

2.8 Récapitulatif

- La **loi de comportement** d'un matériau modélise la manière dont celui-ci répond aux sollicitations (mécaniques, thermiques, électromagnétiques, etc).
- L'**état de la particule** est défini par : deux variables de contrôle $T, \underline{\underline{\varepsilon}}$ et des variables internes $\underline{\underline{\alpha}}$ « condensant » toute l'histoire de la particule, supposées non contrôlables de l'extérieur.
- Une **histoire connue des variables de contrôle** doit permettre de déterminer complètement celles de leurs variables duales (contraintes et entropie). Deux séries de relations permettent d'assurer cette correspondance : les lois d'état et les lois d'évolution.
- Les **lois d'état** sont déduites du potentiel thermodynamique (énergie libre spécifique de Helmholtz $\rho w(T, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}})$) par :

$$s = -\frac{\partial w}{\partial T}, \quad \underline{\underline{\sigma}}^{\text{nd}} = \rho \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}, \quad \underline{\underline{\mathcal{A}}}^{\text{nd}} = \rho \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\alpha}}}.$$

- Les **lois d'évolution** définissent les taux des variables dissipatives, de la forme :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}^{\text{d}}; T, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}), \quad \underline{\underline{\dot{\alpha}}} = \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}}(\underline{\underline{\mathcal{A}}}; T, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}), \quad \frac{-\underline{\underline{q}}}{T} = \underline{\underline{f}}_{\underline{\underline{\nabla T}}}(\underline{\underline{\nabla T}}; T, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}).$$

Pour définir les lois précédentes, on peut adopter l'hypothèse de **dissipativité normale** qui postule d'existence d'un **potentiel de dissipation** duquel dérivent les taux des variables dissipatives.

Loi de Fourier classique : $\underline{\underline{q}} = -\underline{\underline{\mathcal{K}}} \cdot \underline{\underline{\nabla T}}$

avec $\underline{\underline{\mathcal{K}}}$ le tenseur des conductivités thermiques.

- **Matériaux standards généralisés** (cas isotherme)

Comportement défini au moyen de deux potentiels :

1. l'énergie libre $\rho w(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}})$ donnant les lois d'état :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{nd}} = \rho \frac{\partial w(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathcal{A}}} = -\rho \frac{\partial w(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}})}{\partial \underline{\underline{\alpha}}}$$

2. le potentiel de dissipation φ ou le potentiel dual de dissipation φ^* donnant les lois complémentaires soit :

$$(\underline{\underline{\sigma}}^{\text{d}}, \underline{\underline{\mathcal{A}}}) \in \partial_{(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \underline{\underline{\dot{\alpha}}})} \varphi(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \underline{\underline{\dot{\alpha}}}; \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}) \quad \text{ou} \quad (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \underline{\underline{\dot{\alpha}}}) \in \partial_{(\underline{\underline{\sigma}}^{\text{d}}, \underline{\underline{\mathcal{A}}})} \varphi^*(\underline{\underline{\sigma}}^{\text{d}}, \underline{\underline{\mathcal{A}}}; \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}})$$

et dans le cas d'un potentiel de dissipation φ différentiable :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{d}} = \frac{\partial \varphi(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \underline{\underline{\dot{\alpha}}}; \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}})}{\partial \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathcal{A}}} = \frac{\partial \varphi(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \underline{\underline{\dot{\alpha}}}; \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}})}{\partial \underline{\underline{\dot{\alpha}}}}$$

CHAPITRE 3

Thermoélasticité

*"D'une manière générale, le simple est toujours le simplifié ;
il ne saurait être pensé correctement qu'en tant qu'il apparaît
comme le produit d'un processus de simplification."*

G. Bachelard, *Le nouvel esprit scientifique*.

À la fin de ce chapitre, vous devriez savoir

- *La démarche à suivre pour formuler et identifier une loi de comportement thermoélastique.*
- *Les équations de la thermoélasticité linéaire classique.*
- *La loi de comportement thermoélastique linéaire isotrope.*
- *Déterminer la variation de température induite par une sollicitation mécanique.*

3.1 Présentation

Le comportement thermoélastique est présenté par la très grande majorité des matériaux et des structures sous des sollicitations relativement faibles. Il précède et accompagne des comportements anélastiques induits par la plasticité, la viscoplasticité, l'endommagement, etc.

Les effets des variations de la température sur la réponse mécanique des structures sont souvent importants et non négligeables. Ils sont pris en compte par un couplage faible (uniquement par l'influence de la température sur la mécanique). Ceci est justifié dans la mesure où les variations de températures induites par les sollicitations mécaniques sont en général très faibles. Dans certains cas comme par exemple dans l'estimation des différentes sources de chaleur en jeu dans des processus irréversibles, ou pour certaines pièces de précision, il peut être utile de quantifier les dégagements de chaleur dus au couplage thermoélastique. L'objet de cette section est la présentation du comportement thermoélastique avec un couplage fort, selon le formalisme thermodynamique introduit précédemment. Le cadre considéré est celui des transformations infinitésimales autour d'un état initial naturel ou quasi-naturel¹. Le cas de petites variations de température est d'abord traité avant d'aborder celui des variations finies de température.

1. cf. Jean Salençon, *Mécanique des milieux continus*, tome II, Les Éditions de l'École Polytechnique ;
et P. Le Tallec, *Mécanique des milieux continus*, Les Éditions de l'École Polytechnique.

3.2 Aspects expérimentaux et interprétations

3.2.1 Essais de traction isotherme et adiabatique

On considère une éprouvette cylindrique homogène, en acier. Initialement, elle est de section A_0 , de longueur utile L_0 et de masse volumique ρ_0 ; sa température est T_0 et son état est libre de contrainte. Elle est sollicitée en traction simple, d'abord suffisamment lentement pour être considérée isotherme. On constate qu'en deçà d'une certaine force, elle ne présente pas de déformation permanente après une décharge et les déformations restent petites. Plus encore, le processus est réversible. La courbe reliant la contrainte à la déformation est linéaire : on parle alors d'élasticité linéaire. Sa pente (le rapport entre la contrainte et la déformation) est le module de Young E du matériau considéré. Si l'essai est réalisé suffisamment vite, on constate que l'éprouvette se refroidit (très légèrement) lors de la traction (Figure 3.1). Le module de Young correspondant est dit adiabatique E_a . La variation de température observée est alors linéairement reliée à la contrainte appliquée.

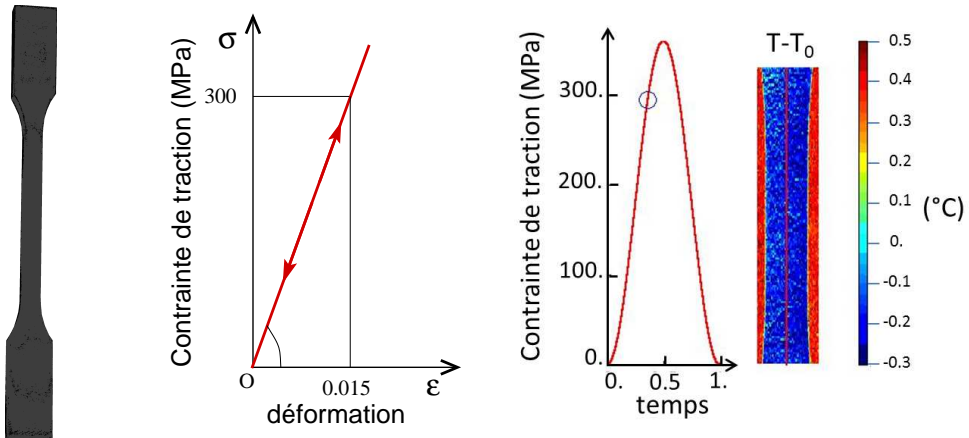


Figure 3.1 – Variation de température dans une éprouvette en acier mise rapidement en traction élastique jusqu'à une certaine contrainte, puis déchargée à zéro : on constate que l'éprouvette se refroidit lors de la charge (essai réalisé au LMGC à Montpellier, communiqué par A. Chrysochoos)

3.2.2 Interprétation des essais

Dans ce contexte de déformation infinitésimale et de petite variation de température, la relation expérimentale entre la force axiale F , le déplacement axial ξ et la température T est linéaire. En posant $\sigma = \frac{F}{A_0}$, $\varepsilon = \frac{\xi}{L_0}$ et $\tau = T - T_0$, elle s'écrit : $\sigma = E\varepsilon - k\tau$.

La quantité de chaleur totale reçue par l'éprouvette δQ_t s'exprime, en fonction de l'écart de température τ et de la variation de volume δV , par : $\delta Q_t = C_\varepsilon \tau + \mathcal{L} \delta V$.

C_ε est la capacité calorifique globale de l'éprouvette et \mathcal{L} sa chaleur latente.

La quantité de chaleur spécifique (c'est-à-dire par unité de masse) reçue est alors :

$$\delta Q = \frac{\delta Q_t}{\rho_0 A_0 L_0} = c_\varepsilon \tau + \frac{\mathcal{L}}{\rho_0} \frac{\delta V}{V_0} .$$

$c_\varepsilon = \frac{C_\varepsilon}{\rho_0 A_0 L_0}$ et $\frac{\mathcal{L}}{\rho_0}$ sont des grandeurs caractéristiques du matériau et peuvent a priori dépendre de la température et de la déformation. Elles sont ici supposées constantes.

Comme ($\delta Q = T \delta s$) et ($\delta V/V_0 = \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}$), l'expression de l'entropie spécifique s est donc :

$$s - s_0 = c_\varepsilon \frac{\tau}{T} + \frac{\mathcal{L}}{\rho_0 T} \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{soit} \quad s - s_0 = c_\varepsilon \frac{\tau}{T_0} + \frac{\mathcal{L}}{\rho_0 T_0} \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} .$$

Or $\frac{\partial^2 w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)}{\partial T \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T}$, soit $-\frac{\partial s}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial \tau}$, ce qui conduit à : $\mathcal{L} = T_0 k$.

En résumé, ces essais uniaxiaux donnent accès aux deux lois d'état :

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon - k\tau \\ s = \frac{k}{\rho_0} \text{tr} \varepsilon + \frac{c_\varepsilon}{T_0} \tau + s_0 . \end{cases}$$

Plus précisément, les constantes intervenant dans ces relations sont obtenues expérimentalement de la manière suivante.

- Le module de Young isotherme E est la pente de la courbe contrainte-déformation de l'essai isotherme.
- Le coefficient thermoélastique k est obtenu à partir d'un essai de dilatation libre, connaissant le module de Young : $\sigma = 0$ donne $k = E\varepsilon/\tau$.
- La capacité calorifique spécifique à déformation constante c_ε s'obtient à partir de l'essai de traction adiabatique : $\delta Q = 0$ d'où $c_\varepsilon = -T_0 k \Delta V / \rho_0 \tau V_0$.

L'énergie libre correspondant à ces lois d'état est une fonction quadratique des deux variables d'état (la déformation et la température).

3.2.3 Modèle uniaxial du comportement thermoélastique linéaire

Le comportement thermoélastique linéaire est représenté par un modèle rhéologique formé d'un ressort susceptible d'échanger de la chaleur avec l'extérieur. Il correspond au modèle traité dans l'exercice 1.1 du premier chapitre. Le modèle est caractérisé par deux variables d'état, par exemple les deux variables observables : l'allongement relatif ε et la température T (ou son écart τ par rapport à la température initiale T_0). Leurs grandeurs associées, la force élémentaire σ et l'entropie s , leur sont reliées par les lois d'état linéaires établies précédemment.

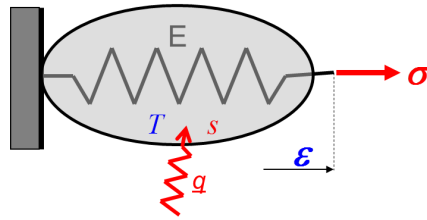


Figure 3.2 – Modèle rhéologique thermoélastique linéaire

3.3 Comportement thermoélastique linéaire

Un matériau thermoélastique est sans dissipation intrinsèque ; sa seule source de dissipation est thermique. Il est, par conséquent, complètement caractérisé par :

1. son énergie libre définissant les comportements réversibles ;
2. son potentiel de dissipation thermique conduisant, dans le cas linéaire, à la loi de conduction de Fourier.

Les variables d'état choisies pour définir l'état thermodynamique sont la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et la température T . Le potentiel thermodynamique naturel, cohérent avec ce choix de variables, est l'énergie libre de Helmholtz. Ainsi, les fonctions d'état, énergie libre et entropie, s'écrivent : $w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)$ et $s(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)$. L'état d'équilibre initial, qui sert de configuration de référence, est défini par les variables d'état $\underline{\underline{\varepsilon}}_0 = 0$ et T_0 , leurs forces thermodynamiques réversibles associées $\underline{\underline{\sigma}}_0$ et s_0 , et la densité ρ_0 .

3.3.1 Lois d'état

Les lois d'état s'écrivent, en l'absence de liaisons internes :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{nd}} = \rho_0 \frac{\partial w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \quad \text{et} \quad s = - \frac{\partial w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)}{\partial T} . \quad (3.1)$$

Comme la dissipation intrinsèque (1.43) donnée par :

$$\mathbf{d}_1 = (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^{\text{nd}}) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \geq 0 \quad (3.2)$$

est nulle pour tout état, quelles que soient les vitesses de $\underline{\underline{\varepsilon}}$, on obtient :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{\text{nd}} . \quad (3.3)$$

On va linéariser les lois d'état au voisinage de l'état initial², c'est-à-dire remplacer les ex-

2. En toute rigueur, la linéarisation se fait dans la configuration de référence, avec le tenseur de déformation de Green-Lagrange comme variable d'état. Elle conduit à la définition du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff. Des hypothèses supplémentaires (état naturel ou quasi-naturel) sont nécessaires pour aboutir à l'expression simplifiée du tenseur de Cauchy, obtenue dans ce qui suit (voir les cours de J. Salençon et de P. Le Tallec).

pressions (3.1) par leur développement au premier ordre³ en déformation et en écart de température ($\tau = T - T_0$). Ceci conduit à :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) &= \rho_0 \frac{\partial w(0, T_0)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} + \rho_0 \frac{\partial^2 w(0, T_0)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}} \partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \rho_0 \frac{\partial^2 w(0, T_0)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}} \partial T} \tau \\ s(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) &= -\frac{\partial w(0, T_0)}{\partial T} - \frac{\partial^2 w(0, T_0)}{\partial T \partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{\partial^2 w(0, T_0)}{\partial T^2} \tau . \end{cases} \quad (3.4)$$

Or $\rho_0 \frac{\partial w(0, T_0)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\sigma}}_0$ et $-\frac{\partial w(0, T_0)}{\partial T} = s_0$.

Si on pose

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathbf{C}}} &= \rho_0 \frac{\partial^2 w(0, T_0)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}} \partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \\ \underline{\underline{k}} &= -\rho_0 \frac{\partial^2 w(0, T_0)}{\partial T \partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = -\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial T} \\ \beta &= -\frac{\partial^2 w(0, T_0)}{\partial T^2} \end{cases} \quad (3.5)$$

les relations (3.4) s'écrivent ($\underline{\underline{\varepsilon}}_0 = 0$) :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \tau) &= \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}} \tau \\ s(\underline{\underline{\varepsilon}}, \tau) &= s_0 + \frac{\underline{\underline{k}}}{\rho_0} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \beta \tau . \end{cases} \quad (3.6)$$

L'énergie libre correspondante est donnée par :

$$\rho_0 w(\underline{\underline{\varepsilon}}, \tau) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \tau \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\sigma}}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \rho_0 \beta \tau^2 - \rho_0 s_0 \tau . \quad (3.7)$$

Interprétation des différents coefficients thermoélastiques

- $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ est le tenseur d'élasticité. C'est un tenseur du quatrième ordre. Dans le cas général, il possède 21 coefficients indépendants.

En effet, l'égalité des dérivées croisées du potentiel thermodynamique,

$$\frac{\partial^2 w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}}$$

conduit à $\mathbf{C}_{ijkl} = \mathbf{C}_{klij}$

et les symétries du tenseur des déformations à $\mathbf{C}_{ijkl} = \mathbf{C}_{ijlk}$.

3. Autrement dit, linéariser $y = f(x)$ au voisinage de x_0 , c'est écrire : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

La relation (3.6a) entre les deux tenseurs d'ordre deux symétriques $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$, peut s'écrire comme une relation linéaire entre deux vecteurs à six composantes via une matrice 6x6 symétrique qui a donc 21 coefficients indépendants (voir section 3.9).

- $\underline{\underline{k}}$ est le tenseur des coefficients thermoélastiques. Il est symétrique. En « notation ingénieur », il s'écrit de manière identique à la contrainte. Son interprétation est obtenue comme suit : on remarque que la quantité de chaleur spécifique reçue qu'on a coutume d'écrire sous la forme

$$\delta Q = \frac{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}{\rho_0} : \underline{\underline{\varepsilon}} + c_\epsilon \tau \quad (3.8)$$

où $\underline{\underline{\mathcal{L}}}$ est le tenseur des chaleurs latentes relatives aux différents modes de déformation et c_ϵ est la chaleur spécifique (ou capacité calorifique) à déformation constante, est, grâce à l'équation (3.6)b, égale à

$$T(s - s_0) = T \frac{\underline{\underline{k}}}{\rho_0} : \underline{\underline{\varepsilon}} + T\beta\tau \quad (3.9)$$

Ainsi, à partir des équations (3.8) et (3.9), on obtient :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathcal{L}}} &= T\underline{\underline{k}} &= -\rho_0 T \frac{\partial^2 w}{\partial T \partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \\ c_\epsilon &= T\beta &= -T \frac{\partial^2 w}{\partial T^2} \end{cases} \quad (3.10)$$

D'autre part, on remarque aussi que $\underline{\underline{\mathcal{L}}} = -T \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial T} = \rho_0 T \frac{\partial s}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$

et donc que : $\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial T} = -\rho_0 \frac{\partial s}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$.

De même, $c_\epsilon = T \frac{\partial s}{\partial T}$.

- Le coefficient β est donc relié à la chaleur spécifique à déformation constante par : $c_\epsilon = T\beta$.

Les propriétés des différents tenseurs physiques de thermoélasticité linéaire découlent de l'objectivité, des symétries de la matière et de la stabilité thermodynamique des matériaux. De plus, l'égalité des dérivées croisées du potentiel thermodynamique ainsi que la symétrie de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ont conduit aux relations de symétrie suivantes :

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij} = \mathbb{C}_{jilk} \quad \text{et} \quad k_{ij} = k_{ji} \quad (3.11)$$

3.3.2 Loi complémentaire

La seule source de dissipation est la conduction thermique. Sa linéarisation effectuée à la section 2.3.2 a conduit à la loi de Fourier :

$$\underline{\underline{q}} = -\underline{\underline{\mathcal{K}}} \cdot \underline{\underline{\nabla T}} \quad (3.12)$$

où $\underline{\underline{K}}$ est le tenseur des conductivités thermiques spécifique au matériau considéré et dépendant de l'état initial. Il est non négatif et symétrique,

$$\mathcal{K}_{ij} = \mathcal{K}_{ji} . \quad (3.13)$$

En résumé, au voisinage de l'état initial d'équilibre, défini par $\underline{\underline{\varepsilon}}_0 = 0, T_0, \underline{\underline{\sigma}}_0, s_0$ et ρ_0 , la loi de comportement du solide thermoélastique linéaire⁴ est donnée par :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}}\tau \\ s &= s_0 + \frac{\underline{\underline{k}}}{\rho_0} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{c_\epsilon}{T_0}\tau \\ \underline{\underline{q}} &= -\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{\nabla T}} \end{cases} \quad \text{avec } \tau = T - T_0 . \quad (3.14)$$

L'énergie libre s'écrit :

$$\rho_0 w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{\varepsilon}} (T - T_0) + \underline{\underline{\sigma}}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \rho_0 \frac{c_\epsilon}{T_0} (T - T_0)^2 - \rho_0 s_0 (T - T_0) \quad (3.15)$$

3.4 Évolution thermoélastique

Les équations de champ du problème d'évolution thermoélastique comprennent les équations universelles (conservation de la masse, équations de la dynamique, conservation de l'énergie) et la loi du comportement.

La conservation de la masse s'écrit :

$$\rho = \rho_0 (1 - \text{div } \underline{\underline{\xi}}) \quad (3.16)$$

où $\underline{\underline{\xi}}$ désigne le champ de déplacement. Par la suite on prendra $\rho \simeq \rho_0$.

Les équations de champ de la dynamique s'écrivent :

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \rho_0 \underline{\underline{F}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \underline{\underline{\xi}}}{\partial t^2} \quad (3.17)$$

avec $\underline{\underline{F}}$ les forces massiques appliquées au solide.

À partir de l'équation (1.21) établie grâce à la conservation de l'énergie et au second principe de la thermodynamique, on aboutit à l'équation de la chaleur explicitée ci-dessous :

$$\text{div } (-\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{\nabla T}}) + \rho_0 T \dot{s} = r + \mathbf{d}_1 . \quad (3.18)$$

4. Les circonstances (état initial quasi-naturel, transformation infinitésimale, gradient de déplacement et déformation de même ordre de grandeur) autorisant cette écriture sont explicitées dans l'ouvrage de Jean Salençon, *Mécanique des milieux continus*, tome II, chap.VII.5.4. Les Éditions de l'École Polytechnique.

En utilisant l'expression (3.14b) de l'entropie et la nullité de la dissipation intrinsèque, on obtient :

$$\operatorname{div}(-\underline{\underline{K}} \cdot \nabla T) + T_0 \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + \rho_0 c_\epsilon \dot{T} = r . \quad (3.19)$$

Finalement, les équations de champ du problème thermoélastique s'explicitent par :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}} \tau \\ s &= s_0 + \frac{\underline{\underline{k}}}{\rho_0} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{c_\epsilon}{T_0} \tau \\ \underline{\underline{q}} &= -\underline{\underline{K}} \cdot \nabla T \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho_0 \underline{\underline{F}} &= \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\ \operatorname{div}(\underline{\underline{K}} \cdot \nabla T) + r &= T_0 \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + \rho_0 c_\epsilon \dot{T} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \xi + {}^t \underline{\underline{\nabla}} \xi) \quad (3.22)$$

À ces équations, s'ajoutent les conditions initiales et aux limites.

3.5 Matériau thermoélastique linéaire isotrope

On considère un matériau thermoélastique linéaire **isotrope** dans son état naturel. Intuitivement, l'isotropie signifie que les propriétés du matériau sont identiques dans toutes les directions. De manière plus précise, ceci veut dire que l'expression de loi de comportement écrite relativement à une configuration de référence reste inchangée dans tout changement de configuration correspondant à une transformation orthogonale⁵. Ainsi, désignons par $w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)$ l'expression de l'énergie libre relative à la configuration de référence. On effectue un changement de configuration par une transformation orthogonale de tenseur associé $\underline{\underline{P}}$. La déformation devient $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot {}^t \underline{\underline{P}}$. On a alors $w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) = w(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}, T)$ ou encore $w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) = w(\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot {}^t \underline{\underline{P}}, T)$, $\forall \underline{\underline{\varepsilon}}, \forall \underline{\underline{P}}$ tel que $\underline{\underline{P}} \cdot {}^t \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{1}}$. Ainsi, les expressions des composantes de la loi de comportement sont les mêmes dans tout repère orthonormé. Ceci entraîne une réduction du nombre des coefficients indépendants des différents tenseurs thermoélastiques ($\underline{\underline{\mathbb{C}}}$, $\underline{\underline{k}}$) et thermique $\underline{\underline{K}}$. Ainsi :

5. Une transformation orthogonale est une application linéaire dont le tenseur associé $\underline{\underline{P}}$ est tel que : $\underline{\underline{P}} \cdot {}^t \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{1}}$

1. Le tenseur $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ ne s'écrit plus qu'en fonction de deux coefficients indépendants, λ et μ appelés coefficients de Lamé.

En effet, la forme quadratique $\frac{1}{2}\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\epsilon}}$, fonction scalaire isotrope du tenseur $\underline{\underline{\epsilon}}$, s'écrit d'après le "théorème de représentation"⁶, uniquement en fonction des invariants de $\underline{\underline{\epsilon}}$. Elle ne fait donc intervenir ici que les deux invariants $\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}$ et $\frac{1}{2}\text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}^2) = \frac{1}{2}\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\epsilon}}$, et est nécessairement de la forme :

$$\frac{1}{2}\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\lambda(\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}})^2 + \mu\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (3.23)$$

avec λ et μ deux coefficients scalaires.

2. Le tenseur \underline{k} s'écrit en fonction d'un seul coefficient thermoélastique k sous la forme $\underline{k} = k\underline{\underline{1}}$.
3. Le tenseur des conductivités thermiques $\underline{\underline{\mathcal{K}}}$ s'écrit en fonction d'un seul coefficient sous la forme $\underline{\underline{\mathcal{K}}} = \mathcal{K}\underline{\underline{1}}$.

Finalement, si l'état initial est défini par la masse volumique ρ_0 , un champ de déformation nul et les champs de température T_0 et de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}_0$, l'énergie libre de Helmholtz se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \rho_0 w(\underline{\underline{\epsilon}}, T) = & \frac{1}{2}\lambda(\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}})^2 + \mu\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\epsilon}} - k(T - T_0)(\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}) + \underline{\underline{\sigma}}_0 : \underline{\underline{\epsilon}} \\ & - \frac{1}{2}\rho_0 \frac{c_\epsilon}{T_0}(T - T_0)^2 - \rho_0 s_0(T - T_0) \end{aligned} \quad (3.24)$$

et les lois d'état s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \lambda(\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} - k\tau\underline{\underline{1}} \\ s = s_0 + \frac{k}{\rho_0}(\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}) + \frac{c_\epsilon}{T_0}\tau \\ \underline{q} = -\mathcal{K}\nabla T \end{array} \right. \quad (3.25)$$

6. Voir par exemple, Jean Salençon *Mécanique des milieux continus*, tome I, Annexe 5.7. Les Éditions de l'École Polytechnique.

3.6 Autres expressions en thermoélasticité linéaire isotrope

3.6.1 Décomposition de $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$

En écrivant le produit $\underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ en fonction des parties déviatorique et sphérique de $\underline{\underline{\varepsilon}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} &= \lambda (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \\ &= \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\mu \text{dev } \underline{\underline{\varepsilon}} \\ &= (3\lambda + 2\mu) \left(\frac{1}{3}\underline{\underline{\mathbb{1}}} \otimes \underline{\underline{\mathbb{1}}}\right) : \underline{\underline{\varepsilon}} + 2\mu \left(\underline{\underline{\mathbb{I}}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{\mathbb{1}}} \otimes \underline{\underline{\mathbb{1}}}\right) : \underline{\underline{\varepsilon}} \\ &= (3\lambda + 2\mu) \underline{\underline{\mathbb{J}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + 2\mu \underline{\underline{\mathbb{K}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

où l'on a posé : $\underline{\underline{\mathbb{J}}} = \frac{1}{3}\underline{\underline{\mathbb{1}}} \otimes \underline{\underline{\mathbb{1}}}$ et $\underline{\underline{\mathbb{K}}} = \underline{\underline{\mathbb{I}}} - \underline{\underline{\mathbb{J}}}$,
avec $\underline{\underline{\mathbb{I}}}$ le tenseur unité du quatrième ordre pour les tenseurs symétriques d'ordre deux.

Comme : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \text{dev } \underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{\mathbb{J}}} + \underline{\underline{\mathbb{K}}}) : \underline{\underline{\varepsilon}}$,

on a :

$$\underline{\underline{\mathbb{I}}} = \underline{\underline{\mathbb{J}}} + \underline{\underline{\mathbb{K}}}.$$

De plus, on vérifie que les tenseurs $\underline{\underline{\mathbb{J}}}$ et $\underline{\underline{\mathbb{K}}}$ sont orthogonaux :

$$\underline{\underline{\mathbb{J}}} : \underline{\underline{\mathbb{K}}} = \underline{\underline{\mathbb{K}}} : \underline{\underline{\mathbb{J}}} = \underline{\underline{0}}$$

et que :

$$\underline{\underline{\mathbb{J}}} : \underline{\underline{\mathbb{J}}} = \underline{\underline{\mathbb{J}}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbb{K}}} : \underline{\underline{\mathbb{K}}} = \underline{\underline{\mathbb{K}}}.$$

3.6.2 Inversion de la loi de comportement

La première équation des relations (3.33) exprimant la contrainte en fonction de la déformation et de l'écart de température peut être inversée pour obtenir la déformation en fonction de la contrainte et de l'écart de température. L'expression obtenue

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} : \underline{\underline{k}} \tau$$

est écrite sous la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{\nu}{E} (\text{tr } (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)) \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \alpha \tau \underline{\underline{\mathbb{1}}} \quad (3.27)$$

E est le module de Young, ν le coefficient de Poisson et α le coefficient de dilatation thermique.

Les différents coefficients thermoélastiques sont reliés par les relations :

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} & k &= \alpha(3\lambda+2\mu) = \frac{E\alpha}{(1-2\nu)} \\
E &= \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} & \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} & \alpha &= \frac{k}{3\lambda+2\mu} = \frac{k(1-2\nu)}{E}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

3.6.3 Capacité calorifique spécifique à contrainte constante

L'équation de la chaleur (deuxième équation des groupes (3.21) et (3.34)) peut être écrite en utilisant la chaleur spécifique à contrainte constante c_σ définie par

$$c_\sigma = T \frac{\partial s(\underline{\sigma}, T)}{\partial T}$$

et reliée à la chaleur spécifique à déformation constante par

$$\begin{aligned}
\rho c_\sigma &= \rho_0 c_\epsilon + T_0 \underline{k} : \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} : \underline{k} \\
&= \rho_0 c_\epsilon + T_0 \underline{\alpha}_T : \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\alpha}_T .
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$\underline{\alpha}_T$, défini par : $\underline{\alpha}_T = \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} : \underline{k}$, représente le tenseur des coefficients de dilatation thermique.

La relation (3.29) est obtenue de la manière suivante. On part de l'expression :

$$s = s_0 + \frac{k}{\rho_0} : \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{c_\epsilon}{T_0} \tau$$

dans laquelle on remplace $\underline{\underline{\epsilon}}$ par : $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} : (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_0) + \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} : \underline{k} \tau$.

On a alors

$$s = s_0 + \frac{k}{\rho_0} : \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} : (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_0) + \left(\frac{c_\epsilon}{T_0} + \frac{k}{\rho_0} : \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} : \underline{k} \right) \tau, \tag{3.30}$$

d'où
$$c_\sigma = T \frac{\partial s(\underline{\sigma}, T)}{\partial T} \simeq c_\epsilon + \frac{T_0}{\rho_0} \underline{k} : \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} : \underline{k} .$$

Dans le cas isotrope, la relation (3.29) devient :

$$\begin{aligned}
\rho_0 c_\sigma &= \rho_0 c_\epsilon + 3T_0 k \alpha \\
&= \rho_0 c_\epsilon + 3T_0 (3\lambda + 2\mu) \alpha^2 .
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Elle est souvent écrite sous la forme :

$$c_\sigma = c_\epsilon \left(1 + \frac{9T_0 K \alpha^2}{\rho_0 c_\epsilon} \right) . \tag{3.32}$$

où $K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ est le module de compressibilité élastique⁷.

7. Il est aussi appelé (voir J. Salençon, "Mécanique des milieux continus", tome II, les Éditions de l'École polytechnique.) : module élastique de compression ou module de rigidité à la dilatation.

3.7 Problème d'évolution en thermoélasticité linéaire isotrope

On écrit, dans le cas du comportement thermoélastique linéaire isotrope, les équations du champ du problème d'évolution thermoélastique obtenues à la section 3.7.

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{\sigma}}_0 + \lambda (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} - k\tau \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ s &= s_0 + \frac{k}{\rho_0} (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) + \frac{c_\epsilon}{T_0} \tau \\ \underline{\underline{q}} &= -\mathcal{K} \underline{\underline{\nabla}} T \end{cases} \quad (3.33)$$

avec

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad k = \alpha(3\lambda + 2\mu) = \frac{\alpha E}{(1-2\nu)}$$

$$\begin{cases} \text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \rho_0 \underline{\underline{F}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \underline{\underline{\xi}}}{\partial t^2} \\ \rho_0 c_\epsilon \dot{T} - \mathcal{K} \Delta T = r - T_0 k (\text{tr } \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}) \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\xi}} + {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\xi}}) \quad (3.35)$$

3.8 Expressions des différents potentiels thermoélastiques

3.8.1 Énergie interne en thermoélasticité linéaire

L'énergie interne peut être choisie comme potentiel thermodynamique. Dans cette section, on établit son expression, en thermoélasticité linéaire, en fonction de ses variables naturelles (l'entropie et la déformation).

On exprime d'abord l'écart de température en fonction de l'entropie et de la déformation à partir de la relation (3.14) :

$$T - T_0 = \frac{T_0}{c_\epsilon} (s - s_0) - \frac{T_0}{\rho_0 c_\epsilon} \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.36)$$

Le tenseur des contraintes donné par les lois d'état (3.14) s'écrit, en utilisant l'équation précédente :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}} \tau \\ &= \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_a : \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{T_0}{c_\epsilon} (s - s_0) \underline{\underline{k}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}}_a = (\underline{\underline{\mathbf{C}}} + \frac{T_0}{\rho_0 c_\epsilon} \underline{\underline{k}} \otimes \underline{\underline{k}}) . \end{aligned} \quad (3.37)$$

$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_a$ est le tenseur d'élasticité isentropique.

Comme $\underline{\underline{\sigma}} = \rho_0 \frac{\partial e}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$ et $T = \frac{\partial e}{\partial s}$, on obtient l'expression suivante de l'énergie interne :

$$\begin{aligned} \rho_0 e(\underline{\underline{\varepsilon}}, s) &= \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}} + \frac{T_0}{\rho_0 c_\varepsilon} \underline{\underline{k}} \otimes \underline{\underline{k}} \right) : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\sigma}}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\rho_0 T_0}{c_\varepsilon} (s - s_0)^2 - \frac{T_0}{c_\varepsilon} (s - s_0) \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \rho_0 T_0 s. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dans le cas isotope, on a :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_a = \underline{\underline{\mathbf{C}}} + \frac{T_0}{\rho_0 c_\varepsilon} \underline{\underline{k}} \otimes \underline{\underline{k}} = (\lambda + \frac{T_0 k^2}{\rho_0 c_\varepsilon}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu \underline{\underline{\mathbf{I}}}. \quad (3.39)$$

En posant

$$\lambda_a = \lambda + \frac{T_0 k^2}{\rho_0 c_\varepsilon}, \quad (3.40)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \rho_0 e(\underline{\underline{\varepsilon}}, s) &= \frac{1}{2} \lambda_a (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}})^2 + \mu \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\sigma}}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\rho_0 T_0}{c_\varepsilon} (s - s_0)^2 - \frac{T_0 k}{c_\varepsilon} (s - s_0) (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) + \rho_0 T_0 s, \end{aligned} \quad (3.41)$$

puis :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{\sigma}}_0 + \lambda_a (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{T_0}{c_\varepsilon} (s - s_0) \underline{\underline{k}} \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ T &= T_0 + \frac{T_0}{c_\varepsilon} (s - s_0) - \frac{T_0 k}{\rho_0 c_\varepsilon} (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}). \end{cases} \quad (3.42)$$

3.8.2 Énergie libre de Gibbs en thermoélasticité linéaire

Dans cette section, on établit l'expression de l'énergie libre de Gibbs en fonction de ses variables naturelles (la température et la contrainte) en thermoélasticité linéaire.

L'expression de l'entropie (3.30) en fonction de l'écart de température et de la contrainte a été établie précédemment. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} s &= s_0 + \frac{k}{\rho_0} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \left(\frac{c_\varepsilon}{T_0} + \frac{k}{\rho_0} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} : \underline{\underline{k}} \right) \tau \\ &= s_0 + \frac{\alpha_T}{T_0} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \frac{c_\sigma}{T_0} \tau, \end{aligned} \quad (3.43)$$

avec $\underline{\underline{\alpha}}_T = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} : \underline{\underline{k}}$ et $c_\sigma = c_\varepsilon + \frac{T_0}{\rho_0} \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} : \underline{\underline{k}}$.

En fonction de l'écart de température et de la contrainte, la déformation s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \underline{\underline{\alpha}}_T \tau \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\alpha}}_T = \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} : \underline{\underline{k}}. \quad (3.44)$$

Ces deux relations forment les lois d'état

$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}} &= -\rho_0 \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \underline{\underline{\alpha}}_T \tau \\ s &= -\frac{\partial g}{\partial T} = s_0 + (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) : \frac{\underline{\underline{\alpha}}_T}{\rho_0} + \frac{c_\sigma}{T_0} \tau. \end{cases} \quad (3.45)$$

On déduit l'expression de l'énergie libre spécifique de Gibbs $g(T, \underline{\underline{\sigma}})$:

$$\begin{aligned} \rho_0 g(T, \underline{\underline{\sigma}}) &= -\frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) : \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \tau (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) : \underline{\underline{\alpha}}_T \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho_0 \frac{c_\sigma}{T_0} \tau^2 - \rho_0 s_0 \tau \end{aligned} \quad (3.46)$$

On rappelle que : $g = w - \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$.

Dans le cas isotrope, on a :

$$\begin{aligned} \rho_0 g(T, \underline{\underline{\sigma}}) &= -\frac{1+\nu}{2E} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \frac{\nu}{2E} (\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0))^2 \\ &\quad - \alpha \tau \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{1}{2} \rho_0 \frac{c_\sigma}{T_0} \tau^2 - \rho_0 s_0 \tau \end{aligned} \quad (3.47)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \rho_0 g(T, \underline{\underline{\sigma}}) &= -\frac{1}{4\mu} \left((\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0))^2 \right) \\ &\quad - \alpha \tau \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{1}{2} \rho_0 \frac{c_\sigma}{T_0} \tau^2 - \rho_0 s_0 \tau \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\text{et} \begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1+\nu}{E} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{\nu}{E} (\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)) \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \alpha \tau \underline{\underline{\mathbb{1}}} \\ &= \frac{1}{2\mu} \left((\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)) \underline{\underline{\mathbb{1}}} \right) + \alpha \tau \underline{\underline{\mathbb{1}}} \\ s &= s_0 + \frac{\alpha}{\rho_0} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \frac{c_\sigma}{T_0} \tau. \end{cases} \quad (3.49)$$

3.8.3 Enthalpie en thermoélasticité linéaire

Dans cette section, on établit l'expression de l'enthalpie en fonction de ses variables naturelles (l'entropie et la contrainte) en thermoélasticité linéaire.

Des équations (3.45), on déduit d'abord :

$$\tau = \frac{T_0}{c_\sigma} (s - s_0) - \frac{T_0}{\rho_0 c_\sigma} \underline{\underline{\alpha}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0), \quad (3.50)$$

puis :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \left(\underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} - \frac{T_0}{\rho_0 c_\sigma} \underline{\underline{\alpha}} \otimes \underline{\underline{\alpha}} \right) : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \frac{T_0}{c_\sigma} (s - s_0) \underline{\underline{\alpha}} \quad (3.51)$$

Or : $\underline{\underline{\varepsilon}} = -\rho_0 \frac{\partial h}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$ et $T = \frac{\partial h}{\partial s}$. On en déduit l'expression de l'enthalpie $h(s, \underline{\underline{\sigma}})$:

$$\begin{aligned} \rho_0 h(s, \underline{\underline{\sigma}}) = & -\frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) : \left(\underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} - \frac{T_0}{\rho_0 c_\sigma} \underline{\underline{\alpha}} \otimes \underline{\underline{\alpha}} \right) : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) \\ & - \frac{T_0 (s - s_0)}{c_\sigma} \underline{\underline{\alpha}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \frac{1}{2} \frac{\rho_0 T_0}{c_\sigma} (s - s_0)^2 + \rho_0 T_0 s \end{aligned} \quad (3.52)$$

On rappelle que : $h = e - \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$.

Dans le cas isotrope, on a :

$$\begin{aligned} \rho_0 h(s, \underline{\underline{\sigma}}) = & -\frac{1}{4\mu} \left((\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{\lambda_s}{3\lambda_s + 2\mu} (\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0))^2 \right) \\ & - \frac{T_0 \alpha (s - s_0)}{c_\sigma} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \frac{1}{2} \frac{\rho_0 T_0}{c_\sigma} (s - s_0)^2 + \rho_0 T_0 s \end{aligned} \quad (3.53)$$

avec $\lambda_s = \frac{\lambda + \tilde{\alpha}_{cp}(3\lambda + 2\mu)}{1 - 3\alpha_{cp}(3\lambda + 2\mu)}$, $\alpha_{cp} = \frac{T_0 \alpha^2}{\rho_0 c_\sigma}$, et $\tilde{\alpha}_{cp} = 2\mu \alpha_{cp}$,

$$\text{et } \begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2\mu} \left((\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{\lambda_s}{3\lambda_s + 2\mu} (\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)) \underline{\underline{\mathbb{1}}} \right) + \frac{T_0 \alpha}{c_\sigma} (s - s_0) \underline{\underline{\mathbb{1}}} \\ \tau = \frac{T_0}{c_\sigma} (s - s_0) - \frac{T_0 \alpha}{\rho_0 c_\sigma} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) . \end{cases} \quad (3.54)$$

3.9 Matériau thermoélastique linéaire anisotrope

3.9.1 Cas général

Certains matériaux ne possèdent pas les mêmes propriétés dans toutes directions. C'est notamment le cas des matériaux composites, des monocristaux métalliques, du bois, etc. Néanmoins, ces matériaux, dans une configuration de référence, sont dotés de microstructure présentant des symétries qualifiées de matérielles. Cela signifie que les propriétés du matériau sont invariantes dans toutes les transformations linéaires ou les changements de configuration réalisant ces symétries. Il en est de même de la loi de comportement du matériau. On se limite ici aux matériaux thermoélastiques linéaires. Ainsi, désignons par $w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)$ l'expression de l'énergie libre spécifique relative à la configuration de référence. Effectuons un changement de configuration par une transformation linéaire du groupe \mathcal{G}_S des symétries matérielles, de tenseur associé $\underline{\underline{P}}$. La déformation devient :

$$\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot {}^t \underline{\underline{P}} . \quad (3.55)$$

On a alors

$$w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) = w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) \quad \text{soit} \quad w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) = w(\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot {}^t\underline{\underline{P}}, T), \quad \forall \underline{\underline{\varepsilon}}, \forall \underline{\underline{P}} \in \mathcal{G}_S. \quad (3.56)$$

Par conséquent, les expressions des composantes de la loi de comportement sont les mêmes dans les repères orthonormés qui se correspondent par ces symétries. Dans les exemples qui suivent, les cas classiques de symétries matérielles sont rappelés avec les réductions qu'elles entraînent sur le nombre de coefficients indépendants des différents tenseurs thermoélastiques.

On rappelle que, dans le cas général général (voir section 3.3), le matériau thermoélastique linéaire possède 21 coefficients élastiques indépendants définissant le tenseur d'élasticité $\underline{\underline{\underline{C}}}$ et 6 coefficients thermoélastiques définissant le tenseur $\underline{\underline{k}}$. En adoptant la « notation ingénieur » :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{33} \\ k_{12} \\ k_{13} \\ k_{23} \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

la relation

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}} \tau \quad (3.58)$$

est écrite sous la forme :

$$\sigma_i = \sigma_{0i} + C_{ij} \varepsilon_j + \tau k_i \quad (3.59)$$

avec la matrice symétrique $\underline{\underline{C}}$ définie par :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ & & & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ & & & & C_{1313} & C_{1323} \\ & & & & & C_{2323} \end{bmatrix}$$

Elle possède donc bien 21 coefficients indépendants. On a alors :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ji} = C_{ijkl} \varepsilon_{lk} \varepsilon_{ji} = \sigma_i \varepsilon_i = C_{ij} \varepsilon_j \varepsilon_i \quad (3.60)$$

et l'énergie libre s'écrit :

$$\rho_0 w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) = \sigma_{0i} \varepsilon_i + \frac{1}{2} C_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j - \tau k_i \varepsilon_i - \frac{1}{2} \rho_0 \frac{c_\varepsilon}{T_0} \tau^2 - \rho_0 s_0 \tau. \quad (3.61)$$

La relation de comportement inverse :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \underline{\underline{\alpha}}_T \tau \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\underline{C}}}^{-1} \quad (3.62)$$

est écrite sous la forme :

$$\varepsilon_i = \mathbf{S}_{ij}(\sigma_j - \sigma_{0j}) + \alpha_{Ti} \tau \quad (3.63)$$

avec $\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{S}_{ji}$. Les \mathbf{S}_{ij} sont les composantes de la matrice de souplesse symétrique $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$; elles sont reliées aux composantes de $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ par la relation :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} & \mathbf{S}_{14} & \mathbf{S}_{15} & \mathbf{S}_{16} \\ & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} & \mathbf{S}_{24} & \mathbf{S}_{25} & \mathbf{S}_{26} \\ & & \mathbf{S}_{33} & \mathbf{S}_{34} & \mathbf{S}_{35} & \mathbf{S}_{36} \\ & & & \mathbf{S}_{44} & \mathbf{S}_{45} & \mathbf{S}_{46} \\ & & & & \mathbf{S}_{55} & \mathbf{S}_{56} \\ & & & & & \mathbf{S}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11\ 11} & \mathbf{S}_{11\ 22} & \mathbf{S}_{11\ 33} & 2\mathbf{S}_{11\ 12} & 2\mathbf{S}_{11\ 13} & 2\mathbf{S}_{11\ 23} \\ & \mathbf{S}_{22\ 22} & \mathbf{S}_{22\ 33} & 2\mathbf{S}_{22\ 12} & 2\mathbf{S}_{22\ 13} & 2\mathbf{S}_{22\ 23} \\ & & \mathbf{S}_{33\ 33} & 2\mathbf{S}_{33\ 12} & 2\mathbf{S}_{33\ 13} & 2\mathbf{S}_{33\ 23} \\ & & & 4\mathbf{S}_{12\ 12} & 4\mathbf{S}_{12\ 13} & 4\mathbf{S}_{12\ 23} \\ & & & & 4\mathbf{S}_{13\ 13} & 4\mathbf{S}_{13\ 23} \\ & & & & & 4\mathbf{S}_{23\ 23} \end{bmatrix}.$$

On a coutume de mettre la matrice des souplesses $[\underline{\underline{\mathbf{S}}}]$ sous la forme :

$$[\underline{\underline{\mathbf{S}}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & \frac{\eta_{4,1}}{E_1} & \frac{\eta_{5,1}}{E_1} & \frac{\eta_{6,1}}{E_1} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{\eta_{4,2}}{E_2} & \frac{\eta_{5,2}}{E_2} & \frac{\eta_{6,2}}{E_2} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & \frac{\eta_{4,3}}{E_3} & \frac{\eta_{5,3}}{E_3} & \frac{\eta_{6,3}}{E_3} \\ \frac{\eta_{1,4}}{G_4} & \frac{\eta_{2,4}}{G_4} & \frac{\eta_{3,4}}{G_4} & \frac{1}{G_4} & \frac{G_{5,4}}{G_4} & \frac{G_{6,4}}{G_4} \\ \frac{\eta_{1,5}}{G_5} & \frac{\eta_{2,5}}{G_5} & \frac{\eta_{3,5}}{G_5} & \frac{G_{4,5}}{G_5} & \frac{1}{G_5} & \frac{G_{6,5}}{G_5} \\ \frac{\eta_{1,6}}{G_6} & \frac{\eta_{2,6}}{G_6} & \frac{\eta_{3,6}}{G_6} & \frac{G_{4,6}}{G_6} & \frac{G_{5,6}}{G_6} & \frac{1}{G_6} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

qui met en évidence :

1. les trois modules de Young $E_i, i = 1, 2, 3$ selon les trois directions du repère considéré ($E_i = \sigma_i/\varepsilon_i$ lors d'une traction selon \underline{e}_i),
2. les trois modules de cisaillement $G_k, k = 4, 5, 6$ dans les trois plans 12, 13, 23, ($G_k = \sigma_k/\varepsilon_k$ lors d'un cisaillement dans le plan associé),
3. les six coefficients de Poisson $\nu_{ij}, i \neq j, i, j = 1, 2, 3$. ν_{ij} est égal rapport $-\varepsilon_j/\varepsilon_i$ lors d'une traction selon \underline{e}_i ,
4. les neuf coefficients $\eta_{k,i}, k = 4, 5, 6$ et $i = 1, 2, 3$. $\eta_{k,i}/E_i$ correspond à la dilatation dans la direction i induite par un cisaillement unitaire dans le plan associé à k ,
5. les neuf coefficients $\eta_{i,k}, k = 4, 5, 6$ et $i = 1, 2, 3$. $\eta_{i,k}/G_k$ correspond au glissement dans le plan associé à k induit par une traction unitaire dans la direction i ,
6. les six coefficients $G_{k,l}, k, l = 4, 5, 6$. $G_{k,l}/G_l$ correspond au glissement dans le plan associé à l induit par un cisaillement unitaire dans le plan associé dans la direction k .

La symétrie de $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ implique :

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}, \quad \frac{\eta_{k,i}}{E_i} = \frac{\eta_{i,k}}{G_k}, \quad \frac{G_{k,l}}{E_l} = \frac{G_{l,k}}{E_k}. \quad (3.65)$$

3.9.2 Symétrie par rapport à un plan

Le matériau possède un plan de symétrie défini par les vecteurs unitaires \underline{e}_1 et \underline{e}_2 , qui forment avec le vecteur \underline{e}_3 une base orthogonale. L'application linéaire qui laisse ces vecteurs inchangés et transforme le vecteur \underline{e}_3 en $-\underline{e}_3$ est définie par :

$$\underline{P} = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 . \quad (3.66)$$

Elle transforme le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}$ défini par

$$\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}} = \underline{P} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot {}^t \underline{P} \quad (3.67)$$

dont les composantes sont :

$$\tilde{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11}, \quad \tilde{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_{22}, \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_{33}, \quad \tilde{\varepsilon}_{12} = \varepsilon_{12}, \quad \tilde{\varepsilon}_{13} = -\varepsilon_{13}, \quad \tilde{\varepsilon}_{23} = -\varepsilon_{23} \quad (3.68)$$

ou encore

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1, \quad \tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2, \quad \tilde{\varepsilon}_3 = \varepsilon_3, \quad \tilde{\varepsilon}_4 = \varepsilon_4, \quad \tilde{\varepsilon}_5 = -\varepsilon_5, \quad \tilde{\varepsilon}_6 = -\varepsilon_6 . \quad (3.69)$$

En égalant les expressions de $w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)$ et $w(\underline{P} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot {}^t \underline{P}, T)$, pour tout $\underline{\underline{\varepsilon}}$, on aboutit à une réduction du nombre de composantes indépendantes de $\underline{\underline{C}}$ de 21 à 13, et de celui de \underline{k} qui passe de 6 à 4. Ainsi, les composantes C_{i5}, C_{i6} , pour $i = 1, 2, 3, 4$ sont nulles, de même que k_5 et k_6 . La matrice (3.9.1), exprimée dans la base privilégiée $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, devient dans ce cas :

$$[\underline{\underline{C}}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ & & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} . \quad (3.70)$$

3.9.3 Matériau orthotrope

Le matériau possède trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux, définis par les vecteurs unitaires \underline{e}_1 , \underline{e}_2 et \underline{e}_3 . On reprend la procédure utilisée dans le cas précédent. Les trois applications linéaires \underline{P}_l , $l = 1, 2, 3$ correspondant aux trois symétries par rapport aux plans orthogonaux sont cette fois-ci considérées. L'égalité entre les expressions $w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)$ et $w(\underline{P}_l \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot {}^t \underline{P}_l, T)$, $\forall \underline{\underline{\varepsilon}}, l = 1, 2, 3$, conduit d'une part, à la nullité des composantes $C_{i4, i=1,2,3}$, $C_{i5, i=1,2,3,4}$, $C_{i6, i=1,2,3,4,5}$ qui réduit le nombre de composantes indépendantes de $\underline{\underline{C}}$ de 21 à 9, d'autre part à celle des composantes k_4, k_5 et k_6 de \underline{k} qui passent de 6 à 3.

$$[\underline{\underline{C}}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} . \quad (3.71)$$

Le tenseur des souplesses (3.9.1) s'écrit alors :

$$[\underline{S}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

avec :

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1} \quad \text{et} \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}, \quad (3.73)$$

faisant apparaître :

1. E_i le module de Young selon la direction \underline{e}_i de symétrie matérielle,
2. ν_{ij} le coefficient de Poisson égal au rapport $-\varepsilon_j/\varepsilon_i$ lors d'une traction selon \underline{e}_i ,
3. G_{ij} le module de cisaillement dans le plan défini par \underline{e}_i et \underline{e}_j .

3.9.4 Matériau à symétrie cubique

C'est un matériau orthotrope dont les trois directions privilégiées sont équivalentes. Le tenseur d'élasticité \underline{C} est alors :

$$[\underline{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

ce qui donne trois coefficients indépendants. Quant au tenseur \underline{k} , il n'a plus qu'une composante dans le repère privilégié.

3.9.5 Matériau orthotrope de révolution

C'est un matériau dit aussi isotrope transverse dans la configuration de référence ; il possède un axe de symétrie \underline{e}_3 . Le tenseur \underline{P} correspondant à une rotation d'angle θ autour \underline{e}_3

est :

$$(\underline{P}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Le tenseur des déformations $\underline{\tilde{\varepsilon}}$ défini par

$$\underline{\tilde{\varepsilon}} = \underline{P} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot {}^t \underline{P} \quad (3.76)$$

a pour composantes :

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11} \cos^2 \theta + \varepsilon_{12} \sin 2\theta + \varepsilon_{22} \sin^2 \theta \\ \tilde{\varepsilon}_{12} = (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \frac{\sin 2\theta}{2} + \varepsilon_{12} \cos 2\theta \\ \tilde{\varepsilon}_{13} = \varepsilon_{13} \cos \theta + \varepsilon_{23} \sin \theta \\ \tilde{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_{22} \cos^2 \theta - \varepsilon_{12} \sin 2\theta + \varepsilon_{11} \sin^2 \theta \\ \tilde{\varepsilon}_{23} = -\varepsilon_{13} \sin \theta + \varepsilon_{23} \cos \theta \\ \tilde{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_{33} \end{cases} \quad (3.77)$$

Les invariants du premier et second ordre de $\underline{\tilde{\varepsilon}}$ dans ces rotations, au nombre de quatre, sont $\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}$, $\tilde{\varepsilon}_{11}\tilde{\varepsilon}_{22} - \tilde{\varepsilon}_{12}^2$, $\tilde{\varepsilon}_{13}^2 + \tilde{\varepsilon}_{23}^2$ et $\tilde{\varepsilon}_{33}$. La forme quadratique $\frac{1}{2}\underline{\varepsilon} : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}$ a donc cinq termes non nuls donnant les cinq composantes de $\underline{\underline{C}}$ dans le repère privilégié :

$$[\underline{\underline{C}}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22}) & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{55} \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

Le tenseur $\underline{\underline{C}}$ a donc 5 composantes non nulles et le tenseur \underline{k} en a 2. Avec les notations usuelles, cette matrice s'écrit :

$$[\underline{\underline{C}}] = \begin{bmatrix} \lambda_{\perp} + 2\mu_{\perp} & \lambda_{\perp} & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda_{\perp} & \lambda_{\perp} + 2\mu_{\perp} & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda & \lambda & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & \mu_{\perp} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & G & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Le tenseur inverse, définissant la relation $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \underline{\underline{\alpha}}_T \tau$, est noté :

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{\perp}} & -\frac{\nu_{\perp}}{E_{\perp}} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{\perp}}{E_{\perp}} & \frac{1}{E_{\perp}} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{\perp})}{E_{\perp}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

faisant apparaître :

1. E le module de Young selon la direction e_3 de symétrie matérielle,
2. ν le coefficient de Poisson égal au rapport $-\varepsilon_{11}/\varepsilon_{33}$ lors d'une traction selon e_3 ,
3. E_{\perp} le module de Young selon une direction du plan perpendiculaire à e_3 ,
4. ν_{\perp} le coefficient de Poisson égal au rapport $-\varepsilon_{22}/\varepsilon_{11}$ lors d'une traction selon e_1 ,
5. G le module de cisaillement entre la direction e_3 et son plan perpendiculaire.

3.10 Comportement thermoélastique : cas de grandes variations de température

On considère cette fois-ci des grandes variations de température⁸, associées à des déformations infinitésimales autour de l'état initial défini par les variables d'état $\underline{\underline{\varepsilon}}_0 = 0$ et T_0 . Le potentiel thermodynamique naturel, cohérent avec ce choix de variables, est l'énergie libre de Helmholtz. Ainsi, les fonctions d'état, énergie libre et entropie, s'écrivent : $w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)$ et $s(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)$. L'état d'équilibre initial, qui sert de configuration de référence, est défini par les variables d'état $\underline{\underline{\varepsilon}}_0 = 0$ et T_0 , la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}_0 = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}_0, T_0)$ et l'entropie $s_0 = s(\underline{\underline{\varepsilon}}_0, T_0)$.

En développant le potentiel thermodynamique au second ordre en déformation, on obtient :

$$\rho w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) = \rho w(0, T) + \frac{\partial(\rho w)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(0, T) : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial^2(\rho w)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}} \partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(0, T) : \underline{\underline{\varepsilon}}. \quad (3.81)$$

8. Voir : D. Boussaa. Effective thermoelastic properties of composites with temperature-dependent constituents, *Mechanics of Materials* 43 :8, 2011, 397-407.

Les expressions, au premier ordre en déformation⁹, des lois d'état (3.1) sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) = \rho_0 \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(0, T) + \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}} \partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(0, T) : \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \quad \quad \quad = \underline{\underline{\sigma}}(0, T) + \underline{\underline{\underline{C}}}(T) : \underline{\underline{\varepsilon}} \\ s(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) = -\frac{\partial w}{\partial T}(0, T) - \frac{\partial^2 w}{\partial T \partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(0, T) : \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \quad \quad \quad = s(0, T) + \frac{\underline{\underline{k}}(T)}{\rho_0} : \underline{\underline{\varepsilon}}. \end{array} \right. \quad (3.82)$$

Ces lois mettent en évidence les grandeurs physiques suivantes :

- le tenseur d'élasticité

$$\underline{\underline{\underline{C}}}(T) = \rho_0 \frac{\partial^2 w(0, T)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}} \partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (3.83)$$

- et le tenseur des coefficients thermoélastiques ;

$$\underline{\underline{k}}(T) = -\rho_0 \frac{\partial^2 w(0, T)}{\partial T \partial \underline{\underline{\varepsilon}}} . \quad (3.84)$$

Ce dernier terme permet de préciser l'expression de la quantité $\underline{\underline{\sigma}}(0, T)$. En effet,

$$\underline{\underline{k}}(T) = -\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}(0, T)}{\partial T} \quad (3.85)$$

d'où

$$\underline{\underline{\sigma}}(0, T) - \underline{\underline{\sigma}}_0 = -\int_{T_0}^T \underline{\underline{k}}(v) dv , \quad (3.86)$$

et par conséquent :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) = \underline{\underline{\sigma}}_0 - \int_{T_0}^T \underline{\underline{k}}(v) dv + \underline{\underline{\underline{C}}}(T) : \underline{\underline{\varepsilon}} . \quad (3.87)$$

Cette expression peut aussi s'écrire en faisant intervenir le tenseur des dilatations thermiques instantanées $\underline{\underline{\alpha}}_{\text{tan}}(T)$ défini par :

$$\underline{\underline{\alpha}}_{\text{tan}}(T) = \frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\sigma}}_0, T)}{\partial T} . \quad (3.88)$$

En effet, de la relation (3.87), on tire :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\sigma}}, T) = \underline{\underline{\underline{C}}}^{-1}(T) : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \underline{\underline{\underline{C}}}^{-1}(T) : \int_{T_0}^T \underline{\underline{k}}(v) dv . \quad (3.89)$$

9. Ceci a conduit à ne pas prendre en compte le terme $\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial^3 (\rho w)}{\partial T \partial \underline{\underline{\varepsilon}} \partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(0, T) : \underline{\underline{\varepsilon}}$ dans l'expression de l'entropie (Éq. 3.82).

d'où

$$\underline{\underline{\alpha}}_{\tan}(T) = \frac{d}{dT} \left(\underline{\underline{C}}^{-1}(T) : \int_{T_0}^T \underline{\underline{k}}(v) dv \right), \quad (3.90)$$

ou encore

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{\sigma}}, T) = \underline{\underline{C}}^{-1}(T) : (\underline{\underline{\sigma}}(T) - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \int_{T_0}^T \underline{\underline{\alpha}}_{\tan}(v) dv. \quad (3.91)$$

En définissant $\underline{\underline{\alpha}}_{\text{sec}}(T)$, le tenseur moyen des dilatations thermiques entre T_0 et T , par :

$$\underline{\underline{\alpha}}_{\text{sec}}(T) = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T \underline{\underline{\alpha}}_{\tan}(v) dv, \quad (3.92)$$

la déformation se met sous la forme :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{\sigma}}, T) = \underline{\underline{C}}^{-1}(T) : (\underline{\underline{\sigma}}(T) - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \underline{\underline{\alpha}}_{\text{sec}}(T) (T - T_0), \quad (3.93)$$

et la contrainte s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\epsilon}}, T) = \underline{\underline{C}}(T) : \underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{C}}^{-1}(T) : \underline{\underline{\alpha}}_{\text{sec}}(T) (T - T_0) + \underline{\underline{\sigma}}_0. \quad (3.94)$$

Le terme $s(0, T)$ peut aussi être précisé en faisant intervenir la capacité calorifique spécifique à déformation constante $c_\epsilon(\underline{\underline{\epsilon}}, T)$ définie par

$$c_\epsilon(\underline{\underline{\epsilon}}, T) = T \frac{\partial s(\underline{\underline{\epsilon}}, T)}{\partial T}. \quad (3.95)$$

Elle s'écrit dans ce cas :

$$c_\epsilon(\underline{\underline{\epsilon}}, T) = -T \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial w(0, T)}{\partial T} \right) + \frac{\partial^3 w(0, T)}{\partial T^2 \partial \underline{\underline{\epsilon}}} : \underline{\underline{\epsilon}} \right). \quad (3.96)$$

On a donc :

$$c_\epsilon(0, T) = -T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial w(0, T)}{\partial T} \right). \quad (3.97)$$

L'intégration entre les températures T_0 et T de l'équation (3.97), donne :

$$-\frac{\partial w(0, T)}{\partial T} = s_0 + \int_{T_0}^T \frac{c_\epsilon(0, t)}{t} dt, \quad (3.98)$$

ce qui conduit à l'expression suivante de l'entropie :

$$s(\underline{\underline{\epsilon}}, T) = s_0 + \int_{T_0}^T \frac{c_\epsilon(0, v)}{v} dv + \frac{\underline{\underline{k}}(T)}{\rho_0} : \underline{\underline{\epsilon}}. \quad (3.99)$$

En résumé, la loi de comportement s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) &= \underline{\underline{\sigma}}_0 - \int_{T_0}^T \underline{\underline{k}}(v) dv + \underline{\underline{\mathbb{C}}}(T) : \underline{\underline{\varepsilon}} \\ s(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) &= s_0 + \int_{T_0}^T \frac{c_\epsilon(0, v)}{v} dv + \frac{\underline{\underline{k}}(T)}{\rho_0} : \underline{\underline{\varepsilon}} \end{cases} \quad (3.100)$$

Dans le cas où le tenseur d'élasticité, le tenseur des coefficients thermoélastiques et la capacité calorifique varient très peu autour de leurs valeurs initiales dans la gamme de température considérée, on a les approximations suivantes :

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}}(T) \simeq \underline{\underline{\mathbb{C}}}(T_0), \quad \underline{\underline{k}}(T) \simeq \underline{\underline{k}}(T_0) \quad \text{et} \quad c_\epsilon(0, T) \simeq c_\epsilon(T_0).$$

En effectuant les intégrations apparaissant dans les équations (3.100), on obtient les lois d'état :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) &= \underline{\underline{\sigma}}_0 - \underline{\underline{k}}(T_0)(T - T_0) + \underline{\underline{\mathbb{C}}}(T_0) : \underline{\underline{\varepsilon}} \\ s(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) &= s_0 + c_\epsilon(T_0) \ln \frac{T}{T_0} + \frac{\underline{\underline{k}}(T_0)}{\rho_0} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} &= \underline{\underline{\sigma}}_0 - \underline{\underline{k}}(T_0)(T - T_0) + \underline{\underline{\mathbb{C}}}(T_0) : \underline{\underline{\varepsilon}} \\ -\frac{\partial w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)}{\partial T} &= s_0 + c_\epsilon(T_0) \ln \frac{T}{T_0} + \frac{\underline{\underline{k}}(T_0)}{\rho_0} : \underline{\underline{\varepsilon}}. \end{cases}$$

Par intégration, on trouve l'expression suivante de l'énergie libre $w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T)$ développée au second ordre en déformation :

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_0 w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) &= \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\sigma}}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}} - (T - T_0) \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \\ &\quad - \rho_0 c_\epsilon T \left(\ln \frac{T}{T_0} - 1 + \frac{T_0}{T} \right) - \rho_0 (T - T_0) s_0 + w_0. \end{aligned}} \quad (3.101)$$

Dans cette expression, les grandeurs $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$, $\underline{\underline{k}}$, c_ϵ , $\underline{\underline{\sigma}}_0$, s_0 et w_0 sont évaluées à $(0, T_0)$. Cette dépendance a été omise afin d'alléger l'écriture de l'énergie libre.

Remarque : Si on fait l'hypothèse des petites variations de température $(T - T_0) \ll T_0$, un développement limité de (3.101) en $(T - T_0)$ permet de retrouver l'expression (3.15) de l'énergie libre.

On déduit les lois d'état suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{k}}(T - T_0) \\ s &= s_0 + \frac{\underline{\underline{k}}}{\rho_0} : \underline{\underline{\varepsilon}} + c_\epsilon \ln \frac{T}{T_0}. \end{cases} \quad (3.102)$$

3.11 Récapitulatif

• Thermoélasticité isotrope linéarisée

Énergie libre de Helmholtz :

$$\rho_0 w(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) = \frac{1}{2} \lambda (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}})^2 + \mu \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - k \tau (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) + \underline{\underline{\sigma}}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \rho_0 \frac{c_\varepsilon}{T_0} \tau^2 - \rho_0 s_0 \tau$$

Lois d'état et loi de Fourier :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \lambda (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} - k\tau \underline{\underline{\mathbf{1}}} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \alpha\tau \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ s = s_0 + \frac{k}{\rho_0} \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) + \frac{c_\varepsilon}{T_0} \tau \\ \underline{\underline{q}} = -\mathcal{K} \nabla T \end{array} \right.$$

Équation de la dynamique et équation de la chaleur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho_0 \underline{\underline{F}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \underline{\underline{\xi}}}{\partial t^2} \\ \rho_0 c_\varepsilon \dot{T} - \mathcal{K} \Delta T = r - T_0 k (\text{tr} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}) \end{array} \right.$$

Relations entre les coefficients thermoélastiques :

$$\begin{array}{lll} \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} & k = \alpha(3\lambda + 2\mu) = \frac{\alpha E}{(1-2\nu)} \\ E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} & \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} & \alpha = \frac{k}{3\lambda + 2\mu} = \frac{k(1-2\nu)}{E} \end{array}$$

*Autres potentiels thermoélastiques dans le cas isotrope

• Énergie interne

$$\rho_0 e(\underline{\underline{\varepsilon}}, s) = \frac{1}{2} \lambda_a (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}})^2 + \mu \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\sigma}}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}} \\ + \frac{1}{2} \frac{T_0}{c_\epsilon} (s - s_0)^2 - \frac{T_0 k}{\rho_0 c_\epsilon} (s - s_0) (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) + \rho_0 T_0 s,$$

et les lois d'état

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \lambda_a (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{T_0}{c_\epsilon} (s - s_0) k \underline{\underline{\mathbf{1}}} \quad \text{avec } \lambda_a = \lambda + \frac{T_0 k^2}{\rho_0 c_\epsilon} \\ T = T_0 + \frac{T_0}{c_\epsilon} (s - s_0) - \frac{T_0 k}{\rho_0 c_\epsilon} (\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}). \end{array} \right.$$

• Énergie libre de Gibbs

$$\rho_0 g(T, \underline{\underline{\sigma}}) = -\frac{1}{4\mu} \left((\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\text{tr} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0))^2 \right) \\ - \alpha \tau \text{tr} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{1}{2} \rho_0 \frac{c_\sigma}{T_0} \tau^2 - \rho_0 s_0 \tau$$

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{\nu}{E} (\text{tr} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \alpha \tau \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ = \frac{1}{2\mu} \left((\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\text{tr} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)) \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right) + \alpha \tau \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ s = s_0 + \frac{\alpha}{\rho_0} \text{tr} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \frac{c_\sigma}{T_0} \tau. \end{array} \right.$$

• Enthalpie

$$\rho_0 h(s, \underline{\underline{\sigma}}) = -\frac{1}{4\mu} \left((\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{\lambda_s}{3\lambda_s + 2\mu} (\text{tr} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0))^2 \right) \\ - \frac{T_0 \alpha (s - s_0)}{c_\sigma} \text{tr} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \frac{1}{2} \frac{\rho_0 T_0}{c_\sigma} (s - s_0)^2 + \rho_0 T_0 s$$

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2\mu} \left((\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{\lambda_s}{3\lambda_s + 2\mu} (\text{tr} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)) \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right) + \frac{T_0 \alpha}{c_\sigma} (s - s_0) \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ \tau = \frac{T_0}{c_\sigma} (s - s_0) - \frac{T_0 \alpha}{\rho_0 c_\sigma} \text{tr} (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0). \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \lambda_s = \frac{\lambda + \tilde{\alpha}_{cp} (3\lambda + 2\mu)}{1 - 3\alpha_{cp} (3\lambda + 2\mu)}, \quad \alpha_{cp} = \frac{T_0 \alpha^2}{\rho_0 c_\sigma} \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}_{cp} = 2\mu \alpha_{cp}$$

3.12 Exercices

Exercice 3.1 Thermoélasticité en transformation infinitésimale

Un élément important de la validation des modèles phénoménologiques macroscopiques est la quantification par des moyens expérimentaux, des énergies mises en jeu par les différents mécanismes. Des techniques comme la thermographie infrarouge sont développées pour permettre à partir des mesures de température en surface de remonter aux puissances thermiques afin de pouvoir contrôler l'adéquation des modèles aux observations physiques. Cet exercice^a, qui sera poursuivi en plasticité, constitue une introduction sommaire à cette problématique.

On considère une éprouvette cylindrique, d'axe Oz , de rayon $R = 1\text{cm}$ et de hauteur $L = 10\text{cm}$. Dans cette configuration initiale prise comme référence, l'éprouvette est à l'état naturel, à la température $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Son matériau constitutif est un acier DP60 considéré comme thermoélastique linéaire, isotrope et homogène. Ses caractéristiques (module de Young E , coefficient de Poisson ν , coefficient de dilatation thermique α , masse volumique ρ , conductivité thermique K , chaleur spécifique à déformation constante c_ϵ) supposées indépendantes de la température sont données dans le tableau ci-dessous.

E (MPa)	ν	α (K^{-1})	ρ (kg/m^3)	K ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$)	c_ϵ ($\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$)
210000.	0.3	$1.5 \cdot 10^{-5}$	7800.	64	460

L'éprouvette est en évolution sous l'action d'efforts surfaciques exclusivement exercés sur ses sections extrêmes $S_0(z = 0)$ et $S_L(z = L)$. Sur S_0 , les efforts sont : $\underline{T} = -\sigma(t)\underline{e}_z$ et sur S_L , $\underline{T} = \sigma(t)\underline{e}_z$. La surface latérale est libre de contrainte. On néglige les forces de masse.

A. Évolution adiabatique

On s'intéresse à la phase de la première traction entre $t_0 = 0$ et t_f , effectuée avec une contrainte imposée $\sigma(t)$ strictement croissante de 0 à $\sigma_m > 0$. On suppose cette phase suffisamment rapide pour que l'évolution soit considérée comme adiabatique.

1. Montrer que la température de l'éprouvette baisse quand la contrainte augmente.
2. Donner la variation de température entre les instants t_0 et t_f .
3. Déterminer les modules d'élasticité adiabatiques λ_a et μ_a ($\underline{\sigma} = \lambda_a(\text{tr}\underline{\epsilon})\underline{\mathbb{1}} + 2\mu_a\underline{\underline{\epsilon}}$), et comparer les aux modules isothermes λ et μ .
4. Établir la relation entre les capacités calorifiques spécifiques à déformation constante (c_ϵ) et à contrainte constante (c_σ). Montrer que l'on a : $(3\lambda_a + 2\mu_a)c_\epsilon = (3\lambda + 2\mu)c_\sigma$.

a. Cet exercice a été élaboré à partir de l'article suivant : Boulanger T., Chrysochoos A., Mabru C., Galtier A. Calorimetric analysis of dissipative and thermoelastic effects associated with the fatigue behavior of steels, *International Journal of Fatigue*, 26, pp 221-229, 2004.

B. Évolution cyclique avec échanges par convection

On s'intéresse dans la suite à la réponse thermique sous le chargement sinusoïdal

$$\sigma(t) = \sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi ft)$$

f est la fréquence de sollicitation, les contraintes σ_m et $\sigma_a > 0$ sont données. On suppose toujours la température uniforme dans l'éprouvette, mais on souhaite tenir compte de pertes par convection qui caractérisent les échanges de la chaleur avec le milieu environnant. On suppose que cet échange se fait uniquement par la surface latérale ($r = R$), suivant la loi :

$$\underline{q} \cdot \underline{n} = h(T - T_0)$$

avec $h > 0$ le coefficient de convection, T_0 la température du milieu extérieur est aussi la température initiale de la pièce.

5. Écrire l'ensemble des équations de ce problème de thermoélasticité couplé.
6. En utilisant l'ensemble des symétries et hypothèses du problème (géométrie, comportement, chargement) et les propriétés de l'évolution quasi-statique, déduire que :

$$\rho c_\sigma \frac{\partial T}{\partial t} - K \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = r_{eq}$$

en tout point du cylindre, et expliciter le terme r_{eq} de la source volumique de chaleur.

7. Le cylindre est élancé : $R \ll H$. La température moyennée sur la section S

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{S} \int_S T(r, \theta, t) dS$$

est alors considérée comme une bonne approximation pour décrire l'état de la section S .

Montrer que dans ce cas, le problème thermique se réduit à :

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} + \frac{\bar{\tau}}{t_e} = -\frac{\alpha T_0}{\rho c_\sigma} \frac{d\sigma}{dt}$$

avec t_e une constante que l'on déterminera et $\bar{\tau}(t) = \bar{T}(t) - T_0$.

8. Déterminer l'évolution de la température en fonction du temps.
9. Étudier la dépendance de $2T_a = (T_{max} - T_{min})$ par rapport à la fréquence f .

Éléments de réponse

1. La variation de la température est reliée à celle de la contrainte par :

$$\dot{T} = - \frac{T_0 \alpha}{\rho c_\epsilon + 3(3\lambda + 2\mu)\alpha^2 T_0} \operatorname{tr} \underline{\dot{\epsilon}} .$$

2. Par intégration, on trouve :

$$\Delta T_f = T_f - T_0 = - \frac{T_0 \alpha \sigma_m (1 - 2\nu)}{\rho c_\epsilon (1 - 2\nu) + 3E\alpha^2 T_0} .$$

Pour $\sigma_m = 1200\text{MPa}$, on obtient $\Delta T = 0, 1\text{K}$.

3. En utilisant la relation entre τ et $\operatorname{tr} \underline{\epsilon}$ dans le cas adiabatique, pour éliminer τ de la loi de comportement thermoélastique linéaire, on obtient :

$$\lambda_a = \lambda + \frac{k^2 T_0}{\rho c_\epsilon} = \lambda + \frac{\alpha^2 E^2 T_0}{\rho c_\epsilon (1 - 2\nu)^2} \quad \text{et} \quad \mu_a = \mu .$$

4. On exprime \dot{s} en fonction de $\dot{\epsilon}$ et \dot{T} puis de $\dot{\sigma}$ et \dot{T} pour obtenir :

$$c_\sigma = c_\epsilon + \frac{3\alpha k T_0}{\rho} \quad \text{ou encore} \quad (3\lambda + 2\mu)c_\sigma = (3\lambda_a + 2\mu_a)c_\epsilon .$$

$$7. \quad \tau_e = \frac{\rho R c_\sigma}{2h} .$$

$$8. \quad \tau(t) = (\Delta T_f + A \sin \varphi) e^{-t/\tau_e} - A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad A = \frac{\alpha \omega \sigma_a T_0}{\rho c_\sigma \sqrt{1/\tau_e^2 + \omega^2}} .$$

$$9. \quad \Delta T = T_{max} - T_{min} = \frac{4\pi\alpha\sigma_a f T_0}{\rho c_\epsilon \sqrt{1/\tau_e^2 + 4\pi^2 f^2}} .$$

Exercice 3.2 Stabilité d'un matériau thermoélastique à liaison interne

On considère un matériau thermoélastique doté d'une liaison interne : $l(\underline{\underline{\epsilon}}, T) = 0$. Montrer qu'un tel matériau est instable, dans sa configuration naturelle. (On montrera, en choisissant par exemple σ et s comme variables d'état, que le tenseur d'élasticité ne vérifie pas la condition de positivité assurant la stabilité pour des évolutions isothermes).

Éléments de réponse

La relation (3.52), définissant $\underline{\underline{\epsilon}}$ en fonction de $\underline{\underline{\sigma}}$ et de s , s'écrit :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \left(\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} - \frac{T_0}{\rho_0 c_\sigma} \underline{\underline{\alpha}} \otimes \underline{\underline{\alpha}} \right) : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + \frac{T_0}{c_\sigma} (s - s_0) \underline{\underline{\alpha}} .$$

On pose : $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} - \frac{T_0}{\rho_0 c_\sigma} \underline{\underline{\alpha}} \otimes \underline{\underline{\alpha}}$. La dérivée temporelle de la liaison interne donne la relation :

$$l_{,\epsilon} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + l_{,T} \dot{T} = 0 .$$

Pour des évolutions isothermes, on a donc : $l_{,\varepsilon} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = 0$ puis $l_{,\varepsilon} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}^{-1} : \dot{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}} = 0$. Si $l_{,\varepsilon} : \underline{\underline{\underline{\alpha}}}$ est non nul, on obtient alors :

$$l_{,\varepsilon} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{A}}}} : l_{,\varepsilon} = l_{,\varepsilon} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}^{-1} : l_{,\varepsilon} - \frac{T_0}{\rho_0 c_\sigma} (l_{,\varepsilon} : \underline{\underline{\underline{\alpha}}})^2 = -\frac{T_0}{\rho_0 c_\sigma} (l_{,\varepsilon} : \underline{\underline{\underline{\alpha}}})^2 < 0,$$

qui illustre un cas d'instabilité.

Exercice 3.3 Thermoélasticité non linéaire

On considère un solide thermoélastique dont le comportement, en transformation uniaxiale, est défini par l'énergie libre spécifique de Helmholtz $w(\varepsilon, T)$ suivante :

$$w(\varepsilon, T) = \frac{1}{2} E T \varepsilon^4 + C T (1 - \ln T).$$

E et C sont deux constantes strictement positives.

1. Donner l'expression de l'entropie et de l'énergie interne en fonction de la déformation et de la température.
2. On effectue une traction isotherme. Comment varie l'énergie interne ? Donner une explication de ce phénomène en précisant ce que devient l'énergie mécanique fournie.
3. On effectue une traction adiabatique à vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ constante. Calculer la variation de température correspondante.

Éléments de réponse

1. L'entropie est donnée par : $s = -\frac{\partial w}{\partial T} = -\frac{1}{2} E \varepsilon^4 + C \ln T$.
L'énergie interne est donnée par : $e = w + T s = C T$.
2. Dans une traction isotherme, l'énergie interne ne varie pas. Le premier principe, en quasi-statique, s'écrit : $\dot{e} = \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_{\text{cal}}$.
Comme $\dot{e} = 0$, toute l'énergie mécanique fournie est évacuée vers l'extérieur sous forme de chaleur pour maintenir la température constante.
3. Dans une transformation adiabatique, il n'y a pas d'échange de chaleur. Dans ce contexte, la variation d'entropie est nulle, ce qui donne : $\dot{s} = 0$ soit $C \frac{\dot{T}}{T} = 2 E \varepsilon^3 \dot{\varepsilon}$.

CHAPITRE 4

Comportement dissipatif indépendant du temps physique

"It is most convenient to develop the theory in terms which are general enough to encompass relevant material behaviors but at the same time so simple that the essential content is kept clear."

J.R. Rice, Inelastic constitutive relations for solids : an internal-variable theory and its application to metal plasticity, *JMPS*, 1971.

À la fin de ce chapitre, vous devriez savoir

- *La structure des lois de comportement élastoplastiques :*
 - *la forme de l'énergie libre de Helmholtz,*
 - *les trois fonctions permettant de définir de manière équivalente les lois d'évolutions dans le cas standard généralisé.*
- *Reconnaître les différents types d'écroissements (cinématiques et isotropes, linéaires et non linéaires).*
- *L'estimation de l'énergie dissipée dans les différents modèles.*

4.1 Présentation

Dans ce chapitre, une première classe de comportements présentant de la dissipation intrinsèque est abordée d'abord dans un **cadre isotherme**. Il s'agit de celle formée par certains matériaux élastoplastiques ou endommageables. Le comportement élastoplastique est présenté, à la température ambiante, par les matériaux métalliques soumis à des sollicitations dépassant un certain seuil. Il se caractérise par une indépendance par rapport à la vitesse de sollicitation et par des déformations permanentes après déchargement total. Il se manifeste dans les opérations de formage, dans les problèmes de choc et de crash ¹.

Dans un premier temps, la structure générale des modèles de comportement élastoplastiques étudiés est établie dans le cadre de la transformation infinitésimale. La déformation plastique est d'abord définie à partir des variables internes. L'indépendance des coefficients

1. Dans les problèmes de crash, la dépendance du comportement par rapport à la vitesse de chargement est généralement prise en compte.

d'élasticité par rapport aux variables internes confère une forme particulière à l'énergie libre. De même, les comportements étudiés, intrinsèquement dissipatifs, sont indépendants du temps physique. Cette dernière propriété signifie que la réponse du matériau ne dépend pas de la vitesse de la sollicitation et s'effectue de façon concomitante à la sollicitation. Les relations de comportement sont alors invariantes par homothétie positive sur la variable temps et la dissipation intrinsèque devient une fonction des flux positivement homogène de degré un, paramétrée par les variables d'état actuelles. Elle sert alors aussi de potentiel de dissipation.

Des exemples classiques de comportement élastoplastique (parfait, à écrouissages isotrope, cinématique linéaire et non linéaire, etc.) sont donnés² en mettant en évidence la structure définie. La démarche choisie, la même dans tous les cas, part des essais uniaxiaux pour identifier un assemblage rhéologique susceptible de rendre compte des principaux phénomènes observés. Une extension tridimensionnelle de ce modèle est ensuite effectuée.

Une introduction à l'endommagement est enfin présentée dans un cadre standard généralisé.

4.2 Structure de la loi de comportement

Dans cette section, la structure de la loi de comportement élastoplastique classique est mise en évidence en utilisant des propriétés générales de cette classe de matériaux. Les hypothèses qui vont être progressivement formulées sont :

- transformations infinitésimales et isothermes ;
- indépendance des modules d'élasticité par rapport aux variables internes ;
- indépendance du comportement par rapport au temps physique.

Les résultats qui en découlent, établis dans la suite de cette section, sont :

1. la décomposition de la déformation totale $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en une déformation plastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ uniquement fonction des variables internes α et d'une déformation élastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ fonction de la contrainte actuelle : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^p(\alpha)$;
2. la séparation de l'énergie libre en deux parties : l'une dépendant de la déformation élastique et l'autre de l'écrouissage : $w(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha) = w_e(\underline{\underline{\varepsilon}}^e) + w_\alpha(\alpha)$;
3. la dissipation comme fonction positivement homogène de degré un en taux de variables dissipatives : $d_1(\lambda \dot{\alpha}) = \lambda d_1(\dot{\alpha})$ pour tout $\lambda \geq 0$.

Finalement, dans un cadre standard généralisé, le matériau sera décrit par deux potentiels : l'énergie libre de Helmholtz séparable en deux parties, le potentiel de dissipation positivement homogène de degré un en taux de variables internes.

2. Les formulations élégantes de l'élastoplasticit  crouissable pour dériver certains résultats d'unicité sont essentiellement dues à Q.S. Nguyen, "Contribution à la théorie macroscopique de l'élastoplasticité avec écrouissage", thèse de l'université Paris VI, 1973, et à B. Halphen & Q.S. Nguyen, "Sur les matériaux standards généralisés", J. de Mécanique, 14, 1, pp 39-63, 1975.