Avant-propos

Cet ouvrage porte sur les écoulements pour lesquels les effets d'inertie sont négligeables par rapport aux effets visqueux. Le nombre de Reynolds de l'écoulement est très petit, ce qui permet de négliger l'accélération du fluide et de réduire le mouvement à un équilibre entre forces visqueuses et forces de pression. Ce type d'écoulement est nullement exotique et se rencontre fréquemment dans dans diverses situations industrielles, bio-physiques ou naturelles. C'est le cas notamment quand l'échelle de l'écoulement est petite comme :

- dans les couches de lubrification du mouvement relatif de deux corps rigides (articulations entre deux os, arbres moteurs)
- dans des pores étroits (milieux poreux, circuits micro-fluidiques, microcirculation sanguine)
- dans les films liquides minces (film lacrymal, couche de peinture ou de vernis)
- dans les écoulements autour de petites particules (boues, émulsions, production de matériaux composites)
- dans la propulsion des micro-organismes

On trouve également de tels écoulements à grande échelle, quand la viscosité du fluide est grande ou sa vitesse petite :

- écoulements géophysiques (glacier, lave, mouvements du plasma terrestre)
- écoulement gravitationnel d'une nappe de pollution

L'objectif de l'ouvrage est de présenter les phénomènes spécifiques associés aux écoulements à bas nombre de Reynolds et d'en décliner les conséquences dans diverses configurations. Chaque situation est d'abord illustrée sur un ou deux exemples complets que l'on peut résoudre analytiquement afin de mettre en évidence les phénomènes physiques essentiels. Les techniques modernes de résolution numériques de ces écoulements sont également évoquées. Comme le comportement visqueux du fluide joue un rôle essentiel, deux chapitres sont consacrés à la mécanique des 'fluides complexes', d'abord sous l'angle fondamental de la mécanique des suspensions puis sous l'angle plus phénoménologique de la mécanique des fluides non-newtoniens.

Chaque chapitre est complété par des exercices corrigés et commentés qui portent sur des situations très variées, démontrant ainsi le vaste spectre d'application des écoulements à bas nombre de Reynolds.

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants des universités et aux élèves de grandes écoles scientifiques qui étudient la mécanique des fluides, les matériaux ou la physique de la matière condensée. Des connaissances élémentaires sur les milieux continus (tenseur des contraintes et des taux de déformation) sont utiles, mais il n'est pas indispensable d'avoir suivi un cours complet de mécanique des fluides.

Remerciements

– à tous les collègues de l'École Polytechnique avec lesquels j'ai enseigné le cours de microhydrodynamique et qui ont contribué à la rédaction de problèmes sur les sujets les plus variés
– aux impitoyables lecteurs et traqueurs de coquilles, erreurs et incohérences : Johann Walter, Antoine Sellier et Jean-Paul Barthès
– au personnel du centre polymedia de l'École Polytechnique pour son aide dans la réalisation des illustrations et de la mise en page

Chapitre 1

Principes fondamentaux de la mécanique des fluides. Rappels

Sommaire

On rappelle dans ce chapitre les notions de base qui seront utiles par la suite ainsi que les principales notations utilisées. Le fluide sera considéré comme un milieu continu incompressible caractérisé par une masse volumique ρ uniforme et constante. Lorsque le fluide est mis en écoulement la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ainsi que la pression $p(\mathbf{x}, t)$ sont supposées être des fonctions continues de la position $\mathbf{x}$ et du temps t. Ceci implique que l'échelle d'étude du fluide sera très grande par rapport à l'échelle des inhomogénéités éventuelles (par exemple, les particules ou les macromolécules dans le cas de fluides complexes comme les suspensions ou les solutions de polymères). On se place en général dans un référentiel galiléen muni d'un repère cartésien. On utilise la notation indicielle avec convention de sommation sur les indices répétés (annexe A.1). Les équations seront souvent écrites sous la double forme vectorielle et indicielle.

1.1 Conservation de la masse

La conservation de la masse se traduit par une relation locale entre ρ et $\mathbf{u}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{1.1}$$

Pour un fluide incompressible $\rho = Cste$, on obtient l'équation de continuité :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.2}$$

1.2 Équation du mouvement

La loi fondamentale de la dynamique appliquée à un milieu continu conduit à l'équation du mouvement :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}', \qquad \text{soit} \qquad \rho \frac{Du_i}{Dt} = f_i + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.3}$$

où la dérivée convective D/Dt est définie par :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla, \qquad \text{soit} \qquad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.4}$$

On dénote $\boldsymbol{\sigma}'$, le tenseur des contraintes de Cauchy et $\mathbf{f}$ une force extérieure par unité de volume qui agit sur le fluide. Dans le cas de forces conservatives qui dérivent d'un potentiel V :

$$\mathbf{f} = -\nabla V, \qquad \text{soit} \qquad f_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{1.5}$$

on peut définir un tenseur des contraintes modifié :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - V\mathbf{I}, \qquad \text{soit} \quad \sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - V\delta_{ij} \tag{1.6}$$

Le cas le plus courant concerne évidemment les effets de gravité pour lesquels :

$$\mathbf{f} = \rho\, \mathbf{g} \tag{1.7}$$

où $\mathbf{g}$ est l'accélération de la pesanteur. Dans ce cas, le tenseur des contraintes modifié inclut les effets hydrostatiques :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + \rho\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}\, \mathbf{I}, \qquad \text{soit} \qquad \sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \rho\, g_k x_k\, \delta_{ij} \tag{1.8}$$

et l'équation du mouvement devient simplement :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \qquad \text{soit} \qquad \rho \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.9}$$

1.3 Le fluide newtonien

Le tenseur des taux de déformation (ou taux de cisaillement) $\mathbf{e}$ est donné par :

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\right], \qquad \text{soit} \qquad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.10}$$

Pour un fluide incompressible, l'équation de continuité (2.5) conduit à :

$$tr(\mathbf{e}) = 0, \qquad \text{soit} \qquad e_{kk} = 0 \tag{1.11}$$

La relation entre les contraintes et les taux de déformation s'appelle la loi de comportement. Un fluide newtonien est défini par une relation linéaire entre les contraintes de Cauchy et le tenseur des taux de cisaillement :

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p'\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}, \qquad \text{soit} \qquad \sigma'_{ij} = -p'\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \tag{1.12}$$

où $p'(\mathbf{x}, t)$ est la pression hydrodynamique dans le fluide. Ce champ scalaire apparaît du fait de l'incompressibilité du fluide et doit être déterminé. La viscosité du fluide μ, est supposée constante. Elle s'exprime en Pascal seconde (Pa.s), anciennement appelé 'Poiseuille' (Pl). À titre d'exemple, l'eau a une viscosité de 1.005 mPa.s à 20°C. On utilise également la viscosité cinématique ν (dimensions m^2/s) :

$$\nu = \mu/\rho \tag{1.13}$$

Quand les forces de volume sont dues à la gravité, on peut introduire la pression modifiée :

$$p = p' - \rho g_i x_i + Cste \tag{1.14}$$

qui correspond à la pression hydrodynamique (p') augmentée de la pression hydrostatique. La loi de comportement de Newton devient alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}, \qquad \text{soit} \qquad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \tag{1.15}$$

qu'on écrit aussi sous forme raccourcie :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \qquad \text{où} \qquad \boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{e} \tag{1.16}$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est un tenseur de trace nulle (tr $\boldsymbol{\tau} = 0$) qui représente la contribution visqueuse au tenseur des contraintes.

Remarque

Il existe dans la nature deux sortes de fluides : les *fluides newtoniens* (qui obéissent à la loi de Newton) et les *fluides non-newtoniens* dont la loi de comportement est plus complexe (chapitre 11). Pour schématiser, on peut considérer que les fluides purs (air, eau, huile de faible densité) soumis à des taux de cisaillement modérés ont un comportement newtonien. Les *fluides complexes* (suspensions chargées en particules déformables ou non, solutions de polymères, sang ...) ont un comportement qui ne satisfait pas nécessairement la loi de Newton sur une certaine gamme de taux de cisaillement. L'étude du comportement des fluides s'appelle la *rhéologie* et sera abordée plus en détail dans le chapitre 11.

1.4 Équations de Navier-Stokes

La combinaison de (1.2), (1.9) et (1.15) conduit à l'équation du mouvement d'un fluide newtonien incompressible :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \tag{1.17}$$

soit

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \tag{1.18}$$

Le terme $\partial \mathbf{u}/\partial t$ représente l'accélération du fluide due aux variations temporelles de vitesse (écoulement pulsé par exemple). Ce terme est nul lorsque l'écoulement est stationnaire, c'est-à-dire indépendant du temps. Le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ représente l'accélération convective due aux variations spatiales de vitesse. Le terme ∇p est le gradient de pression dû à l'incompressibilité du fluide. Enfin le terme $\mu \nabla^2 \mathbf{u}$ représente les efforts visqueux par unité de volume qui agissent au sein du fluide.

Il faut bien entendu associer à l'équation du mouvement (1.17), l'équation (1.2) qui décrit la conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

L'ensemble (1.17) et (1.2) constitue les équations de Navier-Stokes qui sont difficiles à résoudre en général, notamment du fait de la non-linéarité qui apparaît dans le terme d'accélération convective.

1.5 Dissipation d'énergie

On considère l'écoulement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ d'un fluide dans un domaine fixe $\mathcal{D}$ limité par une frontière $\partial\mathcal{D}$, sur laquelle la vitesse est prescrite (figure 1.1) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}(\mathbf{x}) \quad \text{soit} \quad u_i(\mathbf{x}) = U_i(\mathbf{x}), \quad \text{pour} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D} \tag{1.19}$$

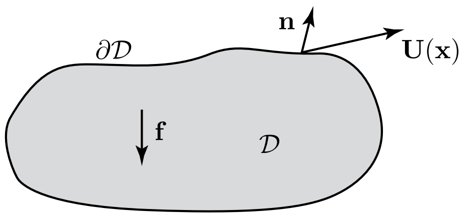

FIGURE 1.1 – Définition d'un domaine fluide $\mathcal{D}$ limité par une frontière $\partial\mathcal{D}$.

L'énergie cinétique totale K de l'écoulement est donnée par :

$$K = \frac{1}{2}\rho \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}\, dV \tag{1.20}$$

Le taux de variation de l'énergie de l'énergie cinétique est alors :

$$\frac{dK}{dt} = \rho \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt}\, dV \tag{1.21}$$

L'équation du mouvement (1.3) permet d'exprimer l'accélération en fonction des contraintes :

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\mathcal{D}} u_i \left[f_i + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} \right] dV = \int_{\mathcal{D}} u_i f_i dV + \int_{\mathcal{D}} u_i \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} dV \tag{1.22}$$

Le dernier terme du membre de droite peut s'intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} u_i \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} dV &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial (u_i \sigma'_{ij})}{\partial x_j} dV - \int_{\mathcal{D}} \sigma'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} u_i \sigma'_{ij} n_j \, dS - \int_{\mathcal{D}} \sigma'_{ij} \, e_{ij} dV \end{aligned} \tag{1.23}$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de $\mathcal{D}$. On obtient finalement :

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\mathcal{D}} u_i f_i dV + \int_{\partial\mathcal{D}} U_i T_i^{ext} dS - \int_{\mathcal{D}} \sigma'_{ij} \, e_{ij} dV \tag{1.24}$$

où $T_i^{ext} = \sigma'_{ij} n_j$ représente la traction par unité de surface exercée *sur* le fluide à la frontière $\partial\mathcal{D}$. Le bilan d'énergie global s'écrit donc :

$$\frac{dK}{dt} = \mathcal{P}_v^{ext} + \mathcal{P}_S^{ext} - \Phi \tag{1.25}$$

où $\mathcal{P}_v^{ext}$ et $\mathcal{P}_S^{ext}$ représentent respectivement les puissances des forces extérieures de volume et de surface et où le taux de dissipation de l'énergie Φ est défini par :

$$\Phi = \int_{\mathcal{D}} \sigma'_{ij} \, e_{ij} dV \tag{1.26}$$

Dans le cas d'un fluide newtonien, remplaçant σ'_{ij} par son expression donnée par la loi de Newton (1.12) et tenant compte de $e_{ij}\delta_{ij} = 0$, on obtient :

$$\Phi = 2\mu \int_{\mathcal{D}} e_{ij}\, e_{ij} dV \tag{1.27}$$

La dissipation Φ est forcément non négative. L'équation (1.25) permet de déterminer la perte d'énergie cinétique du fluide du fait des frottements visqueux pour n'importe quel fluide.

1.6 Analyse dimensionnelle

On se donne les échelles suivantes, caractéristiques de l'écoulement :

- L pour les distances,
- U pour les vitesses,
- T pour le temps caractéristique de variation de l'écoulement

L'analyse des dimensions caractéristiques des différents termes des équations de Navier-Stokes conduit aux ordres de grandeur suivants :

$$\left|\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right| \sim \frac{\rho U}{T}, \qquad |\,\rho\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}| \sim \frac{\rho U^2}{L}, \qquad |\,\mu\nabla^2\mathbf{u}| \sim \frac{\mu U}{L^2} \tag{1.28}$$

où la notation $\sim$ signifie ici 'ordre de grandeur'. Le gradient de pression (toujours présent pour un fluide incompressible) s'adapte à l'ordre de grandeur le plus important de l'équation (1.17). Afin de comparer l'importance respective des différents termes, on en fait le rapport :

$$\frac{|\,\rho\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}|}{|\,\mu\nabla^2\mathbf{u}|} \sim \frac{\rho U L}{\mu}, \qquad \frac{|\,\rho\partial\mathbf{u}/\partial t|}{|\,\mu\nabla^2\mathbf{u}|} \sim \frac{\rho L^2}{T\mu} \tag{1.29}$$

On fait ainsi apparaître le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{U L}{\nu} \tag{1.30}$$

qui mesure le rapport entre les effets inertiels et les effets visqueux. Le nombre de Stokes est défini par :

$$St = \frac{\rho L^2}{\mu T} = \frac{L^2}{\nu T} \tag{1.31}$$

et mesure le rapport entre les termes d'inertie non stationnaire et les termes visqueux. Si μ est grand et/ou L est petit, St est petit et les effets visqueux dominent, Dans le cas où l'écoulement est stationnaire, T est infini et le nombre de Stokes est nul.