

## Avant Propos

On propose dans cet ouvrage une introduction à la mécanique des milieux continus en transformations finies.

Les premiers chapitres étudient les aspects cinématiques et statiques de la mécanique des milieux continus et donnent un éclairage sur les notions de transport des quantités mécaniques en suivant le mouvement de la matière.

On étudie ensuite le cas des matériaux hyperélastiques incompressibles, dont les applications industrielles sont nombreuses. Cette modélisation des polymères est développée selon plusieurs aspects : une introduction statistique du comportement à partir des chaînes de monomères, puis une étude de l'équilibre du corps hyperélastique.

L'introduction de la classe des déformations universelles éclaire les couplages non linéaires dus au comportement d'une part et à la géométrie d'autre part. L'étude et les conditions d'unicité de la réponse à un trajet d'équilibre sont présentées dans une approche de stabilité bifurcation.

Les coques et membranes élastiques sont abordées succinctement et montre la multiplicité des modèles de description de la cinématique et de la statique de ces objets. On étudie particulièrement les corps très minces comme les ballons.

La mécanique de la rupture en transformations finies est abordée selon deux points de vue : d'une part l'analyse des singularités potentielles en front de fissure, avec comme illustration la rupture en mode antiplan, et d'autre part au travers une modélisation d'un endommagement local de la matière défini par une élongation limite critique. Cette élongation limite est naturelle, les chaînes de monomères possèdent naturellement une extension finie.

Les problèmes d'évolution d'un ensemble de fissures ou de zones endommagées sont analysés. En mécanique de la rupture on étend les notions de taux de restitution d'énergie et on propose des intégrales invariantes généralisant les résultats des petites transformations. De même en endommagement local, on propose une généralisation des approches de type élastique-fragile.

Enfin, les lois de comportement élastoplastiques sont décrites après avoir introduit la cinématique du monocristal. La loi de comportement du polycristal est alors étudiée dans une approche macroscopique utilisant la notion de configuration relâchée. Cette approche est justifiée par l'établissement de relations entre les grandeurs microscopiques, celles du monocristal, et macroscopiques. Enfin, la formulation du problème d'évolution obtenue permet d'étendre au cas élastoplastique les

arguments utilisés en hyperélasticité pour l'étude de l'évolution d'un système de fissures.

Cet ouvrage se termine par quelques annexes proposant des compléments de modélisation, en particulier pour les chargements thermomécaniques et cycliques, par l'introduction d'une orientation privilégiée et l'existence d'élongations limites.

Cet ouvrage ne peut prétendre à une revue exhaustive de tous les modèles utilisant la mécanique des transformations finies, son seul but est de montrer la richesse de cette modélisation, les problèmes qu'elle pose et quelques pistes de réflexion pour aborder la tenue et la durabilité des structures en transformations finies.

Le Croisic, été 2009.



# Chapitre 1

## *Modélisation des milieux continus*

---

Nous étudions un système composé d'un ensemble de particules occupant à l'instant  $t$  un volume  $\omega$ . Une particule représente un volume supposé homogène, possédant des propriétés physiques particulières compatibles avec la notion de milieu continu. La représentation du milieu continu suppose avant tout que les caractéristiques physiques de ce milieu varient de façon continue d'un point à un autre<sup>1</sup>. Dans une telle approche, le milieu considéré ne subit que des transformations continues en espace et en temps ; ces transformations, de natures variées, présentent certains caractères géométriques communs dont l'étude constitue les fondements de la description cinématique.

Dans un repère de l'espace, la position de chaque élément de matière est donnée par son déplacement  $\underline{u}$  à partir d'une position de référence  $\underline{X}$  ; par exemple celle qu'il occupait à l'instant  $t_0$ . La fonction  $\underline{x} = \underline{X} + \underline{u}$  est continue par rapport à la variable  $\underline{X}$ . La continuité du milieu est exprimée par le fait que deux éléments voisins à l'instant  $t_0$  le restent à tout instant  $t$  ultérieur. Ces hypothèses de continuité du milieu et de la transformation n'excluent pas la présence de surfaces de discontinuités de la vitesse de déplacement.

Un milieu continu réagit suivant la nature de la matière qui le compose, mais son mouvement obéit à des équations générales. La cinématique propose un ensemble de variables pour décrire le mouvement des particules, les unes par rapport aux autres. Ces variables ont des propriétés de compatibilité, qui reflètent notamment la continuité du milieu.

---

<sup>1</sup>Ces propriétés peuvent être seulement continues par morceaux

## 1.1 Approche cinématique d'un milieu continu

**Description géométrique.** On considère un élément de volume de matière  $\Omega$  dont on étudie la transformation au cours du temps. A l'instant initial  $t_o$ , les positions des particules du volume sont repérées par des points  $\underline{X}$  de l'espace physique  $R^3$ . On suit les positions successives des particules au cours du temps. La position à l'instant  $t$  de la particule initialement en  $\underline{X}$  est donnée par la transformation :

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t), \quad (1.1)$$

qui satisfait les conditions initiales :

$$\underline{X} = \underline{x}(\underline{X}, t_o). \quad (1.2)$$

Le milieu étant continu, la position actuelle  $\underline{x}$  est une fonction continue de  $\underline{X}$  et du temps écoulé  $t - t_o$ . Les propriétés géométriques locales entre l'instant initial  $t_o$  et l'instant actuel  $t$  évoluent et sont caractérisées par l'application linéaire tangente définie par le gradient de la transformation  $\mathbf{F}(\underline{X}, t)$  :

$$d\underline{x} = \mathbf{F}.d\underline{X}. \quad (1.3)$$

En effet, considérons deux points matériels voisins repérés par leurs positions initiales respectives  $\underline{X}$  et  $\underline{X} + d\underline{X}$ , ces deux points occupent à l'instant actuel  $t$  les positions  $\underline{x}$  et  $\underline{x} + d\underline{x}$  de telle sorte que :

$$\underline{x} + d\underline{x} = \underline{x}(\underline{X} + d\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) + \mathbf{F}.d\underline{X} + o(d\underline{X}). \quad (1.4)$$

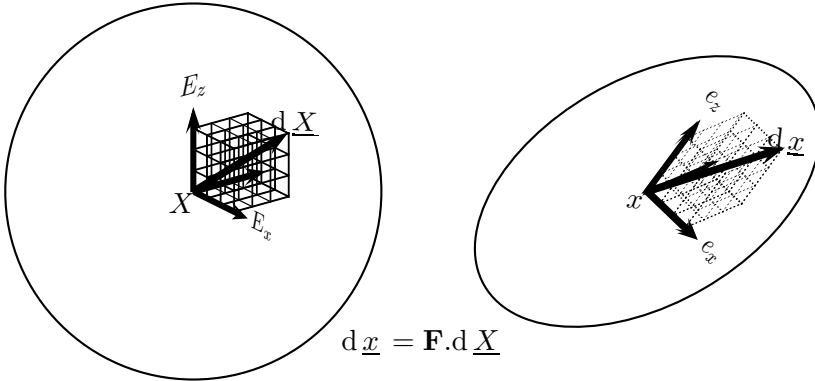
Le développement de la transformation  $\underline{x} : (\underline{X}, t) \rightarrow \underline{x}$  au premier ordre (défini par le gradient  $\mathbf{F}$ ) permet de préciser la manière dont se transforme géométriquement le milieu au voisinage du point  $\underline{X}$ .

L'application linéaire tangente :  $d\underline{X} \rightarrow d\underline{x} = \mathbf{F}.d\underline{X}$  caractérise localement l'évolution géométrique au sens suivant :

- le déterminant de l'application linéaire tangente relie l'élément de volume initial  $d\Omega$  à l'actuel  $d\omega$ , ce qui permet d'écrire la conservation de la masse sous la forme :

$$dm = \rho_o d\Omega = \rho d\omega, \quad J = \det \mathbf{F} = \frac{\rho_o}{\rho} = \frac{d\omega}{d\Omega}. \quad (1.5)$$

$$\underline{x} = \Phi(\underline{X}, t)$$


 FIG. 1: La transformation autour du point  $X$ 

- soient deux points de positions respectives  $\underline{X} + d\underline{X}$  et  $\underline{X} + d\underline{X}'$  initialement voisins du point  $\underline{X}$ . Au cours de la transformation, ces positions deviennent :

$$\underline{x} + d\underline{x} = \underline{x}(\underline{X} + d\underline{X}, t), \quad \underline{x} + d\underline{x}' = \underline{x}(\underline{X} + d\underline{X}', t), \quad (1.6)$$

dont on déduit les vecteurs homologues de  $d\underline{X}$  et  $d\underline{X}'$  transportés par la transformation<sup>2</sup> :

$$d\underline{x} = \mathbf{F}.d\underline{X}, \quad d\underline{x}' = \mathbf{F}.d\underline{X}'. \quad (1.7)$$

Ces vecteurs fournissent un ensemble de renseignements locaux comme :

- les variations de longueur : la longueur initiale  $d\underline{X}^T.d\underline{X}$  devient

$$d\underline{x}^T.d\underline{x} = d\underline{X}^T.\mathbf{F}^T.\mathbf{F}.d\underline{X}, \quad (1.8)$$

- les variations d'angle : l'angle initial entre les directions  $d\underline{X}$  et  $d\underline{X}'$  est donné par le produit scalaire  $d\underline{X}^T.d\underline{X}'$ , cet angle devient au cours du mouvement :

$$d\underline{x}^T.d\underline{x}' = d\underline{X}^T.\mathbf{F}^T.\mathbf{F}.d\underline{X}'. \quad (1.9)$$

<sup>2</sup>Les vecteurs élémentaires  $d\underline{X}$  et  $d\underline{X}'$  sont convectés par la transformation en  $d\underline{x}$  et  $d\underline{x}'$  ou encore transportés par le mouvement. Ils suivent le mouvement de la matière, l'ensemble des vecteurs  $d\underline{x}$  convectés, au cours du temps, constitue la classe du vecteur matériel  $d\underline{M}$  dont le représentant sur la configuration initiale est  $d\underline{X}$ .

La forme quadratique, associée au tenseur des dilatations

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (1.10)$$

caractérise complètement la variation de la géométrie locale autour du point  $\underline{X}$ . Elle définit un produit scalaire sur la configuration initiale.

On compare souvent la longueur actuelle à sa valeur initiale, cette comparaison définit, suivant sa nature, une classe de mesure de déformation. Par exemple, le tenseur des déformations de Green-Lagrange

$$\mathbf{E}(\mathbf{F}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (1.11)$$

exprime la variation du produit scalaire au cours de la transformation par rapport à la métrique initiale.

**Dilatation.** Soit  $\underline{U}$  une direction matérielle unitaire  $\|\underline{U}\| = 1$ , la dilatation dans la direction  $\underline{U}$  notée  $\lambda(\underline{U})$  est définie par

$$\lambda^2(\underline{U}) = \underline{U} \cdot \mathbf{C} \cdot \underline{U} \quad (1.12)$$

La surface  $\underline{U} \cdot \mathbf{C} \cdot \underline{U}$  décrite par les extrémités du vecteur  $\underline{U}$  unitaire parcourant la sphère unité est un ellipsoïde, dont les axes principaux définissent les directions  $\underline{U}$  qui rendent stationnaire  $\underline{U} \cdot \mathbf{C} \cdot \underline{U}$ , ce sont les directions principales de  $\mathbf{C}$  auxquelles on associe les dilatations principales.

**Remarque :** Examinons la stationnarité de la fonction

$$F(\mu, \underline{U}) = \frac{1}{2} \underline{U} \cdot \mathbf{C} \cdot \underline{U} - \frac{1}{2} \mu (\underline{U} \cdot \underline{U} - 1) \quad (1.13)$$

sur l'ensemble des vecteurs  $\underline{U}$  et des scalaires  $\mu$ . La stationnarité de  $F$  aboutit au système

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial \underline{U}} = \mathbf{C} \cdot \underline{U} - \mu \underline{U} \\ 0 &= \frac{\partial F}{\partial \mu} = \underline{U} \cdot \underline{U} - 1 \end{aligned}$$

Les vecteurs propres de  $\mathbf{C}$  rendent stationnaire  $F$  sur l'ensemble des vecteurs  $\underline{U}$  unitaires.

**Évolution de la géométrie.** La vitesse  $\underline{v}$  de la particule indexée par sa position initiale  $\underline{X}$  à l'instant  $t_o$  est à l'instant actuel  $t$  :

$$\underline{v}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}. \quad (1.14)$$

On en déduit le gradient de vitesse sur la configuration actuelle :

$$d\underline{v} = \mathbf{grad} \underline{v} \cdot d\underline{x}, \quad (1.15)$$

$$\mathbf{grad} \underline{v} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{X}} \cdot \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{x}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (1.16)$$

Le mouvement d'un milieu continu peut donc être décrit de deux façons :

- soit par la donnée de la transformation  $\underline{x}$ , on étudie le mouvement en représentation *lagrangienne*, chaque particule est indexée par sa position initiale,
- soit par la donnée à tout instant du champ de vitesse des particules, cette représentation est dite *eulérienne*. La particule qui est au point géométrique  $\underline{x}_o$  possède une vitesse  $\underline{v}(\underline{x}_o, t)$ .

Ces deux points de vue sont équivalents. En effet, exprimons les relations cinématiques qui lient ces deux descriptions. Du point de vue lagrangien, la vitesse de déformation est donnée par l'évolution du tenseur de Green-Lagrange :

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}}) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}, \quad (1.17)$$

où apparaît la partie symétrique du gradient de la vitesse appelée taux de vitesse de déformation  $\mathbf{D}$  :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left( (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1})^T + \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{grad}^T \underline{v} + \mathbf{grad} \underline{v}) = \varepsilon(\underline{v}). \quad (1.18)$$

Cette relation montre que le point de vue eulérien correspond au point de vue lagrangien en prenant comme référence la configuration actuelle, c'est-à-dire en fixant la géométrie à l'instant  $t$  et en exprimant à l'aide du champ de vitesse  $\underline{v}$  la variation du produit scalaire exprimée sur la géométrie actuelle<sup>3</sup>.

Le gradient de vitesse se décompose en une partie symétrique et une partie antisymétrique

$$\mathbf{K} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega}. \quad (1.19)$$

La partie antisymétrique  $\mathbf{\Omega}$  représente la rotation instantanée d'un élément de matière. En effet, pour tout point  $m$  voisin d'un point 0 nous avons

$$\underline{v}(m) = \underline{v}(0) + \mathbf{grad} \underline{v} \cdot \underline{0m} + \dots \quad (1.20)$$

---

<sup>3</sup>On peut prendre toute configuration intermédiaire pour référence, une configuration doit assurer la continuité de la matière.



Intégrons cette relation sur la sphère unité homogène centrée en 0, la quantité  $\underline{v}(0)$  s'interprète comme la vitesse du centre de gravité de la sphère homogène :

$$\frac{4}{3}\pi \underline{v}(0) = \int_S \underline{v}(m) \, d\omega. \quad (1.21)$$

De plus le moment cinétique moyen

$$\int_S \underline{Om} \wedge \underline{v}(m) \, d\omega = I_0 \cdot \underline{\Omega} \quad (1.22)$$

est lié à la vitesse de rotation de la sphère unité par le tenseur d'inertie

$$I_0 = \int_S (\underline{x} \otimes \underline{x} - \underline{x} \cdot \underline{x} \, \mathbf{I}) \, d\omega.$$

**Transport convectif.** Soit  $\underline{M}$  un vecteur matériel, son transport convectif par  $\mathbf{F}$  est le vecteur  $\underline{m}$  tel que

$$\underline{m} = \mathbf{F} \cdot \underline{M}, \quad (1.23)$$

ainsi donc

$$\frac{d}{dt}(\underline{m}) = \dot{\mathbf{F}} \cdot \underline{M} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \underline{m} = \mathbf{K} \cdot \underline{m}. \quad (1.24)$$

Décomposons le vecteur  $\underline{m}$  en module  $m$  et direction  $\underline{u}$  unitaire,

$$\underline{m} = m \underline{u}, \quad \|\underline{u}\| = 1, \quad (1.25)$$

et exprimons les évolutions du module et de la direction. Comme :

$$\dot{m} \underline{u} + m \dot{\underline{u}} = m \mathbf{K} \cdot \underline{u}, \quad \dot{\underline{u}} \cdot \underline{u} = 0, \quad (1.26)$$

nous obtenons successivement :

$$\dot{m} = \underline{u} \cdot \mathbf{K} \cdot \underline{u} \, m, \quad (1.27)$$

$$\dot{\underline{u}} = \mathbf{K} \cdot \underline{u} - \underline{u} \cdot \mathbf{K} \cdot \underline{u} \, \underline{u} = \underline{\omega} \cdot \underline{u}. \quad (1.28)$$

Ainsi la vitesse de déformation permet de déterminer le taux d'allongement par direction

$$\frac{\dot{m}}{m} = \underline{u} \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{u}. \quad (1.29)$$

Le vecteur  $\underline{u}$  unitaire subit une rotation  $\underline{\omega}$  :  $\dot{\underline{u}} = \underline{\omega} \cdot \underline{u}$  ; la rotation  $\underline{\omega}$  n'est pas réduite à la seule partie antisymétrique du gradient de la transformation, elle dépend de la direction  $\underline{u}$  choisie.

Formons une base orthonormée à partir de la direction  $\underline{u}$  et de deux vecteurs ( $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$ ) pris dans le plan normal à  $\underline{u}$ . Dans ce repère la vitesse de  $\underline{u}$  se décompose sous la forme

$$\dot{\underline{u}} = \omega \cdot \underline{u} = \Omega \cdot \underline{u} - \underline{v} \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{u} \quad \underline{v} - \underline{w} \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{u} \quad \underline{w} \quad (1.30)$$

ainsi

$$\begin{aligned} \underline{v} \cdot \omega \cdot \underline{u} &= \underline{v} \cdot \Omega \cdot \underline{u} - \underline{v} \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{u} \\ \underline{w} \cdot \omega \cdot \underline{u} &= \underline{w} \cdot \Omega \cdot \underline{u} - \underline{w} \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{u} \end{aligned}$$

On en déduit alors le résultat suivant : *pour que les deux amplitudes de rotation liées respectivement à  $\omega$  et  $\Omega$  coïncident il est nécessaire que  $\underline{u}$  soit une direction principale de  $\mathbf{D}$ .*

**Compléments.** Pour illustrer complètement ces notions ainsi que le transport convectif, considérons comme configuration de référence la configuration occupée par le corps au temps  $\tau$  intermédiaire entre l'instant initial  $t_o$  et l'instant actuel  $t$ . La transformation s'écrit comme une composition d'applications :

$$\underline{x}_o^t = \underline{x}(\underline{X}, t) = \underline{x}_\tau^t(\underline{X}_\tau, t - \tau); \quad \underline{X}_\tau = \underline{x}(\underline{X}, \tau) = \underline{x}_o^\tau, \quad \underline{X} = \underline{x}_o^o = \underline{x}(\underline{X}, t_o). \quad (1.31)$$

Les gradients associés à chaque transformation vérifient la décomposition multiplicative :

$$\mathbf{F}_o^t = \mathbf{F}_\tau^t \cdot \mathbf{F}_o^\tau, \quad \mathbf{F}_\tau^t = \frac{\partial \underline{x}_\tau^t}{\partial \underline{X}_\tau}. \quad (1.32)$$

Les tenseurs des dilatations sont reliés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_o^t &= (\mathbf{F}_o^t)^\top \cdot \mathbf{F}_o^t = (\mathbf{F}_o^\tau)^\top \cdot \mathbf{C}_\tau^t \cdot \mathbf{F}_o^\tau \\ \mathbf{C}_\tau^t &= (\mathbf{F}_\tau^t)^\top \cdot \mathbf{F}_\tau^t \end{aligned}$$

On vérifie les passages à la limite suivants :

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathbf{F}_\tau^t &= \mathbf{F}_o^t, \\ \lim_{\tau \rightarrow t} \mathbf{F}_\tau^t &= \mathbf{I}, \\ \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{d}{dt} \mathbf{C}_\tau^t &= 2\mathbf{D}. \end{aligned}$$

Ces relations montrent que l'on peut choisir n'importe quelle configuration intermédiaire pour décrire le mouvement du corps, il n'en est pas de privilégiée !

Ainsi la description eulérienne revient à choisir la configuration actuelle comme configuration de référence. On remarquera la similitude des équations (1.10) et (1.15). En effet

$$d\underline{x} = \mathbf{F}_o^t \cdot d\underline{X} \quad d\underline{v} = \dot{\mathbf{F}}_o^t \cdot (\mathbf{F}_o^t)^{-1} \cdot d\underline{x} = \dot{\mathbf{F}}_t^t \cdot d\underline{x}, \quad (1.33)$$

$$\dot{\mathbf{F}}_o^t = \dot{\mathbf{F}}_\tau^t \cdot \mathbf{F}_o^\tau \quad \dot{\mathbf{F}}_t^t = \lim_{\tau \rightarrow t} \dot{\mathbf{F}}_\tau^t \quad (1.34)$$

**Valeurs propres et invariants principaux.** Le tenseur des dilatations  $\mathbf{C}$  représente un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive), il existe trois valeurs

$\mu_i$  (distinctes ou non) pour lesquelles le noyau de l'opérateur  $\mathbf{C} - \mu_i \mathbf{I}$  n'est pas réduit au seul vecteur nul. Un vecteur propre  $\underline{S}_i$  élément de ce noyau vérifie donc

$$\mathbf{C} \cdot \underline{S}_i - \mu_i \underline{S}_i = 0. \quad (1.35)$$

Les valeurs propres  $\mu_i$  sont les racines du polynôme caractéristique, déterminant de l'opérateur  $(\mathbf{C} - \mu \mathbf{I})$ . En effet, pour qu'il existe un vecteur non nul  $\underline{S}_i$  qui vérifie l'équation précédente, il est nécessaire que l'opérateur  $\mathbf{C} - \mu_i \mathbf{I}$  soit non inversible donc que son déterminant soit nul :

$$P(\mu) = \det(\mathbf{C} - \mu \mathbf{I}) = -\mu^3 + \mu^2 I_1 - \mu I_2 + \det \mathbf{C}. \quad (1.36)$$

Les coefficients de ce polynôme sont les invariants principaux de  $\mathbf{C}$ .

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{Tr } \mathbf{C}, \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left( \text{Tr}^2 \mathbf{C} - \text{Tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}) \right), \\ I_3 &= \det \mathbf{C} = (\det \mathbf{F})^2 = J^2. \end{aligned}$$

Tout autre invariant de  $\mathbf{C}$  est une fonction des invariants principaux. Pour le montrer on utilise les relations entre invariants déduites du polynôme caractéristique. Ainsi :

$$\text{Tr } \mathbf{C}^2 = I_1^2 - 2I_2, \quad (1.37)$$

de même, on peut définir les traces de  $\mathbf{C}^n$ . Tous ces nouveaux invariants sont fonctions des trois invariants principaux.

**Remarque :** À partir des valeurs propres de  $\mathbf{C}$  nous avons

$$I_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \quad I_2 = \mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_3, \quad I_3 = \mu_1 \mu_2 \mu_3. \quad (1.38)$$

Les valeurs  $\mu_i$  sont racines du polynôme caractéristique, nous avons

$$\sum_i P(\mu_i) \underline{S}_i \otimes \underline{S}_i = 0, \quad (1.39)$$

nous pouvons déduire (Cayley-Hamilton)

$$-\mathbf{C}^3 + I_1 \mathbf{C}^2 - I_2 \mathbf{C} + \det \mathbf{C} \mathbf{I} = 0. \quad (1.40)$$

À l'aide de cette remarque, on exprime  $\text{Tr } \mathbf{C}^3$  en fonction des invariants principaux de  $\mathbf{C}$  :

$$-\text{Tr } \mathbf{C}^3 + I_1^3 - 3I_1 I_2 + 3I_3 = 0. \quad (1.41)$$

Le déterminant  $I_3 = \det \mathbf{C}$  s'exprime aussi en fonction des traces des tenseurs  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}^2$ ,  $\mathbf{C}^3$  :

$$\det \mathbf{C} = \frac{1}{6} (2 \text{Tr } \mathbf{C}^3 + (\text{Tr } \mathbf{C})^3 - 3 \text{Tr } \mathbf{C} \text{Tr } \mathbf{C}^2) \quad (1.42)$$

et l'inverse de  $\mathbf{C}$  vérifie :

$$\det \mathbf{C} \quad \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^2 - I_1 \mathbf{C} + I_2 \mathbf{I}, \quad (1.43)$$

ce qui définit le premier invariant de l'inverse à partir des invariants principaux de  $\mathbf{C}$  :

$$\text{Tr } \mathbf{C}^{-1} \quad \det \mathbf{C} = I_2, \text{ soit } \bar{I}_1 = \text{Tr } \mathbf{C}^{-1} = \frac{I_2}{I_3}. \quad (1.44)$$

Le tenseur  $\mathbf{C}$  est inversible et son inverse est donné par l'équation (1.43). Son expression est immédiate dans la base principale de  $\mathbf{C}$  et nous avons

$$\mathbf{C}^{-1} = \sum_i \frac{1}{\mu_i} \underline{\mathbf{S}}_i \otimes \underline{\mathbf{S}}_i, \quad (1.45)$$

Le polynôme caractéristique de  $\mathbf{C}^{-1}$  est donc donné par :

$$-\frac{1}{\mu^3} + \frac{1}{\mu^2} \bar{I}_1 - \frac{1}{\mu} \bar{I}_2 + \det \mathbf{C}^{-1}, \quad (1.46)$$

où les valeurs propres de  $\mathbf{C}^{-1}$  sont recherchées sous la forme  $\lambda = \frac{1}{\mu}$ . Multiplions le polynôme caractéristique précédent par  $\mu^3$  et multiplions le tout par  $\det \mathbf{C}$ . On obtient un polynôme de degré trois, dont les racines sont les  $\mu_i$ , c'est le polynôme caractéristique de  $\mathbf{C}$ . En effet,

$$-(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3) = \mu^3 \mu_1 \mu_2 \mu_3 \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_1}\right) \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_2}\right) \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_3}\right), \quad (1.47)$$

soit encore

$$\det(\mathbf{C} - \mu \mathbf{I}) = \det \mathbf{C} \det(\mathbf{I} - \mu \mathbf{C}^{-1}) = \mu^3 \det \mathbf{C} \det\left(\frac{1}{\mu} \mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}\right) \quad (1.48)$$

On en déduit les expressions des invariants principaux de  $\mathbf{C}^{-1}$  en fonction de ceux de  $\mathbf{C}$  :

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \text{Tr } \mathbf{C}^{-1} = \frac{I_2}{I_3}, \\ \bar{I}_2 &= \frac{1}{2} \left( (\text{Tr } \mathbf{C}^{-1})^2 - \text{Tr } \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C}^{-1} \right) = \frac{I_1}{I_3}, \\ \bar{I}_3 &= \frac{1}{I_3}. \end{aligned}$$

**Décomposition polaire.** *Le gradient de la transformation se décompose en le produit d'une rotation et d'une affinité, ou bien d'une affinité et d'une rotation.*

Plaçons nous dans la base principale ( $\underline{S}_i$ ) de  $\mathbf{C}$  dont les valeurs propres  $\mu_i$  sont positives ( $\mu_i = \lambda_i^2 > 0$ ). Ces vecteurs propres définissent la base des directions principales du tenseur des dilatations :

$$\mathbf{C} \cdot \underline{S}_i = \lambda_i^2 \underline{S}_i, \quad \|\underline{S}_i\| = 1, \quad \underline{S}_i \cdot \underline{S}_j = 0, \quad \text{si } i \neq j. \quad (1.49)$$

Chaque dilatation principale  $\lambda_i$  est positive. L'expression de  $\mathbf{F}$  sur cette base est immédiate ( $\mathbf{F}$  est un opérateur linéaire qui est défini de façon unique par les images des vecteurs d'une base) :

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \underline{s}_i \otimes \underline{S}_i, \quad (1.50)$$

les vecteurs  $\underline{s}_i$  ( $\underline{s}_i = \mathbf{F} \cdot \underline{S}_i$ ) sont les vecteurs images des vecteurs de la base principale de  $\mathbf{C}$ , c'est-à-dire les vecteurs de la base principale convectés par la transformation  $\mathbf{F}$ .

Comme  $\underline{s}_i \cdot \underline{s}_j = \underline{S}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \underline{S}_j = \delta_{ij} \lambda_i^2$ , on introduit les vecteurs  $\underline{u}_i$  orthonormés tels que  $\underline{s}_i = \lambda_i \underline{u}_i$ , puis la rotation  $\mathbf{R}$  qui transforme la base orthonormée  $\underline{S}_i$  en la base orthonormée  $\underline{u}_i$  :

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \underline{u}_i \otimes \underline{S}_i. \quad (1.51)$$

**Propriété :** *La base ( $\underline{S}_i$ ) des dilatations principales de  $\mathbf{C}$  est le seul trièdre orthogonal se transformant en un trièdre orthogonal ( $\underline{s}_i$ ). Les directions principales  $\underline{S}_i$  dépendent du temps, elles subissent, en général, une rotation sur la configuration initiale dont l'amplitude n'est pas directement liée à celle de la rotation  $\mathbf{R}$  de la décomposition polaire.*

Il est immédiat de montrer que :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R} = \sum_i \lambda_i \underline{u}_i \otimes \underline{S}_i, \\ \mathbf{U} &= \sum_i \lambda_i \underline{u}_i \otimes \underline{u}_i, \\ \mathbf{S} &= \sum_i \lambda_i \underline{S}_i \otimes \underline{S}_i. \end{aligned}$$

Les affinités  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{U}$  possèdent les mêmes valeurs propres, mais leurs bases principales sont différentes.

De nombreuses analyses cinématiques peuvent être menées à partir de la décomposition polaire du gradient de la transformation.

**Ellipsoïde des dilatations.** La forme quadratique  $\mathbf{C}$  est diagonalisable, de base principale  $\underline{S}_i$ , nous pouvons donc écrire :

$$\mathbf{C} = \sum_i \mu_i \underline{S}_i \otimes \underline{S}_i, \quad \mu_i = \lambda_i^2. \quad (1.52)$$

Les vecteurs  $\underline{s}_i$  transportés des vecteurs  $\underline{S}_i$  sont de norme  $\lambda_i$  :

$$\underline{s}_i = \mathbf{F} \cdot \underline{S}_i = \lambda_i \underline{u}_i, \quad \|\underline{u}_i\| = 1. \quad (1.53)$$

À tout vecteur  $\underline{U} = U^i \underline{S}_i$  son image par  $\mathbf{F}$  satisfait

$$\underline{V} = \mathbf{F} \cdot \underline{U} = \sum_i U^i \lambda_i \underline{u}_i = V^i \underline{u}_i; \quad V^i = \lambda_i U^i \text{ (sans sommation)}. \quad (1.54)$$

Prenons un vecteur unitaire  $\underline{U}$ , ses composantes vérifient donc  $\sum_i (U^i)^2 = 1$ , alors les composantes du vecteur transporté satisfont l'équation :

$$\sum_i \frac{(V^i)^2}{\lambda_i^2} = 1, \quad (1.55)$$

équation d'un ellipsoïde rapporté à ses axes principaux orthogonaux.

**Autres mesures de déformation.** On peut introduire d'autres tenseurs de déformation<sup>4</sup>. À toute fonction  $f(x)$  monotone croissante, on associe la mesure de déformation lagrangienne définie par :

$$\mathbf{S}_f = \sum_i f(\lambda_i) \underline{S}_i \otimes \underline{S}_i. \quad (1.56)$$

À la déformation de Green-Lagrange est associée la fonction  $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ , au tenseur des dilatations de Cauchy est associé  $f(x) = x^2$ , pour l'affinité  $\mathbf{S}$  on prend  $f(x) = x$ . Les mesures de déformations peuvent être aussi eulériennes :

$$\mathbf{U}_f = \sum_i f(\lambda_i) \underline{u}_i \otimes \underline{u}_i. \quad (1.57)$$

Pour  $f(x) = x^2$  par exemple, on obtient le tenseur de Cauchy à droite<sup>5</sup> :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \sum_i \lambda_i^2 \underline{u}_i \otimes \underline{u}_i. \quad (1.58)$$

<sup>4</sup>R. Hill, *Aspects of Invariance in Solid Mechanics*. Advances in Applied Mechanics, Vol 18., pp.1-75, 1978.

<sup>5</sup>appelé parfois tenseur de Finger

Ce tenseur a pour base principale celle de  $\mathbf{C}$  convectée par la rotation  $\mathbf{R}$ .

Les tenseurs des dilatations  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  ont des valeurs propres identiques, mais leurs bases principales sont différentes. Possédant les mêmes invariants principaux, le polynôme caractéristique de  $\mathbf{B}$  est le même que celui de  $\mathbf{C}$ . La base principale de  $\mathbf{C}$  est identique à celle de  $\mathbf{S}$ , les bases principales de  $\mathbf{B}$  et de  $\mathbf{U}$  coïncident. Les polynômes caractéristiques de  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{U}$  sont identiques, il en est de même des polynômes de  $\mathbf{S}_f$  et de  $\mathbf{U}_f$ .

**Expression de  $\mathbf{S}$  à partir de  $\mathbf{C}$ .** Plusieurs cas sont à envisager suivant les valeurs des dilatations principales

- la valeur propre est triple,
- il existe une valeur simple et une double,
- il existe trois valeurs simples donc distinctes.

Examinons ces trois cas successivement.

Cas 1. Dans le cas d'une valeur propre triple  $\lambda_i = \lambda$ , la connaissance du déterminant de  $\mathbf{C}$  suffit et donc

$$\mathbf{S} = (\det \mathbf{C})^{\frac{1}{6}} \mathbf{I}. \quad (1.59)$$

Cas 2. Pour deux valeurs propres égales  $\lambda$  et une distincte  $\lambda_3$ , il existe une direction  $\underline{\mathcal{S}}_3$  telle que

$$\mathbf{C} = \lambda^2 \mathbf{I} + (\lambda_3^2 - \lambda^2) \underline{\mathcal{S}}_3 \otimes \underline{\mathcal{S}}_3. \quad (1.60)$$

De façon analogue,

$$\mathbf{S} = \lambda \mathbf{I} + (\lambda_3 - \lambda) \underline{\mathcal{S}}_3 \otimes \underline{\mathcal{S}}_3. \quad (1.61)$$

La direction principale  $\underline{\mathcal{S}}_3 \otimes \underline{\mathcal{S}}_3$  est définie par le tenseur  $\mathbf{C} - \lambda^2 \mathbf{I}$  donc

$$\mathbf{S} = \lambda \mathbf{I} + \frac{\mathbf{C} - \lambda^2 \mathbf{I}}{\lambda_3^2 - \lambda^2} (\lambda_3 - \lambda) = \lambda \mathbf{I} + \frac{\mathbf{C} - \lambda^2 \mathbf{I}}{\lambda_3 + \lambda}. \quad (1.62)$$

Cas 3. Lorsque les valeurs propres sont différentes, les directions principales sont distinctes et orthogonales. Chaque direction  $i$  est portée par l'opérateur

$$\frac{(\mathbf{C} - \lambda_j^2 \mathbf{I})}{\lambda^2 - \lambda_j^2} \cdot \frac{(\mathbf{C} - \lambda_k^2 \mathbf{I})}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad i \neq j, i \neq k, j \neq k. \quad (1.63)$$

Ainsi, l'affinité  $\mathbf{S}$  est représentée par

$$\mathbf{S} = \sum_{i \neq j \neq k} \lambda_i \frac{(\mathbf{C} - \lambda_j^2 \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{C} - \lambda_k^2 \mathbf{I})}{(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)(\lambda_i^2 - \lambda_k^2)}. \quad (1.64)$$

**Expression de  $\mathbf{C}$  à partir de  $\mathbf{S}$ .** Les mêmes raisonnements s'appliquent.

Cas 1. Dans le cas d'une valeur propre triple, nous avons :

$$\mathbf{C} = (\det \mathbf{S})^{\frac{2}{3}} \mathbf{I}. \quad (1.65)$$

Cas 2. Dans ce cas la direction principale particulière est notée  $\underline{S}_3$  et comme

$$\mathbf{S} = \lambda \mathbf{I} + (\lambda_3 - \lambda) \underline{S}_3 \otimes \underline{S}_3, \quad (1.66)$$

on peut exprimer  $\underline{S}_3 \otimes \underline{S}_3$ , donc :

$$\mathbf{C} = \lambda^2 \mathbf{I} + (\lambda_3^2 - \lambda^2) \underline{S}_3 \otimes \underline{S}_3 = \lambda^2 \mathbf{I} + (\lambda_3 + \lambda)(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}), \quad (1.67)$$

soit encore :

$$\mathbf{C} = (\lambda_3 + \lambda)\mathbf{S} - \lambda\lambda_3 \mathbf{I} \quad (1.68)$$

Cas 3. Par un raisonnement analogue sur les directions principales de  $\mathbf{S}$ , on déduit que la direction principale  $i$  est portée par l'opérateur :

$$\frac{(\mathbf{S} - \lambda_j \mathbf{I})}{\lambda - \lambda_j} \cdot \frac{(\mathbf{S} - \lambda_k \mathbf{I})}{\lambda - \lambda_k}, \quad i \neq j, i \neq k, j \neq k; \quad (1.69)$$

donc

$$\mathbf{C} = \sum_{i \neq j \neq k} \lambda_i^2 \frac{(\mathbf{S} - \lambda_j \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{S} - \lambda_k \mathbf{I})}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)}. \quad (1.70)$$

**Polynôme caractéristique de  $\mathbf{S}$ .** Remarquons que  $\mathbf{C} = \mathbf{S}^2$ . Le polynôme caractéristique de  $\mathbf{C}$  se décompose en le produit :

$$\det(\mathbf{C} - x^2 \mathbf{I}) = \det(\mathbf{S} - x \mathbf{I}) \det(\mathbf{S} + x \mathbf{I}), \quad (1.71)$$

ce qui est naturel car  $\mathbf{S}$  et  $-\mathbf{S}$  sont solutions de  $\mathbf{C} = \mathbf{S}^2$ . On choisit le tenseur avec les valeurs propres  $x_i$  toutes positives, même si d'autres choix semblent licites, on doit cependant assurer que  $\det \mathbf{F} > 0$ .

**Expression de  $\mathbf{S}$  et de ses invariants.** Notons par des minuscules les invariants de  $\mathbf{S}$  :  $i_1, i_2, j$  nous avons les propriétés suivantes

$$I_1 = i_1^2 - 2i_2, \quad I_2 = i_2^2 - 2ji_1, \quad j = \det \mathbf{S} = \sqrt{\det \mathbf{C}} = J. \quad (1.72)$$

Le polynôme caractéristique de  $\mathbf{S}$  s'écrit alors

$$P(x) = \det(\mathbf{S} - x \mathbf{I}) = -x^3 + i_1 x^2 - i_2 x + j, \quad P(\lambda_i) = 0, \quad (1.73)$$



ainsi exprimant  $\mathbf{S}$  dans sa base principale, le théorème de Cayley Hamilton permet d'écrire :

$$P(\mathbf{S}) = \sum_i P(\lambda_i) \underline{S}_i \otimes \underline{S}_i = -\mathbf{S}^3 + i_1 \mathbf{S}^2 - i_2 \mathbf{S} + j \mathbf{I} = 0. \quad (1.74)$$

Multiplions par  $\mathbf{S}$  et remplaçons les puissances paires par celles de  $\mathbf{C}$  et la puissance 3 par la relation ci-dessus ; nous obtenons la relation générale

$$\mathbf{S}(j - i_1 i_2) = \mathbf{C}^2 + (i_2 - i_1^2) \mathbf{C} - j i_1 \mathbf{I}. \quad (1.75)$$

Le déterminant de  $\mathbf{S}$  est donné de façon immédiate à partir de celui de  $\mathbf{C}$ . Les expressions des autres invariants de  $\mathbf{S}$  en fonction de ceux de  $\mathbf{C}$  sont plus délicates à obtenir. On est amené à résoudre une équation de degré quatre, où  $j$  est connu :

$$i_1^4 - 2I_1 i_1^2 - 8j i_1 + I_1^2 - 4I_2 = 0. \quad (1.76)$$

Cette équation est résoluble. Posons

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{2^5}{27} (2I_1^3 - 9I_1 I_2 + 27J), \\ \eta &= \frac{2^{10}}{27} (4I_2^3 - I_1^2 I_2^2 + 4I_1^3 J - 18I_1 I_2 J + 27J^2), \\ \zeta &= -\frac{2}{3} + (\xi + \sqrt{\eta})^{\frac{1}{3}} + (\xi - \sqrt{\eta})^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

alors nous obtenons :

$$i_1 = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \sqrt{2I_1 + \zeta} + \sqrt{2I_1 - \zeta + 16 \frac{J^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2I_1 + \zeta}}} \right) & \zeta \neq -2I_1 \\ \sqrt{2I_1 + 2\sqrt{I_2}} & \zeta = -2I_1 \end{cases}$$

Le second cas est celui de la dimension 2.

## 1.2 Évolution des déformations

L'évolution des déformations résulte de celle des dilatations principales et de la rotation du trièdre des directions principales. On étudie les évolutions des différents tenseurs de déformation précédemment introduits et les relations cinématiques qui les lient le cas échéant.

Plusieurs classes de mesure de déformation  $\mathbf{S}_f$  ont été définies par différentes fonctions  $f$  croissantes des dilatations principales :

$$\mathbf{S}_f = \sum_{i=1}^3 f(\lambda_i) \underline{S}_i \otimes \underline{S}_i. \quad (1.77)$$

Sur la configuration initiale les vecteurs  $\underline{S}_i$  évoluent au cours du temps, comme ce sont des vecteurs unitaires, leur mouvement est donné par une rotation instantanée exprimée par un tenseur antisymétrique  $\Omega^L$

$$\dot{\underline{S}}_i = \Omega^L \cdot \underline{S}_i = \Omega_{ij}^L \underline{S}_j ; \quad \Omega^L = \Omega_{ij}^L ( \underline{S}_j \otimes \underline{S}_i - \underline{S}_i \otimes \underline{S}_j ). \quad (1.78)$$

La vitesse de déformation est donc

$$\dot{\mathbf{S}}_f = \sum_i^3 f'(\lambda_i) \dot{\lambda}_i \underline{S}_i \otimes \underline{S}_i + \Omega^L \cdot \mathbf{S}_f - \mathbf{S}_f \cdot \Omega^L. \quad (1.79)$$

On note de manière homologue la rotation des directions principales de  $\mathbf{U}$  :

$$\dot{\underline{u}}_i = \Omega^E \cdot \underline{u}_i = \Omega_{ij}^E \underline{u}_j ; \quad \Omega^E = \Omega_{ij}^E ( \underline{u}_j \otimes \underline{u}_i - \underline{u}_i \otimes \underline{u}_j ). \quad (1.80)$$

Ceci détermine la vitesse de l'affinité eulérienne :

$$\dot{\mathbf{U}}_f = \sum_i^3 f'(\lambda_i) \dot{\lambda}_i \underline{u}_i \otimes \underline{u}_i + \Omega^E \cdot \mathbf{U}_f - \mathbf{U}_f \cdot \Omega^E. \quad (1.81)$$

Dans un repère orthonormé, les vecteurs  $\underline{S}_i$  et  $\underline{u}_i$  sont les images du trièdre de base par deux rotations notées respectivement  $\mathbf{R}_o$  et  $\mathbf{R}_E$ , les rotations instantanées en sont déduites

$$\dot{\mathbf{R}}_o = \Omega^L \cdot \mathbf{R}_o ; \quad \dot{\mathbf{R}}_E = \Omega^E \cdot \mathbf{R}_E. \quad (1.82)$$

La rotation  $\mathbf{R}$  intervenant dans la décomposition polaire du gradient  $\mathbf{F}$  vérifie la composition des rotations :

$$\mathbf{R}_E = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}_o, \quad (1.83)$$

ce qui conduit à la composition des rotations instantanées :

$$\mathbf{R}^T \cdot (\Omega^E - \Omega^R) \cdot \mathbf{R} = \Omega^L, \quad \Omega^R = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^{-1}. \quad (1.84)$$

**Évolution de l'affinité  $\mathbf{S}$ .** Prenons maintenant  $f(x) = x$ . Chaque dilatation principale  $\lambda_i$  est valeur propre de  $\mathbf{S}$  donc

$$(\mathbf{S} - \lambda_i \mathbf{I}) \cdot \underline{S}_i = 0, \quad \underline{S}_i \cdot \underline{S}_j = \delta_{ij}. \quad (1.85)$$

Par dérivation, nous avons

$$(\dot{\mathbf{S}} - \dot{\lambda}_i \mathbf{I}) \cdot \underline{S}_i + (\mathbf{S} - \lambda_i \mathbf{I}) \cdot \dot{\underline{S}}_i = 0. \quad (1.86)$$

Prenons successivement les projections sur les vecteurs de base  $\underline{S}_i$  et  $\underline{S}_j$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \underline{S}_i \cdot \dot{\mathbf{S}} \cdot \underline{S}_i &= \dot{\lambda}_i, \\ \underline{S}_j \cdot \dot{\mathbf{S}} \cdot \underline{S}_i &= (\lambda_i - \lambda_j) \Omega_{ij}^L. \end{aligned}$$

**Évolution du tenseur des dilatations  $\mathbf{C}$ .** On peut mener le même raisonnement sur le tenseur des dilatations de Cauchy

$$(\mathbf{C} - \lambda_i^2 \mathbf{I}) \cdot \underline{S}_i = 0. \quad (1.87)$$

Par dérivation temporelle on obtient :

$$(\dot{\mathbf{C}} - 2\lambda_i \dot{\lambda}_i \mathbf{I}) \cdot \underline{S}_i + (\mathbf{C} - \lambda_i^2 \mathbf{I}) \cdot \dot{\underline{S}}_i = 0, \quad (1.88)$$

puis par projection sur les vecteurs de la base principale :

$$\begin{aligned} \underline{S}_i \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \underline{S}_i &= 2\lambda_i \dot{\lambda}_i, \\ \underline{S}_j \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \underline{S}_i &= (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \underline{S}_j \cdot \dot{\underline{S}}_i = (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \Omega_{ji}^L. \end{aligned}$$

De plus, la vitesse du tenseur des dilatations est donnée par le transport de la vitesse de déformation eulérienne :

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^T \cdot 2\mathbf{D} \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{D} = \sum_{i,j} D_{ij} \underline{u}_i \otimes \underline{u}_j$$

on obtient donc :

$$2 \underline{S}_j \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \underline{S}_i = (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \Omega_{ji}^L. \quad (1.89)$$

Soit encore pour le terme de distorsion :

$$2 \underline{u}_j \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{u}_i = 2D_{ij} = \frac{(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)}{\lambda_i \lambda_j} \Omega_{ji}^L, \quad (1.90)$$

de même

$$\underline{S}_i \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \underline{S}_i = 2 \underline{u}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{u}_i \lambda_i^2 = 2\lambda_i \dot{\lambda}_i, \quad (1.91)$$

ce qui conduit au terme diagonal

$$\underline{u}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{u}_i = D_{ii} = \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i}. \quad (1.92)$$

Ainsi, le taux de vitesse de déformation s'écrit

$$\mathbf{D} = \sum_i \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} \underline{u}_i \otimes \underline{u}_i + \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} \frac{(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)}{\lambda_i \lambda_j} \Omega_{ji}^L \underline{u}_i \otimes \underline{u}_j. \quad (1.93)$$

La base principale  $\underline{S}_i$  du tenseur des dilatations est transportée par le mouvement en la base  $\underline{u}_i$  laquelle n'est pas la base principale de  $\mathbf{D}$  en général. Cependant cette base sera la base principale de  $\mathbf{D}$  si les directions principales de  $\mathbf{C}$  sont fixes sur la configuration initiale ; cette propriété est exprimée par la nullité de  $\Omega^L$ .

**Évolution de  $\mathbf{S}_f$  et  $\mathbf{U}_f$ .** On a introduit le tenseur de déformation  $\mathbf{S}_f$  de valeur propre  $f(\lambda_i)$ , par un raisonnement identique aux précédents nous avons

$$\underline{S}_i \cdot \dot{\mathbf{S}}_f \cdot \underline{S}_i = f'(\lambda_i) \dot{\lambda}_i, \quad \underline{S}_j \cdot \dot{\mathbf{S}}_f \cdot \underline{S}_i = (f(\lambda_j) - f(\lambda_i)) \Omega_{ij}^L, \quad (1.94)$$

on obtient de façon similaire l'évolution de  $\mathbf{U}_f$  :

$$\dot{\mathbf{U}}_f = \sum_i f'(\lambda_i) \dot{\lambda}_i \underline{u}_i \otimes \underline{u}_i + \sum_{i \neq j} f(\lambda_i) (\Omega_{ij}^E \underline{u}_j \otimes \underline{u}_i + \underline{u}_i \otimes \Omega_{ij}^E \underline{u}_j), \quad (1.95)$$

donc

$$\underline{u}_i \cdot \dot{\mathbf{U}}_f \cdot \underline{u}_i = f'(\lambda_i) \dot{\lambda}_i, \quad \underline{u}_i \cdot \dot{\mathbf{U}}_f \cdot \underline{u}_j = (f(\lambda_i) - f(\lambda_j)) \Omega_{ij}^E \quad (1.96)$$

**Décomposition polaire et gradient de vitesse.** À partir de la décomposition polaire ( $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{S}$ ) nous avons pour l'évolution du gradient de transformation diverses expressions équivalentes :

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{R}}, \quad (1.97)$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \sum_i \dot{\lambda}_i \underline{u}_i \otimes \underline{S}_i + \lambda_i \Omega^E \cdot \underline{u}_i \otimes \underline{S}_i + \lambda_i \underline{u}_i \otimes \Omega^L \cdot \underline{S}_i. \quad (1.98)$$

Nous en déduisons différentes expressions du gradient de vitesse

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \\ &= \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^{-1} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{R}^{-1} = \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{U}^{-1} \\ &= \sum_i \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} \underline{u}_i \otimes \underline{u}_i + \Omega^E + \sum_{i,k} \frac{\lambda_k}{\lambda_i} \Omega_{ik}^L \underline{u}_k \otimes \underline{u}_i \\ &= \sum_i \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} \underline{u}_i \otimes \underline{u}_i + \Omega^E \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U} \cdot \Omega^E + \sum_{i,k} \frac{\lambda_k}{\lambda_i} \Omega_{ik}^R \underline{u}_k \otimes \underline{u}_i. \end{aligned}$$

Les composantes de  $\mathbf{D}$  et de  $\Omega$  dans la base principale eulérienne  $\underline{u}_i$  sont donc :

$$D_{ii} = \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i}, \quad (1.99)$$

$$D_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_k^2 - \lambda_i^2}{\lambda_i \lambda_k} \Omega_{ik}^L, \quad (1.100)$$

$$\Omega_{ij} = \Omega_{ij}^E - \frac{1}{2} \frac{\lambda_j^2 + \lambda_i^2}{\lambda_i \lambda_j} \Omega_{ij}^L. \quad (1.101)$$

Par ailleurs la relation sur les rotations  $\Omega^R = \Omega^E - \mathbf{R} \cdot \Omega^L \cdot \mathbf{R}^{-1}$  exprimée dans la base  $\underline{u}_i$  s'écrit

$$\Omega_{ij}^R = \Omega_{ij}^E - \Omega_{ij}^L. \quad (1.102)$$

On remarque que la rotation de l'élément de matière  $\Omega$  n'est pas la rotation instantanée de la décomposition polaire  $\Omega^R = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^{-1}$  ; il en est ainsi si et seulement si le tenseur  $\dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}^{-1}$  est symétrique, dans ce cas les tenseurs  $\dot{\mathbf{S}}$  et  $\mathbf{S}$  commutent. S'ils commutent, ils possèdent la même base principale, cette propriété implique que la base principale  $\underline{S}_i(t)$  de  $\mathbf{S}$  est immuable sur la configuration initiale. Dans ce cas particulier, les directions principales des dilatations transportées dans le mouvement sont les directions principales de  $\mathbf{D}$ .

**Élément de volume - Élément de surface.** Soit un élément de volume  $d\Omega$ , cylindre de base  $\underline{N} dS = N_\beta \underline{E}^\beta dS$  et de génératrice  $d\underline{X} = dX^\alpha \underline{E}_\alpha$  :

$$d\Omega = d\underline{X} \cdot \underline{N} dS. \quad (1.103)$$

Après transformation le vecteur matériel  $d\underline{X}$  est devenu  $d\underline{x}$  et la section droite  $\underline{N} dS$  a tourné. Le vecteur aire élémentaire devient  $\underline{n} ds$  de telle sorte que le volume du cylindre élémentaire vérifie la conservation de la masse

$$\rho_o d\Omega = \rho_o d\underline{X} \cdot \underline{N} dS = \rho d\omega = \rho d\underline{x} \cdot \underline{n} ds. \quad (1.104)$$

Prenons en compte la conservation de la masse ( $\det \mathbf{F} = \frac{\rho_o}{\rho}$ ) et le transport convectif du vecteur élémentaire ( $d\underline{x} = \mathbf{F} \cdot d\underline{X}$ ), on déduit de (1.104) le transport du vecteur surface

$$\underline{n} \cdot \mathbf{F} ds = \det \mathbf{F} \underline{N} dS. \quad (1.105)$$

Toute aire élémentaire est définie par deux vecteurs matériels de direction  $\underline{U}$  et  $\underline{V}$  unitaire et de dimension  $dU dV$ . Le vecteur aire élémentaire dans la configuration de référence est

$$\underline{N} dS = \underline{U} \wedge \underline{V} dU dV, \quad (1.106)$$

les vecteurs matériels  $\underline{U}, \underline{V}$  sont transportés convectivement par le mouvement en  $\underline{u}, \underline{v}$ . Le vecteur normal à l'aire transportée est  $\underline{n}$

$$\underline{n} ds = (\mathbf{F} \cdot \underline{U}) \wedge (\mathbf{F} \cdot \underline{V}) dU dV. \quad (1.107)$$

*Le vecteur aire élémentaire ne subit pas le transport convectif des vecteurs matériels, mais celui des formes linéaires, en effet*

$$\rho_o \underline{N} dS \cdot d\underline{X}, \quad (1.108)$$

est un scalaire, invariant dans le transport (conservation de la masse), la forme linéaire  $\underline{N} dS$  associée à tout élément matériel  $d\underline{X}$  le scalaire volume élémentaire de base  $\rho_o \underline{N} dS$  et de direction  $d\underline{X}$ .

**Relation intégrale et divergence.** Considérons un volume fermé  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ , notons  $\omega$  le volume transformé,  $\partial\omega$  la frontière transportée et  $J = \det \mathbf{F}$  la variation de volume, alors :

$$0 = \int_{\partial\Omega} \underline{N} \, dS = \int_{\partial\omega} J^{-1} \underline{n} \cdot \mathbf{F} \, ds, \quad (1.109)$$

on en déduit :

$$\operatorname{div}(J^{-1} \mathbf{F}^T) = 0, \quad (1.110)$$

de même

$$0 = \int_{\partial\omega} \underline{n} \, ds = \int_{\partial\Omega} J \underline{N} \cdot \mathbf{F}^{-1} \, dS, \quad (1.111)$$

soit encore à l'échelle locale

$$\operatorname{Div}(J \mathbf{F}^{-T}) = 0. \quad (1.112)$$

Ces relations sont utiles, elles précisent la variation de densité accompagnant la transformation.