Préface

1. Le projet de l'ouvrage

Cet ouvrage synthétise plusieurs recherches concernant l'usage de certaines structures géométriques dans les neurosciences de la vision. Il élargit notre cours d'*Introduction aux Sciences cognitives* de l'Ecole Polytechnique. En relation étroite avec un vaste ensemble de données expérimentales, il expose plusieurs modèles physico-mathématiques du cortex visuel primaire – essentiellement l'aire $V1$, la première des aires corticales visuelles – et propose un modèle géométrique original de son architecture fonctionnelle, c'est-à-dire de l'organisation très spécifique de ses connexions neuronales.

Son propos est d'expliciter les algorithmes géométriques que cette architecture fonctionnelle implémente. Il concerne donc en définitive l'origine neuronale des représentations spatiales et c'est pourquoi nous avons proposé le néologisme de *neurogéométrie* pour qualifier son domaine d'investigation.

Dans la mesure où l'origine des représentations spatiales constitue un problème majeur non seulement sur le plan scientifique mais aussi sur le plan philosophique, cet ouvrage possède également, surtout dans ses derniers chapitres, une forte dimension épistémologique. En fait, dit brièvement, il vise à montrer que la géométrie immanente aux infrastructures neuronales de l'espace permet de clarifier ce que l'on appelle en philosophie transcendantale le caractère "synthétique a priori" de cet espace.

2. Le plan de l'ouvrage

Après une introduction générale portant sur les sciences cognitives et sur la façon dont la neurogéométrie de la vision s'y insère, nous consacrons les deux premiers chapitres à des données expérimentales de neurophysiologie ainsi qu'à un premier niveau de modélisation.

Dans le premier chapitre, nous traitons des champs et des profils récepteurs des neurones visuels et expliquons comment ils agissent sur le signal optique comme des filtres. Le traitement qu'ils effectuent est analogue à ce que l'on appelle en théorie du signal une *analyse en ondelettes.*

Dans le chapitre 2, nous présentons un ensemble de données expérimentales sur l'architecture fonctionnelle de l'aire $V1$ et, en particulier, sur ce que l'on appelle sa structure en "*pinwheels*" (roues d'orientation). Si l'on simplifie leur activité très compliquée, on peut dire que la majorité des neurones de $V1$ détectent en première approximation des positions et des orientations dans le champ visuel, ceux détectant les diverses orientations pour une position donnée se regroupant en micromodules fonctionnels anatomiquement définissables appelés des hypercolonnes d'orientation ou "pinwheels". En ce sens, $V1$ implémente la fibration $R \times \mathbb{P}^1$ ayant pour base le plan rétinien R et pour fibre la droite projective $\mathbb{P}^1$ des orientations du plan. Les hypercolonnes sont reliées entre elles par des connexions cortico-corticales reliant des neurones détectant *l'alignement* d'orientations parallèles en des positions différentes. Nous montrons que, en première approximation, ce *transport parallèle* peut être considéré comme une implémentation de ce que l'on appelle en géométrie différentielle la *structure de contact* du fibré V des 1-jets de courbes dans le plan R. Ce fibré est un espace $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, p), (x, y) étant les coordonnées spatiales et p la coordonnée angulaire tan (θ). Nous exposons également la façon dont la fibration modélisant la variable d'orientation interfère avec d'autres fibrations modélisant d'autres variables comme la dominance oculaire, la phase ou la fréquence spatiales.

Dans le chapitre 3, nous ouvrons une partie "géométrique" et précisons d'abord le modèle géométrique fourni par la structure de contact sur V en insistant sur son invariance sous l'action du groupe $E(2)$ des déplacements du plan euclidien. La structure de contact est le champ de plans $\mathcal{C}$ engendré par l'application de $E(2)$ au plan C_0 des (x, p) à l'origine. Comme C_0 est le plan $y = 0$ noyau de la 1-forme différentielle dy, $\mathcal{C}$ est donc le noyau de la 1-forme différentielle $\omega = dy - pdx$ obtenue en translatant dy par $E(2)$. La définition d'une métrique $E(2)$-invariante sur ces plans définit ce que l'on appelle une géométrie *sous-riemannienne*. Nous montrons ainsi que le cadre mathématique naturel de la modélisation de certaines architectures fonctionnelles de la vision est fourni par la géométrie de contact, la géométrie symplectique qui lui est étroitement associée et la géométrie sous-riemannienne.

Dans le chapitre 4, nous développons une première application concernant le mécanisme, longtemps considéré comme énigmatique, de l'intégration des contours dans le cortex visuel primaire. Nous montrons que les expériences de psychophysique, désormais classiques et confirmées par de nombreuses expériences neurophysiologiques complémentaires, sur ce passage de données locales à des Gestalts globales, expériences interprétées aujourd'hui par les spécialistes en termes d'une structure appelée *champ d'association*, constituent une preuve expérimentale du fait que l'architecture fonctionnelle de $V1$ implémente la structure de contact de la fibration V.

Dans le chapitre 5, l'un des plus longs et des plus techniques de l'ouvrage, nous présentons une seconde application à un phénomène encore beaucoup plus énigmatique que celui de l'intégration des contours, à savoir la construction par le système visuel de contours illusoires à très longue portée. Ces phénomènes de complétion de données sensorielles lacunaires par les mécanismes intégratifs de la perception sont connus depuis le début de la théorie de la Gestalt et ont donné lieu, en particulier depuis les célèbres travaux de Gaetano Kanizsa, à d'innombrables recherches. Avec notre collègue Jacques Ninio de l'Ecole Normale Supérieure, nous avons mené des expériences sur les contours illusoires avec courbure pour tester le type de courbes que l'on observe. En ce qui concerne les modèles, on est naturellement conduit à des modèles *variationnels*. David Mumford a proposé à la fin des années 80 un premier modèle défini dans le plan R du champ visuel et minimisant la courbure totale. Nous proposons quant à nous un modèle dans le fibré de contact V qui repose sur l'hypothèse que les contours illusoires sont des *géodésiques sous-riemanniennes*.

Cela nous conduit à analyser les problèmes variationnels sur le groupe $E(2)$ et, en particulier, celui des géodésiques sous-riemanniennes associées à sa structure de contact. En ce qui concerne le premier problème, nous suivons les propositions de Robert Bryant et Phillip Griffiths puis, dans le chapitre 6, en ce qui concerne le second, celles d'Andrei Agrachev. Le modèle géodésique sous-riemannien le plus simple est dérivable de la structure de groupe naturelle de V qui est isomorphe à celle du *groupe de Heisenberg* $\mathbb{H}$ bien connu des physiciens. Ce groupe est un groupe nilpotent appartenant à la classe de ce que l'on appelle les groupes de Carnot dont la géométrie sous-riemannienne, aussi dite de Carnot-Carathéodory, a été profondément développée par Misha Gromov et, à sa suite, par des géomètres comme Pierre Pansu et André Belaïche.

Pour le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}$, grâce aux travaux de Richard Beals, Bernard Gaveau, Peter Greiner, Andrei Agrachev et d'autres, on connaît bien la géométrie sous-riemannienne (géodésiques, sphère, front d'onde, caustique et cut locus, points conjugués, etc.). Toutefois, le modèle le plus naturel n'est pas celui sur V mais celui sur $E(2)$. Or, ce dernier groupe, dit aussi groupe des roto-translations ou "shift-twist action", n'est pas nilpotent. Sa "nilpotentisation" qui définit son "cône tangent" à l'origine est bien isomorphe au groupe de Heisenberg $\mathbb{H}$, mais, globalement, sa géométrie sous-riemannienne est très différente. Nous avons constaté avec étonnement qu'elle n'était pas connue jusqu'ici bien que $E(2)$ soit pourtant un groupe classique et élémentaire. À la suite de discussions, Andrei Agrachev et ses collaborateurs (en particulier Igor Moiseev) ont explicité cette géométrie. Nous exposons leurs résultats.

Pour clore cette partie consacrée aux modèles géométriques, nous revenons dans le chapitre 7 sur le fait que les géométries de contact et sous-riemanniennes modélisent ici une architecture fonctionnelle de connexions entre des neurones qui agissent comme des filtres. Cela signifie que le cadre mathématique naturel de la perception visuelle de bas niveau est celui où *l'analyse harmonique* sur le groupe $E(2)$ se mêle à sa géométrie sous-riemannienne. Comme l'analyse harmonique s'effectue à travers une ondelette "mère" translatée par $E(2)$, c'est-à-dire par ce que l'on appelle un *état cohérent*, c'est donc le lien entre états cohérents et géométrie sous-riemannienne qui s'impose comme cadre théorique de la vision de bas niveau.

Avec le chapitre 8 nous commençons une partie plus axée sur les modèles *physiques* de $V1$. Dans les chapitres précédents, c'était la structure géométrique de l'architecture fonctionnelle qui se trouvait au cœur de l'analyse. Elle connecte toutefois des neurones qui sont des unités dynamiques possédant des états internes et interagissant entre elles à travers des couplages appelés "poids synaptiques". Nous faisons d'abord quelques rappels sur les équations de type Hodgkin-Huxley décrivant la dynamique des potentiels d'action émis par les neurones individuels. Nous faisons ensuite quelques autres rappels sur les *réseaux de neurones*, les équations de Hopfield et le transfert à de tels réseaux des modèles de physique statistique de type "verres de spins". Nous présentons ensuite de façon un peu plus détaillée la théorie de la *synchronisation* des réseaux d'oscillateurs.

Dans le chapitre 9, nous résumons un ensemble de travaux remarquables effectués par Bard Ermentrout, Jack Cowan, Paul Bressloff et Martin Golubitsky à propos de la dynamique de réseaux de Hopfield dont les poids synaptiques encodent l'architecture fonctionnelle de $V1$. Ces auteurs ont montré en particulier que, sous l'action d'une auto-excitation de $V1$, même en l'absence de tout stimulus, l'état de base du réseau peut *bifurquer* spontanément vers des états correspondant à des patterns perceptifs possédant une géométrie bien précise. Plusieurs de ces patterns ont été observés depuis longtemps dans les hallucinations.

Dans le chapitre 10, nous exposons notre travail avec Alessandro Sarti et Giovanna Citti de l'Université de Bologne qui montre en particulier comment, par introduction du paramètre *d'échelle* (réalisé concrètement par la largeur des filtres neuronaux), on passe naturellement de la structure de contact de la fibration V à une structure *symplectique* définie sur $V \times \mathbb{R}$ qui en est la "symplectisée". Comme dans toute structure symplectique, une structure de type "optique géométrique" se trouve ainsi définie et, lorsque l'on traite de cette façon une forme délimitée par un contour fermé du plan visuel R, on obtient le *cut locus* – ou "squelette", ou encore "axe de symétrie généralisé" – de la forme qui, comme on le sait depuis les travaux fondamentaux d'Harry Blum, joue un rôle essentiel dans l'analyse perceptive des formes.

Dans le chapitre 11, nous complétons l'ensemble de ces recherches sur la neurogéométrie de la perception visuelle. Nous expliquons d'abord les bases de la géométrie différentielle multi-échelle ("*scale space analysis*") dont le traitement du signal optique par des neurones agissant comme des filtres par convolution impose la prise en considération. Puis nous traitons à titre d'exemple la reprise de la *théorie des singularités* à la Thom-Mather effectuée dans ce cadre multi-échelle par James Damon. Nous introduisons ensuite les algorithmes de *segmentation* des images. Il y en existe deux classes étroitement liées entre elles. La première est celle des modèles où la segmentation se fait en appliquant des équations de diffusion non linéaires et anisotropes qui homogénéisent les régions où le signal varie peu et au contraire introduisent des discontinuités nettes là où le signal varie beaucoup. La seconde classe est celle des modèles variationnels introduits par David Mumford et Jayant Shah. Nous résumons à leur propos les travaux d'Alessandro Sarti et Giovanna Citti qui montrent que le modèle de Mumford-Shah est une limite (au sens des modèles variationnels) d'un modèle de synchronisation d'oscillateurs.

Dans les deux derniers chapitres, nous abordons des problèmes épistémologiques allant de la phénoménologie de la perception (au sens de Husserl et Merleau-Ponty) au problème kantien de l'esthétique transcendantale.

Dans le chapitre 12, nous montrons d'abord comment la possibilité d'engendrer la morphologie et la géométrie globales des percepts à partir d'une mésophysique neuronale confirme une conception émergentiste strictement naturaliste de la conscience perceptive et invalide certaines affirmations de nombreux philosophes sur l'irréductibilité de la conscience aux activités neuronales.

Dans le chapitre 13, nous montrons enfin comment la neurogéométrie et le matérialisme neuronal corrélatif permettent de naturaliser les approches philosophiques les plus profondes de la perception et de l'espace, à savoir les approches *transcendantales*. Nous commençons par la *phénoménologie* de la perception telle que l'a développée Husserl et nous soulignons son extrême proximité avec les modélisations neurogéométriques exposées aux chapitres précédents. Puis nous concluons par une reprise de l'*esthétique transcendantale* kantienne et de la thèse du caractère *synthétique a priori* de l'espace pour montrer que toutes les données neurophysiologiques et tous les modèles que nous avons présentés en confirment le bien fondé. Cette affirmation est, selon nous, le principal apport philosophique de l'ouvrage et possède sans doute une certaine portée si l'on songe que l'ensemble de la philosophie cognitive "rigoureuse" s'est construite depuis plus d'un siècle sur la démotion de l'esthétique transcendantale et la promotion des conceptions logico-conceptuelles du mental. La neurogéométrie montre au contraire que l'espace est bien une "intuition pure", c'est-à-dire un *format* non conceptuel, anté-prédicatif et pré-judicatif pour les données sensorielles, que ce format est défini par les architectures fonctionnelles des aires visuelles primaires et que, dans la mesure où celles-ci sont des produits de l'évolution, elles sont innées et a priori pour les contenus et les jugements perceptuels. Ces derniers ne peuvent donc pas être purement conceptuels et l'opposition kantienne entre intuition et concept se trouve ainsi confirmée par une neurogéométrie immanente mathématisant l'idéalité transcendantale de l'espace.