Résumé du cours d'analyse

par

M. Hermite.

Le Cours de deuxième année comprendra deux parties principales ; la première ayant pour objet les intégrales définies ; la seconde les équations différentielles. On se rappelle que la notion d'intégrale définie s'est présentée en traitant la question de la quadrature des courbes, comme conséquence des principes élémentaires de l'emploi géométrique des infiniment petits. Ainsi, on a établi que la courbe proposée étant donnée par l'équation $y = f(x)$ l'aire comprise entre l'arc, l'axe des abscisses et deux ordonnées qui correspondent aux abscisses x_0 et x_1 est la limite de la somme :

$$dx[f(x_0) + f(x_0 + dx) + f(x_0 + 2dx) + \ldots + f(x_0 + (n-1)dx)]$$

lorsqu'en supposant : $n.dx = x_1 - x_0$, on fait croître indéfiniment le nombre n des termes, et tendre dx vers 0. Cette limite, qui, d'après sa signification, est une quantité entièrement déterminée, a été représentée par $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$, et désignée sous le nom d'intégrale définie de la fonction $f(x)$, prise depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$. Nous savons encore qu'une fonction $F(x)$ satisfaisant à la condition :

$$F'(x) = f(x)$$

se nomme l'intégrale indéfinie, et que l'on a généralement :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0)$$

On s'est proposé, dans le cours de première année, d'obtenir l'intégrale indéfinie des fonctions rationnelles, des fonctions irrationnelles qui dépendent de la racine carrée d'un polynôme, et des fonctions transcendantes contenant des exponentielles, des lignes trigonométriques ... Cette recherche a bientôt montré combien était restreint le nombre des intégrales qui s'obtiennent sous forme finie explicite, et on a été amené naturellement à envisager l'expression

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$

qui est entièrement déterminée quand on donne x_0 et x_1, comme un nouveau mode d'existence de la quantité, demandant à être étudié directement et en lui-

même. Ainsi s'est ouverte une voie large et féconde de belles recherches, qui depuis Euler et Legendre, ont donné à l'analyse les plus importants résultats. Exposer, dans quelques cas simples, les méthodes propres à ces recherches, et les conséquences qu'elles ont données, sera donc le sujet de la première partie de ce Cours, la seconde devant être consacrée à la théorie des équations différentielles, qui ouvre au développement des mêmes vues un autre champ d'un accès moins facile.

Nous entrerons en matière, et nous rendrons sensibles la nécessité de cette étude en considérant la quantité : $\int_{x_0}^{x_1} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx$ *qui se trouve comme un intermédiaire entre les intégrales exprimables sous forme finie, et celles qui ne le sont point. Effectivement l'intégrale indéfinie*

$$F(x) = \arctan f(x)$$

étant donnée explicitement il n'est cependant point possible comme nous allons voir de tirer de l'équation générale :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \arctan f(x_1) - \arctan f(x_0)$$

la valeur cherchée. Nous allons exposer l'analyse fort simple qui donne le résultat et conduit en même temps à d'importantes conséquences.

De l'intégrale : $\int_{x_0}^{x_1} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx$

I. Considérons tout d'abord un cas particulier, et soit, par exemple :

$f(x) = \frac{x}{x^2-2}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2$ *ce qui donne :* $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 1$, *d'où :*

$$\int_0^2 \frac{d\frac{x}{x^2-2}}{1+\frac{x^2}{(x^2-2)^2}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

résultat dont la fausseté est manifeste, tous les éléments de l'intégrale étant négatifs, attendu que :

$$\frac{d\frac{x}{x^2-2}}{1+\frac{x^2}{(x^2-2)^2}} = -\frac{x^2+2}{(x^2-2)^2+x^2}\,dx$$

La raison s'en trouve aisément dans ce fait élémentaire, qu'il existe une infinité d'arcs répondant à une tangente donnée, de sorte qu'il est nécessaire de poser :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \arctan f(x_1) - \arctan f(x_0) + n\pi$$

n étant un nombre entier inconnu, que nous allons déterminer en fixant la signification des termes $\arctan f(x_0)$, $\arctan f(x_1)$, *par la convention qu'ils soient compris tous les deux entre les limites* $-\pi/2$ *et* $\pi/2$.

Observons d'abord que l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx$ *est une fonction continue de la limite supérieure* x, *car la différence :*

$$\int_{x_0}^{x+h} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx - \int_{x_0}^{x} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx \quad \text{ou bien :} \int_{x}^{x+h} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx$$

qui s'exprime, comme on sait [1] *par le produit :* $h\dfrac{f'(x+\theta h)}{1+f^2(x+\theta h)}$, *est infiniment petite avec h, l'expression* $\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$ *étant finie pour toute valeur réelle de* x. *En faisant* $f(x)=\dfrac{\chi(x)}{\varphi(x)}$, *et supposant* $\varphi(x)$ *et* $\chi(x)$ *seront sans facteur commun, on la rend manifeste, car elle devient :* $\dfrac{\varphi(x)\chi'(x)-\varphi'(x)\chi(x)}{\varphi^2(x)+\chi^2(x)}$ *et le dénominateur ne sera nul qu'en faisant à la fois* $\varphi(x)=0$, $\chi(x)=0$, *ce qui entraîne un facteur commun, contre l'hypothèse admise.*

Cette remarque faite, je reviens à l'égalité :

$$\int_{x_0}^{x}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \arctan f(x) - \arctan f(x_0) + n\pi$$

En y posant $x=x_0$, *elle donne* $n=0$, *et il est clair qu'on devra conserver cette détermination, tant que la fonction* $f(x)$ *restera finie, car* x *croissant d'une manière continue depuis la valeur* $x=x_0$, $\arctan f(x)$ *varie alors lui-même d'une manière continue. Mais on va voir qu'il n'en est pas de même quand* $f(x)$ *devient infini, par exemple pour* $x=k$. *Examinons en effet, en nous rappelant que* $\arctan f(x)$ *est assujetti à ne pas dépasser les limites* $-\pi/2$ *et* $\pi/2$, *les valeurs successives de* $\arctan f(k-\varepsilon)$, $\arctan f(k+\varepsilon)$, ε *étant positif et très petit. En admettant, pour fixer les idées, que* $f(k-\varepsilon)$ *soit positif, et* $f(k+\varepsilon)$ *négatif, les valeurs de* $\arctan f(k-\varepsilon)$ *lorsque* ε *décroît jusqu'à zéro, seront représentées par*

$$(A)\quad \frac{\pi}{2}-\alpha\,;\frac{\pi}{2}-\alpha'\,;\frac{\pi}{2}-\alpha''\,;\ldots\,;\frac{\pi}{2}.$$

où la suite : $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ *est décroissante jusqu'à zéro ;*
celles de $\arctan f(k+\varepsilon)$, *en faisant croître* ε, *seront de la forme :*

$$(B)\quad -(\frac{\pi}{2}-\beta)\,;-(\frac{\pi}{2}-\beta')\,;-(\frac{\pi}{2}-\beta'')\,;\ldots$$

---

[1] *Cours de première année*

les termes β, β', β'' *... allant en croissant depuis zéro. La série (B) placée à la suite de la série (A) rend manifeste la discontinuité de la fonction* $\arctan f(x)$ *pour* $x = k$ *; mais on voit en même temps qu'en ajoutant aux termes de la seconde suite le nombre* π*, ils deviennent :* $\frac{\pi}{2}+\beta\,;\frac{\pi}{2}+\beta'\,;\frac{\pi}{2}+\beta''\,;\ldots$ *et forment alors avec la suite (A) un ensemble de valeurs parfaitement continues :*

$$\frac{\pi}{2}-\alpha\,;\frac{\pi}{2}-\alpha'\,;\frac{\pi}{2}-\alpha''\,;\ldots;\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}+\beta\,;\frac{\pi}{2}+\beta'\,;\frac{\pi}{2}+\beta''\,;\ldots$$

ou encore : $-\alpha, -\alpha', -\alpha'', \ldots, 0, \beta, \beta', \beta'', \ldots$ *en retranchant* $\pi/2$ *de tous les termes. De là résulte qu'avec ces deux éléments discontinus, le nombre entier n, et la fonction* $\arctan f(x)$*, telle que nous l'avons définie, nous réalisons une fonction continue, en convenant que n passera brusquement de la valeur zéro à la valeur 1, lorsqu'en faisant croître* x*,* $f(x)$ *passera du positif au négatif en devenant infinie. Semblablement, on trouverait qu'il faut prendre* $n = -1$*, quand* $f(x)$ *passe du négatif au positif en devenant infinie*[2]*, tandis que n reste nul, lorsque la fonction ne change pas de signe. Continuons maintenant à faire croître la variable depuis la valeur* k*, en considérant l'expression :*

$$\arctan f(x) + \pi - \arctan f(x_0) + n'\pi$$

il est évident qu'en déterminant n' de manière qu'elle représente toujours une fonction continue, on sera ramené au même raisonnement et à la même conclusion que tout à l'heure ; on a donc le théorème suivant, dû à Cauchy :[3]

Le nombre n dans l'équation :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \arctan f(x_1) - \arctan f(x_0) + n\pi$$

est égal à l'excès du nombre de fois que la fonction $f(x)$ *passe en devenant infinie du positif au négatif sur le nombre de fois qu'elle passe en devenant infinie du négatif au positif.*

---

[2] *Ce cas se ramène immédiatement au précédent, en changeant* $f(x)$ *en* $-f(x)$

[3] *Mémoire sur les rapports qui existent entre le calcul des résidus et le calcul des limites, et sur les avantages qu'offrent ces deux nouveaux calculs dans la résolution des équations algébriques ou transcendantes - Turin 1831*

Cauchy a attribué à n la dénomination d'indice de la fonction $f(x)$ entre les limites x_0, x_1 ; nous les représenterons en conséquence de cette manière :

$$n = \mathrm{I}_{x_0}^{x_1}[f(x)]$$

II. L'analyse précédente donne le premier exemple de considérations relatives à la discontinuité et à la multiplicité des valeurs d'une fonction dont il ait été fait usage dans ce Cours. Pour les rendre plus familières, je vais encore les employer dans une circonstance extrêmement simple, en cherchant la relation remarquable qui lie les nombres n relatifs à une fonction et à son inverse, c'est-à-dire :

$$n = \mathrm{I}_{x_0}^{x_1}[f(x)] \text{ et } n' = \mathrm{I}_{x_0}^{x_1}[\frac{1}{f(x)}]$$

Nous partirons à cet effet des deux relations :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{df(x)}{1+f^2(x)} = \arctan f(x_1) - \arctan f(x_0) + n\pi$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d\frac{1}{f(x)}}{1+\frac{1}{f^2(x)}} = \arctan \frac{1}{f(x_1)} - \arctan \frac{1}{f(x_0)} + n'\pi$$

et en remarquant que $\dfrac{d\frac{1}{f(x)}}{1+\frac{1}{f^2(x)}} = -\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$ *nous les ajouterons membre à membre, afin d'éliminer l'intégrale. De là résultera :*

$$(n+n')\pi = \arctan f(x_0) + \arctan \frac{1}{f(x_0)} - \arctan f(x_1) - \arctan \frac{1}{f(x_1)}$$

et au premier abord, on serait tenté de conclure que tous les termes se détruisent dans le second membre, d'après l'équation : $\arctan f(x) + \arctan \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{\pi}{2}$. *Mais ce serait oublier la convention faite sur la fonction* $\arctan f(x)$, *qui doit toujours rester comprise entre* $-\pi/2$ *et* $\pi/2$. *De là suit en effet qu'on doit*

prendre $\arctan \frac{1}{f(x)} = \frac{\pi}{2} - \arctan f(x)$ *seulement dans le cas où* $f(x)$ *est positif, et écrire :*

$$\arctan \frac{1}{f(x)} = \frac{\pi}{2} - \arctan f(x) - \pi = -\frac{\pi}{2} - \arctan f(x)$$

si $f(x)$ *est négatif. Nous en concluons aisément qu'on a :*

$n + n' = 0$ *lorsque* $f(x_0)$ *et* $f(x_1)$ *sont de même signe ;*

$n + n' = 1$ *lorsque* $f(x_0)$ *est positif et* $f(x_1)$ *négatif ;*

$n + n' = -1$ *lorsque* $f(x_0)$ *est négatif et* $f(x_1)$ *positif.*

Ces relations, découvertes encore par Cauchy, et qui font dépendre si simplement n de n', ont une grande importance, comme on va voir.

III. Considérant, pour plus de simplicité, un exemple particulier, je suppose qu'on demande l'indice de la fonction $f(x) = \frac{x^2-2}{x^3-3x}$ *entre les limites* -2 *et* $+2$*, qui donnent* $f(-2) = -1$ *et* $f(+2) = +1$.

Le théorème qui vient d'être démontré donnera :

$$\mathbf{I}_{-2}^{+2}\left[\frac{x^2-2}{x^3-3x}\right] + \mathbf{I}_{-2}^{+2}\left[\frac{x^3-3x}{x^2-2}\right] = -1$$

Or, en divisant $x^3 - 3x$ *par* $x^2 - 2$*, on obtient :* $\frac{x^3-3x}{x^2-2} = x - \frac{x}{x^2-2}$

solution qui permet de remplacer l'indice du premier membre, par l'indice de la fraction plus simple : $\frac{-x}{x^2-2}$ *. En effet, ces deux fractions deviennent infinies en même temps, et dans le voisinage des valeurs de la variable qui les rendent infinies, elles prennent des valeurs très grandes, par rapport auxquelles le terme* x *devient négligeable, de sorte qu'elles sont alors de même signe. Remarquant enfin que d'après la signification même de l'indice, on a évidemment :*

$$\mathbf{I}_{x_0}^{x_1}[-f(x)] = -\mathbf{I}_{x_0}^{x_1}[f(x)]$$

on conclura de l'identité fournie par la division :

$$\mathbf{I}_{-2}^{+2}\left[\frac{x^2-2}{x^3-3x}\right] = \mathbf{I}_{-2}^{+2}\left[\frac{x}{x^2-2}\right] - 1.$$

Or, il est clair qu'on peut opérer sur la fraction $\frac{x}{x^2-2}$ *comme sur la proposée, ce qui donnera :* $\mathrm{I}_{-2}^{+2}\left[\frac{x}{x^2-2}\right]=\mathrm{I}_{-2}^{+2}\left[\frac{2}{x}\right]-1.$

On aura enfin : $\mathrm{I}_{-2}^{+2}\left[\frac{2}{x}\right]+\mathrm{I}_{-2}^{+2}\left[\frac{x}{2}\right]=-1$, *ou simplement :* $\mathrm{I}_{-2}^{+2}\left[\frac{2}{x}\right]=-1.$

Car l'indice d'une fonction qui ne passe pas par l'infini, comme $\frac{x}{2}$, *est évidemment nul. De ces réductions successives, on conclut :* $\mathrm{I}_{-2}^{+2}\left[\frac{x^2-2}{x^3-3x}\right]=-3$

et on a par suite : $\int_{-2}^{+2}\frac{d\frac{x^2-2}{x^3-3x}}{1+\frac{x^2-2}{x^3-3x}}=\arctan 1-\arctan(-1)-3\pi=-\frac{5\pi}{2}$.

IV. Toute fraction rationnelle $f(x)=\frac{\chi(x)}{\varphi(x)}$, *pourra être traitée évidemment par le procédé qui vient d'être expliqué en considérant la fraction* $\frac{x^2-2}{x^3-3x}$.

Sans m'y arrêter, je remarquerai que si l'on suppose $f(x)=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, *on aura en désignant par* $x=k$ *une racine de dénomination égale à zéro, que je supposerai, pour plus de généralité, d'un ordre quelconque de multiplicité* μ *:*

$$f(k+\varepsilon)=\frac{\varphi'(k+\varepsilon)}{\varphi(k+\varepsilon)}=\frac{\frac{\varphi^{\mu+1}(k)}{1.2...\mu}\varepsilon^{\mu}+\frac{\varphi^{\mu+2}(k)}{1.2...\mu+1}\varepsilon^{\mu+1}+...}{\frac{\varphi^{\mu+1}(k)}{1.2...\mu+1}\varepsilon^{\mu+1}+\frac{\varphi^{\mu+2}(k)}{1.2...\mu+2}\varepsilon^{\mu+2}+...}$$

ou sensiblement quand ε *est très petit :* $f(k+\varepsilon)=\frac{\mu}{\varepsilon}$

Cela montre qu'en faisant croître la variable entre deux limites quelconques, la fonction $f(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ *passe toujours, en devenant infinie, du négatif au positif, et jamais du positif au négatif. Par conséquent, l'indice de cette fonction est négatif et pris en valeur absolue entre les limites* x_0 *et* x_1 *donne précisément le nombre de racines de l'équation* $\varphi(x) = 0$, *qui sont renfermées dans cet intervalle. Or, il serait bien facile, comme l'a fait Cauchy, de retrouver l'énoncé même du théorème de Sturm* [4] *dans la méthode de détermination de l'indice qui a été obtenue par la voie du calcul intégral, mais il n'est point nécessaire d'entrer dans ce détail pour avoir aussi un remarquable exemple des liens étroits qui existent entre ce calcul et l'Algèbre. J'observe seulement que dans tous les cas, qu'il s'agisse d'une équation* $\varphi(x) = 0$ *algébrique ou transcendante, le nombre n de ses racines, entre les deux limites données* x_0 *et* x_1, *s'exprime par l'intégrale définie dont nous venons de faire l'étude, en y supposant :*

$$f(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

on a en effet : $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\varphi''(x)\varphi(x) - \varphi'^2(x)}{\varphi'^2(x) + \varphi^2(x)}) dx = \arctan \frac{\varphi'(x_1)}{\varphi(x_1)} - \arctan \frac{\varphi'(x_0)}{\varphi(x_0)} - n\pi$

de sorte que ce nombre pourrait se tirer de l'évaluation approximative de l'intégrale par la méthode des quadratures.

---

4 *Journal de M. Liouville Tome V : Note sur la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires d'une équation numérique comprise entre des limites données. Théorème de Rolle, de Budan ou de Fourier, de Descartes, de Sturm et de Cauchy, par M. l'abbé Moigno.*