51**, 1-8.

THUAL, O. (1997) – *Introduction à la Mécanique des milieux continus déformables*. Cépaduès éditions, Toulouse.

TIMOSHENKO, S. (1947) – *Théorie de la stabilité élastique*. Béranger, Paris.

TIMOSHENKO, S. (1983) – *History of Strength of Materials*. Dover, New York.

TIMOSHENKO, S. & GOODIER, J.N. (1951) – *Theory of Elasticity*. Mac Graw-Hill, New York.

TIMOSHENKO, S. & GOODIER, J.N. (1961) – *Théorie de l'élasticité*. Béranger, Paris.

TOUPIN, R.A. (1965) – Saint Venant's Principle. *Arch. Rat. Mech. and Analysis*, **18**, 83-96.

TRUESDELL, C. (1966) – *The Elements of Continuum Mechanics*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

TRUESDELL, C. (1968) – *Essays in the History of Mechanics*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

TRUESDELL, C. (1977) – *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. Academic Press,New York.

TRUESDELL, C. & NOLL, W. (1965) – The non-linear field theories of Mechanics. *Handbuch der Physik*, III/3, Springer, Berlin.

TRUESDELL, C. & TOUPIN, R.A. (1960) – The classical field theories. *Handbuch der Physik*, III/3, Springer, Berlin.

UGURAL, A.C. & FENSTER, S.K. (1995) – *Advanced Strength and Applied Elasticity*. 3rd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs.

VALENT, T. (1979) – Teoremi di esistenza e unicità in elastostatica finita. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **60**, 165-181.

VALID, R. (1977) – *La Mécanique des milieux continus et le calcul des structures*. Eyrolles, Paris.

VILLAGIO, P. (1997) – *Mathematical models for elastic structures*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

WAGONER, R.H. & CHENOT, J.L. (1997) – *Fundamentals of Metal Forming*. John Wiley, New York.

WANG, C.C. (1971) – A new representation theorem for isotropic functions. Parts I & II. *Arch. Rat. Mech. and Analysis*, **36**, 1970, 162-223 ; corrigendum, **43**, 392-395.

WANG, C.C & TRUESDELL, C. (1973) – *Introduction to Rational Elasticity*. Noordhoff, Groningen.

WASHIZU, K. (1975) – *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. 2nd edn. Pergamon Press, Oxford.

WINEMAN, A.S. & PIPKIN, A.C. (1964) – Material symmetry restrictions on constitutive equations. *Arch. Rat. Mech. and Analysis*, **17**, 184-214.

YANG, W.H. (1980) – A useful theorem for constructing convex yield functions. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **47**, 2, 301-303.

ZANABONI, O. (1937) – Dimostrazione generale del principio del de Saint Venant. *Atti Accad. Lincei Rend.*, **25**, 117-121.

ZANABONI, O. (1937) – Valutazione dell'errore máximo cui dá luogo l'applicazione del principio del de Saint Venant. *Atti Accad. Lincei Rend.*, **25**, 595-601.

ZANABONI, O. (1937) – Sull'approssimazione dovuta al principio del de Saint Venant nei solidi prismatici isotropi. *Atti Accad. Lincei Rend.*, **26**, 340-345.

ZIENKIEWICZ, Z.O. (1973) – *La méthode des éléments finis*. Ediscience, Paris.

ZIEGLER, F. (1991) – *Mechanics of Solids and Fluids*. Springer Verlag, Vienne.

ZIEGLER, H. (1977) – *Introduction to Thermodynamics*. Elsevier, Amsterdam.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Index alphabétique

Les numéros indiqués renvoient aux chapitres, annexes et paragraphes correspondants.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A

Abstraite
Configuration –, I.3.7.

Accélération –, I.3.6 ; III.4.3.

Action
Loi des – s mutuelles, IV.1.1 ; IV.2.2 ; IV.6.3 ; V.1.
Principe d'– locale, VII.1.1.
Principe de l'– et de la réaction, IV.1.1 ; IV.6.4.

AIRY
Fonction d'–, An III.2.8 ; An III.3.4.

Allongement unitaire, II.3.2 ; II.5.2.
Taux d'–, III.3.4.

Anisotrope
Matériau –, VII.2.2 ; VII.5.7 ; Ex.VII.6 à Ex.VII.8 ; Ex.IX.6.

Anneau, Ex.XI.7 ; Ex.XI.8 ; Ex.XII.4 ; Ex.XII.5.

Appuis, XI.4.2 ; XI.4.4 ; XI.4.6 ; Ex.XI.6 ; Ex.XI.10 ; Ex.XI.13 ; XII.3.3 ; XII.4 ; Ex.XII.7 ; Ex.XII.9.

ARCHIMÈDE
Théorème d'–, Ex.V.4.

Arcs, XI.2.1 ; XI.3.2 ; XI.3.11 ; Ex.XI.5 ; Ex.XI.6 ; XII.2.7.

Articulation, XI.4 ; Ex.XI.3 ; Ex.XI.4 ; Ex.XI.6 ; Ex.XI.11 ; Ex.XI.12 ; XII.4 ; Ex.XII.1 à Ex.XII.3 ; Ex.XII.9 ; Ex.XII.10.

Assemblages, XI.4.3 à XI.4.6 ; Ex.XI.4 ; Ex.XI.9 ; Ex.XI.11 à Ex.XI.13 ; XII.4.1 ; Ex.XII.1 à Ex.XII.3 ; Ex.XII.6.

Autocontrainte
Champ d'–, V.3.13 ; V.4.2 ; Ex.VI.12.
Champ d'– pour le problème, VIII.3.4 ; X.6.1 ; X.7.3 ; X.7.4.
Champ d'– pour le système, X.6.1 ; X.7.3 ; XII.2.6.

Autoéquilibrée
Distribution d'efforts intérieurs –, IV.3.4 ; X.6.1 ; XI.4.5 ; XI.4.6 ; Ex.XI.9 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.6 ; Ex.XII.9.

Axe neutre, IX.3.3 ; IX.4.4 ; IX.5.2.

B

Base, An I.2.3.
Changement de –, An I.3.2 ; An I.5.9.
– duale, An I.2.3 ; An I.5.3.

BELTRAMI, II.6.3.
Équations de –, VIII.6.2 ; IX.2.2 ; IX.3.2.
Équation de – MICHELL *bidimensionnelle*, An III.2.7.

BERNOULLI
Théorème de –, Ex.V.9.

BETTI
Théorème de –, X.5.4 ; X.8.3 ; Ex.X.3 ; Ex.X.6.

Bilan
Formules de –, III.4.4.
Méthode du –, III.4.4.

Bilatérale
Liaison –, VIII.1.4.

BOUSSINESQ
Tenseurs des contraintes de –, V.4.2 ; Ex.VII.9.

BRESSE
Formules de – NAVIER, Ex.XI.5 ; XII.3.2.

C

Câbles, XI.2.10 ; Ex.XI.1 ; Ex.XI.2 ; Ex.XI.9 ; Ex.XII.6.

CASTIGLIANO
Théorème de –, X.8.1 ; X.9 ; XII.3.2 ; XII.3.3 ; XII.4.1 ; Ex.XII.4 ; Ex.XII.5 ; Ex.XII.7.

CAUCHY
Tenseur de –, II.3.1.
Tenseur des contraintes de –, V.3.5 ; VI à XII.

Célérité, III.4.4.

Cercles
– *de* MOHR, VI.3.
– *de* MOHR *des déformations*, Ex.II.7.
– *principaux*, VI.3.

Chargement
– *évanouissant*, X.8.1.
Paramètres de –, X.7 ; X.8 ; Ex.X.1 à Ex.X.7.

Choc
– *thermique*, VIII.4.2 ; VIII.4.3 ; VIII.5.3 ; VIII.6.3.
Onde de –, III.4.4 ; III.5.1 ; IV.7.7 ; V.3.9 ; V.3.10.

Cinématiquement admissible
Champ de déplacement –, VIII.4.2 ; VIII.5 ; X ; XI.4.6 ; Ex.XI.5 ; Ex.XI.9 ; Ex.XI.11 à Ex.XI.13 ; XII.3.3 ; XII.4.2 ; Ex.XII.1 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.9.

Cisaillement
Contrainte de –, VI.2.2.
Ligne de –, VIII.7.7.
Module de –, VII.5.3.

Cission, VI.2.2.
– *maximale*, VI.3.4 ; VI.4.3.
– *octaédrale*, VI.2.8 ; VI.4.4.
– *simple*, VI.3.5 ; VIII.7.5 ; VIII.7.7.

CLAPEYRON
Formule de –, X.5.2 ; X.5.3 ; X.8.3 ; Ex.X.1 à Ex.X.3 ; Ex.X.5 à Ex.X.9.

CLAUSIUS-DUHEM
Inégalité de –, VII.3.3 ; VII.3.4 ; VII.4.2 ; VII.4.3.

COLONNETTI
Théorème de –, X.8.3.

Compatibilité
– *des déformations thermiques*, II.6.4 ; Ex.II.9 ; Ex.II.10 ; Ex.IX.7 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.6 ; Ex.XII.9.
– *des données statiques*, VIII.1.2 ; VIII.4.2 ; X.3.1 ; X.4.1 ; XI.2.6 ; XI.2.8 ; XI.3.7 ; XI.4.5.
Conditions de –, II.6 ; III.3.7 ; III.3.9 ; IV.3.4 ; V.3.13 ; V.4.2 ; VIII.6.1 ; X.4.1 ; XI.4.6 ; Ex.XI.4 ; Ex.XI.5 ; Ex.XI.9 ; Ex.XI.11 à Ex.XI.13 ; XII.3.3 ; XII.4.2 ; Ex.XII.1 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.6 à Ex.XII.8. An III.2.5 ; An III.3.4.

Complaisances élastiques
Tenseur des –, X.1.6 ; Ex.X.6.

Comportement
Loi de –, VII.1 ; VII.2.1.
– *thermoélastique*, VII ; VIII ; IX ; X ; XII.

Composantes
– *d'un produit tensoriel*, An I.3.5.
– *d'un tenseur*, An I.3.1.

Compression
– *avec frottement*, Ex.X.7.
– *simple*, VI.3.5 ; IX.2 ; Ex.IX.3 ; Ex.IX.5 à Ex.IX.8 ; X.5.3.
– *triple*, VI.3.5.

Conditions aux limites, VIII.1.2 à VIII.1.4 ; VIII.2.2 ; VIII.3.2 ; VIII.3.6 ; VIII.4.2 ; VIII.5.1 ; VIII.6.1 ; VIII.7.3 ; VIII.8 ; Ex.VIII ; IX ; Ex.IX ; X.1.1 ; X.2.2 ; X.3.1 ; X.4.2 ; X.7.2 ; Ex.X.5 à Ex.X.7.

Conduction
Inégalité de la –, VII.4.2 ; VII.4.3 ; VIII.1.2.
Loi de FOURIER *de la* –, VII.4.2 ; VIII.1.2 ; VIII.2.2.

Configuration, I.2.3 ; I.3.7.

Conservation
– *de l'énergie*, VII.3.2.
– *de la masse*, III.5.
– *de la quantité de mouvement*, IV.7.3 ; V.3.10.

Console
Poutre –, XII.4.

Continuité
– *du milieu*, I.1.
Équation de –, III.5.1.
Hypothèse de –, I.3.2 ; I.3.3.

Contraction
– *d'un tenseur*, An I.4 ; An I.5.

Contrainte, V.3 ; V.4
– *équivalente*, VI.4.4.
– *normale*, VI.2.2.
– *plane*, An III.3.
– *tangentielle*, VI.2.2.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

– *s initiales*, VII.5.2 à VII.5.4 ; Ex.VII.7.4 ; VIII.2.1 ; VIII.2.5 ; VIII.3.4 ; VIII.3.5 ; VIII.7.7 ; X.1.1 ; X.3.7 ; X.5 ; X.8.3.
– *s principales*, VI.2.6.
– *s résiduelles*, VIII.3.4.
Couple –, V.5.3.
Fonction de –, VIII.7.3 ; An III.2.8 ; An III.3.4.
Méthode des –, VIII.6 ; VIII.7.6 ; Ex.VIII.1 ; Ex.VIII.2 ; Ex.VIII.4 ; Ex.VIII.5 ; Ex.VIII.7 ; IX.2 ; à IX.5 ; Ex.IX.3 ; Ex.IX.4 ; Ex.IX.6 ; X.1.2 ; X.4.1 ; An III.2.5 ; An III.3.
Vecteur –, V.3.5 ; V.5.3 ; VI.2.

Contravariance, An I.1.1 ; An I.3.2 ; An I.5.

Convention de signe
– *sur les contraintes*, VI.2.3.

Convexité, VII.4.2 ; VII.5.5 ; X.1.5 ; X.2 à X.9.

Corotationnelle
Dérivée –, VI.5.3 ; Ex.VII.12.

Cosinus directeurs, VI.2.5.

COSSERAT
Continus de –, V.5.

COULOMB
Critère de –, Ex.VI.9 ; Ex.VI.10.
Frottement de –, Ex.XI.2.

Couple
– *de contrainte*, V.5.3.
– *de torsion*, VIII.7 ; Ex.VIII.5 à Ex.VIII.7 ; Ex.IX.10 ; Ex.X.1 ; Ex.X.8 ; Ex.X.9 ; XI.3.11 ; XII.2.5 à XII.2.7 ; XII.3.4 ; Ex.XII.4.

Courbure, Ex.II.10 ; IX.3.3 ; IX.4.4.

Covariance, An I.1.1 ; An I.3.2 ; An I.5.

Critères
– *de limite d'élasticité*, VI.4 ; Ex.VI.3 à Ex.VI.6 ; Ex.VI.8 à Ex.VI.11 ; Ex.VI.13 ; VIII.7.7 ; Ex.VIII.5 ; Ex.VIII.6 ; IX.2.4 ; IX.2.5 ; IX.3.4 ; IX.6.4.

Critique
Force – *d'*EULER, Ex.XII.10.

Curvilignes
Milieux –, XI ; XII.

D

Décomposition
– *d'un tenseur*, An I.3.

Décomposition polaire, II.3.4 ; II.4.5.

Découplage
– *du problème thermique*, VIII.2.4.

Déformation
– *du milieu curviligne*, XII.2.2 ; XII.2.7.
– *plane*, An III.2.
– *pure*, II.3.4.
Taux de –, III.2.2 ; III.3.3 à III.3.9 ; Ex.III.3.1 à Ex.III.3.3 ; V.3.13 ; Ex. VII.12.

Déformations
Tenseur des – *de* GREEN-LAGRANGE, II.3.3 ; II.4.3 ; VII.4.
Tenseur des – *linéarisé*, II.5.2 ; III.3.6 ; VII.5 ; VIII ; IX ; X.
– *thermiques*, Ex.II.9 ; Ex.II.10 ; Ex.VI.12 ; Ex.IX.3 ; Ex.IX.7.

Déformée
– *de la fibre moyenne*, IX.3.3 ; IX.4.3.
– *de la poutre*, XII.3.6.

Déplacement, II.4.4 ; XII.2.2.
Fonction de –, VIII.5.4 ; IX.6.3 ; IX.7.3.
Méthode des – *s*, VIII.1.3 ; VIII.5 ; VIII.7.2 ; Ex.VIII.3 ; Ex.VIII.6 ; IX.6 ; IX.7 ; Ex.IX.1 ; Ex.IX.2 ; Ex.IX.5 ; Ex.IX.7 à Ex.IX.10 ; X.1.2 ; X.4.1 ; An III.2.4.
Distributeur du –, XII.2.2.

Dérivée particulaire, III.2.1 ; III.3.2 ; III.4.
– *d'un flux*, III.4.6.
– *d'un vecteur matériel*, III.2.1 ; III.3.2.
– *d'un volume matériel*, III.2.1 ; III.3.5.
– *d'une circulation*, III.4.5.
– *d'une fonction de point*, III.4.1 ; III.4.3.
– *d'une intégrale de volume*, III.4.4 ; III.5.3.
– *du tenseur des contraintes*, VI.5.1.

Déterminant
– *d'un tenseur*, An I.3.3 ; An I.5.7.

Déviateur
– *des contraintes*, VI.2.8 ; VI.4.3 ; VI.4.4 ; Ex.VI.1 ; VII.5.4 ; X.5.1.
– *des déformations*, VII.5.4 ; X.5.1.

Dilatation, II.3.2.
– *s principales*, II.3.2.
– *volumique*, I.3.2 ; II.2.3 ; II.4.2.
Coefficient de – *thermique*, VII.5.3 ; VII.5.6 ; XII.2.6 ; XII.3.5 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.8 ; Ex.XII.9.
Taux de – *volumique*, III.3.5.
Tenseur des – *s*, II.3.1 ; An I.5.2 ; An I.5.7.

Directions principales, An I.5.10.
– *de la déformation*, II.3.
– *des contraintes*, VI.2.6.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

– *du taux de déformation*, III.3.4 ; III.3.5.

Directrice
Courbe –, XI ; XII.

Discontinuité
– *de la tension*, XI.2.7.
– *des efforts intérieurs*, XI.3.8.
– *du champ de contrainte*, V.3.9 ; VIII.1.1 ; VIII.2.6 ; VIII.4.2 ; VIII.4.3 ; VIII.5.3 ; VIII.6.3 ; X.1.1.
– *du champ de déformation*, VIII.4.2 ; VIII.4.3 ; VIII.5.3 ; VIII.6.3 ; X.4.2.
– *du champ de vitesse réel*, III.4.4 ; III.5.1 ; IV.7.6 ; V.3.9 ; V.3.11.
– *du champ de vitesse virtuel*, V.2.7 ; V.3.8 ; XI.2.9 ; XI.3.10.

Dislocation-vis, Ex.X.9.

Dissipation, VII.3.3 ; VII.4.2 ; VII.4.3.
– *intrinsèque*, VII.3.3 ; VII.4.2 ; VII.4.3.
– *thermique*, VII.3.3 ; VII.4.2 ; VII.4.3.

Distributeur, IV.5 ; V.5.3 ; XI.3 ; XI.4 ; XII.
– *tensoriel*, IV.5 ; V.5.3.
Dérivée d'un –, IV.5.5 ; XI.3.5.
Gradient d'un –, IV.5.5 ; V.5.3.

Divergence
– *d'un champ de tenseurs*, An I.6.3.
Formule de la –, III.4.4 ; V.2.4 ; V.3.3 ; V.4.2 ; V.5.3 ; An I.6.3.

Domaine initial d'élasticité, VI.4.1 ; Ex.VI.3 à Ex.VI.5 ; VII.2.2 ; VIII.3.4 ; VIII.7.7 ; Ex.VIII.5 ; Ex.VIII.6 ; IX.2.4 ; IX.2.5 ; IX.3.4 ; IX.6.4 ; Ex.XII.3.

Dynamique
Équations de la –, V.2.4 ; V.3.3 ; V.3.7 ; V.3.9 ; V.3.14 ; V.4.2 ; VIII.1.1.
Loi fondamentale de la –, IV.1.1 ; IV.2.2 ; IV.6.3 ; V.1 ; V.2.6 ; V.3.4.

E

Effort
– *normal*, IX.5.1 ; XI.2.10 ; XI.3.11 à XI.3.13 ; XI.4.7 ; XII.2.5 ; XII.3.2.
– *tranchant*, IX.5.3 ; XI.3.11 à XI.3.13 ; XI.4.7 ; XII.2.5.

Efforts
– *extérieurs*, IV ; V.2.2 ; V.3.1 ; V.5.3 ; XI.2.3 ; XI.3.4.
– *intérieurs*, IV ; V.2.3 ; V.3.2 ; V.3.6 ; V.5 ; XI.2.4 ; XI.2.6 ; XI.3.5 ; XI.3.7.

Élancement, VIII.8 ; IX.2.3 ; IX.3.3 ; Ex.IX.2 ; XI.1 ; XI.3.11 ; XI.3.12 ; XII.2.5 ; Ex.XII.10.

Élasticité, VII ; VIII ; IX ; X ; XII.
– *plane*, An III.
Limite d'–, VIII.7.7 ; Ex.VIII.5 ; Ex.VIII.6 ; IX.2.4 ; IX.2.5 ; IX.3.4 ; IX.6.4.

Éléments finis
Méthode des –, VIII.4.4 ; X.4.2.

Encadrement, X.3.5 ; X.5.2 ; X.5.3 ; Ex.X.5 à Ex.X.8.

Encastrement, XI.4.2 à XI.4.4 ; Ex.XI.9 ; XII.4 ; Ex.XII.6 ; Ex.XII.9.

Énergie
– *complémentaire*, X.3.2.
– *élastique de contrainte*, X.3.2 ; X.3.3 ; X.5.1 ; X.5.2 ; X.8.1 ; XII.2.5 à XII.2.7 ; Ex.XII.8.
– *élastique de déformation*, X.2.2 ; X.2.3 ; X.5.1 ; X.5.2.
– *élastique*, X.5.2.
– *interne*, VII.3.2 ; VII.3.4.
– *libre*, VII.3.3 ; VII.3.4 ; VII.4.2 à VII.4.5 ; VII.5.2 à VII.5.5.
– *potentielle*, X.2.2 ; X.3.2 ; X.3.5.
Équation de l'–, VII.3.2 ; VII.3.3. ; VII.3.4.
Théorème de l'–, X.8 ; XII.3.2 ; XII.3.3 ; XII.4 ; Ex.XII.1 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.4 à Ex.XII.7.
Théorème de l'– cinétique, IV.7.5 ; V.3.11 ; VII.3.1.

Entropie, VII.3.3.

Équilibre
– *thermoélastique linéarisée*, VIII.3 à VIII.8 ; Ex.VIII.1 à Ex.VIII.7 ; IX ; Ex.IX.1 à Ex.IX.7 ; X ; Ex.X.1 à Ex.X.9.
Équation d'–, IV.3.4 ; V.5.3 ; XI.2.5 ; XI.2.8 ; XI.3.6 ; XI.3.9 ; XII.3.4 ; XII.3.5 ; XII.3.6 ;

Euclidien
Espace –, An I.5.

EULER
Force critique d'–, Ex.XII.10.
Théorème d'–, IV.7.4 ; IV.7.6 ; V.3.10.

Eulérienne
Description –, I.4 ; III.3 à III.5.

Évolution
– *thermoélastique*, VIII.1 ; VIII.2.1 ; VIII.2.3 ; VIII.3.1 ; Ex.IX.8 à Ex.IX.10.

Extension
– *simple*, Ex.II.1.
Taux d'–, III.3.4.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Extensométrie, II.7.3 ; Ex.II.8.

F

Facette, V.3.5 ; V.5.3 ; VI.

Facettes conjuguées, VI.2.4.

Fermeture
Conditions de –, II.6.3 ; VIII.6.1 ; Ex.VIII.6.

Fibre, VIII.7.2 ; IX.3.2 ; IX.3.3 ; IX.4 ; IX.5.2.
– *moyenne*, IX.3.3 ; XII.2.5.

Fils, XI.2 ; Ex.XI.1 ; Ex.XI.2 ; Ex.XI.9 ; XII.1 ; Ex.XII.6.

Flambement, Ex.XII.10.

Flèche, XII.4.1.

Flexion
– *circulaire*, IX.3 ; IX.4 ; X.7.4.
– *composée*, IX.5 ; Ex.X.2.
– *déviée*, IX.4.
– *normale*, IX.3.
Moment de –, IX.3 à IX.5 ; Ex.X.2 ; XI.3.11 ; XII.2.5.

Fluides, V.2.5.

Fonction
– *de charge*, VI.4.1.
– *de contrainte*, VIII.7.3 ; An III.2.8 ; An III.3.4.
– *de déplacement*, VIII.5.4 ; IX.6.3 ; IX.7.3.
– *de gauchissement*, VIII.7.2 à VIII.7.6 ; Ex.VIII.5 à Ex.VIII.7 ; IX.2.5 ; Ex.IX.10 ; Ex.X.8.

Force critique
– *d'*EULER, Ex.XII.10.

Forces
– *de masse*, V.2.2 ; V.3.1.
– *surfaciques*, V.2.2 ; V.3.1.
– *de volume*, V.2.2 ; V.3.1.
Méthode des –, X.6.3 ; X.8.2.

Formulation faible
– *des conditions de compatibilité*, III.3.9 ; IV.3.4 ; V.3.13 ; V.4.2 ; X.4.1.
– *des équations de la dynamique*, V.3.14 ; X.4.1.

FOURIER
Loi de –, VII.4.2 ; VIII.1.2 ; VIII.2.2

FRÉNET
Formules de –, XI.2.6 ; XI.4.7 ; XII.3.4.
Trièdre de –, XI.2.6.

Frottement, Ex.X.7 ; Ex.XI.2.

G

Galiléen
Référentiel –, IV.1.1 ; IV.2.3 ; IV.4.4 ; V.1 ; VIII.1.1.

Gauchissement, VII.7.2 à VIII.7.6 ; Ex.VIII.5 à VIII.7 ; Ex.IX.10 ; Ex.X.8 ; XII.2.5.

GEIRINGER
Équations de –, Ex.III.5.

Glissement
– *de deux directions orthogonales*, II.3.2 ; II.5.2.
– *double*, Ex.II.3.
– *simple*, Ex.II.2 ; Ex.II.6.
Taux –, III.3.4.

Gradient
– *d'un champ de distributeurs*, IV.5.5 ; V.5.3.
– *d'un champ de tenseurs*, II.4.1 ; II.5.3 ; An I.6.2.
– *d'un champ de torseurs*, IV.5.5.
– *du champ de vitesse*, III.2.1 ; III.3.2.
– *de température*, Ex.II.9 ; Ex.II.10 ; VII.3.3 ; VII.3.4 ; VII.4.2 ; VIII.1.2 ; VIII.4.3 ; VIII.5.2 ; VIII.6.2 ; Ex.IX.7 ; Ex.XII.8 ; Ex.XII.9.
– *d'une transformation*, II.4.1.

GREEN, VII.6.
Tenseur des déformations de – LAGRANGE –, II.3.3 ; II.4.3 ; VII.3.4 ; VII.4 ; VIII.1.2 ; VIII.1.3 ; VIII.2.2

H

HADAMARD
Relations de –, III.4.4 ; VIII.4.2.

HELMOLTZ
Énergie libre de –, VII.3.3.
Théorème de –, Ex.III.7.

HENCKY
Équation de –, Ex.VI.8.

HERTZ
Problème de –, VIII.3.3.

Hessien, X.1.5.

Homogène
Transformation –, II.2 ; II.3.

HOOKE
Loi de –, VII.2.4.

Houle
– *trochoïdale*, Ex.I.4.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Hyperstaticité
Degré d'–, IV.3.4 ; X.6.1 ; X.8.2 ; XI.4.5 ; XI.4.6 ; Ex.XI.13 ; XII.3.3.

Hyperstatique
Inconnue –, X.6.1 ; XII.4.2 ; Ex.XII.1 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.6 ; Ex.XII.7.

Hypostatique
Problème –, X.6.1 ; XI.4.5 ; Ex.XI.6.

I

Incompressible
Matériau –, II.4.2 ; Ex.II.2 ; Ex.II.6 ; III.3.5 ; Ex.III.1 à Ex.III.5 ; VII.4.3 ; VII.4.6 ; Ex.VII.3 ; Ex.VII.4 ; Ex.VII.9 à Ex.VII.11 ; Ex.IX.8 à Ex.IX.10 ; Ex.X.7.

Inégalité
– *de* CLAUSIUS-DUHEM, VII.3.3 ; VII.3.4 ; VII.4.2 ; VII.4.3.
– *fondamentale*, VII.3.3.

Inertie de torsion, VIII.7.3 ; Ex.VIII.5 à Ex.VIII.7 ; Ex.X.8 ; XII.2.5 à XII.2.7 ; XII.3.4 ; Ex.XII.4.

Inextensible
Matériau –, VII.4.3 ; Ex.VII.5.

Inopérant
Tenseur –, VII.4.3 ; VII.4.6 ; Ex.VII.3 ; Ex.VII.5.

Instabilité
– *élastique*, Ex.XII.10.

Intrinsèque
Dérivée –, VI.5.2 ; Ex.VII.12.

Invariants
– *d'un tenseur du* $2^{ème}$ *ordre*, An I.3.3 ; An I.4.6 ; An I.5.7 ; An I.5.10.
– *du tenseur des contraintes*, VI.2.7 ; VI.4.2 ; VI.4.4.
– *du tenseur des déformations*, VII.4.5 ; VII.5.3 ; Ex.VII.1 à Ex.VII.4.

Isostatique
Problème –, X.6.1 ; XI.4.5 ; Ex.XI.7 ; Ex.XI.8 ; XII.3.3 ; XII.4.1 ; Ex.XII.4 ; Ex.XII.5.

Isotrope
Matériau –, VI.4.2 à VI.4.4 ; VII.4.5 ; VII.5.3 ; Ex.VII.1 à Ex.VII.4 ; Ex.VII.10 ; VIII.2.4 ; VIII.5.2 ; VIII.6.2 ; VIII.7 ; Ex.VIII.1 à Ex.VIII.3 ; Ex.VIII.5 à Ex.VIII.7 ; IX ; Ex.IX.1 à Ex.IX.5 ; Ex.IX.7 à Ex.IX.10 ; X.2.3 ; X.3.3 ; X.5.1 ; Ex.X.1 à Ex.X.5 ; Ex.X.7 à Ex.X.9 ; An III.
Matériau transversalement –, VII.5.7 ; Ex.VII.6 ; Ex.VIII.4 ; Ex.IX.6.

Isotropie de l'espace, VI.4.2 ; VI.5.2 ; VII.4.1.

J

Jacobien, I.3.2.

JAUMANN
Dérivée de –, VI.5.3 ; Ex.VII.12.

K

KELVIN
Théorème de Lord –, Ex.III.7.

KIRCHHOFF
Tenseur des contraintes de PIOLA –, V.4.1 ; VII.3.4 ; VII.4 ; VII.5 ; Ex.VII ; VIII.1.2 ; VIII.1.3 ; VIII.2.2 ; Ex.IX.8 à Ex.IX.10.

KÖTTER
Equations de –, Ex.VI.11.

KRONECKER
Symbole de –, An I.2.3.

L

LAGRANGE
Multiplicateurs de –, VII.4.3 ; VII.4.5 ; VII.4.6 ; Ex.VII.3 à Ex.VII.5 ; VIII.1.2 ; VIII.1.3 ; Ex.IX.8 à Ex.IX.10.
Tenseur des contraintes de PIOLA –, V.4.2.
Tenseur des déformations de GREEN –, II.3.3 ; II.4.3 ; VII.3.3 ; VII.4 ; VIII.1.2 ; VIII.1.3 ; VIII.2.2.

Lagrangienne
Description –, I.3 ; II ; III.2.

LAMÉ
Coefficients d'élasticité de –, VII.5.3 ; VII.5.5.
Constante de –, VII.5.3.

LEGENDRE-FENCHEL
Transformée de –, VII.4.2 ; X.1.6 ; X.3 ; X.4.1 ; X.5.

Lemme du tétraèdre, VII.3.2.

Liaison, VIII.1.4 ; X.6.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

– *interne*, VII.4.2 ; VII.4.3 ; VII.4.5 ; VII.4.6 ; Ex.VII.3 à Ex.VII.5 ; VIII.1.2 ; VIII.1.3 ; VIII.2.2 ; Ex.IX.8 à Ex.IX.10 ; X.2.5 ; X.3.6.
– *parfaite*, VII.4.3.

Ligne
– *d'émission*, I.3.5.
– *de courant*, I.4.3.

Linéarisation, VII.5 ; VIII.2 ; VIII.3 ; XII.2 ; XII.3.1.

Loi
– *des actions mutuelles*, IV.1.1 ; IV.2.2 ; IV.6.3 ; V.1.
– *fondamentale de la dynamique*, IV.1.1 ; IV.2.2 ; IV.6.3 ; V.1 ; V.2.6 ; V.3.4.

M

Maillages, X.4.2.

Masse
– *volumique*, III.5.1.
Conservation de la –, III.5 ; VIII.1.1 ; VIII.2.2.

Matériel
Domaine –, I.3.2.
Vecteur –, II.2.2 ; II.4.2 ; III.2.1 ; III.3.2.

MAXWELL-BETTI
Théorème de réciprocité de –, X.5.4 ; X.8.4 ; X.10 ; Ex.X.3 ; Ex.X.6.

MENABREA
Théorème de –, X.8.2.

Méthode
– *des contraintes*, VIII.6 ; VIII.7.6 ; Ex.VIII.1 ; Ex.VIII.2 ; Ex.VIII.4 ; Ex.VIII.5 ; Ex.VIII.7 ; IX.2 à IX.5 ; Ex.IX.3 ; Ex.IX.4 ; Ex.IX.6 ; X.1.2 ; X.4.1 ; An III.2.5 ; An III.3.
– *des déplacements*, VIII.1.3 ; VIII.5 ; VIII.7.2 ; Ex.VIII.3 ; Ex.VIII.6 ; IX.6 ; IX.7 ; Ex.IX.1 ; Ex.IX.2 ; Ex.IX.5 ; Ex.IX.7 à Ex.IX.10.
– *semi-inverse*, VIII.7 ; Ex.IX.3.
– *s énergétiques*, X ; Ex.X.
– *s variationnelles*, VIII.4.4 ; X.1.3 ; X.4.2.

MICHELL
Équations de –, VIII.6.2.

Microstructure, I.5 ; V.5.

Milieu continu, I.

Minimum
– *de l'énergie complémentaire*, X.3.2 ; X.4.1 ; X.5.2 ; X.5.3 ; X.6.2 ; X.8.2 ; Ex.X.5 à Ex.X.9.
– *de l'énergie potentielle*, X.2.2 ; X.4.1 ; X.4.2 ; X.5.2 ; X.5.3 ; Ex.X.5 à Ex.X.9.

VON MISES
Critère de –, VI.4.4 ; Ex.VI.4 ; Ex.VI.6 ; VIII.7.7 ; Ex.VIII.5 ; Ex.VIII.6 ; IX.2.4 ; IX.2.5 ; IX.3.4 ; IX.6.4.

Module
– *de cisaillement*, VII.5.3.
– *s d'élasticité*, VII.5.2 ; VII.5.7 ; Ex.VII.6 ; Ex.VII.8 ; Ex.X.6.
– *élastique de compression*, VII.5.4 ; VII.5.5 ; Ex.X.5 ; Ex.X.6.
– *de* YOUNG, VII.5.3.

MOHR
Cercles de –, Ex.II.6 ; VI.3.
Plan de –, VI.3.1.
Représentation de –, VI.3 ; VI.4.3.

Moiré
Méthodes de –, II.7.3.

Moment, IV.1.1 ; IV.5.4 ; V.3.6.
– *de flexion*, IX.3 à IX.5 ; Ex.X.2 ; XI.3.11 ; XII.2.5.
– *de torsion*, XI.3.11 à XI.3.13.
– *fléchissant*, XI.3.11 à XI.3.13 ; Ex.XI.6 à Ex.XI.10 ; Ex.XI.13 ; XII.2.5 à XII.2.8 ; XII.3 ; XII.4 ; Ex.XII.4 à Ex.XII.10.

Mouvement
– *rigidifiant*, III.3.7 ; III.3.8 ; VIII.3.6 ; X.2.4 ; X.3.4.
– *virtuel*, IV ; V.
– *virtuel rigidifiant*, IV.4 ; IV.5 ; IV.6 ; V.2.4 ; V.3.2 ; V.5.3.
Représentation du –, I.

N

Naturel
État initial –, VII.5.4 ; VIII.2.5 ; VIII.3.3 ; VIII.4 à VIII.8 ; Ex.VIII ; IX ; Ex.IX ; X.5 ; X.8.3 ; Ex.X ; XII.2.5 ; XII.2.6.

NAVIER
Équation de –, VIII.5.2 ; VIII.6.3 ; VIII.7.3 ; An III.2.4.
Formules de BRESSE *–*, Ex.XI.5 ; XII.3.2.

NAVIER-BERNOULLI
Condition de –, IX.3.3 ; XI.4.1 ; Ex.XI.5 ; XII.2 ; XII.4.
Hypothèse de –, IX.3.3.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Nœud, X.4.2.

Numériques
Méthodes –, VIII.2.4 ; VIII.4.4 ; X.1.3. X.4.2.

O

Objectivité, I.2.4 ; II.4.6 ; III.3.11 ; IV.2.3 ; IV.4.4 ; V.3.15 ; VI.5.

Octaédrale
Cission –, VI.2.8.
Contrainte –, VI.2.8.

Œdométrique
Essai –, Ex.VIII.3 ; Ex.X.6.

Onde de choc, III.4.4 ; III.5.1 ; IV.7.7 ; V.3.9 ; V.3.10.

Ordre
– d'un tenseur, An I.1.1.

Orthonormée
Base –, An I.5.3 ; An I.5.9.

Orthotrope
Matériau –, VII.5.7 ; Ex.VIII.4.

P

Parallélépipède
Raisonnement du –, V.2.5 ; V.3.6.

Paramètres
– cinématiques, X.7 ; X.8 ; Ex.X.1 à Ex.X.7.
– de chargement, X.7 ; X.8 ; Ex.X.1 à Ex.X.7 ; XII.4.1 ; Ex.XII.1 ; Ex.XII.3 à Ex.XII.5.

Permanent
Mouvement –, I.4.4 ; III.5.2
Petites perturbations
Hypothèse des –, VIII.3.5 à VIII.8 ; Ex.VIII ; IX ; Ex.IX.1 à Ex.IX.7 ; X ; Ex.X ; XII.2.3 ; XII.2.5 ; XII.3.1 ; An III.

Petits déplacements
Hypothèse des –, VIII.3.5 à VIII.8 ; Ex.VIII ; IX ; Ex.IX.1 à Ex.IX.7 ; X ; Ex.X ; XII.2.3 ; XII.2.5 ; XII.3.1 ; An III.

Photoélasticité, Ex.VI.8 ; VIII.8.

PIOLA-KIRCHHOFF
Tenseur des contraintes de –, V.4.1 ; Ex.V.14 ; VII.3.4 ; VII.4 ; VII.5 ; Ex.VII ; VIII.1.2 ; VIII.1.3 ; VIII.2.2 ; Ex.IX.8 à Ex.IX.10.

PIOLA-LAGRANGE
Tenseur des contraintes de –, V.4.2 ; Ex.VII.9.

POISSON
Coefficient de –, VII.5.3 ; VII.5.5.

Potentiel minimum
Théorème du –, X.6.2 ; X.8.2 ; XII.3.3 ; XII.4.2 ; Ex.XII.1 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.6 ; Ex.XII.7 ; Ex.XII.9.

Potentiel thermodynamique, VII.4.2 ; X.1.6.

POYNTING
Effet –, Ex.IX.10.

Préchargé
État de référence –, VIII.3.4 ; X ; XII.2.6.

Précontraint
État de référence –, VII.5.4 ; VIII.3.4 ; X ; XII.2.6.

Pression, V.2.5.

Principes de minimum, X.2.2 ; X.3.2 ; X.4.1 ; X.5.3 ; X.6.2 ; X.8.2 ; Ex.X.5 à Ex.X.9.

Principe de la thermodynamique
Premier –, VII.3.2.
Deuxième –, VII.3.3.

Problème bien posé, VIII.3.1.

Problème thermique,
– découplage, VIII.2.4.

Produit
– contracté, An I.4.2 ; An I.5.
– tensoriel, An I.2.

Propagation
Vitesse de –, III.4.4 ; III.5.1.

Puissance de déformation, V.3.12.

Puissances virtuelles
– des efforts extérieurs, IV ; V.2.2 ; V.3.1 ; V.5.3 ; XI.2.3 ; XI.3.4.
– des efforts intérieurs, IV ; V.2.1 ; V.3.2 ; V.5.3 ; XI.2.4 ; XI.3.5.
– des quantités d'accélération, - IV ; V.2.1.
– des quantités de mouvement, - IV.7.7.
Méthode des –, IV ; V ; XI.2 ; XI.3.
Principe des –, IV ; V ; X.1.4 ; XI.

Q

Quasi-naturel
État de référence –, VII.5.4.

R

Réciprocité
– des contraintes, - VI.2.4.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Théorème de –, X.5.4 ; X.8.3 ; X.10 ; Ex.X.3 ; Ex.X.6.

Référentiel, I.2.2 ; VI.5.4.
– *galiléen*, IV.1.1 ; IV.2.3 ; IV.4.4 ; V.1 ; VIII.1.1.

REISSNER
Principe de –, X.9.

Repère, I.2.2.

Représentation
– *s d'un tenseur*, An I.5.5 ; An I.5.7.
Théorème de –, VI.2.7 ; VI.4.2 ; VII.4.5 ; An I.5.7.

Résistance des matériaux, VIII.8 ; X.8.1 ; XII.2.7 ; XII.5.

Résultante, IV.1.1 ; IV.5.4 ; V.3.6.

REUSS
Borne de –, X.5.3 ; Ex.X.5.

Réversibilité, VII.3.3 ; VII.4.2 ; VII.4.3.

Rigidifiant
Champ de déplacement –, II.6.3 ; VIII.3.6 ; VIII.7.4 ; X.2.4 ; X.3.4.
Mouvement –, III.3.7 ; III.3.8.
Mouvement virtuel –, IV.4 ; IV.5 ; IV.6 ; V.2.4 ; V.3.2 ; V.5.3.

Rupture
Calcul à la –, Ex.VI.2 ; Ex.VI.13 ; Ex.XI.11 à Ex.XI.13 ; Ex.XII.3.

S

SAINT-VENANT, II.6.3 ;
Principe de –, VIII.7 ; VIII.8 ; IX.2.3 ; IX.3.3 ; Ex.IX.2 ; ; Ex.X.9 ; XII.2.5.
Problème de –, IX.5.3.

Section
– *droite*, VIII.7.2 ; VIII.7.4 ; VIII.7.5 ; Ex.VIII.5 à Ex.VIII.7 ; IX.3 à IX.5 Ex.X.8 ; XI.3.2 ; XI.3.11 ; XI.3.12 ; XII.2.1 ; XII.2.2 ; XII.2.7.
– *transversale*, XI.3.1 ; XI.3.12 ; XI.3.13.

Semi-permanent
Mouvement –, I.4.5.

Sous-structuration, X.6.3 ; X.8.2.

Sphère
– *creuse sous pression*, Ex.VI.2 ; IX.6 ; X.7.4.

Stabilité, VII.5.5 ; VIII.3.3 ; X.1.6.

Stationnaire
Fonctionnelle –, X.4.1.
Mouvement –, I.4.4 ; III.5.2.

Statique
– *des fils*, XI.2 ; Ex.XI.1 ; Ex.XI.2.
– *des fluides*, V.2.5.
– *des poutres*, XI.3 ; Ex.XI.3 ; Ex.XI.4 ; Ex.XI.6 à Ex.XI.13.
Loi fondamentale de la –, IV.6.4.

Statiquement admissible
Champ de contrainte –, VIII.4.2 ; VIII.6 ; X.

Structures, XI.
Calcul des –, VIII.4.4 ; X.8.1 ; X.8.2 ; Ex.X.4 ; XII.2.7 ; XII.5.
– *planes*, XI.4.7 ; XII.3.5.

Superposition
Principe de –, VIII.3.2 ; IX.2.5 ; IX.4 ; IX.5 ; Ex.X.2 ; Ex.X.3 ; Ex.X.9 ; XII.2.5.

Surface libre, VI.3.5.

Symétries de la matière
Respect des –, VI.4.2 ; VII.1 ; VII.4.4 ; VII.4.5 ; VII.5.3 ; VII.5.7 ; Ex.VII.6 à Ex.VII.8.

Systèmes, IV.1.1 ; IV.2 à IV.4 ; IV.6 ; IV.7 ; V.2.2 ; V.2.3 ; V.3.2 ; VII.3. ; XI.2 ; XI.3.
Sous –, IV.1.1 ; IV.2 à IV.4 ; IV.6 ; IV.7 ; V.2.2 ; V.2.3 ; V.3.2 ; VII.3. ; XI.2 ; XI.3.

T

Taux
– *d'allongement unitaire*, III.3.4.
– *de déformation*, III.3.3.
– *de déformation lagrangien*, III.2.
– *de déformation virtuel*, V.3.2 ; XI.3.5.
– *de dilatation volumique*, III.3.5.
– *d'extension*, III.3.4.
– *d'extension virtuel*, XI.2.4.
– *de glissement de deux directions orthogonales*, III.3.4.
– *de rotation*, III.3.5.
– *de rotation virtuel*, V.3.2.

Température, VII.3.3 ; VII.4 ; VIII.
Gradient de –, Ex.II.9 ; Ex.II.10 ; VII.3.3 ; VII.3.4 ; VII.4.2 ; VIII.1.2 ; VIII.4.3 ; VIII.5.2 ; VIII.6.2 ; Ex.IX.7 ; Ex.XII.8 ; Ex.XII.9.
Variation de –, II.6.4 ; Ex.II.9 ; Ex.II.10 ; VII.5 ; VIII.4.3 ; Ex.IX.7 ; X ; XII.2.6 ; XII.3.5 ; Ex.XII.2 ; Ex.XII.8 ; Ex.XII.9.

Tenseur
– *antisymétrique*, An I.3.4 ; An I.5.7.
– *décomposé*, An I.2.3 ; An I.5.6.
– *métrique*, An I.5.1.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

– *sur un espace euclidien*, An I.5 ; An I.6.
– *sur un espace vectoriel*, An I.
– *symétrique*, An I.3.4 ; An I.5.7.
– *transposé*, An I.3.3 ; An I.5.7.
Champ de – s, An I.6.

Tension, XI.2.10.

Tétraèdre
Lemme du –, VII.3.2.
Raisonnement du –, V.3.6.

Thermique
Équation –, VIII.1.2 ; VIII.2.2.
Découplage du problème –, VIII.2.4.

Thermodynamique, VII.3.

Thermoélasticité, VII ; VIII ; IX ; X ; XII.

Torseur, IV.5.
– *d'efforts extérieurs*, XI.3 à XI.5.
– *des efforts extérieurs*, IV.6.3 ; IV.7.3 ; IV.7.4 ; V.2.6 ; V.3.4 ; V.3.10 ; VIII.1.2 ; VIII.4.2 ; X.3.1 ; X.4.1.
– *d'efforts intérieurs*, XI.3 à XI.5.
– *des efforts intérieurs*, IV.6.3 ; V.3.2.
– *des quantités d'accélération*, IV.6.3 ; V.2.6 ; V.3.4.
– *des quantités de mouvement*, IV.7.2 ; V.3.
– *tensoriel*, IV.5 ; V.5.3.
Dérivée d'un –, IV.5.5 ; XI.3.6.
Gradient d'un –, IV.5.5.

Torsion
– *élastique*, VIII.7 ; Ex.VIII.5 à Ex.VIII.7 ; Ex.IX.10 ; Ex.X.1 ; Ex.X.8 ; Ex.X.9 ; XII.2.5 à XII.2.7.
Poutre en –, XII.3.4 ; Ex.XII.4.

Tourbillon
vecteur –, III.3.5 ; Ex.III.7.
– *ponctuel*, Ex.II.6 ; Ex.III.3.

Trace, An I.3.3 ; An I.5.7.

Traction, VII.2.2 ; VII.5.3 ; VII.5.5 ; IX.2 ; IX.5 ; Ex.IX.8 ; X.5.3 ; X.7.4 ; Ex.X.2.
Câble en –, XI.2.10 ; Ex.XI.1 ; Ex.XI.2 ; Ex.XI.9 ; Ex.XII.6.
Poutre en – compression, Ex.XI.3 ; Ex.XI.4 ; Ex.XI.11 ; Ex.XI.12 ; XII.4.1 ; Ex.XII.1 à Ex.XII.3.

Trajectoire, I.3.4 ; I.4.2.

Transformation
– *finie*, II.1 à II.4 ; Ex.II.1 à Ex.II.6 ; VII.1 à VII.4 ; Ex.VII.2 à Ex.VII.12 ; VIII.1 ; Ex.IX.8 à Ex.IX.10.
– *homogène*, II.2 ; II.3.
– *homogène tangente*, II.4.1.
– *infinitésimale*, II.5.1 ; Ex.II.1 à Ex.II.3 ; Ex.II.6 à Ex.II.10 ; III.3.6 ; III.3.10 ; VII.5.4 ; Ex.VII.1 ; Ex.VII.12 ; VIII.3.3 ; VIII.7.2 ; IX.3.3 ; Ex.IX.10.
– *rigidifiante*, II.3.3 ; II.4.5 ; II.6.3 ; II.7.1.

Transport convectif, II.2 ; II.4.2.

Transposition, An I.3.3 ; An I.5.7.

Travaux virtuels
Théorème des –, X.1.4 ; X.2 à X.9 ; Ex.X.6 ; XII.2.3 ; XII.2.5.

Treillis, XI.4.5 ; Ex.XI.3 ; Ex.XI.4 ; Ex.XI.11 ; XII.4.1 ; Ex.XII.1 à Ex.XII.3.

TRESCA
Critère de –, VI.4.3 ; Ex.VI.2 ; Ex.VI.3 ; Ex.VI.5 ; Ex.VI.8 ; Ex.VI.13 ; VIII.7.7 ; Ex.VIII.5 ; Ex.VIII.6 ; IX.2.4 ; IX.2.5 ; IX.3.4 ; IX.6.4.

TRUESDELL
Dérivée de –, V.5.2 ; Ex.VII.12.

Triaxial
État de contrainte –, VI.3.5.

Tube cylindrique, VIII.7.5 ; Ex.VIII.6 ; IX.7 ; Ex.IX.1 ; Ex.IX.2 ; Ex.IX.5 ; An III.2.9 ; An III.3.5.

U

Unicité
– *en élasticité*, VIII.1.3 ; VIII.3.1 ; VIII.3.6 ; X.2.4 ; X.3.4 ; XII.3.1 ; Ex.XII.10 ; An III.2.6.

Unilatérale
Liaison –, VIII.1.4 ; VIII.3.3 ; XI.4.2 ; Ex.XII.7.

V

Valeurs principales, An I.5.10.

Variance, An I.1.1.

Vecteur-contrainte, V.3.5 ; V.5.3 ; VI.2 ; VI.3.

Vecteur-position, I.3.1.

Virtuel
Champ de déplacement –, X.1.4 ; X.2 ; XII.2.3.
Champ de vitesse –, IV.2.3 ; IV.2.5 ; IV.5.1 ; V.2.1 ; V.5.3.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Mouvement –, IV ; V.2.1 ; V.5.3 ; XI.2.2 ; XI.3.3 ; XI.3.12.
Puissances – *les*, IV ; V ; X.1.4 ; XI.2 ; XI.3.
Travaux – *s*, X.1.4 ; X.2 à X.9 ; Ex.X.6 ; XII.2.3.

Vitesse, I.3.6.
– *d'extension*, III.3.4.
– *de déformation*, III.3.3.

VOIGT
Borne de –, X.5.3 ; Ex.X.5.

Volume
Invariance du –, II.4.2 ; Ex.II.2 ; Ex.II.6 ; III.3.5 ; Ex.III.1 à Ex.III.5 ; VII.4.3 ; VII.4.6 ; Ex.VII.3 ; Ex.VII.4 ; Ex.VII.9 à Ex.VII.11 ; Ex.IX.8 à Ex.IX.10.
Variation de –, I.3.2 ; II.2.3 ; II.4.2 ; III.3.5 ; VII.5.4 ; VII.5.5 ; Ex.X.5 ; Ex.X.6.

Y

YOUNG
Module de –, VII.5.3 ; VII.5.5 ; IX.2 ; X.5.3.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Dans la même collection

Chimie moléculaire des éléments de transition - F. Mathey et A. Sevin
300 pages - ISBN 2-7302-0714-7

Les orbitales moléculaires dans les complexes - avec Exercices et Corrigés - Y. Jean
350 pages - ISBN 2-7302-1024-5

Cours d'analyse - J.-M. Bony
272 pages - ISBN 2-7302-0775-1

Calcul différentiel et intégral - F. Laudenbach
220 pages - ISBN 2-7302-0724-4

Méthodes mathématiques pour les sciences physiques - J.-M. Bony
217 pages - ISBN 2-7302-0723-6

Les théorèmes de Noether - Y. Kosmann-Schwarzbach, avec la collaboration de L. Meersseman
180 pages - ISBN 2-7302-1138-1 (2e édition)

Groupes et symétries. Groupes finis, groupes et algèbres de Lie, représentations - Y. Kosmann-Schwarzbach
198 pages - ISBN 2-7302-1257-4 (2e édition)

Algèbre corporelle - A. Chambert-Loir
200 pages - ISBN 2-7302-1217-5

Une exploration des signaux en ondelettes - S. Mallat
654 pages - ISBN 2-7302-0733-3

Dynamique de l'atmosphère et de l'océan - P. Bougeault et R. Sadourny
312 pages - ISBN 2-7302-0825-9

Introduction aux écoulements compressibles et aux fluides hétérogènes - A. Sellier
175 pages - ISBN 2-7302-0764-5

Mécanique des milieux continus - J. Salençon
Tome 1 - Concepts généraux - 376 pages - ISBN 978-2-7302-1245-8 (avec CD-Rom)
Tome 2 - Thermoélasticité - 320 pages - ISBN 2-7302-0961-1
Tome 3 - Milieux curvilignes - 154 pages - ISBN 2-7302-0962-X

de l'Élasto-plasticité au Calcul à la rupture - J. Salençon
(accompagné d'un CD-Rom réalisé par J. Salençon)
266 pages - ISBN 2-7302-0915-8

Fluides et Solides - E. de Langre
130 pages - ISBN 2-7302-0833-X

Ondes acoustiques - A. Chaigne
224 pages - ISBN 2-7302-0840-2

Stabilité des matériaux et des structures - C. Stolz
206 pages - ISBN 2-7302-1076-8

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Instabilités, Chaos et Turbulence - P. Manneville
360 pages - ISBN 2-7302-0913-1

Vibrations des structures couplées avec le vent - P. Hémon
144 pages - ISBN 2-7302-1332-5

Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis - M. Bonnet et A. Frangi
316 pages - 2-7302-1349-X

Énergie nucléaire - J.-L. Basdevant, J. Rich et M. Spiro
340 pages - ISBN 2-7302-0901-8

Mécanique quantique - J.-L. Basdevant et J. Dalibard
(accompagné d'un CD-Rom de M. Joffre) 520 pages - ISBN 2-7302-0914-X

Problèmes quantiques - J.-L. Basdevant et J. Dalibard
214 pages - ISBN 2-7302-1117-9

Principes de la cosmologie - J. Rich, adaptation française J.-L. Basdevant
400 pages - ISBN 2-7302-0925-5

Introduction à la relativité - A. Rougé
188 pages - ISBN 2-7302-0940-9

Introduction à la physique subatomique - A. Rougé
448 pages - ISBN 2-7302-1231-0

Physique statistique et illustrations en physique du solide. - C. Hermann
292 pages - ISBN 2-7302-1022-9

Bases physiques de la plasticité des solides - J.-C. Tolédano
264 pages - ISBN 978-2-7302-1378-3

Physique des électrons dans les solides. Structure de bandes, Supraconductivité et Magnétisme. H. Alloul
Tome 1 - 360 pages - ISBN 978-2-7302-1411-7

Physique des électrons dans les solides. Recueil d'exercices et de problèmes. H. Alloul
Tome 2 - 272 pages - ISBN 978-2-7302-1412-4

Introduction à la microéconomie - N. Curien
110 pages - ISBN 2-7302-0722-8

Introduction à l'analyse macroéconomique - P.-A. Muet
208 pages - ISBN 2-7302-1140-3

Économie de l'entreprise - J.-P. Ponssard, D. Sevy, H. Tanguy
304 pages - ISBN 2-7302-1244-2

Groupes finis - XUPS 2000 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
104 pages - ISBN 2-7302-0751-5

Pavages - XUPS 2001 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
112 pages - ISBN 2-7302-0855-0

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

La fonction zêta - XUPS 2002 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
206 pages - ISBN 2-7302-1011-3

Distributions - XUPS2003 - dans le sillage de Laurent Schwartz - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial) - 106 pages - ISBN 2-7302-1095-4

Graphes- XUPS 2004 - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
84 pages - ISBN 2-7302-1182-9

Théorie algorithmique des nombres et équations diophantiennes - XUPS2005 - N. Berline, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 200 pages - ISBN 2-7302-1293-0

Théorie des jeux. Introduction à la théorie des jeux répétés - XUPS 2006 - N. Berline, A. Plagne et C. Sabbah (Comité éditorial) - 152 pages - ISBN 978-2-7302-1366-0

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Années 1971 à 1992
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Années 1993 à 2001
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2000-2001
400 pages - ISBN 2-7302-0834-8
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2001-2002
364 pages - ISBN 2-7302-0930-1
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2002-2003
390 pages - ISBN 2-7302-1041-5
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2003-2004
404 pages - ISBN 2-7302-1183-7
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2004-2005
404 pages - ISBN 2-7302-1221-3
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2005-2006
366 pages - ISBN 2-7302-1335-X
Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 2006-2007
444 pages - ISBN 978-2-7302-1414-8

Bioinformatique. Génomique et post-génomique - F. Dardel et F. Képès
250 pages - ISBN 2-7302-0927-1

Promenade aléatoire - M. Benaïm et N. El Karoui
316 pages - ISBN 2-7302-1168-3

Analyse numérique et optimisation - G. Allaire
480 pages - ISBN 2-7302-1255-8

Systèmes hyperboliques de lois de conservation. Application à la dynamique des gaz - F. Dubois, B. Després
208 pages - ISBN 2-7302-1253-1

Commande et optimisation de systèmes dynamiques - F. Bonnans et P. Rouchon
286 pages - ISBN 2-7302-1251-5

Introduction à la théorie des langages de programmation - G. Dowek, J.-J. Lévy
112 pages - ISBN 2-7302-1333-3

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Achevé d'imprimer en novembre 2007 - Dépôt légal : 4e trimestre 2007
N° ISBN 978 – 2 – 7302 – 1419 – 3. *Imprimé en France*