Introduction

Pour la rédaction d'un premier cours de Topologie Différentielle, l'écueil est de gaspiller son énergie à mettre en place beaucoup d'objets nouveaux, avec leurs noms de baptême, autrement dit de faire un cours sans théorèmes profonds.

Tenant compte du fait que plusieurs notions géométriques ont déjà été abordées et mûries dans d'autres cours, j'ai pensé pouvoir être rapide sur la mise en place du paysage (chapitre 1). En revanche, je me suis fixé comme objectif d'obtenir des résultats substantiels concernant les formes différentielles sur les variétés compactes (orientables). Par exemple : *la cohomologie des formes différentielles est de rang fini et en degrés complémentaires les rangs sont égaux* (Poincaré-de Rham). Ou encore les inégalités de Morse : *la non-trivialité de la cohomologie force l'existence de points critiques pour les fonctions réelles (à points critiques non dégénérés).*

Une place importante est donc faite aux formes différentielles (chapitre 2) et à l'intégration des formes différentielles (formule de Stokes).

Au chapitre 3, on montre comment les champs de vecteurs dérivent les formes différentielles (dérivée de Lie), ce qui donne une ouverture vers le sujet capital des *groupes de Lie*. On en déduit quelques applications importantes des équations différentielles.

Le chapitre 4 propose un cadre très général – certes un peu abstrait – pour l'intégration des formes différentielles, analogue à la théorie des *distributions* de L. Schwartz. Il s'agit de la théorie des *courants* de de Rham. Comme toute théorie abstraite, sa validité se mesure à ses fruits et ce cours vise à en mettre quelques-uns en évidence. Le point clé réside dans la régularisation des courants, avec ses propriétés (co)-homologiques.

Les fruits apparaissent au chapitre 6, dans le cadre de la théorie de Morse, grâce à un lemme que j'introduis dans un exposé par ailleurs classique et qui fait peut-être l'originalité de l'ensemble. Ce lemme, relégué en appendice parce qu'un peu technique, m'a fourni l'argument de ce cours.

Dans ce survol, je viens de mettre entre parenthèses le chapitre 5. Il est le plus ardu, au moins dans une de ses parties. J'y propose un exposé de la transversalité d'après R. Thom, dont certaines applications seront justement exploitées au chapitre 6. C'est sans doute un peu ambitieux ; heureusement, je ne suis pas le premier à faire cette tentative dans un cours de base (voir le livre de M. Hirsch [25]). La transversalité *à la Thom*, ou transversalité sous contraintes (voir chapitre 5), est un outil puissant que je suis heureux de promouvoir dans ce cours.

Je remercie chaleureusement tous les lecteurs qui m'ont apporté leurs critiques constructives, en particulier les élèves de la promotion X90 qui ont été les premiers auditeurs de ce cours. Ils l'ont étudié avec une grande attention et grâce à eux un certain nombre de fautes ont pu être débusquées.

F.L.
Palaiseau, décembre 92 et juillet 96

Mise à jour

Ce cours a été enseigné à l'École polytechnique (Palaiseau) de 1992 à 1996, comme cours de seconde année, dit de Majeure, sous le titre « Topologie Différentielle ». À quelques révisions près, le texte est celui de la version 1996, y compris l'introduction ci-dessus. Le cours était enrichi d'exercices proposés par François Labourie. Je le remercie d'avoir accepté de joindre son fascicule d'exercices à la présente publication.

Si j'ai légèrement changé le titre, c'est pour marquer ce qui fait sans doute l'originalité du texte. Je dois mentionner ici deux faits importants pour moi. Le premier a été le cours de Laurent Schwartz en 1966-67 sur le théorème de de Rham, prouvé au moyen des *faisceaux* ; ce cours a été déterminant pour m'orienter vers la *Topologie*. Le second, quelques temps plus tard, a été la lecture du livre de de Rham avec ses pages merveilleuses sur la *régularisation des courants*. La *Théorie de Morse* se raconte bien dans ce contexte car j'ai pu établir que les fameuses *variétés stables et instables* sont des courants de de Rham. Dans ce langage, le théorème de de Rham s'énonce comme l'isomorphisme entre la *cohomologie* de de Rham des formes différentielles et la cohomologie de Morse. Bien sûr, il ne peut s'agir que d'une cohomologie à coefficients réels.

En fait, les mêmes propriétés géométriques des variétés stables et instables permettent de définir une cohomologie de Morse à coefficients entiers qui, elle, est isomorphe à la *cohomologie singulière*, laquelle ferait l'objet d'un cours de *Topologie Algébrique*. On pourra se reporter au livre de Michèle Audin et Mihai Damian [4] ou, pour une approche légèrement diff́erente, à mon mini-cours dont les notes sont sur mon site [32] ; voir [52], [5]. Dans toutes ces références, on parle d'homologie de Morse. Il ne faut pas s'inquiéter de la présence ou de l'absence du préfixe *co* : l'homologie et la cohomologie sont reliées par une dualité et sont donc proches l'une de l'autre. En revanche, il est plus important de discuter du nom de baptême de cette (co)-homologie.

Marston Morse a montré l'importance fondamentale des fonctions qui aujourd'hui portent son nom, il a découvert les *inégalités de Morse* ; mais il n'a pas de rôle direct dans la mise en place de l'homologie que l'on peut fabriquer à partir d'une fonction de Morse et d'un gradient adapté. Les acteurs principaux ont été René Thom (voir sa note [57]) et Stephen Smale (voir le cours de Milnor [41] et la présentation générale faite

par Bott dans [7]). C'est la raison pour laquelle je parle dans ce cours du *complexe de Thom-Smale* pour désigner le complexe algébrique qui donne naissance à l'homologie en question, et en dépit de ce que je raconte ci-dessous, je ne me suis pas livré à un changement de terminologie dans la présente édition.

L'histoire a vu d'autres acteurs intervenir. D'abord, Edward Witten, avec une approche dite physicienne, a expliqué dans [66] comment une fonction de Morse permettait de déformer le *laplacien* classique des géomètres et il a redécouvert le complexe de Thom-Smale par des formules asymptotiques. L'approche de Witten est très impressionnante et certains en ont oublié que le complexe existait déjà. Puis, à la fin des années 80, sont apparus les travaux d'Andreas Floer ; non seulement ils ont été fondateurs, *seminal work*, en géométrie symplectique et en géométrie des instantons, mais ils ont aussi secoué la théorie de Morse. Et, au jubilé en l'honneur de Thom (Inst. Henri Poincaré, sept. 1988), j'ai entendu Bott parler du complexe de Thom-Smale-Witten-Floer (voir [8]). Cette surcharge a fait sombrer le nom et, maintenant, tous les symplecticiens parlent du complexe de Morse et de l'homologie de Morse. Cette histoire assez savoureuse valait d'être racontée.

F.L.
Nantes, mars 2011