Introduction

Dans son acception la plus étroite, l'expression « Problème de Kepler » réfère à la démonstration des lois de Kepler régissant le mouvement d'une planète autour du soleil à partir des lois de Newton, fondatrices de la « Mécanique newtonienne », c'est-à-dire à la résolution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{|q|^3} \cdot q = 0$. Cette démonstration ayant été donnée par Newton lui-même voici plus de trois siècles, et faisant partie de la plupart des cours de première année d'université, on est en droit de penser que le problème de Kepler n'a plus de raison d'être étudié.

Or, durant ces trois siècles, il n'a cessé de susciter des travaux de nombreux mathématiciens ou physiciens théoriciens, et non des moindres. On peut avancer pour ce phénomène, à première vue surprenant, plusieurs explications.

Tout d'abord, en ce qui concerne la démonstration proprement dite des lois de Kepler, le langage et les techniques ont beaucoup évolué, depuis les raisonnements de type purement « géométrie élémentaire » de Newton, jusqu'aux équations différentielles ou aux dérivées partielles utilisées au XIXe siècle, en passant par le calcul infinitésimal de Leibniz utilisé dès le début du XVIIe siècle, c'est-à-dire très peu après son invention.

Par ailleurs le simple « problème de Kepler » s'est transformé au cours du temps en l'étude de certains systèmes physico-mathématiques requérant la mise en œuvre de structures mathématiques de plus en plus élaborées ; citons entre autres le formalisme lagrangien de la mécanique analytique, le formalisme hamiltonien, enfin la vaste théorie intitulée Géométrie différentielle, incluant variétés différentielles, champs de vecteurs, formes différentielles, variétés symplectiques ou riemanniennes, actions de groupes de Lie sur des variétés...

Enfin, et ce n'est pas la moindre contribution à la théorie, la Physique quantique s'est emparée du problème dès les années 1920, c'est-à-dire, là encore, très peu après sa création. En effet l'atome d'hydrogène – un électron attiré par un noyau avec une force coulombienne inversement proportionnelle au carré de la distance – constitue un système en tous points analogue à celui de la planète attirée par le soleil ; mais

les techniques utilisées par la physique quantique sont très différentes de celles de la géométrie différentielle ; mentionnons par exemple les opérateurs linéaires dans les espaces hilbertiens, les groupes de Lie et leurs représentations linéaires, les fonctions harmoniques,... Et il importe de souligner ici que certaines idées introduites par des physiciens dans les années 1930 ont été adaptées au vieux problème de Kepler classique plusieurs dizaines d'années plus tard, les plus importantes de ces idées étant certainement, d'une part le remplacement de l'espace euclidien de dimension 3 par la sphère de même dimension et, d'autre part, l'action, nullement évidente *a priori*, du groupe des rotations en dimension 4 ; la première idée a pris le nom de « régularisation », c'est-à-dire remplacement d'un système différentiel avec singularités (correspondant au point $q = 0$, c'est-à-dire aux collisions) par un autre, sans singularités, et la seconde, de « symétrie cachée », notion essentielle pour expliquer certains phénomènes physiques.

En résumé, le problème de Kepler qui, à première vue, pourrait sembler exagérément élémentaire et sans intérêt aujourd'hui, a en fait le grand mérite de servir à illustrer un grand nombre de théories, mathématiques et physiques, nées au cours des trois siècles qui nous séparent des fondateurs. Le présent ouvrage, outre l'intérêt historique que, du moins on le souhaite, il présentera pour le lecteur, pourra peut-être aussi l'inciter à s'initier, fût-ce de façon quelque peu informelle, à certaines de ces théories ; il doit être bien clair qu'il ne s'agit pas d'un manuel présentant une théorie mathématique avec démonstrations complètes et listes systématiques d'exercices : on donnera certaines démonstrations jugées utiles pour la compréhension du sujet ; pour d'autres, on renverra à la littérature existante ; pour d'autres encore, considérées comme faciles, elles seront laissées au lecteur et pourront lui servir à s'exercer.

Le lecteur constatera rapidement que cet ouvrage contient de très nombreuses formules explicites, se distinguant en cela de beaucoup de traités récents de mathématiques ; mais on doit bien reconnaître que les auteurs cités dans le chapitre Histoire en font un grand usage ; peut-être pourrait-on ajouter que, en mathématiques, les exemples ne sont pas toujours plus faciles que la théorie... On aimerait aussi convaincre le lecteur de l'intérêt qu'il y a à déchiffrer la littérature physique, parfois obscure pour un mathématicien, mais toujours riche en idées originales.

Quelques mots pour terminer sur le style adopté : il se veut raisonnablement rigoureux sans être exagérément aride, des mots ou des phrases de la langue courante remplaçant souvent des symboles ou des formules. C'est aussi dans cet esprit que nous avons tenu à distinguer soigneusement les mouvements physiques, solutions des équations d'évolution, des orbites qu'ils décrivent : $\dot{q}$ n'est égal à $\dfrac{p}{m}$ que lorsque l'on étudie une solution des équations d'évolution !

Présentation de l'ouvrage

Il comporte trois chapitres intitulés respectivement « Histoire », « Théorie », « Annexes » ; le lecteur aura intérêt à consulter simultanément les trois chapitres car, à l'intérieur de chacun d'eux, on fera souvent référence aux deux autres. Après ces trois chapitres, on trouvera une bibliographie détaillée et présentée par thèmes.

Chapitre I : Histoire

Pour illustrer l'évolution de la théorie durant ces 3 siècles, nous avons choisi de présenter un certain nombre de travaux qui, à nos yeux, ont été particulièrement innovants, tant en ce qui concerne le langage que les techniques, les premiers étant ceux de Kepler lui-même (1618) et le dernier datant de 2010 ; pour chacun d'eux nous rapporterons certains résultats importants et, pour bien montrer l'évolution des langages et techniques, nous citerons intégralement des extraits de ces travaux ; ils seront présentés en français ou en anglais quand il s'agira de textes latins ou allemands.

Chapitre II : Théorie

Les résultats connus actuellement étant répartis dans un très grand nombre de publications, écrits avec des conventions très diverses et, parfois, avec une rigueur qui laisse à désirer aux yeux des mathématiciens, nous avons choisi d'en faire un exposé systématique avec des notations unifiées et dans un langage que l'on espère suffisamment clair et rigoureux.

En voici les principales étapes.

- Étude de l'espace des phases du problème de Kepler, ou espace fibré cotangent à l'espace euclidien de dimension 3 privé de l'origine.
- Étude de l'espace fibré cotangent à la sphère de dimension 3.
- Passage du premier espace au second.
- Action du groupe de rotations en dimension 4.
- Étude de l'atome d'hydrogène : états propres et action du même groupe.

Chapitre III : Annexes

Ces annexes ne constituent pas un exposé en bonne et due forme des théories abordées, ayant seulement pour but d'aider le lecteur à donner un sens aux expressions qu'il rencontrera dans le chapitre II, à s'orienter dans la littérature existante, tout en évitant de consulter un trop grand nombre de manuels spécialisés ; il s'agit essentiellement de Géométrie différentielle, de Mécanique analytique et de Mécanique quantique.

Ce chapitre contient aussi des indications succinctes sur des prolongements possibles pour les thèmes exposés en détail dans cet ouvrage.

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mes collègues Paul Gauduchon et Charles-Michel Marle qui ont grandement amélioré mes connaissances en Géométrie différentielle, Alain Albouy qui m'a orienté dans les œuvres complètes de plusieurs grands noms de la science, André Rougé pour sa compétence en Mécanique quantique, Jean-Michel Bony pour d'utiles renseignements techniques en Analyse, Yvette Kosmann-Schwarzbach pour ses encouragements amicaux, sans oublier Jean-Louis Basdevant dont l'ouvrage « Principes variationnels et dynamique » a été l'élément déclencheur de mon travail.

Je remercie également le Centre Poly-Media de l'École Polytechnique qui a réalisé la mise en forme définitive de cet ouvrage.