INTRODUCTION

Ce cours est une introduction à la théorie des groupes et de leurs représentations, enseigné à des élèves de troisième année de l'École Polytechnique (Master 1), en neuf séances de quatre heures de cours/travaux dirigés. On commence par les groupes finis, cas le plus simple bien sûr, mais où l'on peut déjà faire apparaître les principaux concepts et problèmes de la théorie des représentations. Les premiers résultats sont très faciles à obtenir : la démonstration du lemme de Schur et du théorème de Maschke ne prennent que quelques lignes et ne nécessitent que des notions de base d'algèbre linéaire ou euclidienne. De là, la théorie se déroule sans grande difficulté. Nous avons essayé d'articuler notre exposé autour de la notion de transformation de Fourier, et ce pour plusieurs raisons. La première, pédagogique, est de frapper l'esprit des étudiants avec une terminologie surprenante dans le contexte de la théorie des groupes. Pour eux, la théorie de Fourier est une partie de l'analyse (séries de Fourier, transformation de Fourier L^2 sur $\mathbb{R}$). On insiste ici sur le fait que la notion importante est celle de groupe (du cercle unité du plan complexe, ou bien de $\mathbb{R}$), qui permet de définir la transformation de Fourier et convolution de fonctions dans un cadre général. Dans le cas des groupes finis, les difficultés analytiques sont absentes, mais elles réapparaîtront lorsqu'on traitera des groupes compacts. La deuxième raison est de présenter les résultats de manière concise et conceptuelle : la transformation de Fourier réalise un isomorphisme isométrique. (Tout le travail consiste à définir les espaces entre lesquels cette transformation de Fourier est définie.) La troisième raison enfin est que cette formulation se prête bien à la généralisation aux groupes compacts. Dès lors qu'on dispose de la mesure de Haar sur un tel groupe, on peut définir l'espace de Hilbert $L^2(G)$, la convolution des fonctions, et la transformation de Fourier. Un peu d'analyse fonctionnelle (théorie spectrale des opérateurs compacts hermitiens, théorème d'Ascoli) est nécessaire pour établir le lemme de séparation, qui affirme qu'un groupe compact possède suffisamment de représentations irréductibles de dimension finie pour séparer les points du groupe. Le théorème de Peter-Weyl, c'est-à-dire le fait que les coefficients matriciels de représentations de dimension finie sont denses dans $L^2(G)$ en découle en utilisant le théorème de Stone-Weierstrass.

Un chapitre est consacré à l'induction de représentations et à la réciprocité de Frobenius. En termes modernes, l'induction est un foncteur, adjoint à droite de celui de restriction. Il n'est pas question ici de développer la théorie des catégories pour donner un sens à cet énoncé, mais il nous semble que ce cours est le lieu propice à l'introduction de certains concepts de cette théorie. Par exemple, nous montrons que l'isomorphisme de réciprocité de Frobenius est « naturel ». Dans le même esprit, les sommes directes, produits directs et produits tensoriels de représentations sont introduits par le problème universel dont ils sont solutions.

La deuxième partie du cours s'attache à étudier la classe des groupes linéaires, c'est-à-dire les sous-groupes des $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$. L'un des points de vue un peu originaux de ce cours est de ne pas se restreindre a priori aux sous-groupes fermés. En effet, cette hypothèse est inutile pour l'énoncé et la démonstration des principaux résultats. Outre les groupes $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ eux-mêmes, les principaux exemples de groupes linéaires sont les groupes dits « classiques » : groupes spéciaux linéaires $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$, groupes orthogonaux $\mathbf{O}(p, q)$, groupes unitaires $\mathbf{U}(p, q)$, groupes symplectiques, etc. Ces groupes possèdent une structure de variété différentiable (ce sont des sous-variétés dans des espaces vectoriels de matrices), compatible avec leur structure de groupe, ce qui en fait des « groupes de Lie ». La classe des groupes de Lie est plus vaste que celle des groupes linéaires. L'intérêt de se restreindre à des groupes de matrices vient d'une part que l'on peut se passer de la notion de variété différentiable, du moins au début (l'apprentissage de cette notion se fait en parallèle, dans le cours de

Topologie Différentielle), d'autre part l'application exponentielle est immédiatement disponible, définie par une série normalement convergente. A tout groupe linéaire G est attaché l'espace des vecteurs tangents à G en l'identité, noté $\mathfrak{g}$. On montre tout d'abord que $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel muni d'une structure d'algèbre de Lie, puis, et c'est le premier résultat important de la théorie, que l'application exponentielle envoie $\mathfrak{g}$ dans G. Nous étudions ensuite la topologie de ces groupes linéaires. Ils sont d'une part munis de la topologie induite de celle du groupe $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ où ils vivent, et d'autre part, on peut les munir d'une structure de variété différentiable, où les cartes locales en un point sont données via l'application exponentielle. Le second résultat important de la théorie est que lorsque G est fermé dans $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, ces deux topologies coïncident. C'est le cas pour tous les groupes classiques définis ci-dessus. Le fait que pour des sous-groupes non fermés de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ des phénomènes pathologiques puissent se produire est le prix à payer pour avoir une correspondance bijective, appelée correspondance de Lie, entre sous-groupes connexes de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ et sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Nous nous intéressons ensuite aux morphismes entre groupes linéaires. Lorsque le groupe de départ est connexe, un tel morphisme est déterminé par sa différentielle en l'identité, par la formule fondamentale $f(\exp X) = \exp(df_{\mathrm{Id}}(X))$. Un exemple bien connu de cette formule est $\det(\exp X) = \exp(\mathrm{Tr}\,(X))$. Lorsque les groupes de départ et d'arrivée G et H du morphisme f sont connexes, et que df_{Id} est un isomorphisme entre les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$, on dit que G est un revêtement de H (il s'agit bien d'un revêtement au sens topologique du terme). Le noyau de f est alors discret. Se pose alors naturellement le problème du relèvement des morphismes entre algèbres de Lie. Si G et H sont deux groupes linéaires connexes d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$, et si ϕ est un morphisme d'algèbres de lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$, existe-t-il un morphisme de groupes linéaires f de G dans H dont ϕ est la différentielle en l'identité ? La réponse est négative en général, car il y a une obstruction topologique, du fait que le groupe G n'est pas simplement connexe. Mais il existe toujours un revêtement $\widetilde{G}$ de G relevant ϕ.

Nous appliquons ensuite ces résultats à l'étude des représentations de dimension finie des groupes compacts $\mathbf{SO}(3)$ et $\mathbf{SU}(2)$ en nous ramenant aux représentations de leurs algèbres de Lie. Un peu d'algèbre linéaire nous permet d'obtenir une classification des représentations irréductibles de ces groupes. Une illustration est donnée en étudiant la décomposition d'une fonction sur la sphère de dimension 2 en « harmoniques sphériques ».

Le livre contient de nombreux exercices, ainsi que les sujets d'examens des années 2006 à 2009 et leur corrigés.

Remerciements.

Qu'il me soit donné ici l'occasion de remercier la centaine d'étudiants ayant assisté à ce cours entre 2006 et 2009. Ils ont décelé de nombreuses erreurs dans les versions successives de ce cours, et de façon générale, leurs remarques ont permis d'en améliorer la rédaction.

CHAPITRE II

REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS

Le lemme de Schur, bien que très simple à démontrer, est la clef ouvrant les portes de la théorie des représentations des groupes finis. On en déduit les relations d'orthogonalité des coefficients matriciels. Une manière concentrée et conceptuelle d'exprimer celles-ci s'énonce par le fait que la transformation de Fourier est un isomorphisme isométrique.

I. Schur

II.1. Représentations

Dans ce chapitre, les espaces vectoriels sont définis sur le corps des nombres complexes.

Rappelons que si V est un espace vectoriel, $\mathbf{GL}(V)$ désigne le groupe des isomorphismes linéaires de V dans lui-même. Si V est de plus un espace de Hilbert pour le produit hermitien $(.\,|.)_V$, $\mathbf{U}(V)$ désigne le sous-groupe de $\mathbf{GL}(V)$ des applications linéaires u préservant le produit hermitien, c'est-à-dire

$$(u(v)|u(w))_V = (v|w)_V, \quad (v, w \in V).$$

II.1.1. Représentations unitaires. —

Définition II.1.1. — Une représentation (ρ, V) du groupe G est la donnée d'un espace vectoriel V, appelé espace de la représentation, et d'un morphisme de groupes

$$\rho : G \to \mathbf{GL}(V).$$

Si V est un espace de Hilbert pour le produit hermitien $(.\,|.)_V$, la représentation (ρ, V) est dite **unitaire** si ρ est à valeurs dans $\mathbf{U}(V)$, c'est-à dire si pour tout $g \in G$, pour tous $v, w \in V$,

$$(\rho(g) \cdot v | \rho(g) \cdot w)_V = (v|w)_V.$$

La dimension de la représentation (ρ, V) est la dimension de V. On la note d_ρ.

La représentation triviale de G est celle où $V = \mathbb{C}$ et tout $g \in G$ agit comme l'identité de $\mathbb{C}$. On la note 1_G.

L'espace vectoriel $\{0\}$ est aussi un espace de représentation pour tout groupe G (de manière unique, puisque $\mathbf{GL}(\{0\})$ est le groupe à un élément). Nous l'appellerons **représentation nulle** de G.

Théorème II.1.2. — *Soit (ρ, V) une représentation de dimension finie de G d'un groupe fini. On peut munir V d'un produit hermitien $(.\,|.)_V$ qui rend la représentation (ρ, V) unitaire.*

Démonstration. Munissons V d'un produit hermitien $(.\,|.)_0$ quelconque. Définissons un nouveau produit hermitien $(.\,|.)_1$ par

$$(v, w)_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g) \cdot v | \rho(g) \cdot w)_0, \quad (v, w \in V).$$

Ce nouveau produit vérifie les propriétés de sesquilinéarité requises et est positif, comme on peut le voir immédiatement. Il est défini car si

$$(v|v)_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g) \cdot v | \rho(g) \cdot v)_0 = 0$$

alors tous les termes de la somme étant positifs, ils sont nuls. Pour $g = e$, ceci donne $(v|v)_0 = 0$, et donc $v = 0$.

Vérifions que ce nouveau produit hermitien est invariant par ρ. Pour tout $h \in H$:

$$\begin{aligned}(\rho(h)\cdot v|\rho(h)\cdot w)_1 &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho(g)\cdot\rho(h)\cdot v|\rho(g)\cdot\rho(h)\cdot w)_0\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho(gh)\cdot v|\rho(gh)\cdot w)_0\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho(g)\cdot v|\rho(g)\cdot w)_0\\ &= (v|w)_1\end{aligned}$$

Le point crucial du calcul est donc juste un changement de variable dans la somme.

Remarquons que l'hypothèse de la dimension finie ne sert qu'à s'assurer que V est bien un espace de Hilbert. Si l'on suppose au départ que $(V, (.\,|.)_0)$ est un espace de Hilbert de dimension infinie, le même procédé de moyenne donne un nouveau produit hermitien $(.\,|.)_1$ invariant par G. Il est facile de voir que la topologie définie par ce nouveau produit hermitien est la même que l'ancienne (les normes induites sont équivalentes), et donc que V est encore un espace de Hilbert pour $(.\,|.)_1$. □

Remarque II.1.3. — Lorsque nous étudierons des groupes plus généraux que les groupes finis, il nous faudra remplacer les arguments basés sur ce procédé de moyenne par quelque chose de plus général, à savoir l'existence de mesure de Haar sur les groupes (topologiques localement compacts). Nous ne définissons pas la notion de mesure de Haar pour l'instant, mais nous remarquons simplement que l'on peut munir l'ensemble fini G de sa **mesure de comptage normalisée** μ_G. Plus explicitement, pour toute fonction f sur G

$$\int_G f(g)\, d\mu_G(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g).$$

La propriété fondamentale de cette mesure est que quels que soient x, y dans G,

$$\int_G (l(x)r(y)\cdot f)(g)\, d\mu_G(g) = \int_G f(x^{-1}gy)\, d\mu_G(g) = \int_G f(g)\, d\mu_G(g),$$

c'est-à-dire que μ_G est invariante par translation à gauche et à droite.

Dans la suite de ce chapitre, les groupes finis sont toujours munis de leurs mesures de comptage normalisée.

II.1.2. Sous-représentations, représentations irréductibles. — Soit (ρ, V) une représentation du groupe G. Un sous-espace W de V est dit invariant par ρ si pour tout $g \in G$, $\rho(g)\cdot W \subset W$. On peut alors parler de la restriction de ρ à W, que l'on note $(\rho_{|W}, W)$. Une telle représentation restreinte à un sous-espace invariant s'appelle une **sous-représentation** de G.

Définition II.1.4. — Une représentation (ρ, V) du groupe G est dite **irréductible** si elle est non nulle n'admet aucun sous-espace autre que $\{0\}$ et V invariant par ρ.

Proposition II.1.5. — *Une représentation irréductible d'un groupe fini est de dimension finie.*

Démonstration. Soit (ρ, V) une représentation irréductible du groupe fini G. Soit $v \in V$, non nul, et soit W le sous-espace engendré par les vecteurs de la forme $\rho(g) \cdot v$, $g \in G$. Ce sous-espace est donc de dimension finie, et il est immédiat de vérifier qu'il est invariant par ρ. On a donc $V = W$ et V est de dimension finie. □

Soit (ρ, V) une représentation du groupe G et supposons que l'espace V soit somme directe de sous-espaces W_i (non nuls), $i = 1, \ldots, r$:

$$V = \bigoplus_{i=1,\ldots,r} W_i$$

et que ces espaces W_i soient invariants par ρ. On dit alors que la représentation (ρ, V) se décompose en somme directe des représentations $(\rho_{|W_i}, W_i)$ et l'on écrit

$$(\rho, V) = \bigoplus_{i=1,\ldots,r} (\rho_{|W_i}, W_i).$$

L'étude de la représentation (ρ, V) se ramène alors à celle des $(\rho_{|W_i}, W_i)$. Il parait raisonnable d'espérer pouvoir décomposer toute représentation en somme directe de représentations, jusqu'à ce que toutes celles-ci soient irréductibles. Ceci n'est pourtant pas totalement évident, le problème étant le suivant : si (ρ, V) est une représentation qui n'est pas irréductible, alors il existe un sous-espace W invariant par ρ. Pour pouvoir décomposer (ρ, V), il faudrait pouvoir exhiber un supplémentaire de W dans V qui soit lui aussi invariant par ρ. Le théorème ci-dessous affirme que pour les représentations d'un groupe fini, ceci est toujours possible. Pour des représentations plus générales, ce n'est pas le cas. Il est donc utile d'introduire la terminologie **représentation indécomposable** pour une représentation qui ne peut pas s'écrire comme somme directe non triviale. Une représentation irréductible est toujours indécomposable, l'inverse n'étant pas vrai en général (mais l'est pour les représentations des groupes finis).

Théorème II.1.6. — *Soient G un groupe fini et (ρ, V) une représentation de dimension finie de G. Soit W un sous-espace de V invariant par ρ. Alors W admet un supplémentaire invariant W', de sorte que l'on peut décomposer (ρ, V) en somme directe de $(\rho_{|W}, W)$ et $(\rho_{|W'}, W')$.*

<u>Démonstration</u>. D'après le théorème II.1.2, on peut munir V d'un produit hermitien invariant $(.\,|.)_V$. Il est alors immédiat de voir que l'orthogonal $W^\perp$ de W dans V pour ce produit hermitien est invariant par ρ. Ceci fournit une décomposition

$$V = W \oplus W^\perp$$

en somme directe de sous-espaces invariants. □

Corollaire II.1.7. — *Toute représentation de dimension finie (ρ, V) d'un groupe fini G se décompose en somme directe de représentations irréductibles.*

<u>Démonstration</u>. Ceci est facile à établir par récurrence sur la dimension de la représentation. Remarquons que le fait que le groupe soit fini permet de montrer l'existence d'un supplémentaire stable, et le fait que la représentation soit de dimension finie permet la récurrence. □

Une représentation est dite **complètement réductible**, ou **semi-simple** si elle peut s'écrire comme somme directe de représentations irréductibles. Le corollaire affirme que toute représentation de dimension finie d'un groupe fini est complètement réductible. Ceci permet de réduire dans une certaine mesure l'étude des représentations de dimension finie du groupe G à celle des représentations irréductibles.

II.1.3. Opérateurs d'entrelacement. Lemme de Schur. —

Définition II.1.8. — Soient (ρ, V) et (τ, W) deux représentations du groupe G. Un opérateur d'entrelacement $T : V \to W$ est une application linéaire de V dans W vérifiant

$$T(\rho(g) \cdot v) = \tau(g) \cdot T(v), \quad (g \in G), (v \in V)$$

Autrement dit, un opérateur d'entrelacement est un G-morphisme linéaire (*cf.* Définition I.1.6). On dit aussi que T est G-**équivariant**.

On note $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ ou parfois $\mathrm{Hom}_G(\rho, \tau)$ l'ensemble des opérateurs d'entrelacement entre (ρ, V) et (τ, W). Il est clair que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications linéaires de V vers W.

Il devient maintenant possible de définir la notion de **représentations équivalentes**, ou **isomorphes**.

Définition II.1.9. — Soient (ρ, V) et (τ, W) deux représentations du groupe G. Elles sont équivalentes (ou isomorphes) s'il existe un opérateur d'entrelacement inversible $T : V \to W$.

Si T est un tel opérateur d'entrelacement inversible, T^{-1} est bien sûr aussi un opérateur d'entrelacement et

$$\tau(g) = T \circ \rho(g) \circ T^{-1}, \quad (g \in G)$$

L'équivalence dans le sens défini ci-dessus est une relation d'équivalence sur l'ensemble des représentations du groupe G. Dans la pratique, comme souvent en mathématique, on a tendance à confondre équivalence et égalité, c'est-à-dire à confondre une représentation et sa classe d'équivalence, ou dans le sens contraire, une classe d'équivalence et l'un de ses représentants. Il s'agit là d'abus de langage la plupart du temps inoffensifs.

Définition II.1.10. — Soit G un groupe fini. Le dual de G, noté $\widehat{G}$, est l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de G.

Lemme II.1.11. — *(i) Soient (ρ, V) et (τ, W) deux représentations d'un groupe G et $T : V \to W$ un opérateur d'entrelacement. Alors* $\ker T$ *est un sous-espace de V invariant par ρ, et* $\operatorname{Im} T$ *est un sous-espace de W invariant par τ.*

(ii) Soit (ρ, V) une représentation du groupe G, et T un opérateur d'entrelacement de (ρ, V) avec elle-même. Alors tout sous-espace propre de T est invariant par ρ.

Démonstration. (i) Si $v \in \ker T$, alors, pour tout $g \in G$,

$$T(\rho(g) \cdot v) = \tau(g) \cdot T(v) = 0$$

donc $\rho(g) \cdot v \in \ker T$. Si $w \in \operatorname{Im} T$, il existe $v \in V$ tel que $T(v) = w$, et pour tout $g \in G$,

$$\tau(g) \cdot w = \tau(g) \cdot T(v) = T(\rho(g) \cdot v)$$

donc $\tau(g) \cdot w \in \operatorname{Im} T$. □

(ii) Soit λ une valeur propre de T, et V_λ le sous-espace propre correspondant. Alors pour tout $g \in G$, pour tout $v \in V_\lambda$,

$$T(\rho(g) \cdot v) = \rho(g) \cdot T(v) = \lambda \rho(g) \cdot v$$

et donc $\rho(g) \cdot v \in V_\lambda$. □

***Théorème II.1.12* (Lemme de Schur)**. — *Soit T un opérateur d'entrelacement entre deux représentations irréductibles (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) d'un groupe G. Alors*

- si (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) ne sont pas équivalentes, $T = 0$,

- si (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) sont équivalentes et de dimension finie, $\operatorname{Hom}_G(V_1, V_2)$ *est de dimension* 1*. De manière équivalente,* $\operatorname{Hom}_G(V_1, V_1)$ *est l'ensemble des multiples scalaires de l'identité de V_1.*

Démonstration. Ceci découle facilement du lemme précédent. En effet, si (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) ne sont pas équivalentes, T n'est pas inversible. S'il n'est pas injectif, son noyau est non trivial. Mais (ρ_1, V_1) étant irréductible, ceci donne $\ker T = V_1$, et donc $T = 0$. De même, s'il n'est pas surjectif, son image $\operatorname{Im} T$ est un sous-espace invariant de V_2, et donc V_2 étant irréductible, $\operatorname{Im} T = \{0\}$, donc $T = 0$.

Pour le second point, soit $T \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_1)$, considérons une valeur propre λ de T, et soit V_λ le sous-espace de V_1 correspondant (c'est ici qu'intervient l'hypothèse de dimension finie, il faut pouvoir assurer l'existence d'un sous-espace propre non trivial). Il est non nul par hypothèse, et donc par irréductibilité de (ρ_1, V_1), c'est V_1 tout entier. Ceci montre que $T = \lambda \mathrm{Id}_{V_1}$. L'équivalence entre les deux formulations du second point vient du fait que si $S : V_1 \to V_2$ est un opérateur d'entrelacement inversible réalisant l'équivalence entre (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2), il est clair que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_G(V_1, V_1) &\to \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) \\ T &\mapsto S \circ T \end{aligned}$$

est un isomorphisme linéaire d'inverse donné par $T \mapsto S^{-1} \circ T$. □

Remarque II.1.13. — Soit (ρ, V) une représentation irréductible d'un groupe G. La démonstration ci-dessus montre que même si V n'est pas de dimension finie, $\mathrm{End}_G(V) = \mathrm{Hom}_G(V, V)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre dont tous les éléments non nuls sont inversibles. On dit que $\mathrm{End}_G(V)$ est une **algèbre à division** (sur $\mathbb{C}$). On peut montrer que la seule algèbre à division de dimension finie sur $\mathbb{C}$ (à isomorphisme près) est $\mathbb{C}$, et l'on retrouve alors que $\dim(\mathrm{End}_G(V)) = 1$ si V est de dimension finie. En revanche, il existe des algèbres à division de dimension infinie sur $\mathbb{C}$ (par exemple, le corps des fractions rationnelles à une variable à coefficients complexes $\mathbb{C}(X)$).

II.2. Opérations sur les représentations : sommes directes et produits, produits tensoriels, représentation contragrédiente

Dans ce qui suit, on ne fait pas d'hypothèses sur G, qui est un groupe quelconque. Les représentations de ce groupe ne sont pas non plus supposées de dimension finie.

II.2.1. Sommes directes et produits. — Nous avons vu dans la section II.1.2 comment une représentation (ρ, V) d'un groupe G pouvait parfois se décomposer en somme directe de sous-représentations (point de vue interne). Voyons maintenant comment former la somme directe de deux représentations de G n'ayant a priori rien à voir l'une avec l'autre (point de vue externe). Soient donc (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux représentations de G. La somme directe de V_1 et V_2 est un espace vectoriel V, muni de deux G-morphismes

$$i_1 : V_1 \to V, \quad i_2 : V_2 \to V,$$

vérifiant la propriété universelle suivante : pour toute représentation (τ, W) de G et toute paire de G-morphismes $f_1 : V_1 \to W$, $f_2 : V_2 \to W$, il existe un unique G-morphisme $f : V \to W$ tel que $f_1 = f \circ i_1$ et $f_2 = f \circ i_2$. On note $V = V_1 \oplus V_2$.

(II.2.1)
$$\begin{tikzcd} & V = V_1 \oplus V_2 \arrow[dd, "f"] & \\ V_1 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & & V_2 \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Cette définition, un peu abstraite, appelle plusieurs remarques :

— Il y a unicité de la somme directe, *à unique isomorphisme près*. En effet, soit (V, i_1, i_2) et (V', i'_1, i'_2) deux sommes directes de V_1 et V_2. La propriété universelle de V appliquée à $W = V'$ et $f_1 = i'_1$, $f_2 = i'_2$ donne un unique G-morphisme $f : V \to V'$ tel que $i'_1 = f \circ i_1$ et $i'_2 = f \circ i_2$. En renversant les rôles de V et V', on obtient de même un unique G-morphisme $f' : V' \to V$ tel que $i_1 = f' \circ i'_1$ et $i_2 = f' \circ i'_2$.

Considérons maintenant $f' \circ f : V \to V$. Il vérifie $f' \circ f \circ i_1 = f' \circ i'_1 = i_1$ et $f' \circ f \circ i_2 = f' \circ i'_2 = i_2$. Or un autre G-morphisme de V dans V satisfait aux mêmes propriétés, il s'agit de l'identité de V. La condition d'unicité de la propriété universelle de V appliquée à $W = V$ et $f_1 = i_1$, $f_2 = i_2$ nous donne alors $f' \circ f = \mathrm{Id}_V$. En renversant les rôles de V et V', on obtient de même $f \circ f' = \mathrm{Id}_{V'}$. Ceci montre que V et V' sont isomorphes, et que l'isomorphisme entre eux est unique, et justifie l'abus de langage courant consistant à parler de « la »somme directe de V_1 et V_2.

— La somme directe existe : on prend le produit ensembliste usuel $V_1 \times V_2$ de V_1 et V_2, muni de la structure d'espace vectoriel produit et des injections

$$i_1 : V_1 \to V_1 \times V_2, \quad v_1 \mapsto (v_1, 0)$$
$$i_2 : V_2 \to V_1 \times V_2, \quad v_1 \mapsto (0, v_2).$$

L'action ρ de G sur $V_1 \times V_2$ étant donné par

$$\rho(g) \cdot (v_1, v_2) = (\rho_1(g) \cdot v_1, \rho_2(g) \cdot v_2).$$

On vérifie aisément que cette construction donne bien un objet vérifiant la propriété universelle voulue.

Le produit ensembliste usuel $V = V_1 \times V_2$ muni de la structure vectorielle produit, de la structure de représentation de G donnée ci-dessus et des projections canoniques : $p_1 : V_1 \times V_2 \to V_1$, $p_2 : V_1 \times V_2 \to V_2$ vérifie aussi une propriété universelle, à savoir que pour toute représentation (τ, W) de G et toute paire de G-morphismes $f_1 : W \to V_1$, $f_2 : W \to V_2$, il existe un unique G-morphisme $f : W \to V$ tel que $f_1 = p_1 \circ f$ et $f_2 = p_2 \circ f$.

(II.2.2)

$$\begin{tikzcd}
 & V = V_1 \times V_2 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
V_1 & & V_2 \\
 & W \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[uu, "f"] &
\end{tikzcd}$$

Une représentation (π, V) de G vérifiant cette propriété universelle est appelé **produit direct** des représentations (π_1, V_1) et (π_2, V_2). De même que pour la somme directe, deux espaces V et V' vérifiant cette propriété universelle sont isomorphes, l'isomorphisme étant unique. Ceci justifie l'abus de langage consistant à parler « du »produit de V_1 et V_2.

Résumons la discussion ci-dessus : nous disposons de deux notions bien distinctes, celle de somme directe et celle de produit direct de deux représentations (π_1, V_1) et(π_2, V_2) de G. Ce sont des représentations de G, vérifiant chacune une propriété universelle différente (bien que proche : la seconde est obtenue de la première en inversant le sens des flèches dans le diagramme II.2.1). Le fait que l'on puisse construire la somme directe ou le produit de la même façon (à partir du produit ensembliste usuel, comme expliqué ci-dessus) ne doit pas masquer cette différence, et d'ailleurs, lorsqu'on généralise à une famille infinie de représentations, les représentations obtenues comme somme directe et produit direct ne sont plus isomorphes.

Généralisons tout ceci à une famille quelconque de représentations (ρ_i, V_i) de G, i variant dans un ensemble d'indices I. La somme directe des $(\rho_i, V_i)_{i\in I}$ est une représentation notée $(\rho, V) = \bigoplus_{i\in I}(\rho_i, V_i)$ munie de G-morphismes $i_i : V_i \to V$ vérifiant la propriété universelle suivante :

pour toute représentation (τ, W) de G et toute famille de G-morphismes $f_i : V_i \to W$, $i \in I$, il existe un unique G-morphisme $f : V \to W$ tel que $f_i = f \circ i_i$ pour tout $i \in I$.

Le produit direct des $(\rho_i, V_i)_{i\in I}$ est une représentation notée $(\rho, V) = \prod_{i\in I}(\rho_i, V_i)$ munie de G-morphismes $p_i : V \to V_i$ vérifiant la propriété universelle suivante :

pour toute représentation (τ, W) de G et toute famille de G-morphismes $f_i : W \to V_i$, $i \in I$, il existe un unique G-morphisme $f : W \to V$ tel que $f_i = i_i \circ f$ pour tout $i \in I$.

Comme précédemment, somme directe et produit direct sont uniques à unique isomorphisme près, et on peut les construire ensemblistement de la manière suivante : pour le produit direct, on prend pour V le produit direct ensembliste des V_i, $i \in I$, muni de sa structure d'espace vectoriel canonique et des projections canoniques p_i. L'action de G sur un élément de V est donné par l'action de G sur chaque facteur :

$$\rho(g) \cdot (v_i)_{i\in I} = (\rho_i(g) \cdot v_i)_{i\in I}.$$

Pour la somme directe, on prend pour V le sous-espace du produit ensembliste des V_i constitués des familles $(v_i)_{i\in I}$ où seul un nombre fini de v_i sont non nuls. C'est un sous-espace vectoriel du produit ensembliste des V_i, et même une sous-représentation de G, comme on le vérifie facilement. Les morphismes i_i sont les inclusions canoniques $i_i : V_i \to V$.

Les propriétés universelles de la somme et du produit direct d'une famille de représentations peuvent se réécrire de la manière suivante.

Théorème II.2.1. — *Soit $(\rho_i, V_i)_{i\in I}$ une famille de représentations du groupe G. Pour toute représentation (τ, W) de G, on a*

$$\mathrm{Hom}_G(\oplus_{i\in I} V_i, W) \simeq \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_G(V_i, W), \tag{II.2.3}$$

$$\mathrm{Hom}_G(W, \prod_{i\in I} V_i) \simeq \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_G(W, V_i). \tag{II.2.4}$$

II.2.2. Produits tensoriels. — Dans le paragraphe précédent, nous avons muni l'ensemble des représentations d'un groupe G d'une somme :

$$((\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)) \mapsto (\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2),$$

La terminologie et la notation « additive » se justifient par le fait que $(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ est toujours isomorphe à $(\rho_2 \oplus \rho_1, V_2 \oplus V_1)$ et que

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2,$$

lorsque V_1 et V_2 sont de dimension finie. La représentation de G dans l'espace nul $\{0\}$ est un « élément neutre » pour cette somme. Mais remarquons qu'une représentation (ρ, V) non nulle n'admet pas d'inverse.

Nous voudrions maintenant construire une opération analogue à un produit :

$$((\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)) \mapsto (\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)$$

ayant de bonnes propriétés de distributivité par rapport à la somme définie précédemment, et vérifiant

$$\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim V_1 \times \dim V_2, \tag{II.2.5}$$

lorsque V_1 et V_2 sont de dimension finie.

Définition II.2.2. — Soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels. Le **produit tensoriel** $V_1 \otimes V_2$ est un espace vectoriel muni d'une application

$$\iota : \; V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2, \quad (v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2$$

vérifiant :

(i) ι est bilinéaire,

(ii) si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de V_1 et si $(f_j)_{j \in J}$ est une base de V_2,

$$(e_i \otimes f_j)_{i \in I, j \in J}$$

est une base de $V_1 \otimes V_2$.

Remarques II.2.3. — Un tel espace existe et est déterminé à isomorphisme près. La propriété (ii) entraîne la formule (II.2.5) lorsque les espaces sont de dimension finie. L'espace $V_1 \otimes V_2$ vérifie la propriété universelle suivante :

(ii') soit $\phi : \; V_1 \times V_2 \to W$ une application bilinéaire quelconque. Alors il existe une unique application linéaire

$$\widetilde{\phi} : \; V_1 \otimes V_2 \to W$$

tel que $\widetilde{\phi} \circ \iota = \phi$.

La propriété (ii') est équivalente à (ii). Comme dans le paragraphe précédent pour les sommes et produits directs la propriété universelle garantit l'unicité du produit tensoriel à unique isomorphisme près, et justifie l'abus de langage consistant à parler « du » produit tensoriel. Nous ne donnons pas de détails concernant la construction du produit tensoriel, mais celle-ci est, nous semble-t-il, claire si l'on considère la propriété (ii), et que l'on se débarrasse de ses scrupules à utiliser l'axiome du choix.

Soient (ρ_1, V_1) une représentation d'un groupe G_1, et (ρ_2, V_2) une représentation d'un groupe G_2. On peut munir l'espace $V_1 \otimes V_2$ d'une représentation notée $\rho_1 \boxtimes \rho_2$ de $G_1 \times G_2$. Une définition évidente est de poser

$$(\rho_1 \boxtimes \rho_2)(g_1, g_2) \cdot (v_1 \otimes v_2) = \rho_1(g_1) \cdot v_1 \otimes \rho_2(g_2) \cdot v_2 \tag{II.2.6}$$

$$(v_1 \in V_1),\ (v_2 \in V_2), (g_1 \in G_1), (g_2 \in G_2).$$

Comme $V_1 \otimes V_2$ est engendré par les $v_1 \otimes v_2$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, par linéarité, ces formules suffisent à définir l'opérateur $(\rho_1 \boxtimes \rho_2)(g_1, g_2)$ sur $V_1 \otimes V_2$, pour peu que l'on ait montré que si un vecteur de $V_1 \otimes V_2$ se décompose de deux manières en tenseurs élémentaires

$$\sum_i v_i \otimes w_i = \sum_j v'_j \otimes w'_j$$

alors

$$\sum_i \rho_1(g_1) \cdot v_i \otimes \rho_2(g_2) \cdot w_i = \sum_j \rho_1(g_1) \cdot v'_j \otimes \rho_1(g_2) \cdot w'_j.$$

C'est en fait une conséquence de la propriété universelle du produit tensoriel. En effet, considérons l'application bilinéaire :

$$V_1 \times V_2, \quad (v_1, v_2) \mapsto \rho_1(g_1) \cdot v_1 \otimes \rho_2(g_2) \cdot v_2.$$

D'après la propriété universelle, il existe un endomorphisme (unique) de $V_1 \otimes V_2$ (c'est le $(\rho_1 \boxtimes \rho_2)(g_1, g_2)$ que l'on cherche et c'est donc ainsi qu'on le note) vérifiant (II.2.6).

On vérifie ensuite facilement que $(\rho_1 \boxtimes \rho_2)$ est une représentation de $G_1 \times G_2$ dans $V_1 \otimes V_2$.

Lorsque $G_1 = G_2$ on obtient une représentation de G, notée $\rho_1 \otimes \rho_2$ définie par

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) \cdot (v_1 \otimes v_2) = \rho_1(g) \cdot v_1 \otimes \rho_2(g) \cdot v_2$$

$$(v_1 \in V_1),\ (v_2 \in V_2), (g \in G).$$

II.2.3. Représentation contragrédiente. — Si V est un espace vectoriel, notons V^* son dual, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires sur V. Il est bien connu que

$$\mathbf{ev} : V \to (V^*)^*, \quad \mathbf{ev}(v) : \lambda \in V^* \mapsto \lambda(v)$$

est une application linéaire, injective. Si V est de dimension finie, par égalité des dimensions, cette application est un isomorphisme.

Si (π, V) est une représentation d'un groupe G, on définit une représentation $\widetilde{\pi}$ de G dans V^*, appelée **représentation contragrédiente**, par la formule suivante :

$$(\widetilde{\pi}(g) \cdot \lambda)(v) = \lambda(\pi(g)^{-1} \cdot v), \quad (\lambda \in V^*), (v \in V), (g \in g).$$

Il est clair que $(\widetilde{\widetilde{\pi}}, (V^*)^*) = (\pi, V)$ lorsque V est de dimension finie et que $(V^*)^*$ est identifié à V par la remarque ci-dessus.

Proposition II.2.4. — *Soit (π, V) une représentation d'un groupe fini G. Alors (π, V) est irréductible si et seulement si $(\widetilde{\pi}, V^*)$ est irréductible.*

Démonstration. D'après la remarque que $(\widetilde{\widetilde{\pi}}, (V^*)^*) = (\pi, V)$ lorsque V est de dimension finie, il suffit de montrer une seule implication pour obtenir l'équivalence. Supposons (π, V) irréductible, et soit W un sous-espace invariant de V^*. Alors l'orthogonal dans V de W est aussi invariant, et donc ne peut-être que $\{0\}$ ou V. Ceci montre que $W = \{0\}$ ou V^*. □

II.2.4. Pull-back. — Soit G et H deux groupes et soit $\phi : H \to G$ un morhisme de groupes. Si (π, V) est une représentation de G, il est clair que

$$\pi \circ \phi : H \to \mathbf{GL}(V)$$

définit une représentation de H sur V. On la note $(\phi^*\pi, V)$.

II.3. Coefficients matriciels et relations de Schur

Dans toute cette section, G est un groupe fini.

II.3.1. Une application du lemme de Schur. — Le résultat qui suit est une application du lemme de Schur qui nous servira par la suite.

Proposition II.3.1. — *Soient (ρ, V) et (τ, E) deux représentations irréductibles d'un groupe fini G et soit $A : V \to E$ une application linéaire. Alors*

$$A^\circ = \int_G \tau(g) A \rho(g)^{-1} d\mu_G(g)$$

est égal à 0 *si* τ *n'est pas équivalente à* ρ *et égal à* $\dfrac{\operatorname{Tr} A}{\dim V}\,\mathrm{Id}_V$ *lorsque* $(\tau, E) = (\rho, V)$.

<u>*Démonstration*</u>. Comme on voit facilement que A° est G-équivariant, d'après le lemme de Schur, $A^\circ = 0$ si τ n'est pas équivalent à ρ et $A^\circ = \alpha\,\mathrm{Id}_V$ lorsque $(\tau, E) = (\rho, V)$. Il reste à déterminer α. On a

$$\alpha \dim V = \operatorname{Tr} A^\circ = \int_G \operatorname{Tr}\left(\rho(g) A \rho(g^{-1})\right)\, d\mu_G(g) = \operatorname{Tr} A.$$

□

II.3.2. Coefficients matriciels. — Soit $\mathcal{F}(G)$ l'espace des fonctions à valeurs complexes sur G sur le groupe fini G. Nous allons introduire certains éléments de $\mathcal{F}(G)$, appelés coefficients matriciels des représentations.

Soit (π, V) une représentation du groupe G. On appelle **coefficient matriciel** de π une fonction de G, à valeurs complexes, de la forme

$$\phi^\pi_{v,\lambda} :\ g \mapsto \lambda(\pi(g)\cdot v),$$

où $\lambda \in V^*$ et $v \in V$. La terminologie vient du temps (révolu) où les mathématiciens aimaient choisir des bases de leur espaces vectoriels, et exprimer les applications linéaires sous forme de matrices. Si l'on fait ceci pour l'espace V, et que l'on exprime $\pi(g)$ comme une matrice $\pi(g)_{ij}$, $g \mapsto \pi(g)_{ij}$ est un coefficient matriciel.

Introduisons la notation suivante. Pour toute fonction ϕ sur G, notons $\check{\phi} :\ g \mapsto \phi(g^{-1})$.

Lemme II.3.2 **(Relations d'orthogonalité de Schur)**

(*i*) *Soit* (π, V) *une représentation irréductible de* G. *Alors pour tous* $v_1, v_2 \in V$, *pour tous* $\lambda_1, \lambda_2 \in V^*$, *on a :*

$$\int_G \phi^\pi_{v_1,\lambda_1}(g)\ \check{\phi}^\pi_{v_2,\lambda_2}(g)\ d\mu_G(g) = \frac{\lambda_1(v_2)\lambda_2(v_1)}{d_\pi}.$$

où $d_\pi = \dim V$.

(ii) Soient (π_1, V_1), (π_2, V_2) deux représentations irréductibles de G non équivalentes. Alors pour tous $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $\lambda_1 \in V_1^*$, $\lambda_2 \in V_2^*$,

$$\int_G \phi^{\pi_1}_{v_1,\lambda_1}(g)\ \check{\phi}^{\pi_2}_{v_2,\lambda_2}(g)\ d\mu_G(g) = 0.$$

Démonstration. Soient $\lambda_1 \in V_1^*$, $v_2 \in V_2$. Considérons l'application linéaire $A : V_1 \to V_2$ définie par :

$$A(v) = \lambda_1(v)v_2.$$

Soient maintenant aussi $\lambda_2 \in V_2^*$ et $v_1 \in V_1$. Alors, avec les notations de la proposition II.3.1,

$$\begin{aligned}
\lambda_2(A^\circ \cdot v_1) &= \lambda_2\left(\int_G \pi_2(g)A\pi_1(g)^{-1} \cdot v_1\ d\mu_G(g)\right)\\
&= \lambda_2\left(\int_G \pi_2(g) \cdot (\lambda_1(\pi_1(g)^{-1} \cdot v_1)v_2)\ d\mu_G(g)\right)\\
&= \lambda_2\left(\int_G \lambda_1(\pi_1(g)^{-1} \cdot v_1)\ \pi_2(g) \cdot v_2\ d\mu_G(g)\right)\\
&= \int_G \lambda_1(\pi_1(g)^{-1} \cdot v_1)\ \lambda_2(\pi_2(g) \cdot v_2)\ d\mu_G(g)
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $g \mapsto g^{-1}$ dans l'intégrale (qui n'est qu'une somme...) pour retrouver le membre de gauche des égalités dans (i) et (ii). On conclut alors grâce à la proposition II.3.1 et au fait que $\operatorname{Tr} A = \lambda_1(v_2)$ lorsque $\rho_1 = \rho_2$. $\square$

Corollaire II.3.3. — *Soient (π_i, V_i), $i = 1, \ldots, r$, des représentations irréductibles de G, non équivalentes deux à deux. Pour chaque i, choisissons $v_i \in V_i$ et $\lambda_i \in V_i^*$ non nuls. Alors les coefficients matriciels $\phi^{\pi_i}_{v_i,\lambda_i}$ sont linéairement indépendants dans $\mathcal{F}(G)$.*

Démonstration. Supposons que $\sum_i c_i\phi^{\pi_i}_{v_i,\lambda_i} = 0$. Fixons j entre 1 et r, et choisissons $\lambda'_j \in V_j^*$ tel que $\lambda'_j(v_j) = 1$ et $v'_j \in V_j$ tel que $\lambda_j(v'_j) = 1$. Alors d'après le lemme, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G \left(\sum_i c_i \phi^{\pi_i}_{v_i,\lambda_i} \right) \check{\phi}^{\pi_j}_{v'_j,\lambda'_j} \, d\mu_G = c_j \int_G \phi^{\pi_j}_{v_j,\lambda_j} \check{\phi}^{\pi_j}_{v'_j,\lambda'_j} \, d\mu_G \\ &= c_j \, d^{-1}_{\pi_j}. \end{aligned}$$

Donc $c_j = 0$. □

Corollaire II.3.4. — *Le nombre de classes d'équivalence de représentations irréductibles d'un groupe fini G est fini.*

Démonstration. Les coefficients matriciels sont des éléments de l'espace $\mathcal{F}(G)$, qui est de dimension finie. L'assertion découle alors directement du corollaire précédent. □

Exercice II.3.5. — Soit $\phi = \phi^{\pi}_{v,\lambda}$ un coefficient matriciel de G. Montrer que $\check{\phi}(g) = \phi(g^{-1}) = \overline{\phi(g)}$.

II.4. L'algèbre de convolution $\mathcal{F}(G)$

Dans cette section, le groupe G est fini. L'algèbre de fonctions $\mathcal{F}(G)$ est munie d'un autre produit que celui de la multiplication usuelle des fonctions. Il s'agit du produit de convolution. Avant de le définir, faisons quelques remarques.

— Pour tout élément g de G, notons δ_g la fonction sur G valant $|G|$ en g et 0 en $h \neq g$. Il est clair que $(\delta_g)_{g \in G}$ est une base de $\mathcal{F}(G)$.

— Le groupe G agissant sur lui-même par translation à gauche, il agit sur $\mathcal{F}(G)$. Notons cette action L. Explicitement, quels que soient $g \in G$, $f \in \mathcal{F}(G)$, $x \in G$:

$$(L(g) \cdot f)(x) = f(g^{-1}x).$$

De même, le groupe G agit sur lui-même par translation à droite, et l'on en déduit une action, notée R, sur $\mathcal{F}(G)$:

$$(R(g) \cdot f)(x) = f(xg).$$

Ces deux actions commutent. Il s'ensuit que $\mathcal{F}(G)$ est muni d'une action de $G \times G$, la première copie de G agissant par L et la seconde par R. L'espace $\mathcal{F}(G)$ est donc un espace de représentation du groupe $G \times G$, la représentation étant appelée **représentation régulière** du groupe G. On la note $L \times R$. Explicitement, quels que soient $g_1, g_2 \in G$, $f \in \mathcal{F}(G)$, $x \in G$:

$$((L \times R)(g_1, g_2) \cdot f)(x) = f(g_1^{-1} x g_2).$$

— Comme G est fini, toutes les fonctions sur G sont de carré intégrable (pour la mesure de comptage normalisée μ_G), et l'on peut introduire sur $\mathcal{F}(G) = L^2(G, \mu_G)$ le produit hermitien habituel : pour toutes fonctions f_1 et f_2 sur G,

$$(f_1|f_2) = \int_G \overline{f_1(g)} f_2(g)\, d\mu_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g). \tag{II.4.1}$$

Ceci fait de $\mathcal{F}(G)$ un espace de Hilbert et l'on vérifie immédiatement que la représentation régulière de $G \times G$ dans $\mathcal{F}(G)$ est unitaire pour ce produit scalaire. Ceci provient de l'invariance (à gauche et à droite) de μ_G.

Définition II.4.1. — Soient f_1 et f_2 deux fonctions dans $\mathcal{F}(G)$. Leur **produit de convolution** $f_1 * f_2$ est défini par

$$f_1 * f_2(g) = \int_G f_1(t) f_2(t^{-1} g)\, d\mu_G(t).$$

Donnons les propriétés usuelles de la convolution :

Proposition II.4.2. — *(i) Le produit de convolution sur $\mathcal{F}(G)$ est associatif, d'élément neutre δ_e.*

(ii) Quels que soient g, h dans G, $\delta_h * \delta_g = \delta_{hg}$.

(iii) Quels que soient $g_1, g_2 \in G$, $f \in \mathcal{F}(G)$,

$$((L \times R)(g_1, g_2) \cdot f) = \delta_{g_1} * f * \delta_{g_2^{-1}}.$$

Démonstration. Tout ceci se vérifie par des calculs ne présentant pas de difficultés. □