

# Introduction

Le comportement dynamique de systèmes mécaniques, fluides ou solides, se manifeste dans une grande variété de phénomènes. À partir de quelques observations nous allons tout d'abord montrer en quoi ces phénomènes peuvent être définis comme *dynamiques*, par opposition à des phénomènes *statiques*.

Le système représenté sur la figure (1), formé de deux masses et de lames flexibles est posé sur un plateau oscillant horizontalement. C'est un modèle simpliste d'un immeuble soumis à un séisme horizontal. Si l'on observe l'amplitude  $A$  des vibrations

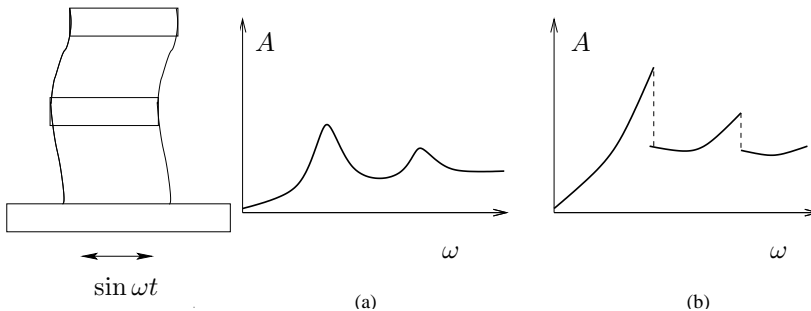


FIG. 1 – Système multi-étage. Amplitude vibratoire en fonction de la fréquence d'oscillation horizontale du plateau : (a) petits mouvements du plateau, (b) grands mouvements du plateau.

latérales de l'étage supérieur en fonction de la fréquence d'oscillation  $\omega$  du plateau, figure (1a), on peut noter de fortes irrégularités dans cette évolution. Pour des mouvements de grande amplitude du plateau inférieur, figure (1-b), cette évolution semble même discontinue.

Considérons une corde tendue en chaînette, figure 2. Un impact latéral près d'une extrémité crée une perturbation qui se propage vers l'autre extrémité, puis revient mais sous forme inversée. Au bout de quelques allers-retours la perturbation n'est plus visible. Pour la même corde, si l'on écarte les extrémités, ce qui la tend, on observe que la propagation est plus rapide.

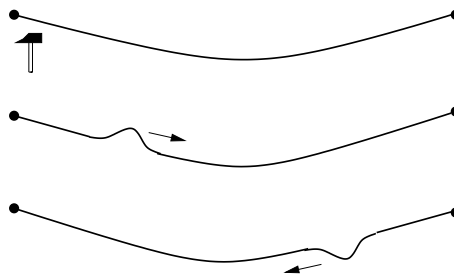


FIG. 2 – Impact latéral sur une corde tendue en chaînette.

En laissant tomber une goutte sur la surface d'un fluide contenu dans un récipient cylindrique, figure (3), on peut observer plusieurs phénomènes. Si la profondeur est

de l'ordre de 5 mm et que le fluide est de l'eau, les vagues créées par la goutte se réfléchissent plusieurs fois sur les parois du récipient avant de disparaître. Pour une même profondeur mais avec de l'huile de paraffine les vagues sont atténuées rapidement. C'est également le cas avec de l'eau pour une profondeur de 2 cm. Si le fond est incliné, les ondes s'orientent perpendiculairement à la pente.

Dans les trois expériences que nous venons de décrire on observe des phénomènes

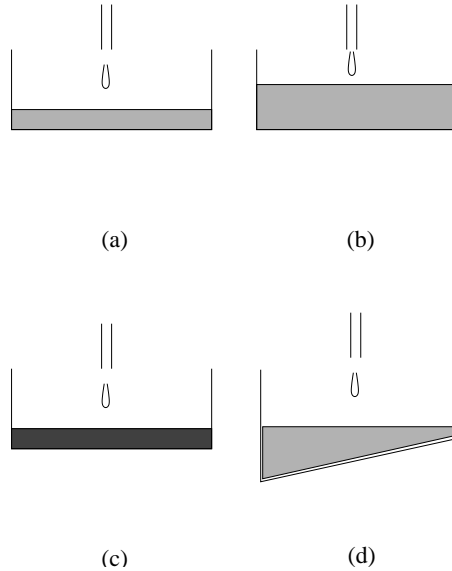


FIG. 3 – Propagation d'onde de surface : (a) faible profondeur, (b) grande profondeur, (c) fluide visqueux, (d) profondeur variable.

qu'une approche statique de la mécanique ne permet manifestement pas d'expliquer. Une démarche systématique est maintenant nécessaire pour comprendre le lien entre ces différents phénomènes. Cette démarche systématique sera appuyée sur l'analyse dimensionnelle des échelles de temps et d'amplitude. Le chapitre 1 permet de construire cette démarche. Les chapitres 2 et 3 présentent respectivement les descriptions ondulatoires et modales en dynamique. Le chapitre 4 traite spécifiquement de l'effet des non-linéarités sur les modes et les ondes. On donne dans les dernières pages quelques références bibliographiques, générales ou plus spécialisées.

# Chapitre 1

# **ANALYSE DIMENSIONNELLE**

## 1.1 Principes de l'analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle, très développée en mécanique des fluides, est utilisée dans tous les domaines de la mécanique. C'est en effet essentiellement une technique qui permet d'éviter de construire des lois physiques incohérentes.

Considérons une loi physique qui relie  $N$  variables, représentant chacune une grandeur physique, soit

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0. \quad (1.1)$$

Le principe essentiel de l'analyse dimensionnelle est que **les lois physiques doivent être indépendantes des systèmes d'unités dans lesquelles on exprime ces variables**. Plus précisément, cela signifie que des variables qui ont déjà une signification physique ne peuvent pas être combinées de façon quelconque dans une loi. Ainsi, des variables utilisées en mécanique s'expriment à partir d'unités de longueur, de temps et de masse, sous la forme

$$[x] = L^\alpha M^\beta T^\gamma, \quad (1.2)$$

où  $[ ]$  indique les dimensions de la variable. Pour l'accélération de la pesanteur on écrirait ainsi

$$[g] = L^1 M^0 T^{-2}. \quad (1.3)$$

Une loi physique reliant ces variables doit donc pouvoir s'exprimer sous la forme d'un lien entre des variables sans dimension

$$[X_j] = L^0 M^0 T^0, \quad (1.4)$$

et la relation (1.1) a donc nécessairement la forme

$$F(X_1, X_2, \dots, X_P) = 0. \quad (1.5)$$

La construction des variables sans dimension ( $X_j$ ) se fait à partir des variables dimensionnelles ( $x_i$ ). Le nombre  $P$  de variables sans dimension est donnée par le théorème de Vashy-Buckingham selon lequel

$$P = N - R, \quad (1.6)$$

où  $R$  est le rang de la *matrice des dimensions* formée des exposants  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  de chaque variable  $x_i$  soit

$$R = \text{Rang} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_N \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_N \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_N \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Plusieurs résultats pratiques en découlent :

1. Le nombre de variables adimensionnelles,  $P$ , est plus faible que le nombre original de variables dimensionnelles,  $N$ . La recherche d'une loi, notamment par l'expérience, est donc facilitée. Par exemple, si l'on cherche le lien entre la période d'oscillation d'un pendule  $\tau$ , sa longueur  $l$ , et la gravité  $g$ , on a

$$[\tau] = L^0 M^0 T^1; [l] = L^1 M^0 T^0; [g] = L^1 M^0 T^{-2}. \quad (1.8)$$

La matrice aux dimensions est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

et son rang vaut  $R = 2$ . Un seul paramètre adimensionnel doit apparaître dans la loi en question, puisque  $P = N - R = 3 - 2 = 1$ . On le construit aisément comme étant

$$X_1 = \tau g^{1/2} l^{-1/2}. \quad (1.10)$$

Il suffit alors de trouver la loi sous la forme  $F(X_1) = 0$  ce qui implique  $X_1$  constant. L'expérience (ou le calcul) permet de trouver  $X_1 = 2\pi$ , soit la loi bien connue

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.11)$$

2. Une variable ne peut intervenir dans une loi physique que si ses dimensions interviennent aussi dans d'autres variables. Ainsi, dans notre exemple, si l'on recherche une loi reliant la période du pendule à sa masse  $m$ , à  $g$  et à  $l$ , la matrice aux dimensions devient

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Elle est de rang trois et l'on a donc toujours  $P = N - R = 4 - 3 = 1$ . La masse  $m$  ne peut pas intervenir dans la construction de ce paramètre adimensionnel, puisqu'aucune autre variable  $\tau$ ,  $g$  ou  $l$  n'a la masse comme dimension. On retombe donc sur la loi (1.11).

3. Les nombres adimensionnels sont, par construction, des quotients entre des variables de même dimension : rapport de deux longueurs, de deux temps, de deux vitesses, de deux forces, ... Ainsi, la loi (1.11) peut s'exprimer sous la forme

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \sqrt{2} \pi \quad (1.13)$$

où  $\tau_0 = \sqrt{2l/g}$  est le temps de chute libre associé à la longueur  $l$ .

## 1.2 Paramètres adimensionnels en dynamique

Pour construire les nombres adimensionnels pertinents à l'étude des problèmes de dynamique, considérons le problème représenté dans la figure (1.1a), où un solide élastique est soumis à un déplacement imposé  $\underline{\xi}_D(t)$ . On cherche la forme de la loi reliant le déplacement en un point  $\underline{x}$  aux données du problème, soit

$$\underline{\xi} = f(\underline{x}, t; L, E, \nu, \rho, \xi_0, T_D) \quad (1.14)$$

dans laquelle  $E$  et  $\nu$  sont les constantes élastiques,  $\rho$  est la masse volumique,  $L$  est une longueur caractéristique du solide,  $\xi_0$  et  $T_D$  étant respectivement l'amplitude et la durée du déplacement imposé, figure (1.1b).

L'analyse dimensionnelle de la relation (1.14) montre qu'elle peut se réduire à une relation entre 6 variables soit, par exemple

$$\frac{\underline{\xi}}{\xi_0} = F\left(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{t}{T_D}; \nu, \frac{\xi_0}{L}, \frac{T_D}{T_L}\right) \quad (1.15)$$

où nous avons défini le temps

$$T_L = L/\sqrt{E/\rho}. \quad (1.16)$$

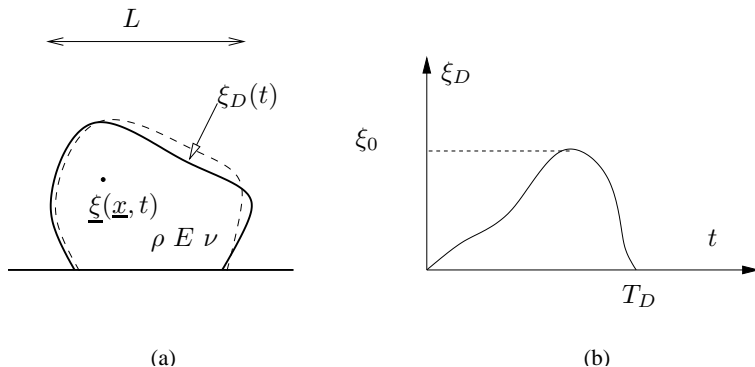


FIG. 1.1 – Chargement dynamique d'un solide élastique.

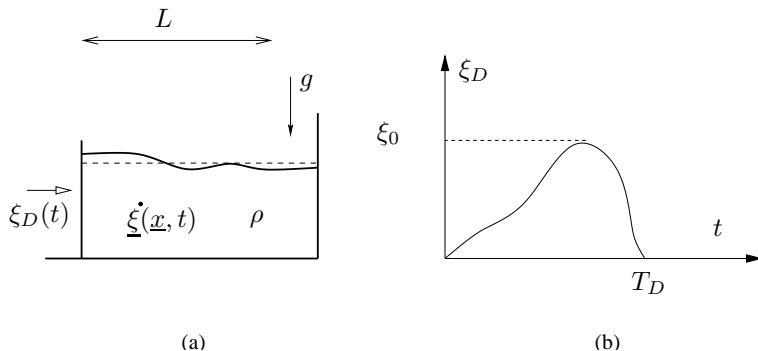


FIG. 1.2 – Chargement dynamique d'un fluide parfait.

La relation (1.15) nous montre que la réponse du système dépend essentiellement des valeurs relatives de trois temps : l'instant d'observation  $t$ , la durée de chargement  $T_D$  et le temps  $T_L$  qui dépend de la géométrie et des caractéristiques du solide élastique, mais pas du chargement.

De façon similaire, considérons un fluide parfait incompressible au repos, figure (1.2a), dont une des frontières subit un déplacement imposé comme précédemment, figure (1.2b). Le déplacement en un point du fluide s'écrit

$$\underline{\xi} = g(\underline{x}, t; \rho, g, L, \xi_0, T_D). \quad (1.17)$$

Sous forme adimensionnelle, cette relation devient

$$\frac{\xi}{\xi_0} = G\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{T_D}; \frac{\xi_0}{L}, \frac{T_D}{T_L}\right) \quad (1.18)$$

où nous avons défini ici le temps

$$T_L = \sqrt{L/g}. \quad (1.19)$$

Là encore, pour une amplitude  $\xi_0$  donnée et en un point  $x$  donné la réponse dépend des valeurs relatives des trois échelles de temps  $t$ ,  $T_D$  et  $T_L$ .

Le temps caractéristique  $T_L$  peut être interprété dans ces deux systèmes comme le quotient de la longueur caractéristique,  $L$ , et d'une vitesse,  $\sqrt{E/\rho}$  dans le premier cas et  $\sqrt{gL}$  dans le second. Le temps  $T_L$  est donc l'ordre de grandeur du temps de propagation des ondes dans le domaine de taille  $L$ . C'est donc le temps au bout duquel des réflexions d'onde vont intervenir aux frontières.

La vitesse  $\sqrt{E/\rho}$  est pour le solide un ordre de grandeur de la vitesse de propagation des ondes élastiques, comme nous le verrons par la suite. Elle ne dépend que des caractéristiques du matériau élastique.

La vitesse  $\sqrt{gL}$  est pour le fluide un ordre de grandeur de la vitesse de propagation des ondes de surface. Elle dépend d'un paramètre externe, la gravité, et de la taille du système et non des caractéristiques locales du fluide.

Pour rendre les lois (1.15) et (1.18) plus simples à interpréter par la suite, introduisons un quatrième temps,  $T_M$ , valeur maximale de la variable de temps  $t$  que nous allons considérer (ou temps d'observation). Ainsi, les lois en question s'écrivent

$$\frac{\xi}{\xi_0} = F\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{T_M}; \nu, \frac{\xi_0}{L}, \frac{T_M}{T_D}, \frac{T_M}{T_L}\right) \quad (1.20)$$

et

$$\frac{\xi}{\xi_0} = G\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{T_M}; \frac{\xi_0}{L}, \frac{T_M}{T_D}, \frac{T_M}{T_L}\right). \quad (1.21)$$

Ces équations relient le champ de déplacement adimensionnel aux coordonnées adimensionnelles au temps adimensionnel et à trois nombres adimensionnels :

(a) le *nombre de déplacement*

$$\mathcal{D} = \frac{\xi_0}{L} \quad (1.22)$$

qui est la mesure des effets de grands déplacements. Si  $\mathcal{D}$  est petit devant 1 les mouvements sont, en ordre de grandeur, petits devant la taille du domaine.

(b) le *temps de réflexion*

$$\mathcal{R} = \frac{T_M}{T_L} \quad (1.23)$$

qui exprime le rapport entre la durée pendant laquelle on décrit le système et un temps intrinsèque au système. Si  $\mathcal{R}$  est petit devant 1 aucune réflexion d'onde n'aura lieu pendant le temps d'observation. Nous dirons que la dynamique est *locale*. Inversement, si  $\mathcal{R}$  est grand devant 1 la dynamique du système sera fortement influencée

par les réflexions et la dynamique sera dite *globale*, au sens où elle fait intervenir tous les éléments de la géométrie et des conditions aux limites.

(c) le *temps libre*

$$\mathcal{L} = \frac{T_M}{T_D} \quad (1.24)$$

qui exprime le rapport entre la durée pendant laquelle on décrit le système et un temps intrinsèque au chargement. Si  $\mathcal{L}$  est petit devant 1 le chargement évolue au cours de la durée d'observation. Nous dirons que la dynamique est *forcée*. Inversement, si  $\mathcal{L}$  est grand devant 1, la dynamique du système se développe en absence d'évolution du chargement et sera dite *libre*.

### 1.3 Analyse dimensionnelle des équations

Il est possible d'aller plus loin dans la construction des lois  $F$  (solide) et  $G$  (fluide) grâce à la connaissance que nous avons des lois qui régissent les mouvements des milieux considérés.

Le premier problème, d'élastodynamique linéaire, est défini par le déplacement  $\underline{\xi}(\underline{x}, t)$  en tout point et le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ . Ils sont reliés par l'équation de conservation de la quantité de mouvement (équation de champ)

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} = \text{div } \underline{\underline{\sigma}} \quad (1.25)$$

et la loi de comportement, pour un solide isotrope

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}}^t \underline{\xi} + \underline{\text{grad}} \underline{\xi}) = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}. \quad (1.26)$$

Les conditions aux limites sont de trois types : (a)  $\underline{\xi}(M, t) = \underline{\xi}_D(t)$  aux points  $M$  de déplacement imposé, (b)  $\underline{\xi} = 0$  sur la base fixe, (c)  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = 0$  sur la frontière libre.

Nous pouvons rendre ces équations adimensionnelles en utilisant des variables qui le sont, soit par exemple

$$\bar{\underline{x}} = \frac{\underline{x}}{L}; \quad \tau = \frac{t}{T_M}, \quad \bar{\underline{\xi}} = \frac{\underline{\xi}}{\xi_0}; \quad \bar{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{E}. \quad (1.27)$$

Notons ici que chacune de ces variables est d'ordre 1, sauf la contrainte  $\bar{\underline{\underline{\sigma}}}$ . On aurait pu prendre pour cela la quantité  $\bar{\underline{\underline{\sigma}}}/D$ , qui est d'ordre 1.

Les équations deviennent, en utilisant  $T_L = L/\sqrt{E/\rho}$ ,

$$\frac{\xi_0}{L} \left( \frac{T_L}{T_M} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{\underline{\xi}}}{\partial \tau^2} = \text{div } \bar{\underline{\underline{\sigma}}} \quad (1.28)$$

et

$$\frac{\xi_0}{L} \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}}^t \bar{\underline{\xi}} + \underline{\text{grad}} \bar{\underline{\xi}}) = (1+\nu) \bar{\underline{\underline{\sigma}}} - \nu \text{Tr}(\bar{\underline{\underline{\sigma}}}) \bar{\underline{\underline{1}}}. \quad (1.29)$$

avec les conditions aux limites : (a)  $\underline{\xi}(\bar{M}, \tau) = \varphi(\tau T_M/T_D)$  au point  $M$ , (b)  $\bar{\underline{\xi}} = 0$  sur la base fixe, (c)  $\bar{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{n} = 0$  sur la frontière libre.



En utilisant les nombres adimensionnels définis plus haut, on a

$$\mathcal{D} \frac{1}{\mathcal{R}^2} \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \tau^2} = \text{div} \bar{\underline{\sigma}} \quad (1.30)$$

et

$$\mathcal{D} \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}}^t \bar{\xi} + \underline{\text{grad}} \bar{\xi}) = (1 + \nu) \bar{\underline{\sigma}} - \nu \text{Tr}(\bar{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}. \quad (1.31)$$

avec les conditions aux limites : (a)  $\bar{\xi}(\bar{M}, \tau) = \varphi(\tau \mathcal{L})$  au point  $\bar{M}$ , (b)  $\bar{\xi} = 0$  sur la base fixe, (c)  $\bar{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = 0$  sur la frontière libre.

On voit dans l'équation (1.30) que lorsque  $\mathcal{R} \gg 1$  le terme inertiel devient petit, ce qui impose  $\text{div} \bar{\underline{\sigma}} = 0$ . On se rapproche ainsi de l'équilibre statique. Si l'on a alors  $\mathcal{L} \ll 1$  les équations ci-dessus sont équivalentes à une succession de problèmes de statique, le temps  $\tau$  étant un simple paramètre de chargement. Inversement, si  $\mathcal{L} \gg 1$  le temps courant est tel que le chargement imposé est terminé, et les conditions aux limites ne dépendent plus du temps.

De la même façon le problème d'hydrodynamique de la figure (1.2) peut s'exprimer à partir de la conservation locale de la masse

$$\text{div} \underline{\xi} = 0, \quad (1.32)$$

et de la conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} = -\rho g \underline{e}_z - \underline{\text{grad}} p. \quad (1.33)$$

Les conditions aux limites sont alors : (a)  $\underline{\xi}(M, t) \cdot \underline{e}_x = \xi_D(t)$  sur la frontière où le déplacement est imposé, (b)  $\underline{\xi} \cdot \underline{n} = 0$  sur les frontières fixes, (c)  $p = 0$  sur la surface libre.

On peut aisément introduire les quantités adimensionnées

$$\bar{\underline{x}} = \frac{\underline{x}}{L}; \quad \tau = \frac{t}{T_M}, \quad \bar{\underline{\xi}} = \frac{\underline{\xi}}{\xi_0}; \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho g L}. \quad (1.34)$$

On obtient alors en définissant ici  $T_L = L/\sqrt{gL}$  les équations adimensionnées

$$\text{div} \bar{\underline{\xi}} = 0, \quad (1.35)$$

$$\mathcal{D} \frac{1}{\mathcal{R}^2} \frac{\partial^2 \bar{\underline{\xi}}}{\partial \tau^2} = -\underline{e}_z - \underline{\text{grad}} \bar{p}, \quad (1.36)$$

avec les conditions aux limites : (a)  $\bar{\underline{\xi}}(\bar{M}, \tau) \cdot \underline{e}_x = \varphi(\tau \mathcal{L})$  sur la frontière où le déplacement est imposé, (b)  $\bar{\underline{\xi}} \cdot \underline{n} = 0$  sur les frontières fixes, (c)  $\bar{p} = 0$  sur la surface libre.

On peut faire la même analyse que précédemment : pour  $\mathcal{R} \gg 1$  et  $\mathcal{L} \ll 1$  les équations deviennent celles de l'hydrostatique.

## 1.4 Conclusions

Les analyses précédentes nous ont permis de faire apparaître des nombres adimensionnels qui sont les rapports de trois échelles de temps :

- (a) celle associée au chargement,  $T_D$ ,
- (b) celle intrinsèque au système,  $T_L$ ,
- (c) celle associée à la durée d'observation du mouvement,  $T_M$ .

Ces trois échelles de temps permettent de construire deux nombres adimensionnels, le temps de réflexion  $\mathcal{R} = T_M/T_L$  et le temps libre  $\mathcal{L} = T_M/T_D$ . Un troisième nombre adimensionnel intervient, qui mesure l'ordre de grandeur des déplacements  $\mathcal{D} = \xi_0/L$ .

La suite de ce cours a pour objet de construire des modélisations adaptées aux différents domaines de l'espace à trois dimension de variation de ces trois nombres.

Dans le chapitre 2, on aborde la notion d'onde en faisant l'hypothèse  $\mathcal{R} \ll 1$ , c'est-à-dire que la dynamique locale ne dépend pas des conditions aux limites.

Dans le chapitre 3 la notion de modes apparaît lorsque les conditions aux limites influent sur la dynamique globale, donc pour  $\mathcal{R} \gg 1$ .

On distingue dans ces chapitres l'effet du temps libre  $\mathcal{L}$  pour prendre en compte l'effet des chargements.

Enfin, le chapitre 4 aborde l'influence du nombre adimensionnel représentant les effets d'amplitude, à savoir  $\mathcal{D} = \xi_0/L$ .