

Avant-Propos

Toute théorie de milieu continu repose sur le choix d'une description géométrique de l'objet d'étude : c'est la première étape du processus de modélisation. La deuxième étape est la modélisation des efforts, dont l'utilisation systématique de la dualité permet d'assurer la cohérence avec la description géométrique. L'application du principe fondamental de la dynamique classique fournit alors les équations du mouvement sur lesquelles repose la théorie. Le principe des puissances virtuelles systématise l'ensemble de ce processus à partir de la description géométrique.

Il faut ensuite incorporer dans cette théorie les informations relatives à la nature des matériaux constitutifs : c'est l'objet des lois de comportement dont l'écriture est codifiée par de grands principes axiomatiques : principe d'isotropie de l'espace, premier et second principes de la thermodynamique, etc. . .

Le résultat de ce travail préliminaire (équations du mouvement issues de la description géométrique et loi de comportement) fournit un ensemble d'équation. Le développement complet de la théorie particularise cet ensemble d'équation, dans le cadre d'un certain nombre d'hypothèses de travail qui doivent être clairement identifiées, à des situations génériques. La résolution de ces équations permet alors d'obtenir des prédictions relatives à certaines situations concrètes que l'ingénieur est amené à étudier. Dans certains cas, il est possible d'obtenir des solutions exactes de ces équations sous forme explicite. Cette circonstance est néanmoins exceptionnelle et, en pratique, on ne peut très souvent n'avoir accès qu'à des solutions approchées des équations fournies par la modélisation et de la théorie qui s'appuie dessus.

On supposera ici que le lecteur a déjà été confronté à l'ensemble de cette démarche qui fonde le *calcul des structures*, en ayant étudié la théorie de l'élasticité du milieu continu tridimensionnel classique. Remettant en œuvre le même schéma pour construire la théorie non-linéaire des poutres élastiques, nous espérons ainsi que les deux constructions pourront se nourrir l'une de l'autre et que le lecteur en tirera de la profondeur de compréhension de chacune des théories.

Historiquement, le développement de la théorie des poutres élastiques a précédé celui de l'élasticité du milieu continu tridimensionnel classique. Il n'y a rien d'étonnant à cela car la théorie des poutres est techniquement plus simple que celle du milieu continu tridimensionnel, les équations aux dérivées partielles y disparaissant systématiquement au profit d'équations différentielles ordinaires. Cette simplicité technique enrichit la théorie d'une foule d'exemples explicites qui permettent d'en illustrer avec bonheur la présentation. Cette simplicité est également mise-à-profit ici pour approfondir le propos dans des directions, en général, peu développées dans une première présentation de l'élasticité tridimensionnelle :

- l'étude de l'élasto-dynamique linéarisée à l'aide des modes propres de vibrations dont de nombreux exemples explicites sont disponibles,
- l'étude des manifestations de non-linéarité que sont les divers types d'instabilité-bifurcation. Comme le caractère élancé favorise l'apparition de ce type de phénomène, il ne peut être question, dans une présentation de la théorie des poutres élastiques, de faire l'impasse sur ces questions qui constituent un mode de ruine fréquemment rencontré dans ce contexte.

Ce cours se conclura par l'analyse systématique des liens entre théorie de l'élasticité tridimensionnelle et théorie des poutres, avec une brève introduction aux développements asymptotiques. Ce formalisme dont le développement est récent (le début des années 1980), s'appuie sur les techniques de l'homogénéisation.

La matière qui est présentée ici dépasse de très loin le contexte du calcul des structures constituées de poutres élastiques. En effet, l'ensemble constitué de la construction de la théorie et des méthodes de calcul présentées se transpose sans beaucoup d'effort au contexte de théories de milieu continu reposant sur d'autres descriptions géométriques : théorie des coques, des milieux micropolaires, des pièces longues en voiles minces, etc... Le contexte des poutres est vu ici comme un exemple permettant d'illustrer presque tous les aspects du vaste domaine du calcul des structures (les exceptions notables sont celles des comportements irréversibles qui ne seront pas abordés ici, ainsi que le calcul des singularités).

Introduction

Le point de départ de toute théorie mécanique est la description géométrique du système que l'on souhaite étudier. Pour un même solide réel, on connaît au moins deux descriptions géométriques possibles.

- Celle du solide rigide. Sa configuration actuelle se déduit de la configuration initiale par la simple donnée d'une translation et d'une rotation. L'espace vectoriel des vitesses virtuelles associé est celui des distributeurs. Les efforts extérieurs n'interviennent alors dans l'expression du principe des puissances virtuelles qu'à travers leur torseur, tandis qu'aucun effort intérieur n'y apparaît. L'équation du mouvement qui en résulte permet alors de déterminer complètement le mouvement lorsqu'elle est associée à des conditions initiales.
- Celle du milieu continu tridimensionnel classique. L'espace vectoriel des vitesses virtuelles est alors celui de tous les champs de vecteurs sur la configuration actuelle. La mise-en-œuvre du principe des puissances virtuelles conduit, sous certaines hypothèses, à la représentation des efforts intérieurs via le champ de tenseur de contrainte de Cauchy. L'équation du mouvement qui en résulte ne permet pas alors de déterminer le mouvement. Elle doit d'abord être complétée par des informations concernant la nature du matériau : c'est la loi de comportement.

Aucune de ces deux descriptions n'est meilleure, ou plus physique, que l'autre. Elles sont toutes les deux des schématisations du réel. La pertinence de l'une ou l'autre réside plutôt dans la finesse des prédictions que l'on souhaite obtenir. Dans le cas où on s'intéresse au mouvement global du solide sans accorder d'intérêt à sa déformation, on adoptera plutôt une description de type solide rigide, alors que lorsque ce sont les changements de forme qui constitueront la préoccupation, on aura recours à la description en terme de milieu continu classique.

Considérons, maintenant, l'exemple d'une poutre console (cf figure 1). Sous l'effet de la pesanteur et du poids qui lui est suspendu, on conçoit que cette poutre fléchisse. Intéressons-nous à ce phénomène. Dans la variation de forme du solide constitué par la poutre, on est alors amené à s'intéresser essentiellement à une partie de l'information : c'est le changement de géométrie d'une fibre longitudinale de la poutre. La partie transversale de la variation de forme

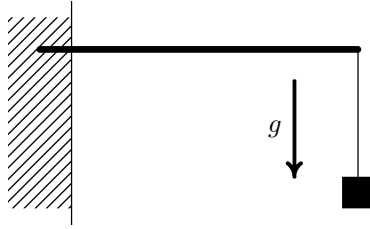


FIG. 1 – Poutre console.

(déformation de chacune des sections) devient d'un intérêt accessoire. Dans la pratique, on rencontre fréquemment des assemblages de solides élancés (une dimension caractéristique est beaucoup plus grande que les autres) comme les poutrelles métalliques qui constituent la tour Eiffel. Dans la conception de ces ouvrages, les seules informations relatives au changement de géométrie (sous l'effet d'un chargement) de chacun des solides élancés, qui font l'objet d'attention, sont les changements de géométrie d'une fibre longitudinale (raccourcissement, extension, flexion, etc. . .).

Bien entendu, la modélisation en terme de milieu continu classique permettrait d'accéder à ce type d'information. De la même manière, la modélisation en terme de milieu continu classique d'un solide « faiblement déformable » permet toujours de déterminer son mouvement global. Cependant, dans tous les cas où l'on ne s'intéresse pas à la déformation, sa mise-en-œuvre est beaucoup plus coûteuse, et ce inutilement, que la modélisation en terme de solide rigide. On en vient alors à se demander si l'on ne pourrait pas construire une modélisation mécanique des solides élancés qui, en se focalisant sur les changements de géométrie longitudinaux, serait alors plus économique (d'un point de vue théorique et pratique) que la mécanique des milieux continus classiques.

Ce que l'on se propose de faire maintenant, c'est donc de reprendre les différentes étapes qui nous ont permis de construire la théorie générale des milieux continus classiques, pour essayer de construire une théorie simplifiée de la mécanique des solides élancés pouvant s'appliquer notamment à l'étude et au dimensionnement des ouvrages constitués de poutres et d'arcs.

Chapitre 1

Cinématique des poutres

1.1 Définition de la cinématique poutre

L'objectif poursuivi dans ce chapitre est la construction d'une description géométrique et d'une cinématique associée qui, tenant compte du caractère élancé de l'objet d'étude, se focalise sur les changements de géométrie « longitudinaux ». La première étape consiste, alors, à associer à l'objet d'étude une *ligne moyenne*, liée à la matière, dont les changements de géométrie mobiliseront l'attention (cf figure 1.1). Il est clair que ce choix de ligne moyenne comporte une part d'arbitraire et cet arbitraire fait partie du choix de la description géométrique de l'objet d'étude et donc du processus de modélisation que l'on opère sur lui.

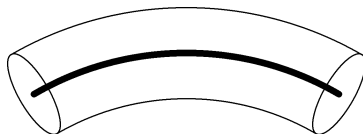


FIG. 1.1 – Choix d'une ligne moyenne.

L'objet d'étude étant un solide dans l'espace tridimensionnel, à chaque point de cette ligne moyenne est attachée une *section droite*. Dire que l'on focalise l'attention sur les changements de géométrie « longitudinaux » signifie que l'on ne s'intéresse pas aux éventuelles variations de géométrie des sections droites. Or, lorsque l'on s'intéresse au mouvement global d'un solide tridimensionnel, à l'exclusion de ses déformations, on adopte volontiers une description en terme de solide rigide. Cette démarche nous conduit ici à décrire notre objet d'étude (le solide élancé) comme une ligne moyenne déformable à chaque point de laquelle serait attachée une section droite *rigide*.

1.2 Description lagrangienne de la cinématique

1.2.1 Transformation en cinématique poutre

En description lagrangienne, se donner une modélisation poutre d'un solide choisi comme objet d'étude consistera donc à se donner la géométrie de la ligne moyenne dans une configuration de référence, c'est-à-dire, concrètement une courbe régulière orientée $\underline{X}(S)$, paramétrée par son abscisse curviligne, dans l'espace affine euclidien tridimensionnel. On notera :

$$\underline{T}(S) = \frac{d}{dS} \underline{X}(S),$$

le vecteur unitaire tangent à la ligne moyenne. Cette configuration servira de référence pour évaluer aussi bien les variations de géométrie de la ligne moyenne que les variations d'orientation dans l'espace, des sections droites rigides qui lui sont attachées.

Une *transformation* de la poutre sera alors la donnée d'une position actuelle $\underline{x}(S)$ de chaque point de la ligne moyenne ainsi que la rotation $\underline{R}(S)$ de chaque section droite. Dans la suite, on gardera en tête les relations suivantes :

$$\forall S, \quad {}^t\underline{R}(S) \cdot \underline{R}(S) = \underline{\mathbb{1}}, \quad \det(\underline{R}(S)) = 1. \quad (1.1)$$

Dans toute la suite, les fonctions $\underline{x}(S)$ et $\underline{R}(S)$ seront supposées dérivables

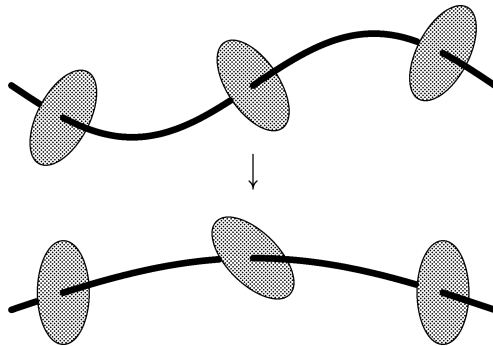


FIG. 1.2 – Transformation d'une poutre.

et même dérivables autant de fois que cela sera nécessaire. En particulier, on disposera de l'abscisse curviligne s sur la transformée $\underline{x}(S)$ de la ligne moyenne.

1.2.2 Déformation lagrangienne

Comme pour le milieu continu tridimensionnel classique, la transformation du tronçon de poutre de longueur infinitésimale dS , repéré par son abscisse curviligne S sur la configuration de référence, est donnée par le *gradient de la transformation* en S , c'est-à-dire concrètement ici par le couple :

$$\left(\frac{d}{dS} \underline{x}(S), \frac{d}{dS} \underline{R}(S) \right).$$

Ce gradient de la transformation admet la décomposition polaire suivante. On peut le réécrire comme étant le couple :

$$\mathbb{U}(S) = \left(\underline{R}^{-1}(S) \cdot \frac{d}{dS} \underline{x}(S), \underline{R}^{-1}(S) \cdot \frac{d}{dS} \underline{R}(S) \right),$$

suivi de (composé à gauche par) la rotation $\underline{R}(S)$. Interprétons maintenant chacune des composantes de ce couple.

- Le vecteur

$$\frac{d}{dS} \underline{x}(S)$$

est un vecteur tangent à la déformée de la ligne moyenne en $\underline{x}(S)$. Il contient donc l'information locale relative au changement d'orientation de la ligne moyenne dans la transformation. Il contient également l'information relative à la variation de longueur locale de la ligne moyenne puisque sa norme n'est autre que ds/dS . Il en résulte que le premier vecteur de \mathbb{U} résume toute l'information concernant la *variation locale de la ligne moyenne dans le référentiel lié à la section droite au point de la poutre caractérisé par S* .

- Pour la deuxième composante du couple, on adopte la notation :

$$\underline{W} = \underline{R} \cdot \frac{d}{dS} \underline{R}.$$

Une simple dérivation par rapport à S dans la formule (1.1) montre que \underline{W} est un tenseur antisymétrique. Le pseudo-vecteur¹ \underline{W} qui lui est associé par la formule :

$$\forall \underline{v}, \quad \underline{W} \cdot \underline{v} = \underline{W} \wedge \underline{v},$$

s'interprète comme le vecteur décrivant la rotation infinitésimale de la section droite en $S + dS$ par rapport à la section droite au point de la poutre caractérisé par S .

¹un pseudo-vecteur se distingue d'un vecteur en ce sens qu'il dépend de l'orientation choisie pour l'espace vectoriel : il doit être transformé en son opposé lorsque l'on change l'orientation de l'espace.

On déduit de l'analyse qui précède que le tronçon infinitésimal de poutre de longueur dS subit une transformation rigidifiante si et seulement si :

$$\underline{\underline{R}}(S) \cdot \frac{d}{dS} \underline{x}(S) = \underline{T}(S) \quad \text{et} \quad \underline{W}(S) = \underline{0}.$$

On définit alors naturellement la déformation lagrangienne $\mathbb{E}(S)$ par :

$$\mathbb{E}(S) = \left(\underline{\underline{R}}(S) \cdot \frac{d}{dS} \underline{x}(S) - \underline{T}(S), \underline{W}(S) \right). \quad (1.2)$$

Le couple $\mathbb{E}(S)$ n'est autre que le pendant du tenseur de déformation de Green-Lagrange pour la cinématique poutre. On vérifie aisément que la transformation est rigidifiante si et seulement si la déformation lagrangienne est identiquement nulle. Dans la suite, on adoptera la notation :

$$\boxed{\underline{E}(S) = \underline{\underline{R}}(S) \cdot \frac{d}{dS} \underline{x}(S) - \underline{T}(S), \quad \mathbb{E}(S) = \left(\underline{E}(S), \underline{W}(S) \right).}$$

On remarquera que, si \underline{E} est une quantité adimensionnelle, il n'en est pas de même pour \underline{W} qui a la dimension de *l'inverse d'une longueur*.

1.3 Cinématique eulerienne et champs de distributeur sur une courbe

1.3.1 Champ des vitesses en cinématique poutre

La description eulerienne de la cinématique consiste en la donnée du champ des vitesses sur la configuration actuelle. Celle-ci sera naturellement paramétrée par son abscisse curviligne s . Il est clair que la cinématique eulerienne cohérente avec la cinématique lagrangienne décrite dans la section précédente est la donnée en chaque point $\underline{x}(s)$ de la configuration actuelle de la ligne moyenne de sa vitesse $\underline{U}(s)$ et du vecteur vitesse de rotation instantanée $\underline{\Omega}(s)$ de la section droite qui lui est attachée. Le champ des vitesses en cinématique eulerienne s'écrit donc :

$$\left\{ \underline{U}(s), \underline{\Omega}(s) \right\}_{\underline{x}(s)},$$

où $\{ \underline{U}(s), \underline{\Omega}(s) \}$ n'est autre que le couple des éléments de réduction en $\underline{x}(s)$ du distributeur des vitesses dans le mouvement rigidifiant² de la section droite attachée au point $\underline{x}(s)$ de la poutre. En d'autres termes, le champ des vitesses en cinématique eulerienne d'une poutre n'est autre qu'un *champ de distributeur sur la configuration actuelle de la ligne moyenne*.

²cf annexe A pour la définition de distributeur, si nécessaire.

1.3.2 Dérivation d'un champ de distributeur le long d'une courbe

Considérons le champ de distributeur $\{\underline{U}(s), \underline{\Omega}(s)\}_{\underline{x}(s)}$, supposé régulier, sur la configuration actuelle. L'ensemble des distributeurs formant un espace vectoriel de dimension 6, ce champ de distributeur s'identifie donc à une application d'un intervalle réel dans un espace vectoriel de dimension finie. La dérivée de cette application est donc elle aussi un champ de distributeur sur la courbe. On se propose ici d'exprimer les éléments de réduction en $\underline{x}(s)$ du champ de distributeur :

$$\frac{d}{ds} \left\{ \underline{U}(s), \underline{\Omega}(s) \right\}_{\underline{x}(s)},$$

en fonction des dérivées des éléments de réduction du distributeur que l'on s'est donné. L'identification des distributeurs à un espace vectoriel de dimension 6 passe par l'expression des éléments de réduction en un même point de référence (pour calculer la différence de deux distributeurs, il faut commencer par disposer des éléments de réduction au même point). Les éléments de réduction en $\underline{x}(s)$ du distributeur $\{\underline{U}(s'), \underline{\Omega}(s')\}_{\underline{x}(s')}$ sont :

$$\underline{U}(s') + \underline{\Omega}(s') \wedge [\underline{x}(s) - \underline{x}(s')] \quad \text{et} \quad \underline{\Omega}(s').$$

Prenant la dérivée par rapport à s' et regardant sa valeur en s , on obtient alors :

$$\boxed{\frac{d}{ds} \left\{ \underline{U}(s), \underline{\Omega}(s) \right\}_{\underline{x}(s)} = \left\{ \frac{d}{ds} \underline{U}(s) + \underline{t}(s) \wedge \underline{\Omega}(s), \frac{d}{ds} \underline{\Omega}(s) \right\}_{\underline{x}(s)}}, \quad (1.3)$$

où

$$\underline{t}(s) = \frac{d}{ds} \underline{x}(s)$$

désigne le vecteur unitaire tangent à la courbe.

1.3.3 Caractérisation des champs de vitesse rigidifiants

Un champ de vitesse rigidifiant pour l'ensemble de la poutre est d'abord un champ de vitesse rigidifiant pour la ligne moyenne :

$$\underline{U}(s) = \underline{V} + \underline{\Omega} \wedge \underline{x}(s),$$

qui doit être complété par le champ des vitesses de rotation de chacune des sections droites qui ne peut être, pour chacune d'entre elle dans la circonstance en jeu, que la vitesse de rotation de l'ensemble. En d'autres termes, dans la cinématique poutre, un champ de vitesse rigidifiant ne peut être qu'un champ de distributeur du type :

$$\left\{ \underline{V} + \underline{\Omega} \wedge \underline{x}(s), \underline{\Omega} \right\}_{\underline{x}(s)},$$

où \underline{V} et $\underline{\Omega}$ désignent deux vecteurs quelconques (constants).

Un coup d'œil à la formule (1.3) permet alors de constater qu'une *champ de distributeur est rigidifiant si et seulement s'il est constant (sa dérivée est identiquement nulle)*.

1.4 Transformation infinitésimale et déformation linéarisée

Le déplacement $\bar{\underline{\xi}}(S)$ de la ligne moyenne est :

$$\bar{\underline{\xi}}(S) = \underline{x}(S) - \underline{X}(S).$$

Le champ de déplacement en cinématique des poutres sera évidemment défini par le couple :

$$\left(\bar{\underline{\xi}}(S), \underline{R}(S) - \underline{\mathbb{1}} \right).$$

L'hypothèse de la transformation infinitésimale en cinématique des poutres s'écrit naturellement :

$$\left| \frac{d\bar{\underline{\xi}}}{dS} \right| \ll 1, \quad \text{et} \quad \left| \underline{R} - \underline{\mathbb{1}} \right| \ll 1,$$

où l'on notera bien que les deux quantités en jeu sont adimensionnelles. L'hypothèse de la transformation infinitésimale a pour but de permettre la linéarisation systématique de toutes les grandeurs. Ici, cela commence par le déplacement lui-même. Si \underline{R} désigne une rotation quelconque, on a :

$$\underline{R} - \underline{\mathbb{1}} = \underline{\theta} + o\left(\left| \underline{R} - \underline{\mathbb{1}} \right|\right),$$

où $\underline{\theta}$ est un tenseur antisymétrique³. Ainsi, le déplacement s'écrit :

$$\left(\bar{\underline{\xi}}(S), \underline{\theta}(S) \right) + o\left(\left| \underline{R} - \underline{\mathbb{1}} \right|\right).$$

Introduisant le pseudo-vecteur $\underline{\theta}$ associé au tenseur antisymétrique $\underline{\theta}$, on voit ainsi apparaître, sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale, le *champ de distributeur des déplacements linéarisés* :

$$\left\{ \bar{\underline{\xi}}(S), \underline{\theta}(S) \right\}_{\underline{X}(S)}.$$

³Le contenu précis de cette assertion est le suivant. Considérons une rotation $\underline{R}(\eta)$ dépendant d'un paramètre réel η . On suppose $\underline{R}(0) = \underline{\mathbb{1}}$ et que la fonction $\underline{R}(\eta)$ est suffisamment régulière pour que l'on puisse écrire le développement limité :

$$\underline{R}(\eta) = \underline{\mathbb{1}} + \eta \frac{d\underline{R}}{d\eta}(0) + o(\eta).$$

Dérivant alors l'identité ${}^t\underline{R} \cdot \underline{R} \equiv \underline{\mathbb{1}}$ par rapport à η et examinant le résultat en $\eta = 0$, on voit que le terme d'ordre 1 du développement limité est un tenseur antisymétrique. Ainsi, une rotation infinitésimale se représente par un tenseur antisymétrique.

Linéarisons maintenant la déformation lagrangienne :

$$\mathbb{E} = \left\{ \underline{E}, \underline{W} \right\} = \left\{ ({}^t\underline{R} - \underline{\mathbb{1}}) \cdot \underline{T} + {}^t\underline{R} \cdot \frac{d\bar{\underline{\xi}}}{dS}, {}^t\underline{R} \cdot \frac{d}{dS}\underline{R} \right\},$$

où l'on a adopté la convention d'écriture qui consiste à identifier systématiquement un tenseur antisymétrique et son pseudo-vecteur associé. Il vient immédiatement :

$$\mathbb{E} = \left\{ \frac{d\bar{\underline{\xi}}}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{\theta}, \frac{d\theta}{dS} \right\} + o\left(\left| \frac{d\bar{\underline{\xi}}}{dS} \right| + |\underline{R} - \underline{\mathbb{1}}| \right).$$

Un coup d'œil à la formule (1.3) permet alors de constater qu'en cinématique des poutres, la *déformation linéarisée* s'identifie à la dérivée

$$\frac{d}{dS} \left\{ \bar{\underline{\xi}}(S), \underline{\theta}(S) \right\}_{\underline{x}(S)}$$

du *champ de distributeur des déplacements linéarisés*. Une conséquence immédiate de ce fait, est qu'à la différence du milieu continu tridimensionnel classique, il n'existe pas de condition de compatibilité géométrique pour qu'un champ de distributeur dérive d'un champ de distributeur de déplacement linéarisé. Ce fait s'étend d'ailleurs à la déformation lagrangienne $\mathbb{E}(S)$ elle-même.

1.5 Taux de déformation lagrangien et eulerien

Dans cette partie, on considère le mouvement d'une poutre paramétré par le temps t . On définit le *taux de déformation eulerien* (qui est la partie symétrique du gradient du champ des vitesses en cinématique du milieu continu tridimensionnel classique) comme étant la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne s sur la configuration actuelle du champ de distributeur des vitesses :

$$\frac{d}{ds} \left\{ \underline{U}(s), \underline{\Omega}(s) \right\}_{\underline{x}(s)}.$$

Cette définition tire sa cohérence de l'observation faite à la section 1.3.3, que le champ des vitesses à l'instant t est rigidifiant si et seulement si sa dérivée par rapport à s est identiquement nulle. On remarquera que, comme dans la cinématique du milieu continu tridimensionnel classique, l'opérateur qui donne le taux de déformation eulerien en fonction du champ des vitesses est identique à l'opérateur qui donne la déformation *linéarisée* en fonction du champ de déplacement.

Comme en cinématique tridimensionnelle classique, on définit le *taux de déformation lagrangien* comme étant la dérivée par rapport au temps de la déformation lagrangienne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}(t, S).$$

Dans la suite du cours, on aura besoin de l'expression du taux de déformation eulerien en fonction du taux de déformation lagrangien pour des points de la ligne moyenne homologues dans la transformation. On se propose de se débarrasser de ce petit point technique dès maintenant. Les vitesses \underline{U} et $\underline{\Omega}$ sont reliées à \underline{x} et \underline{R} par les relations suivantes (la deuxième n'étant autre que la formule (A.10) de l'annexe A) :

$$\underline{U} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}, \quad \text{et} \quad \underline{\Omega} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial t} \cdot {}^t \underline{R}.$$

Prenant en compte ces relations, la dérivée partielle par rapport au temps t de la première composante de \mathbb{E} est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left({}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial S} \right) &= {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial S} + \frac{\partial {}^t \underline{R}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial S}, \\ &= {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial S} - {}^t \underline{R} \cdot \underline{\Omega} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial S}, \\ &= \frac{\partial s}{\partial S} {}^t \underline{R} \cdot \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial s} + \underline{t} \wedge \underline{\Omega} \right). \end{aligned}$$

Le calcul est similaire pour la dérivée par rapport au temps de la deuxième composante de \mathbb{E} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left({}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \underline{R}}{\partial S} \right) &= - {}^t \underline{R} \cdot \underline{\Omega} \cdot \frac{\partial \underline{R}}{\partial S} + {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial}{\partial S} (\underline{\Omega} \cdot \underline{R}), \\ &= {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial S} \cdot \underline{R}. \end{aligned}$$

Le pseudo-vecteur associé au tenseur antisymétrique ${}^t \underline{R} \cdot \partial \underline{\Omega} / \partial S \cdot \underline{R}$ n'étant autre que ${}^t \underline{R} \cdot \partial \underline{\Omega} / \partial S$, on obtient le résultat suivant :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial S} = \frac{\partial s}{\partial S} {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial s}.$$

En rassemblant, tenant compte de la formule (1.3), on constate que la relation qui lie les taux de déformation lagrangien et eulerien est étonnamment simple :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}, \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} \right\} = \frac{\partial s}{\partial S} {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \underline{U}, \underline{\Omega} \right\}_{\underline{x}(s)}}. \quad (1.4)$$

1.6 Récapitulatif des formules essentielles

- Description lagrangienne du mouvement $(\underline{x}(S), \underline{R}(S))$.
- Définition de la déformation lagrangienne $\mathbb{E} = (\underline{E}, \underline{W})$:

$$\underline{E} = {}^t\underline{R} \cdot \frac{d\underline{x}}{dS} - \underline{T}, \quad \underline{W} \leftrightarrow \underline{\underline{W}} = {}^t\underline{R} \cdot \frac{d\underline{R}}{dS}.$$

- Description eulerienne du mouvement $\{\underline{U}(s), \underline{\Omega}(s)\}_{\underline{x}(s)}$.
- Définition du taux de déformation eulerien :

$$\frac{d}{ds} \left\{ \underline{U}(s), \underline{\Omega}(s) \right\}_{\underline{x}(s)}.$$

- Passage de la description lagrangienne à la description eulerienne :

$$\underline{U} = \dot{\underline{x}}, \quad \underline{\Omega} \leftrightarrow \underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{R}} \cdot {}^t\underline{R}.$$

- Relation entre taux de déformation lagrangien et eulerien :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}, \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} \right\} = \frac{\partial s}{\partial S} {}^t\underline{R} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \underline{U}, \underline{\Omega} \right\}_{\underline{x}(s)}.$$

- Hypothèse de la transformation infinitésimale :

$$\left| \frac{d\underline{\xi}}{dS} \right| \ll 1, \quad \text{et} \quad \left| \underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}} \right| \ll 1.$$

- Distributeur de déplacement linéarisé : $\{\underline{\bar{\xi}}, \underline{\theta}\}_{\underline{x}(s)}$.
- Déformation linéarisée :

$$\frac{d}{dS} \left\{ \underline{\bar{\xi}}, \underline{\theta} \right\}_{\underline{x}(s)} = \left\{ \frac{d\underline{\bar{\xi}}}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{\theta}, \frac{d\underline{\theta}}{dS} \right\}_{\underline{x}(s)}.$$