Chapitre 2

E.D.P. d'ordre un

Les équations aux dérivées partielles constituent le champ d'application le plus important de la théorie des distributions. Elles en ont d'ailleurs été, historiquement, la motivation première.

La théorie des équations aux dérivées partielles d'ordre un se ramène, dans une certaine mesure, à celle des systèmes d'équations différentielles ordinaires.

C'est donc par l'étude de ces équations que nous commencerons, et nous verrons sur plusieurs exemples qu'il est naturel d'avoir à considérer des solutions d'équations aux dérivées partielles qui ne soient pas forcément différentiables. Cette constatation fait sentir la nécessité de généraliser les notions usuelles du calcul différentiel.

2.1 L'équation de transport

L'équation de transport est le prototype des équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre. Elle s'écrit

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0\,,$$

où l'inconnue $f:\ (t,x) \mapsto f(t,x)$ est une fonction à valeurs réelles de classe C^1 définie sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, et où $v \in \mathbf{R}^N$ est un vecteur donné.

Il s'agit d'un modèle intervenant dans diverses branches de la physique (théorie cinétique des gaz ou des plasmas, optique géométrique, neutronique...) L'inconnue $f(t,x)$ désignera, selon le contexte, une densité d'énergie ou de nombre de particules au point x à l'instant t, dont le vecteur v est la vitesse de propagation.

La notation $\nabla_x f$ désignera tout au long de ce chapitre le gradient de f par rapport aux variables $x = (x_1, \ldots, x_N)$:

$$\nabla_x f(t,x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(t,x) \\ \vdots \\ \partial_{x_N} f(t,x) \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$v \cdot \nabla_x f(t,x) = \sum_{k=1}^{N} v_k \partial_{x_k} f(t,x)\,.$$

Soit $y \in \mathbf{R}^N$; posons, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\gamma(t) = y + tv$; alors γ est une application de classe C^1 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^N$ vérifiant

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = v\,.$$

Définition 2.1.1
L'ensemble $\{(t,\gamma(t))\,|\,t \in \mathbf{R}\}$ est une droite de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N$, appelée "courbe caractéristique issue de y pour l'opérateur de transport $\partial_t + v \cdot \nabla_x$".

Soit $f \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$ solution de l'équation de transport. L'application $t \mapsto f(t,\gamma(t))$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$ (comme composée des applications f et $t \mapsto (t,\gamma(t))$, toutes deux de classe C^1), et on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(t,\gamma(t)) &= \partial_t f(t,\gamma(t)) + \sum_{k=1}^{N} \partial_{x_k} f(t,\gamma(t)) \frac{d\gamma_k}{dt}(t)\\ &= \partial_t f(t,\gamma(t)) + \sum_{k=1}^{N} v_k \partial_{x_k} f(t,\gamma(t))\\ &= (\partial_t f + v \cdot \nabla_x f)(t,\gamma(t)) = 0\,.\end{aligned}$$

Ainsi, toute solution de classe C^1 de l'équation de transport reste constante le long de chaque courbe caractéristique.

Théorème 2.1.2
Soit $f^{in} \in C^1(\mathbf{R}^N)$. Le problème de Cauchy d'inconnue f

$$\begin{aligned}\partial_t f(t,x) + v \cdot \nabla_x f(t,x) &= 0\,, \quad x \in \mathbf{R}^N\,,\ t > 0\,,\\ f(0,x) &= f^{in}(x)\,, \quad x \in \mathbf{R}^N\,,\end{aligned}$$

admet une unique solution $f \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$, donnée par la formule

$$f(t,x) = f^{in}(x - tv) \quad \textit{pour tout } (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N.$$

Cette formule explicite pour la solution de l'équation de transport en justifie le nom : le graphe de la donnée initiale f^{in} est en effet transporté par la translation de vecteur tv.

Démonstration. Si f est une solution de classe C^1 de l'équation de transport, elle est constante le long des courbes caractéristiques, donc

$$f(t, y + tv) = f(0,y) = f^{in}(y)\,, \quad \text{pour tout } t > 0\,,\ y \in \mathbf{R}^N\,.$$

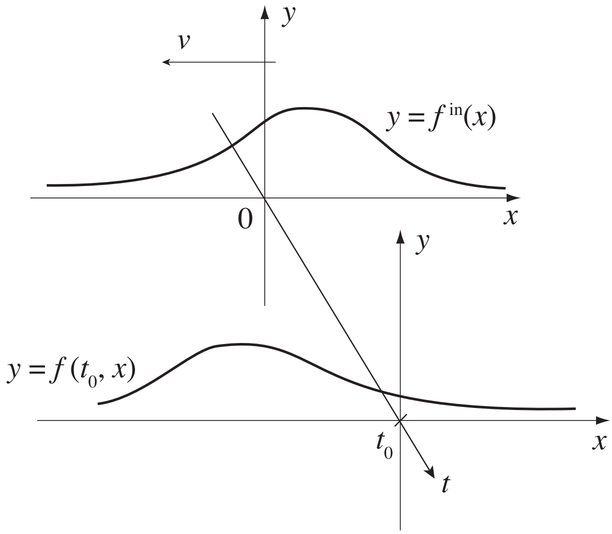

FIGURE 2.1 – Le graphe de la donnée initiale f^{in} est translaté de $t_0 v$ pour fournir le graphe de la fonction $x \mapsto f(t_0, x)$.

En posant $y + tv = x$, on trouve donc que

$$f(t,x) = f^{in}(x - tv) \qquad \text{pour tout } t > 0\,,\ x \in \mathbf{R}^N\,.$$

Réciproquement, pour $f^{in} \in C^1(\mathbf{R}^N)$, l'application $(t,x) \mapsto f^{in}(x - tv)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ (comme composée des applications f^{in} et $(t,x) \mapsto x - tv$ qui sont toutes deux de classe C^1). D'autre part on a

$$\nabla_x(f^{in}(x - tv)) = (\nabla f^{in})(x - tv)\,,$$

tandis que

$$\begin{aligned}\partial_t(f^{in}(x - tv)) &= -\sum_{i=1}^{N} v_i(\partial_{x_i} f^{in})(x - tv)\\ &= -v \cdot (\nabla f^{in})(x - tv) = -v \cdot \nabla_x(f^{in}(x - tv))\,,\end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction $f\ :\ (t,x) \mapsto f^{in}(x - tv)$ est bien une solution de l'équation de transport. ■

Même si f^{in} n'est pas dérivable, la formule

$$f(t,x) = f^{in}(x - tv)$$

garde un sens, et on souhaiterait pouvoir dire qu'elle définit encore une solution de l'équation de transport.

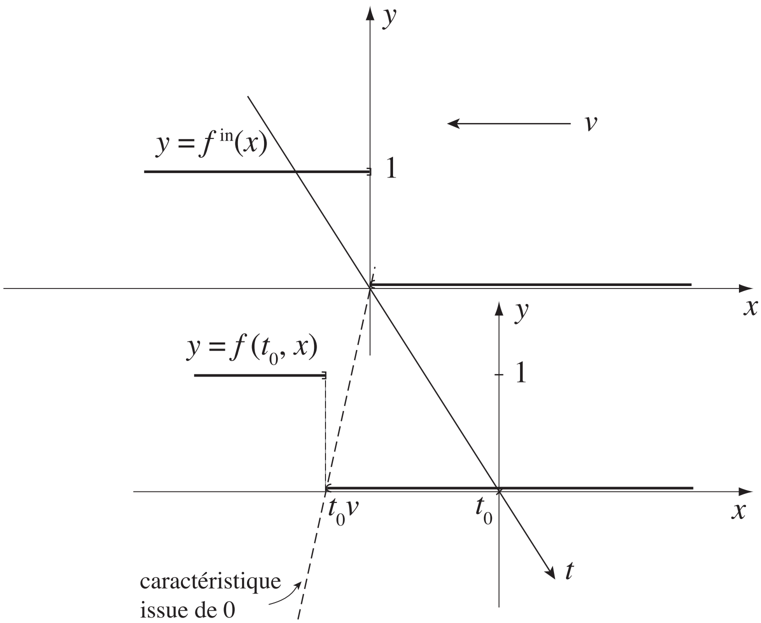

FIGURE 2.2 – Solution de l'équation de transport présentant une discontinuité de première espèce (saut).

Exemple.
Pour $N = 1$, prendre f^{in} en escalier, par exemple

$$f^{in}(x) = 1 \text{ si } x \leq 0\,, \quad f(x) = 0 \text{ si } x > 0\,.$$

La solution de l'équation de transport modélise alors une onde de choc se propageant à la vitesse v.

Pour l'analyse des équations aux dérivées partielles, il est donc souvent très naturel de devoir "dériver des fonctions non dérivables".

Le bon cadre pour cela, comme on le verra dans la suite de ce cours, est la théorie des distributions.

2.2 Le cas des coefficients variables

Dans de nombreux contextes, la vitesse de propagation v n'est pas constante, mais peut varier avec la position ou même avec le temps. (Pensons par exemple à la propagation de la lumière dans un milieu d'indice variable : la vitesse de la lumière est inversement proportionnelle à l'indice du milieu, et les rayons lumineux sont alors courbés.)

On va donc étudier l'équation de transport

$$\partial_t f(t,x) + V(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0\,, \quad 0 < t < T\,,\ x \in \mathbf{R}^N\,,$$

où $V : [0,T] \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ est un champ de vecteurs admettant des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport aux variables x_j pour $j = 1, \ldots, N$ et vérifiant les hypothèses suivantes :

(H1) $\qquad V$ et $\nabla_x V$ sont continues sur $[0,T] \times \mathbf{R}^N$,

et il existe $\kappa > 0$ tel que

(H2) $\qquad |V(t,x)| \leq \kappa(1 + |x|)\,,$ pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^N$.

La notation $\nabla_x V$ désigne, pour le champ de vecteurs V, la matrice

$$\nabla_x V(t,x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} V_1(t,x) & \ldots & \partial_{x_N} V_1(t,x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} V_N(t,x) & \ldots & \partial_{x_N} V_N(t,x) \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, le j-ème vecteur colonne de la matrice $\nabla_x V$ est $\partial_{x_j} V$, dérivée partielle du champ de vecteurs V par rapport à la j-ième coordonnée de x, ce qui se traduit encore par la formule

$$(\nabla_x V(t,x))_{ij} = \partial_{x_j} V_i(t,x)\,, \quad i,j = 1, \ldots, N\,.$$

Comme le champ de vecteurs V vérifie l'hypothèse (**H1**), le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne l'existence locale d'une unique courbe intégrale de V passant par le point x à l'instant t. (Cf. [13], II §1.8, Théorème 1.8.1, ou bien [27], Theorem 1.2.2.)

Définition 2.2.1
Soit γ la courbe intégrale de V passant par x à l'instant t, c'est-à-dire la solution du système différentiel

$$\frac{d\gamma}{ds}(s) = V(s, \gamma(s)),$$
$$\gamma(t) = x.$$

On appellera la courbe de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ paramétrée par s et définie par

$$s \mapsto (s, \gamma(s))$$

"courbe caractéristique de l'opérateur $\partial_t + V(t,x) \cdot \nabla_x$ passant par x à l'instant t".

On veut exploiter la notion de courbe caractéristique pour l'opérateur de transport à coefficients variables $\partial_t + V(t,x) \cdot \nabla_x$ afin d'aboutir à une formule semi-explicite pour les solutions de l'équation

$$\partial_t f(t,x) + V(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0,$$

comme dans le cas où $V = $ Const. étudié plus haut. Pour ce faire, on aura besoin de quelques propriétés fondamentales de ces courbes caractéristiques, résumées dans la proposition suivante. (Dans le cas où $V = $ Const. ces propriétés sont vérifiées trivialement car l'équation différentielle donnant les courbes caractéristiques est résolue de manière explicite.)

Proposition 2.2.2 (Flot caractéristique)
*Supposons que le champ de vecteurs V satisfait aux hypothèses (**H1**)-(**H2**).*

Alors, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^N$, la courbe intégrale $s \mapsto \gamma(s)$ de V passant par x à l'instant t est définie pour tout $s \in [0,T]$. Dans toute la suite, on notera $s \mapsto X(s,t,x)$ cette courbe intégrale, c'est-à-dire la solution de

$$\partial_s X(s,t,x) = V(s, X(s,t,x)),$$
$$X(t,t,x) = x.$$

L'application $X : [0,T] \times [0,T] \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ ainsi définie, appelée "flot caractéristique de l'opérateur $\partial_t + V \cdot \nabla_x$", vérifie les propriétés suivantes :

(a) pour tous $t_1, t_2, t_3 \in [0,T]$ et $x \in \mathbf{R}^3$

$$X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x);$$

(b) pour tout $j = 1, \ldots, N$, les dérivées partielles secondes $\partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x)$ et $\partial_{x_j} \partial_s X(s,t,x)$ existent pour tout $(s,t,x) \in]0,T[\times]0,T[\times \mathbf{R}^N$ et se prolongent en des fonctions continues sur $[0,T] \times [0,T] \times \mathbf{R}^N$; de plus, pour tout $j = 1, \ldots, N$, on a

$$\partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x) = \partial_{x_j} \partial_s X(s,t,x) \text{ pour tout } (s,t,x) \in [0,T] \times [0,T] \times \mathbf{R}^N;$$

(c) pour tous $s, t \in [0, T]$, l'application

$$X(s,t,\cdot): \quad x \mapsto X(s,t,x)$$

est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^N$ sur lui-même préservant l'orientation ;
(d) le flot X appartient à $C^1([0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^N)$.

Avant de donner la démonstration de cette proposition, expliquons le rôle de l'hypothèse (**H2**). Considérons le cas où $N = 1$ et où $V(t, x) = x^2$: cet exemple ne vérifie évidemment pas (**H2**). Alors le flot caractéristique X de $\partial_t + x^2\partial_x$ vérifie

$$\begin{aligned} \partial_s X(s,t,x) &= X(s,t,x)^2\,, \\ X(t,t,x) &= x\,. \end{aligned}$$

Cette équation différentielle s'intègre explicitement : on trouve que

$$X(s,t,x) = \frac{x}{1-(s-t)x}\,.$$

Ainsi, lorsque $x > 0$, la fonction $X(s, t, x)$ n'est définie que pour $s < t + \frac{1}{x}$, tandis que, pour $x < 0$, elle n'est définie que pour $s > t - \frac{1}{x}$. Donc l'application $(s, x) \mapsto X(s, t, x)$ n'est définie sur aucun voisinage de (t, x) de la forme $[a, b] \times \mathbf{R}$. Autrement dit, l'hypothèse (**H2**) sert à définir le flot X de façon globale — c'est-à-dire pour tout t tel que le champ $V(t, \cdot)$ soit défini et de classe C^1.

Démonstration. Soit $(t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}^N$ et soit γ la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{ds}(s) &= V(s,\gamma(s))\,, \\ \gamma(t) &= x\,. \end{aligned}$$

On notera $I \subset [0, T]$ l'intervalle de définition de γ, qui est évidemment un voisinage de t.

D'après l'hypothèse (**H2**), pour tous $s, t \in [0, T]$ et tout $x \in \mathbf{R}^N$,

$$\begin{aligned} |\gamma(s)| &\le |x| + \left|\int_t^s |V(\tau,\gamma(\tau))|d\tau\right| \\ &\le |x| + \kappa T + \kappa\left|\int_t^s |\gamma(\tau)|d\tau\right|\,. \end{aligned}$$

L'inégalité de Gronwall[1] implique alors que

$$|\gamma(s)| \le (|x|+\kappa T)e^{\kappa|s-t|} \le (|x|+\kappa T)e^{\kappa T} \text{ pour tout } s \in I\,.$$

1. **Inégalité de Gronwall.** Soient $A, B > 0$ et $\phi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ continue telle que

$$\phi(t) \le A + B\int_0^t \phi(s)ds\,, \qquad \text{pour tout } t \ge 0.$$

Alors

$$\phi(t) \le Ae^{Bt}\,, \qquad \text{pour tout } t \ge 0.$$

Supposons que $I \neq [0,T]$: d'après le "lemme des bouts" (voir le critère de prolongement dans [13], Partie II, §1.8, ou bien encore [17], énoncé 10.5.5), on aurait

$$|\gamma(s)| \to +\infty \text{ pour } s \to \inf(I)^+ \text{ ou pour } s \to \sup(I)^- .$$

Or ceci est exclu par l'inégalité précédente : donc la solution maximale γ est définie sur $I = [0,T]$.

(a) Remarquons que, pour tous $t_1, t_2 \in [0,T]$ et tout $x \in \mathbf{R}^N$, les applications

$$t_3 \mapsto X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) \text{ et } t_3 \mapsto X(t_3, t_1, x)$$

sont deux courbes intégrales de V passant par $X(t_2, t_1, x)$ pour $t_3 = t_2$. Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, elles coïncident donc sur leur intervalle maximal de définition, c'est-à-dire pour tout $t_3 \in [0,T]$, d'où l'égalité annoncée.

(b) D'après le théorème de dérivation des solutions d'équations différentielles par rapport à la condition initiale (cf. [13], partie II, Théorème 3.4.2), pour tout instant initial $t \in [0,T]$ fixé l'application $(s,x) \mapsto X(s,t,x)$ admet une dérivée partielle $\partial_{x_j} X(s,t,x)$ pour tout $(s,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^N$ et tout $j = 1, \ldots, N$. De plus, cette dérivée partielle est l'unique solution définie pour tout $s \in [0,T]$ de l'équation différentielle linéaire

$$\begin{aligned} \partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x) &= \nabla_x V(s, X(s,t,x)) \partial_{x_j} X(s,t,x) , \\ \partial_{x_j} X(t,t,x) &= e_j \end{aligned}$$

où e_j est le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^N$. Enfin la dérivée partielle $(s,x) \mapsto \partial_{x_j} X(s,t,x)$ est continue sur $[0,T] \times \mathbf{R}^N$ pour tout $j = 1, \ldots, N$.

On déduit alors de l'équation différentielle linéaire ci-dessus que, pour tout $j = 1, \ldots, N$, la dérivée partielle seconde

$$(s,x) \mapsto \partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x) \text{ est continue sur } [0,T] \times \mathbf{R}^N .$$

D'après (**H1**) l'application partielle $V(s,\cdot)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^N$, ainsi que l'application $X(s,t,\cdot)$, dont on a vu qu'elle admet des dérivées partielles $\partial_{x_j} X(s,t,\cdot)$

Démonstration. La fonction ψ définie par

$$\psi(t) = A + B \int_0^t \phi(s) ds , \qquad \text{pour tout } t \geq 0$$

est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$ et à valeurs dans $[A, +\infty[$ puisque ϕ est continue et positive ou nulle sur $\mathbf{R}_+$. L'hypothèse faite sur ϕ s'écrit

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{B\phi(t)}{A + B \int_0^t \phi(s) ds} \leq B , \quad t \geq 0 .$$

En intégrant sur $[0,t]$ chaque membre de cette inégalité, on trouve que

$$\ln \psi(t) - \ln \psi(0) = \ln \psi(t) - \ln A \leq Bt$$

d'où

$$\phi(t) \leq \psi(t) \leq A e^{Bt} , \qquad \text{pour tout } t \geq 0.$$

continues sur $\mathbf{R}^N$ pour tout $j = 1, \ldots, N$. Ainsi le membre de droite de l'équation

$$\partial_s X(s,t,x) = V(s, X(s,t,x)) \,, \quad (s,x) \in]0,T[\times \mathbf{R}^N \,.$$

est-il de classe C^1 en la variable x et le théorème de dérivation des fonctions composées entraîne que, pour tout $j = 1, \ldots, N$,

$$\partial_{x_j} \partial_s X(s,t,x) = \nabla_x V(s, X(s,t,x)) \partial_{x_j} X(s,t,x) = \partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x)$$

pour tout $(s,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^N$ — la deuxième égalité ci-dessus étant précisément l'équation différentielle linéaire vérifiée par la dérivée partielle $\partial_{x_j} X$.

(c) D'après le (b), pour tous $s,t \in [0,T]$, l'application $X(s,t,\cdot)$ admet des dérivées partielles par rapport à toutes les variables x_j pour $j = 1, \ldots, N$, et ces dérivées partielles sont continues en tout point $x \in \mathbf{R}^N$: donc l'application $X(s,t,\cdot)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^N$.

Appliquons d'autre part le (a) avec $t_3 = t_1 = s$ et $t_2 = t$, puis avec $t_3 = t_1 = t$ et $t_2 = s$: on en déduit que

$$X(s,t,\cdot) \text{ est une bijection de } \mathbf{R}^N \text{ sur } \mathbf{R}^N \text{ d'inverse } X(s,t,\cdot)^{-1} = X(t,s,\cdot) \,.$$

Comme la bijection $X(s,t,\cdot)$ et son inverse $X(t,s,\cdot)$ sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}^N$, c'est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^N$ sur lui-même.

Considérons enfin le déterminant jacobien

$$J(s,t,x) = \text{dét}(\nabla_x X(s,t,x)) \,.$$

Le point (b) entraîne que l'application $s \mapsto J(s,t,x)$ est continue de $[0,T]$ dans $\mathbf{R}$; d'autre part $J(t,t,x) = 1$ et $J(s,t,x) \neq 0$ pour tout $s \in [0,T]$, car c'est le déterminant jacobien du difféomorphisme $X(s,t,\cdot)$. Le théorème des valeurs intermédiaires implique alors que $J(s,t,x) > 0$ pour tout $s \in [0,T]$, ce qui équivaut à dire que le difféomorphisme $X(s,t,\cdot)$ préserve l'orientation de $\mathbf{R}^N$.

(d) D'après le (b), l'application $(s,t,x) \mapsto X(s,t,x)$ admet des dérivées partielles continues par rapport aux variables x_j pour tout $j = 1, \ldots, N$ et tout $(s,t,x) \in [0,T] \times [0,T] \times \mathbf{R}^N$, ainsi évidemment que par rapport à la variable s puisque, par définition, $\partial_s X(s,t,x) = V(s, X(s,t,x))$.

Montrons que X admet aussi une dérivée partielle continue par rapport à la variable t. Pour $(s,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^N$ fixé, le point $X(s,t,x)$ est l'unique solution $y(t)$ de l'équation

$$F(t, y(t)) = 0 \,,$$

où on a posé

$$F(t,y) = X(t,s,y) - x \,.$$

L'application $F : [0,T] \times \mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{R}^N$ est de classe C^1, et, pour tout temps $t \in [0,T]$, la matrice $\nabla_y F(t,y) = \nabla_x X(t,s,y)$ est inversible — en effet, on a déjà vu que $\text{dét}(\nabla_y F(t,y)) = J(t,s,y) \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites (voir [13] partie I, Théorème 4.7.1, ou bien [26], Theorem 1.1.7), la solution $t \mapsto y(t)$ est donc dérivable et on a

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}(t) &= -\nabla_y F(t,y(t))^{-1}\partial_t F(t,y(t))\\ &= -\nabla_x X(t,s,X(s,t,x))^{-1}V(t,X(t,s,X(s,t,x)))\\ &= -\nabla_x X(t,s,X(s,t,x))^{-1}V(t,x)\,.\end{aligned}$$

Cette dernière formule montre que l'application $\partial_t X$ est également continue sur $[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^N$.

Comme l'application X admet des dérivées partielles continues en tout point de $[0,T]\times[0,T]\times\mathbf{R}^N$, elle y est de classe C^1. ■

Expliquons maintenant comment on résout le problème de Cauchy pour une équation de transport à coefficients variables grâce à la connaissance de son flot caractéristique. Ainsi, le Théorème 2.2.3 ci-dessous se spécialise en Théorème 2.1.2 lorsque $V=$ Const.

Théorème 2.2.3
*Soit V un champ de vecteurs vérifiant les hypothèses **(H1)** et **(H2)**, et soit $f^{in}\in C^1(\mathbf{R}^N)$. Alors le problème de Cauchy pour l'équation de transport*

$$\begin{aligned}\partial_t f(t,x)+V(t,x)\cdot\nabla_x f(t,x)=0\,,&\qquad 0<t<T\,,\ x\in\mathbf{R}^N\,,\\ f(0,x)=f^{in}(x)\,,&\qquad x\in\mathbf{R}^N\,,\end{aligned}$$

admet une unique solution $f\in C^1([0,T]\times\mathbf{R}^N)$. Cette solution f est donnée par la formule

$$f(t,x)=f^{in}(X(0,t,x))\,,$$

où X est le flot caractéristique du champ V — c'est-à-dire que $s\mapsto X(s,t,x)$ est la courbe intégrale du champ V passant par x à l'instant t.

Démonstration. Commençons par l'unicité, et pour cela, procédons par condition nécessaire.

Soient donc $f\in C^1([0,T]\times\mathbf{R}^N)$ et $z\in\mathbf{R}^N$ fixés ; on va considérer la fonction $\phi\,:\ s\mapsto\phi(s)=f(s,X(s,0,z))$. Cette fonction est de classe C^1 sur $[0,T]$ comme composée de f et de l'application

$$s\mapsto(s,X(s,0,z))$$

qui est de classe C^1 d'après la Proposition 2.2.2 (d). Calculons sa dérivée

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{ds}(s)&=\partial_t f(s,X(s,0,z))+\nabla_x f(s,X(s,0,z))\cdot\partial_s X(s,0,z)\\ &=\partial_t f(s,X(s,0,z))+V(s,X(s,0,z))\cdot\nabla_x f(s,X(s,0,z))\,.\end{aligned}$$

Par conséquent, si f est solution de l'équation de transport

$$\partial_t f(t,x) + V(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0\,, \quad 0 < t < T\,,\ x \in \mathbf{R}^N\,,$$

on a

$$\frac{d\phi}{ds}(s) = 0 \text{ pour tout } s \in]0,T[\,,$$

de sorte que la fonction ϕ est constante sur l'intervalle $[0,T]$. En particulier, pour tout $s \in [0,T]$,

$$\phi(s) = f(s, X(s,0,z)) = f(0, X(0,0,z)) = f(0,z) = \phi(0) = f^{in}(z)\,.$$

Faisons le changement de variables $x = X(s,0,z)$ ce qui, d'après la Proposition 2.2.2 (a)-(c) équivaut à $z = X(0,s,x)$. On trouve alors que

$$f(s,x) = f^{in}(X(0,s,x)) \text{ pour tout } (s,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^N\,.$$

Réciproquement, montrons que la formule

$$f(t,x) = f^{in}(X(0,t,x))$$

définit une fonction de classe C^1 sur $[0,T] \times \mathbf{R}^N$, qui est solution du problème de Cauchy pour l'équation de transport.

D'abord, $f \in C^1([0,T] \times \mathbf{R}^N)$ comme composée de f^{in} qui est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^N$, et de l'application $(t,x) \mapsto X(0,t,x)$, de classe C^1 sur $[0,T] \times \mathbf{R}^N$ d'après la Proposition 2.2.2 (d).

D'autre part, $f(0,x) = f^{in}(X(0,0,x)) = f^{in}(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$.

Enfin

$$\begin{aligned} \partial_t f(t,x) &= \nabla f^{in}(X(0,t,x)) \cdot \partial_t X(0,t,x)\,, \\ \partial_{x_j} f(t,x) &= \nabla f^{in}(X(0,t,x)) \cdot \partial_{x_j} X(0,t,x)\,, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} &\partial_t f(t,x) + V(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) \\ &\qquad = \nabla f^{in}(X(0,t,x)) \cdot \left(\partial_t X(0,t,x) + \sum_{j=1}^N V_j(t,x) \partial_{x_j} X(0,t,x) \right)\,. \end{aligned}$$

Le résultat annoncé découle alors du lemme suivant. ■

Lemme 2.2.4
Le flot caractéristique X vérifie

$$\partial_t X(0,t,x) + \sum_{j=1}^N V_j(t,x) \partial_{x_j} X(0,t,x) = 0$$

pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^N$.

Démonstration. Partons de la relation (a) de la Proposition 2.2.2 :

$$X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x)$$

pour tous $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ et tout $x \in \mathbf{R}^N$.

Dérivons chaque membre de cette égalité par rapport à t_2 : comme le flot caractéristique X est de classe C^1 sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbf{R}^N$, le théorème de dérivation des fonctions composées entraîne que [2]

$$\partial_t X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) + \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j} X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) \partial_s X_j(t_2, t_1, x) = 0\,,$$

ou encore

$$\partial_t X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) + \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j} X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) V_j(t_2, X(t_2, t_1, x)) = 0\,.$$

Posant $t_3 = 0$ et $t_2 = t_1 = t$, on aboutit à la relation annoncée. ■

A nouveau, remarquons que la formule

$$f(t, x) = f^{in}(X(0, t, x))$$

garde un sens même si f^{in} n'est pas dérivable, et on aimerait pouvoir dire qu'elle définit une solution en un sens généralisé de l'équation de transport

$$\partial_t f(t, x) + V(t, x) \cdot \nabla_x f(t, x) = 0\,.$$

Toutefois, pour donner un sens à un tel énoncé, on devra avoir recours à la théorie des distributions, présentée dans la suite de ce cours.

2.3 Equations aux dérivées partielles non liné- aires d'ordre un : étude d'un exemple

L'équation de Hopf — également appelée équation de Burgers sans viscosité — intervient dans différents contextes, comme par exemple la dynamique des gaz sans pression (cf. [10]), ou bien encore en tant que modèle (proposé par Ya. B. Zeldovich [57]) pour l'évolution à grande échelle d'amas de galaxies.

L'équation de Hopf, d'inconnue $u \equiv u(t, x) \in \mathbf{R}$, s'écrit

$$\partial_t u(t, x) + u(t, x)\partial_x u(t, x) = 0\,, \quad t > 0\,,\ x \in \mathbf{R}\,.$$

2. Dans tout ce qui suit

$\partial_s X$ désigne la dérivée de X par rapport à sa première variable,

$\partial_t X$ désigne la dérivée de X par rapport à sa seconde variable.

Autrement dit, u est la solution d'une équation de transport dont la vitesse de propagation au point x et à l'instant t est la valeur $u(t,x)$ de l'inconnue. Cette équation est non linéaire à cause de la présence du terme $u\partial_x u$ qui est quadratique en u.

Appliquons à cette équation la méthode des caractéristiques. Supposons donc que u est une solution de l'équation de Hopf de classe C^1 sur $[0,T[\times\mathbf{R}$. Soit $X \equiv X(s,t,x)$ le flot caractéristique de l'opérateur de transport $\partial_t + u(t,x)\partial_x$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}\partial_s X(s,t,x) &= u(s,X(s,t,x))\,, \quad 0<s<T\,,\\ X(t,t,x) &= x\,.\end{aligned}$$

(L'existence et l'unicité locales de X découlent du théorème de Cauchy-Lipschitz puisque u est de classe C^1.) Alors la fonction $s\mapsto u(s,X(s,t,z))$ est de classe C^1 comme composée de fonctions de classe C^1 et on a

$$\frac{d}{ds}u(s,X(s,t,z)) = (\partial_t u + u\partial_x u)(s,X(s,t,z)) = 0\,.$$

La fonction $s\mapsto u(s,X(s,t,z))$ est donc constante sur $[0,T[$, de sorte que

$$u(s,X(s,t,z)) = u(t,X(t,t,z)) = u(t,z)\,, \quad 0<s<T\,.$$

Injectons cette information dans l'équation différentielle vérifiée par le flot X :

$$\begin{aligned}\partial_s X(s,t,z) &= u(s,X(s,t,x)) = u(t,z)\,, \quad 0<s<T\,,\\ X(t,t,z) &= z\,,\end{aligned}$$

de sorte que

$$X(s,t,z) = z + (s-t)u(t,z)\,, \quad 0\le s<T\,.$$

En particulier

$$X(s,0,z) = z + su(0,z)\,, \quad 0\le s<T\,.$$

Cette formule montre que le flot caractéristique $X \equiv X(s,t,z)$ se prolonge à tout $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ en une application de classe C^1.

Ecrivant à nouveau que la solution u est constante le long des courbes caractéristiques de l'opérateur de transport $\partial_t + u\partial_x$, on trouve donc que

$$u(s, z+su(0,z)) = u(0,z)\,, \quad 0\le s<T\,,\ z\in\mathbf{R}\,.$$

En se basant sur cette égalité, on aboutit au résultat suivant :

Théorème 2.3.1
Soit $u^{in}\in C^1(\mathbf{R})$, bornée sur $\mathbf{R}$ ainsi que sa dérivée $(u^{in})'$.
(a) Le problème de Cauchy pour l'équation de Hopf

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0\,, &\qquad t>0\,,\ x\in\mathbf{R}\\ u(0,x) = u^{in}(x)\,, &\qquad x\in\mathbf{R}\,,\end{aligned}$$

admet une unique solution de classe C^1 *sur* $[0,T[\times\mathbf{R}$*, où*

$$T = \frac{1}{\sup_{z\in\mathbf{R}}(\max(0,-(u^{in})'(z)))}\,,$$

avec la convention $1/0=+\infty$. *Cette solution est définie par la relation implicite*

$$u(t,z+tu^{in}(z)) = u^{in}(z)\,,\quad (t,z)\in[0,T[\times\mathbf{R}\,.$$

(b) Si $u\in C^1(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})$ *est solution de l'équation de Hopf sur* $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}$*, alors la donnée initiale* $z\mapsto u(0,z)$ *est croissante sur* $\mathbf{R}$.

Démonstration. (a) Pour $s\ge 0$, posons

$$\phi_s(z) = z + su^{in}(z)\,,\quad z\in\mathbf{R}\,.$$

La fonction ϕ_s est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^N$ et

$$\phi_s'(z) = 1 + s(u^{in})'(z) > 0 \text{ pour tout } (s,z)\in[0,T[\times\mathbf{R}\,,$$

par définition de T. Comme $u^{in}(z)=O(1)$ pour $|z|\to+\infty$,

$$\phi_s(z)\to\pm\infty \text{ pour } z\to\pm\infty\,.$$

Par conséquent ϕ_s est une bijection croissante de $\mathbf{R}$ sur lui-même pour tout $s\in[0,T[$, de classe C^1 ainsi que sa réciproque ϕ_s^{-1}.

Enfin, appliquant le théorème des fonctions implicites (voir [13], partie I, Théorème 4.7.2, ou bien encore [26], Theorem 1.1.7) à l'équation

$$F(t,z) := z + tu^{in}(z) - x = 0$$

dont l'unique solution est $z=\phi_t^{-1}(x)$, on vérifie que l'application

$$\Phi\,:\,(t,x)\mapsto\Phi(t,x)=\phi_t^{-1}(x)$$

est de classe C^1 sur $[0,T[\times\mathbf{R}$, avec

$$\partial_t\Phi(t,x) = -\frac{u^{in}(\Phi(t,x))}{1+t(u^{in})'(\Phi(t,x))}\,,$$
$$\partial_x\Phi(t,x) = +\frac{1}{1+t(u^{in})'(\Phi(t,x))}\,.$$

Donc la fonction

$$u(t,x) = u^{in}(\Phi(t,x))$$

est de classe C^1 sur $[0,T[\times\mathbf{R}$ comme composée de fonctions de classe C^1.

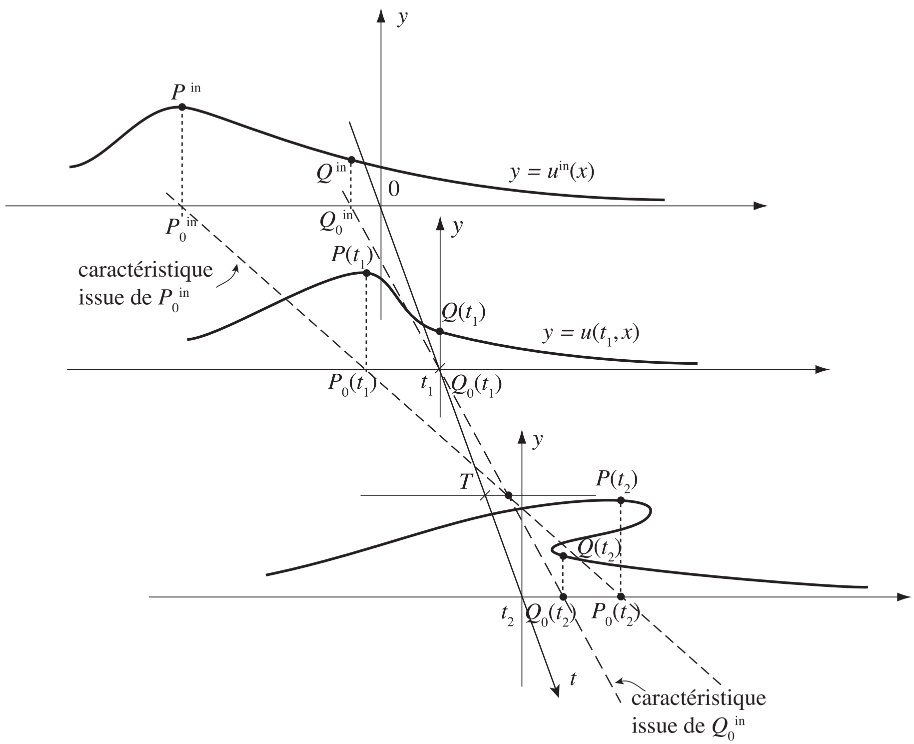

FIGURE 2.3 – Apparition d'une onde de choc dans la solution de l'équation de Hopf. Le graphe de la donnée initiale u^{in} est transporté par les caractéristiques. Or les caractéristiques issues de P et Q se coupent à l'instant T. Le graphe de u^{in} transporté par le flot caractéristique cesse donc, en temps fini, d'être le graphe d'une fonction. La figure montre l'évolution d'une donnée initiale dont le graphe est une courbe croissante puis décroissante. A l'instant t_1, le graphe de u^{in} transporté par le flot caractéristique est encore le graphe d'une fonction — précisément de $x \mapsto u(t,x)$. En revanche, à l'instant t_2, le graphe de u^{in} transporté par le flot caractéristique n'est plus le graphe d'une fonction.

Enfin

$$\partial_t u(t,x) = (u^{in})'(\Phi(t,x))\partial_t \Phi(t,x) = -\frac{(u^{in})'(\Phi(t,x))u^{in}(\Phi(t,x))}{1+t(u^{in})'(\Phi(t,x))},$$
$$\partial_x u(t,x) = (u^{in})'(\Phi(t,x))\partial_x \Phi(t,x) = +\frac{(u^{in})'(\Phi(t,x))}{1+t(u^{in})'(\Phi(t,x))},$$

de sorte que

$$\partial_t u(t,x) + u^{in}(\Phi(t,x))\partial_x u(t,x) = 0\,.$$

Comme $u^{in}(\Phi(t,x)) = u(t,x)$, on en déduit que u est bien solution de l'équation de Hopf (la condition initiale étant évidente, puisque $\Phi(0,x) = \phi_0^{-1}(x) = x$.)

L'unicité provient de l'application de la méthode des caractéristiques rappelée avant l'énoncé du théorème. En effet, toute solution de l'équation de Hopf de classe C^1 sur $[0,T[\times\mathbf{R}$ vérifie

$$u(t, z+tu(0,z)) = u(0,z)\,, \quad (t,z)\in[0,T[\times\mathbf{R}\,,$$

c'est-à-dire

$$u(t,\phi_t(z)) = u^{in}(z)\,, \quad (t,z)\in[0,T[\times\mathbf{R}\,.$$

En faisant le changement de variables $\phi_t(z) = x$, c'est-à-dire

$$z = \phi_t^{-1}(z) = \Phi(t,x)\,,$$

on trouve que

$$u(t,x) = u^{in}(\Phi(t,x))\,, \quad (t,z)\in[0,T[\times\mathbf{R}\,.$$

(b) Si u est solution de classe C^1 de l'équation de Hopf sur $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}$, elle vérifie la relation

$$u(s, z+su(0,z)) = u(0,z)\,, \qquad \text{pour tout } (s,z)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}\,,$$

d'après la méthode des caractéristiques.

Supposons que $z\mapsto u(0,z)$ n'est pas croissante sur $\mathbf{R}$: il existe donc $z_1 < z_2$ tel que $u(0,z_1) > u(0,z_2)$. Définissons

$$s^* = \frac{z_2 - z_1}{u(0,z_1) - u(0,z_2)} > 0\,.$$

Alors

$$z_1 + s^* u(0,z_1) = z_2 + s^* u(0,z_2)\,,$$

de sorte que

$$u(0,z_1) = u(s^*, z_1 + s^* u(0,z_1)) = u(s^*, z_2 + s^* u(0,z_2)) = u(0,z_2)\,.$$

On aboutit ainsi à une contradiction, ce qui infirme l'hypothèse de départ, à savoir que $z\mapsto u(0,z)$ n'est pas croissante sur $\mathbf{R}$. ■

Ce résultat montre que, pour une équation de transport non linéaire, il se peut

(a) que le flot caractéristique soit défini globalement,

(b) que la donnée initiale soit globalement de classe C^1,

et pourtant que la solution ne soit pas définie et de classe C^1 globalement, c'est-à-dire pour tout $(t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.

Ce type de comportement est caractéristique des équations différentielles non linéaires, aux dérivées partielles ou non.

Nous avons déjà évoqué plus haut l'exemple de l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \,, \qquad y(0) = y^{in} \,,$$

dont la solution

$$y(t) = \frac{y^{in}}{1 - ty^{in}}$$

n'est pas définie globalement, c'est-à-dire pour tout $t \in \mathbf{R}$, si $y^{in} \neq 0$.

L'exemple de l'équation de Hopf présenté ci-dessus est tout à fait analogue au cas de l'équation de Riccati.

Toutefois, il est possible de prolonger la solution locale de classe C^1 de l'équation de Hopf après le temps T donné dans le Théorème 2.3.1, en une fonction qui n'est plus de classe C^1, qui admet en général des discontinuités de première espèce, mais qui est pourtant solution de l'équation de Hopf en un sens généralisé. On verra plus loin comment réaliser ce prolongement au chapitre 9, dans la section 9.5.

L'apparition spontanée de singularités dans des solutions d'équations aux dérivées partielles est encore une nouvelle motivation pour développer le formalisme des distributions.

2.4 Notes bibliographiques

La résolution des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre un par la méthode des caractéristiques suit de près l'exposé qui en est fait dans le chapitre 1 de [9].

Pour aller un peu plus loin, notamment en abordant les problèmes aux limites posés dans des domaines bornés pour l'équation de transport, on pourra consulter le chapitre 2 de [3].

On trouvera une présentation légèrement différente de la résolution de l'équation de Hopf dans la phase de régularité par la méthode des caractéristiques dans le §2.3 du chapitre II de [27].

2.5 Exercices

Exercice 1. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t f(t,x) + v \cdot \nabla_x f(t,x) + a(t,x) f(t,x) = 0\,, \quad x \in \mathbf{R}^N\,,\ t > 0\,, \\ f(0,x) = f^{in}(x)\,, \quad x \in \mathbf{R}^N\,, \end{aligned}$$

où $a \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$. On appliquera la méthode des caractéristiques.
Exercice 2. Même question pour le problème de Cauchy avec second membre

$$\begin{aligned} \partial_t f(t,x) + v \cdot \nabla_x f(t,x) + a(t,x) f(t,x) = S(t,x)\,, \quad x \in \mathbf{R}^N\,,\ t > 0\,, \\ f(0,x) = f^{in}(x)\,, \quad x \in \mathbf{R}^N\,, \end{aligned}$$

où a et $S \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$.
Exercice 3. Soient $\lambda > 0$, a et $S \in C^1(\mathbf{R}^N)$. Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que

$$a(x) \geq 0 \text{ et } |S(x)| + |\nabla S(x)| + |\nabla a(x)| \leq M \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^N\,.$$

Montrer que l'équation de transport stationnaire

$$\lambda f(x) + v \cdot \nabla_x f(x) + a(x) f(x) = S(x)\,, \quad x \in \mathbf{R}^N\,,$$

admet une unique solution bornée f de classe C^1 sur $\mathbf{R}^N$, et que cette solution est donnée par la formule

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t - \int_0^t a(x-sv)ds} S(x - tv)dt\,.$$

Exercice 4. Soit $f \in C^2(\mathbf{R})$ telle que $f''(U) \geq a > 0$ pour tout $U \in \mathbf{R}$. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t v + f(\partial_x v) = 0\,, \\ v\big|_{t=0} = v^{in}\,, \end{aligned}$$

où $v^{in} \in C^2(\mathbf{R})$ est bornée sur $\mathbf{R}$ ainsi que ses deux premières dérivées.
1) Quelle est l'équation satisfaite par $\partial_x v$?
2) En déduire un résultat d'existence et unicité locale pour le problème de Cauchy vérifié par v.