LEÇONS

SUR

LES APPLICATIONS DU CALCUL INFINITÉSIMAL

A LA GÉOMÉTRIE.

PRÉLIMINAIRES.

Revue de quelques Formules de Géométrie analytique.

AVANT d'exposer les applications géométriques du calcul infinitésimal, il sera fort utile d'établir quelques notions et quelques formules préliminaires. Tel est l'objet dont nous allons d'abord nous occuper.

Nous déterminerons ordinairement la position d'un point dans l'espace à l'aide de trois *coordonnées rectilignes* x, y, z, relatives à trois axes des x, des y et des z, passant par l'*origine* des coordonnées, et formés par les intersections mutuelles des trois *plans coordonnés* des y, z, des z, x, et des x, y. Ces coordonnées seront *rectangulaires* lorsque les trois axes seront perpendiculaires entre eux.

Nous nommerons *axe* une droite menée par un point quelconque de

l'espace, et prolongée indéfiniment dans les deux sens; et nous dirons qu'un axe de cette espèce se divise en deux *demi-axes* aboutissant au point que l'on considère, et dont chacun se prolonge indéfiniment dans un seul sens. Par conséquent, chacun de ces deux demi-axes aura toujours une direction déterminée. Si l'on considère en particulier les trois axes des x, y, z, chacun d'eux sera divisé à l'origine en deux demi-axes, sur l'un desquels se compteront les coordonnées positives, tandis que l'on comptera sur l'autre les coordonnées négatives.

D'après ces définitions, il est clair que, si l'on tient compte seulement des angles qui renferment au plus 200 degrés (*nouvelle division*), deux axes ou deux droites, tracés de manière à se couper, comprendront toujours entre eux deux angles, l'un aigu, l'autre obtus, tandis que deux directions ou deux demi-axes, aboutissant à un point donné, formeront un seul angle, tantôt aigu, tantôt obtus. Lorsque deux directions ou deux demi-axes aboutiront à deux points différens de l'espace, ils seront censés former entre eux le même angle que formeraient deux demi-axes parallèles et prolongés dans les mêmes sens à partir d'un point unique. Cela posé, l'angle que deux directions formeront entre elles sera toujours complétement déterminé, et l'on pourra en dire autant des angles formés par une direction avec les demi-axes des coordonnées positives.

Concevons maintenant que, par un point (O) pris à volonté dans l'espace, on ait mené deux demi-axes $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, et qu'un rayon mobile, d'une longueur indéfinie, aboutissant au point (O), tourne, dans le plan de ces deux demi-axes, avec un mouvement de rotation en vertu duquel il décrive l'angle AOB, en passant de la position $\overline{OA}$ à la position $\overline{OB}$. Supposons de plus que, par le point (O), l'on ait élevé un troisième demi-axe situé hors du plan OAB. Un spectateur qui posera les pieds sur le plan de manière à s'appuyer contre le demi-axe, verra le rayon vecteur se mouvoir, en passant devant lui, de sa droite à sa gauche, ou de sa gauche à sa droite, ce que nous exprimerons en

disant que le mouvement de rotation a lieu de *droite à gauche* ou de *gauche à droite* *. On doit observer, au reste, que, si par le point (O) on élevait à-la-fois deux demi-axes situés, le premier d'un côté du plan, le second de l'autre côté, le même mouvement de rotation paraîtrait s'effectuer autour de l'un de ces demi-axes de droite à gauche, et autour de l'autre de gauche à droite.

Considérons à présent un angle solide trièdre qui ait pour arêtes trois demi-axes, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, aboutissant au point (O); et concevons qu'un rayon mobile, d'une longueur indéfinie, mené par le point (O), fasse le tour de l'angle solide en s'appliquant successivement sur les trois faces AOB, BOC, COA. Son mouvement de rotation sur chaque face sera un mouvement de rotation de droite à gauche ou de gauche à droite autour de l'arête située hors du plan de cette face. De plus, il est facile de voir que les trois mouvemens sur les trois faces seront de même espèce. Supposons, par exemple, que les trois demi-axes dont il s'agit se réduisent aux demi-axes des coordonnées positives, et coïncident avec les directions $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OZ}$. Si la disposition de ces demi-axes est celle que l'on adopte le plus ordinairement, les trois mouvemens de rotation auront lieu de droite à gauche autour de ces trois demi-axes, lorsque le rayon mobile, en faisant le tour de l'angle solide, passera successivement de la position $\overline{OX}$ à la position $\overline{OY}$, et de celle-ci à la position $\overline{OZ}$. Si le demi-axe des z positives était transporté de l'autre côté du plan des x, y, alors les mouvemens de rotation de droite à gauche auraient lieu dans le cas où le rayon mobile prendrait successivement les trois positions

$$\overline{OX}, \quad \overline{OZ}, \quad \overline{OY},$$

pour revenir ensuite directement de la position $\overline{OY}$ à la position $\overline{OX}$.

* Le moyen que nous employons ici, et à l'aide duquel on distingue facilement les deux espèces de mouvemens de rotation que peut prendre un plan tournant sur lui-même autour d'un point donné, est celui dont M. Ampère a fait usage dans la *Théorie de l'Électricité dynamique*.

Afin de bien distinguer les deux espèces de mouvemens que peut prendre un rayon mobile assujetti à passer par l'origine et à parcourir successivement les trois faces de l'angle solide $OXYZ$, nous dirons que ce rayon mobile a, dans chacun des plans coordonnés, un mouvement *direct* de rotation, s'il passe successivement de la position $\overline{OX}$ à la position OY, et de celle-ci à la position $\overline{OZ}$. Nous dirons, dans le cas contraire, que le même rayon vecteur a un mouvement de rotation *rétrograde*. En conséquence, si l'on adopte la disposition la plus ordinaire pour les demi-axes des coordonnées positives, les mouvemens directs de rotation autour de ces demi-axes auront lieu de droite à gauche, et les mouvemens rétrogrades de gauche à droite.

Nous appliquerons les mêmes dénominations aux deux espèces de mouvemens que peut prendre un rayon vecteur mobile en tournant autour d'un point de manière à parcourir successivement les trois faces d'un angle solide quelconque; et quand le mouvement de rotation du rayon vecteur sur chaque face aura lieu de droite à gauche autour de l'arête située hors de cette face, ce mouvement sera nommé *direct* ou *rétrograde*, suivant que les mouvemens de rotation des plans coordonnés, tournant de droite à gauche autour des demi-axes $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OZ}$, seront eux-mêmes directs ou rétrogrades.

Une droite $\overline{AB}$, menée d'un point (A) supposé fixe à un point (B) supposé mobile, sera généralement désignée sous le nom de *rayon vecteur*. Nommons R ce rayon vecteur :

$$x_0, \quad y_0, \quad z_0$$

les coordonnées du point (A);

$$x, \quad y, \quad z$$

celles du point (B); et

$$a, \quad b, \quad c$$

les angles formés par la direction $\overline{AB}$ avec les demi-axes des coordonnées positives.

$$\pi - a, \quad \pi - b, \quad \pi - c$$

seront les angles formés par le même rayon vecteur avec les demi-axes des coordonnées négatives. De plus, la *projection orthogonale* du rayon vecteur sur l'axe des x sera égale, d'après un théorème connu de trigonométrie, au produit de ce rayon vecteur par le cosinus de l'angle aigu qu'il forme avec l'axe des x prolongé dans un certain sens. Cette projection se trouvera donc représentée,

si l'angle a est aigu, par le produit $R \cos a$,

et si l'angle a est obtus, par le produit $R \cos(\pi - a) = -R \cos a$;

c'est à-dire, dans les deux cas, par la valeur numérique du produit

$$R \cos a.$$

Il est d'ailleurs évident, 1.° que le rayon vecteur projeté, si on lui donne pour origine la projection du point A, sera dirigé dans le sens des x positives ou dans le sens des x négatives, suivant que l'angle a sera aigu ou obtus; 2.° que le produit $R \cos a$ sera positif dans le premier cas, négatif dans le second. Donc le produit $R \cos a$ sera équivalent à la projection du rayon vecteur R sur l'axe des x, prise avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que cette projection sera dirigée dans le sens des x positives ou dans le sens des x négatives.

De même, les produits $R \cos b$, $R \cos c$ seront respectivement égaux aux projections orthogonales du rayon vecteur R sur les axes des y et z, prises tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$, suivant que chacune de ces projections sera dirigée dans le sens des coordonnées positives ou négatives.

Les trois projections orthogonales du rayon vecteur, prises avec les signes que nous venons d'indiquer, sont ce que nous appellerons désormais ses *projections algébriques* sur les axes des x, des y et des z.

Elles sont, en vertu de ce qui précède, équivalentes aux trois produits

$$R\cos a, \quad R\cos b, \quad R\cos c.$$

De plus, il est facile de s'assurer qu'elles sont respectivement égales aux trois différences

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0,$$

quand les axes des coordonnées seront perpendiculaires entre eux. On aura donc alors

$$(1) \qquad x - x_0 = R\cos a, \quad y - y_0 = R\cos b, \quad z - z_0 = R\cos c.$$

Enfin, comme le rayon vecteur et ses projections orthogonales représentent la diagonale et les arêtes d'un parallélipipède rectangle, le carré du rayon vecteur sera équivalent à la somme des carrés des trois projections, et l'on aura encore, dans l'hypothèse admise,

$$(2) \qquad R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

ou

$$(3) \qquad R = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Cela posé, on tirera des équations (1)

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos a &= \frac{x - x_0}{R} = \frac{x - x_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}}}, \\ \cos b &= \frac{y - y_0}{R} = \frac{y - y_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}}}, \\ \cos c &= \frac{z - z_0}{R} = \frac{z - z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \right.$$

et par suite

$$(5) \qquad \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1.$$

Les équations (4) suffisent pour déterminer les angles a, b, c, que forme avec les demi-axes des coordonnées positives le rayon vecteur mené du point (x_0, y_0, z_0) * au point (x, y, z). Elles peuvent être remplacées par la seule formule

$$(6) \qquad \frac{x-x_0}{\cos a} = \frac{y-y_0}{\cos b} = \frac{z-z_0}{\cos c} = R.$$

Quant à la formule (5), elle exprime la relation qui existe toujours entre les trois angles que forme une droite prolongée dans un sens quelconque avec les demi-axes des coordonnées positives.

Supposons à présent qu'au point (x_0, y_0, z_0) l'on substitue l'origine même des coordonnées. Si l'on désigne par r le rayon vecteur mené de cette origine au point (x, y, z), et par α, β, γ les angles que forme ce rayon vecteur avec les demi-axes des coordonnées positives, les formules (1), (2), (4) se trouveront remplacées par les suivantes

$$(7) \qquad x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma,$$

$$(8) \qquad r = [x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$(9) \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r},$$

et l'on aura encore, entre les angles α, β, γ, la relation

$$(10) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Si le point (A) est situé dans le plan des x, y, on aura $z = 0$, et les équations (8), (9) deviendront

$$(11) \qquad r = [x^2 + y^2]^{\frac{1}{2}},$$

* Nous indiquerons souvent les points, comme nous le faisons ici, à l'aide de leurs coordonnées renfermées entre deux parenthèses. Quelquefois aussi nous indiquerons les courbes ou surfaces courbes par leurs équations.

$$(12) \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = 0.$$

De plus, la formule (10) étant alors réduite à

$$(13) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1,$$

on en tirera

$$(14) \qquad \cos\beta = \pm\sqrt{(1-\cos^2\alpha)} = \pm\sin\alpha.$$

Concevons que, dans la même hypothèse, un rayon vecteur mobile, partant de la position $\overline{OX}$, dans laquelle il coïncidait avec le demi-axe des x positives, se meuve autour de l'origine dans le plan des x, y, avec un mouvement direct de rotation, et parvienne à la position $\overline{OA}$ après une ou plusieurs révolutions effectuées autour de cette origine. Si l'on nomme p l'angle qu'il aura décrit, et qui peut être supérieur à 400 degrés (*nouvelle division*), r et p seront ce qu'on appelle les coordonnées polaires du point (A). Or, il est aisé de voir qu'on aura généralement

$$(15) \qquad x = r\cos p, \quad y = r\sin p$$

et par conséquent

$$(16) \qquad \cos p = \frac{x}{r}, \quad \sin p = \frac{y}{r}.$$

Si l'on compare ces dernières équations aux formules (12), on en conclura

$$(17) \qquad \cos p = \cos\alpha, \quad \sin p = \cos\beta.$$

Il ne s'ensuit pas que les angles α et β soient nécessairement égaux à l'angle p et à son supplément : car les angles α et β doivent rester inférieurs à 200 degrés, tandis que l'angle p peut croître au-delà de toute limite. On doit même observer qu'à un seul point (A) correspondent

une infinité de valeurs de p, qui diffèrent les unes des autres par des multiples du nombre 2π. Enfin, rien n'empêche d'admettre que, pour passer de la position $\overline{OX}$ à la position $\overline{OA}$, le rayon vecteur mobile a décrit l'angle p, en vertu d'un mouvement de rotation rétrograde, et d'attribuer en conséquence à cet angle une valeur négative, tandis que les angles α, β sont, d'après les conventions faites, des quantités essentiellement positives, comprises entre les limites o et π.

Nous allons maintenant passer en revue quelques problèmes qui se résolvent facilement à l'aide des principes ci-dessus établis.

1.er Problème. *Trouver les équations de la droite qui passe par le point* (x_0, y_0, z_0), *et qui, prolongée dans un certain sens, forme avec les demi-axes des coordonnées positives les angles* a, b, c.

Solution. Les équations cherchées se trouvent comprises dans une formule que l'on tire des équations (1), savoir :

$$(18) \qquad \frac{x-x_0}{\cos a} = \frac{y-y_0}{\cos b} = \frac{z-z_0}{\cos c}.$$

Cette formule exprime que les *projections algébriques d'un rayon vecteur*, compté sur la droite en question, *sont respectivement proportionnelles aux cosinus des angles formés par ce rayon vecteur avec les demi-axes des coordonnées positives.* Elle fournit les trois équations

$$(19) \qquad \frac{y-y_0}{\cos b} = \frac{z-z_0}{\cos c}, \quad \frac{z-z_0}{\cos c} = \frac{x-x_0}{\cos a}, \quad \frac{x-x_0}{\cos a} = \frac{y-y_0}{\cos b},$$

qui appartiennent aux projections de la droite sur les trois plans coordonnés, et dont la dernière est une conséquence des deux autres. De plus, comme, en vertu d'un théorème d'analyse [voyez l'*Analyse algébrique*, note II, 14.e théorème], la formule

$$\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} = \frac{u''}{v''} = \&c.....$$

entraîne toujours la suivante

$$\frac{u}{v}=\frac{u'}{v'}=\frac{u''}{v''}=\&c....=\pm\frac{\sqrt{(u^2+u'^2+u''^2+...)}}{\sqrt{(v^2+v'^2+v''^2+...)}},$$

on conclura de la formule (18) et de l'équation (5)

$$(20)\quad \frac{x-x_0}{\cos a}=\frac{y-y_0}{\cos b}=\frac{z-z_0}{\cos c}=\pm\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Dans le second membre de cette dernière formule, on devra préférer le signe $+$, si, comme on l'a supposé, le rayon vecteur, qui forme avec les axes les angles a, b, c, se dirige du point (x_0, y_0, z_0) vers le point (x, y, z), attendu qu'alors chacune des fractions

$$\frac{x-x_0}{\cos a},\quad \frac{y-y_0}{\cos b},\quad \frac{z-z_0}{\cos c}$$

sera une quantité positive. On devrait, au contraire, préférer le signe $-$, si le rayon vecteur était censé dirigé du point (x, y, z) vers le point (x_0, y_0, z_0). Dans le premier cas, où l'on adopte le signe $+$, la formule (20) coïncide évidemment avec l'équation (6).

Corollaire. Lorsque le point (x_0, y_0, z_0) est remplacé par l'origine des coordonnées, les formules (18) et (19) se réduisent à

$$(21)\qquad \frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma},$$

$$(22)\qquad \frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma},\quad \frac{z}{\cos\gamma}=\frac{x}{\cos\alpha},\quad \frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}.$$

Si, de plus, on supposait $\gamma=\frac{\pi}{2}$, ou $\cos\gamma=0$, la droite cherchée serait comprise dans le plan des x, y, et les équations (22) donneraient

$$(23)\qquad z=0,\quad y=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}x=x\operatorname{tang}p=\pm x\operatorname{tang}\alpha.$$

2.e Problème. *Trouver l'angle compris entre deux rayons vecteurs, tracés dans le plan des x, y, et menés de l'origine, le premier au point (x_0, y_0), le second au point (x, y); ainsi que la surface du triangle renfermé entre ces mêmes rayons vecteurs.*

Solution. Soient (A), (B) les deux points que l'on considère, et (O) l'origine des coordonnées. Soient, en outre, p_0, r_0 les coordonnées polaires du point (A), et p, r celles du point (B). Désignons par α_0 et α les angles que les rayons vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ forment avec le demi-axe des x positives, et par β_0, β les angles qu'ils forment avec le demi-axe des y positives. Enfin nommons δ l'angle AOB compris entre les deux rayons vecteurs. Un rayon vecteur mobile qui décrirait cet angle, nécessairement inférieur à 200 degrés, en passant directement de la position $\overline{OA}$ à la position $\overline{OB}$, aurait évidemment dans le plan des x, y un mouvement de rotation déterminé, ou direct, ou rétrograde. Cela posé, concevons que le rayon vecteur mobile, avant de parvenir à la position $\overline{OA}$, ait décrit, avec un mouvement de rotation direct, et en partant de la position $\overline{OX}$, un angle quelconque, qui pourra surpasser la somme de quatre angles droits : cet angle sera l'une des valeurs qu'il est permis d'attribuer à la coordonnée polaire p_0. De plus, si, en passant de la position $\overline{OA}$ à la position $\overline{OB}$, le rayon vecteur continue de se mouvoir dans le même sens, l'angle $p_0 + \delta$, qu'il aura décrit quand il sera parvenu à la position $\overline{OB}$, sera l'une des valeurs qu'il est permis d'attribuer à la coordonnée polaire p. On aura donc, dans cette hypothèse,

$$p = p_0 + \delta. \tag{24}$$

Au contraire, si, pour revenir de la position $\overline{OA}$ à la position $\overline{OB}$, le rayon vecteur est obligé de prendre un mouvement de rotation rétrograde, l'une des valeurs de p sera évidemment

$$p = p_0 - \delta. \tag{25}$$

Donc, par suite, on pourra supposer

$$(26) \qquad p - p_0 = \pm \delta,$$

le signe + ou le signe — devant être préféré, suivant que le mouvement de rotation d'un rayon vecteur mobile, passant de la position $\overline{OA}$ à la position $\overline{OB}$, de manière à décrire l'angle OAB, sera un mouvement direct ou rétrograde. Or, on tirera de la formule (26)

$$(27) \qquad \cos\delta = \cos(p - p_0) = \cos p_0 \cos p + \sin p_0 \sin p,$$

$$(28) \qquad \pm \sin\delta = \sin(p - p_0) = \cos p_0 \sin p - \cos p \sin p_0;$$

et, comme on aura d'ailleurs, en vertu des formules (17),

$$(29) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \cos p = \cos\alpha, & \sin p = \cos\beta, \\ \cos p_0 = \cos\alpha_0, & \sin p_0 = \cos\beta_0, \end{array} \right.$$

on trouvera définitivement

$$(30) \qquad \cos\delta = \cos\alpha_0 \cos\alpha + \cos\beta_0 \cos\beta,$$

$$(31) \qquad \pm \sin\delta = \cos\alpha_0 \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta_0.$$

Si, à la place des formules (29), on substituait les suivantes

$$(32) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \cos p = \frac{x}{r}, & \sin p = \frac{y}{r}, \\ \cos p_0 = \frac{x_0}{r_0}, & \sin p_0 = \frac{y_0}{r_0}, \end{array} \right.$$

les équations (30) et (31) deviendraient respectivement

$$(33) \qquad \cos\delta = \frac{x_0 x + y_0 y}{r_0 r},$$

$$(34) \qquad \pm \sin\delta = \frac{x_0 y - x y_0}{r_0 r}.$$

Il suffit de recourir à l'équation (30), ou à l'équation (33), pour déterminer l'angle δ, qui est censé toujours positif et inférieur à π. Quant à la surface du triangle compris entre les rayons vecteurs r_0, r, elle sera, d'après un théorème connu de trigonométrie, équivalente à la moitié du produit

$$(35) \qquad r_0 r \sin \delta = \pm (x_0 y - x y_0).$$

Il est essentiel d'observer que la différence $x_0 y - x y_0$ devra être, dans le second membre de la formule (35), affectée du même signe que l'angle δ dans le second membre de l'équation (26). Par suite, l'expression

$$(36) \qquad \tfrac{1}{2} (x_0 y - x y_0)$$

représentera la surface du triangle OAB, ou la même surface prise en signe contraire, suivant que le mouvement de rotation d'un rayon vecteur mobile, passant de la position $\overline{OA}$ à la position $\overline{OB}$, sera direct ou rétrograde.

Corollaire 1.er Lorsque les rayons vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, font partie d'une mêmedroite, on a

$$(37) \qquad \delta = 0 \quad \text{ou} \quad \delta = \pi, \quad \text{et} \quad \sin \delta = 0.$$

Alors on tire des équations (28), (31) et (34),

$$(38) \qquad \operatorname{tang} p = \operatorname{tang} p_0,$$

$$(39) \qquad \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_0} = \frac{\cos \beta}{\cos \beta_0} = \pm \frac{\sqrt{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)}}{\sqrt{(\cos^2 \alpha_0 + \cos^2 \beta_0)}} = \pm 1,$$

$$(40) \qquad \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \pm \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{\sqrt{(x_0^2 + y_0^2)}} = \pm \frac{r}{r_0}.$$

Les doubles signes que renferment les formules (39) et (40) doivent se réduire au signe $+$, lorsque les rayons vecteurs r_0, r sont dirigés

dans le même sens, et au signe —, lorsque ces rayons vecteurs sont dirigés en sens contraires.

Corollaire 2.e Lorsque les rayons vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ sont perpendiculaires entre eux, on a

$$(41) \qquad \delta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{et} \quad \cos\delta = 0.$$

Alors on tire des formules (27), (30) et (33)

$$(42) \qquad 1 + \operatorname{tang} p \,.\, \operatorname{tang} p_0 = 0,$$

$$(43) \qquad \cos\alpha_0 \cos\alpha + \cos\beta_0 \cos\beta = 0,$$

$$(44) \qquad x_0 x + y_0 y = 0.$$

Ces trois dernières équations peuvent être facilement transformées l'une dans l'autre.

3.e Problème. *Trouver l'angle compris entre deux rayons vecteurs tracés dans l'espace, et menés de l'origine, le premier au point* (x_0, y_0, z_0), *le second au point* (x, y, z); *ainsi que la surface du triangle formé par ces mêmes rayons vecteurs.*

Solution. Soient toujours (A) et (B) les deux points que l'on considère; r_0, r les rayons vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, et δ l'angle qu'ils comprennent entre eux. Soient encore α_0, β_0, γ_0; α, β, γ les angles formés par ces rayons vecteurs avec les demi-axes des x, des y, et des z, prolongés dans le sens des coordonnées positives. Enfin, nommons R la distance $\overline{AB}$. On aura, en vertu des formules déjà établies,

$$(45) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \cos\alpha = \frac{x}{r}, & \cos\beta = \frac{y}{r}, & \cos\gamma = \frac{z}{r}, \\ \cos\alpha_0 = \frac{x_0}{r_0}, & \cos\beta_0 = \frac{y_0}{r_0}, & \cos\gamma_0 = \frac{z_0}{r_0}; \end{array} \right.$$

$$(46)\quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2; \end{cases}$$

$$(47)\quad \begin{aligned} R^2 &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \\ &= r^2 + r_0^2 - 2(x_0 x + y_0 y + z_0 z) \\ &= r^2 + r_0^2 - 2 r_0 r (\cos\alpha_0 \cos\alpha + \cos\beta_0 \cos\beta + \cos\gamma_0 \cos\gamma). \end{aligned}$$

De plus, dans le triangle OAB, qui a pour côtés r, r_0 et R, le cosinus de l'angle δ sera [en vertu d'un théorème connu de *trigonométrie*]

$$(48)\quad \begin{aligned} \cos\delta &= \frac{r^2 + r_0^2 - R^2}{2 r_0 r} = \frac{x_0 x + y_0 y + z_0 z}{r_0 r} \\ &= \cos\alpha_0 \cos\alpha + \cos\beta_0 \cos\beta + \cos\gamma_0 \cos\gamma. \end{aligned}$$

Cette dernière formule suffit pour déterminer l'angle δ compris entre les limites o et π. On en déduit facilement la valeur de

$$\sin\delta = \sqrt{(1 - \cos^2\delta)},$$

et l'on trouve

$$(49)\quad \begin{aligned} \sin\delta &= \frac{[(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (x_0 x + y_0 y + z_0 z)^2]^{\frac{1}{2}}}{r_0 r} \\ &= \frac{[(y_0 z - y z_0)^2 + (z_0 x - z x_0)^2 + (x_0 y - x y_0)^2]^{\frac{1}{2}}}{r_0 r} \\ &= [(\cos\beta_0 \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma_0)^2 + (\cos\gamma_0 \cos\alpha - \cos\gamma \cos\alpha_0)^2 + (\cos\alpha_0 \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta_0)^2]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si maintenant on multiplie les rayons vecteurs r_0 et r par le sinus de l'angle δ, on obtiendra le produit

$$(50)\quad r_0 r \sin\delta = [(y_0 z - y z_0)^2 + (z_0 x - z x_0)^2 + (x_0 y - x y_0)^2]^{\frac{1}{2}},$$

dont la moitié, savoir,

$$(51)\qquad \tfrac{1}{2} r_0 r \sin \delta = \left[\left(\frac{y_0 z - y z_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_0 x - z x_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_0 y - x y_0}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

représentera précisément la surface du triangle OAB.

Corollaire 1.er Lorsque les rayons vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, font partie d'une même droite, on a

$$(37)\qquad \delta = 0 \quad \text{ou} \quad \delta = \pi, \quad \text{et} \quad \sin \delta = 0.$$

Alors on tire de la formule (49)

$$(52)\qquad y_0 z - y z_0 = 0, \quad z_0 x - z x_0 = 0, \quad x_0 y - x y_0 = 0,$$

$$(53)\qquad \cos\beta_0 \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma_0 = 0, \ \cos\gamma_0 \cos\alpha - \cos\gamma \cos\alpha_0 = 0, \ \cos\alpha_0 \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta_0 = 0,$$

et par suite

$$(54)\qquad \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0} = \pm \frac{r}{r_0},$$

$$(55)\qquad \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_0} = \frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} = \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma_0} = \pm 1.$$

Les doubles signes que renferment les formules (54) et (55) doivent être remplacés par le signe $+$, lorsque les rayons vecteurs r_0, r sont dirigés dans le même sens, et par le signe $-$, lorsque ces rayons vecteurs sont dirigés en sens contraires.

Corollaire 2.e Lorsque les rayons vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ sont perpendiculaires entre eux, on a

$$(41)\qquad \delta = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \cos \delta = 0;$$

et l'on tire de l'équation (48)

$$(56)\qquad x_0 x + y_0 y + z_0 z = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(57) \qquad \cos\alpha_0 \cos\alpha + \cos\beta_0 \cos\beta + \cos\gamma_0 \cos\gamma = 0.$$

Réciproquement, si la condition (57) est remplie, l'angle δ sera droit, et les rayons vecteurs r_0, r seront perpendiculaires entre eux.

Corollaire 3.e Les projections du triangle OAB sur les plans coordonnés sont respectivement égales [*voyez* le second problème] aux valeurs numériques des quantités

$$(58) \qquad \frac{y_0 z - y z_0}{2}, \quad \frac{z_0 x - z x_0}{2}, \quad \frac{x_0 y - x y_0}{2}.$$

Cela posé, il résulte évidemment de la formule (51), que *la surface plane OAB est équivalente à la racine carrée de la somme des carrés de ses projections.* Ce théorème étant ainsi démontré pour la surface d'un triangle, il sera facile de l'étendre à une surface plane quelconque.

Corollaire 4.e Considérons maintenant deux demi-axes qui, aboutissant, non plus à l'origine des coordonnées, mais à deux points différens de l'espace, forment toujours, avec les axes des x, y et z prolongés dans le sens des coordonnées positives, des angles représentés par les lettres α_0, β_0, γ_0; α, β, γ. Ces deux demi-axes seront censés former entre eux le même angle que deux demi-axes parallèles et prolongés dans le même sens à partir de l'origine des coordonnées. Donc, si l'on nomme δ l'angle des deux demi-axes proposés, on aura encore

$$(48) \qquad \cos\delta = \cos\alpha_0 \cos\alpha + \cos\beta_0 \cos\beta + \cos\gamma_0 \cos\gamma, \qquad \text{et}$$

$$(49) \qquad \sin\delta =$$

$$[(\cos\beta_0 \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma_0)^2 + (\cos\gamma_0 \cos\alpha - \cos\alpha \cos\gamma_0)^2 + (\cos\alpha_0 \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta_0)^2]^{\frac{1}{2}}$$

Si l'angle δ se réduit à zéro ou à 200 degrés, les deux demi-axes deviendront *parallèles*, et l'on aura

$$(55) \qquad \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_0} = \frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} = \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma_0} = \pm 1,$$

le signe + ou le signe — devant être préféré suivant que les deux demi-axes seront prolongés dans le même sens ou en sens contraires. Si l'angle δ se réduit à un angle droit, on pourra mener par l'un des demi-axes un plan perpendiculaire à l'autre, et l'on trouvera

$$(57) \qquad \cos\alpha_0 \cos\alpha + \cos\beta_0 \cos\beta + \cos\gamma_0 \cos\gamma = 0.$$

Corollaire 5.e En s'appuyant sur la formule (48), on peut facilement transformer les coordonnées rectangulaires x, y, z en d'autres coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ comptées sur des axes qui passent toujours par le point (O), et qui, prolongés dans le sens des coordonnées positives, forment respectivement avec les demi-axes des x, y, z positives, le premier les angles $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, le second les angles $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, le troisième les angles $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. En effet, soit toujours r le rayon vecteur mené de l'origine au point (x, y, z). On aura

$$(59) \qquad \begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2. \end{aligned}$$

De plus, les cosinus des angles que forment, d'une part, ce rayon vecteur, et de l'autre, le demi-axe des ξ positives, avec les demi-axes des x, y et z positives, étant respectivement

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \quad \frac{z}{r};$$

$$\cos\alpha_0, \quad \cos\beta_0, \quad \cos\gamma_0;$$

la somme des produits qu'on obtient en multipliant ces cosinus deux à deux, savoir,

$$(60) \qquad \frac{x\cos\alpha_0 + y\cos\beta_0 + z\cos\gamma_0}{r}$$

représentera [en vertu de la formule (49)] le cosinus de l'angle compris

entre le demi-axe des ξ positives et le rayon vecteur r. Ce dernier cosinus pouvant d'ailleurs être exprimé par le rapport $\frac{\xi}{r}$, on aura nécessairement

$$\frac{\xi}{r} = \frac{x\cos\alpha_0 + y\cos\beta_0 + z\cos\gamma_0}{r},$$

et par suite

$$(61)\quad \begin{cases} \xi = x\cos\alpha_0 + y\cos\beta_0 + z\cos\gamma_0. \\ \eta = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1, \\ \zeta = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2. \end{cases}$$

On trouvera de même

Les équations (61) suffisent pour déterminer ξ, η, ζ en fonctions de x, y, z, et réciproquement. On peut y échanger les coordonnées ξ, η, ζ avec les coordonnées x, y, z, pourvu que l'on y échange en même temps α_1 avec β_0, α_2 avec γ_0, et β_2 avec γ_1. On trouvera de cette manière

$$(62)\quad \begin{cases} x = \xi\cos\alpha_0 + \eta\cos\alpha_1 + \zeta\cos\alpha_2, \\ y = \xi\cos\beta_0 + \eta\cos\beta_1 + \zeta\cos\beta_2, \\ z = \xi\cos\gamma_0 + \eta\cos\gamma_1 + \zeta\cos\gamma_2. \end{cases}$$

Enfin, comme les nouveaux axes des coordonnées sont perpendiculaires entre eux, les cosinus des angles qu'ils forment avec les axes de x, y, z ne satisferont pas seulement aux conditions

$$(63)\quad \begin{cases} \cos^2\alpha_0 + \cos^2\beta_0 + \cos^2\gamma_0 = 1, \\ \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1, \\ \cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1, \end{cases}$$

mais encore aux suivantes

$$(64)\quad \begin{cases} \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0, \\ \cos\alpha_2\cos\alpha_0 + \cos\beta_2\cos\beta_0 + \cos\gamma_2\cos\gamma_0 = 0, \\ \cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1 = 0. \end{cases}$$

On arriverait aux mêmes conditions en substituant les valeurs de ξ, η, ζ données par les formules (61) dans l'équation

$$(59) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = x^2 + y^2 + z^2 ;$$

puis égalant dans les deux membres les coefficiens des carrés x^2, y^2, z^2, et des doubles produits $2yz$, $2zx$, $2xy$. Ajoutons qu'à l'aide des conditions (63) et (64) on peut déduire immédiatement les formules (62) des formules (61).

4.e Problème. *Trouver les équations d'un plan passant par le point* (x_0, y_0, z_0), *et perpendiculaire à la droite qui, prolongée dans un certain sens, forme, avec les demi-axes des coordonnées positives, les angles* λ, μ, ν.

Solution. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du plan, et R le rayon vecteur mené du point x_0, y_0, z_0 au point x, y, z. Les cosinus des angles que forme ce rayon vecteur avec les demi-axes des coordonnées positives étant respectivement

$$\frac{x-x_0}{R}, \quad \frac{y-y_0}{R}, \quad \frac{z-z_0}{R},$$

le cosinus de l'angle compris entre ce même rayon vecteur et la droite donnée sera [en vertu de la formule (48)]

$$(65) \qquad \frac{(x-x_0)\cos\lambda + (y-y_0)\cos\mu + (z-z_0)\cos\nu}{R}.$$

De plus, le rayon vecteur R, étant renfermé dans le plan, sera censé former un angle droit avec chacune des lignes perpendiculaires au plan. Donc le cosinus représenté par l'expression (65) sera nul, et l'on aura

$$(66) \qquad (x-x_0)\cos\lambda + (y-y_0)\cos\mu + (z-z_0)\cos\nu = 0.$$

Cette dernière équation est celle qu'il s'agissait d'obtenir.

Corollaire 1.er Représentons par k la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur le plan que l'on considère, et supposons

que les angles λ, μ, ν, soient précisément ceux que forme cette perpendiculaire avec les demi-axes des coordonnées positives. Enfin désignons par r le rayon vecteur mené de l'origine au point (x, y, z). Le cosinus de l'angle aigu compris entre ce rayon vecteur et la perpendiculaire k sera évidemment

$$\frac{x}{r}\cos\lambda + \frac{y}{r}\cos\mu + \frac{z}{r}\cos\nu = \frac{x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu}{r}.$$

Ce même cosinus pouvant être exprimé par $\frac{k}{r}$, on aura en conséquence

$$\frac{x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu}{r} = \frac{k}{r},$$

et l'on en conclura

$$(67) \qquad x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = k.$$

Telle est la forme sous laquelle se présente l'équation du plan, quand on y introduit la constante k à la place des coordonnées x_0, y_0, z_0. Au reste, pour revenir de l'équation (67) à la formule (66), il suffit d'attribuer à x, y, z les valeurs particulières x_0, y_0, z_0, puis d'éliminer la constante k entre la formule ainsi obtenue, savoir,

$$(68) \qquad x_0\cos\lambda + y_0\cos\mu + z_0\cos\nu = k,$$

et l'équation (67).

Corollaire 2.e Si l'on fait, pour abréger,

$$(69) \qquad \frac{\cos\lambda}{k} = A, \quad \frac{\cos\mu}{k} = B, \quad \frac{\cos\nu}{k} = C,$$

on en conclura, en supposant toujours la constante k positive,

$$(70) \qquad k = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$(71) \quad \cos\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\mu = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\nu = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

et la formule (67) deviendra

$$(72) \qquad Ax + By + Cz = 1.$$

Cette dernière équation est donc celle d'un plan qui est perpendiculaire au demi-axe tracé de manière à former, avec les demi-axes des coordonnées positives, les angles λ, μ, ν déterminés par les formules (71), et qui coupe ce demi-axe à une distance k de l'origine, la valeur de k étant donnée par la formule (70).

Corollaire 3.e Si l'on supposait

$$(73) \qquad \frac{\cos\lambda}{k} = \frac{A}{D}, \quad \frac{\cos\mu}{k} = \frac{B}{D}, \quad \frac{\cos\nu}{k} = \frac{C}{D},$$

les formules (70) et (71) se trouveraient remplacées par les suivantes

$$(74) \qquad k = \pm \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$(75) \quad \cos\lambda = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \cos\mu = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \cos\nu = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

dans lesquelles on devrait préférer le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que la quantité D serait positive ou négative. De plus, l'équation (67), ramenée à la forme

$$(76) \qquad Ax + By + Cz = D,$$

serait celle d'un plan mené par l'extrémité du rayon vecteur k, et perpendiculaire à ce rayon, que l'on suppose tracé de manière à former avec les demi-axes des coordonnées positives les angles λ, μ, ν.

5.e Problème. *Étant donnés les angles* α_0, β_0, γ_0, et α, β, γ, *que deux rayons vecteurs* $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, *menés de l'origine aux points* (A) *et* (B), *forment avec les demi-axes des coordonnées positives, on demande les angles* λ, μ, ν, *que forme, avec les mêmes demi-axes, la perpendiculaire* $\overline{OP}$ *élevée par l'origine sur le plan du triangle* AOB.

Solution. La droite $\overline{OP}$ devant être perpendiculaire à chacun des demi-axes $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, on aura [en vertu de la formule (57)]

$$(77)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha_0 \cos\lambda + \cos\beta_0 \cos\mu + \cos\gamma_0 \cos\nu = 0, \\ \cos\alpha \cos\lambda + \cos\beta \cos\mu + \cos\gamma \cos\nu = 0. \end{array}\right.$$

De plus, les angles λ, μ, ν devront satisfaire à l'équation de condition

$$(78)\qquad \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

Les formules (77) et (78) suffisent pour déterminer, aux signes près, les valeurs des quantités $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$. Si entre les équations (77) on élimine successivement ces trois quantités, on obtiendra trois autres équations comprises dans la seule formule

$$(79)\quad \frac{\cos\lambda}{\cos\beta_0 \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma_0} = \frac{\cos\mu}{\cos\gamma_0 \cos\alpha - \cos\gamma \cos\alpha_0} = \frac{\cos\nu}{\cos\alpha_0 \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta_0}.$$

Soient maintenant x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point (A); x, y, z celles du point (B); r_0, r les rayons vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, et δ l'angle compris entre ces mêmes rayons. On tirera de la formule (79), en ayant égard aux équations (49) et (78),

$$(80)\quad \frac{\cos\lambda}{\cos\beta_0 \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma_0} = \frac{\cos\mu}{\cos\gamma_0 \cos\alpha - \cos\gamma \cos\alpha_0} = \frac{\cos\nu}{\cos\alpha_0 \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta_0}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{(\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu)}}{\sqrt{[(\cos\beta_0 \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma_0)^2 + (\cos\gamma_0 \cos\alpha - \cos\gamma \cos\alpha_0)^2 + (\cos\alpha_0 \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta_0)^2]}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sin\delta},$$

et par suite

$$(81)\quad \frac{\cos\lambda}{y_0 z - y z_0} = \frac{\cos\mu}{z_0 x - z x_0} = \frac{\cos\nu}{x_0 y - x y_0} = \pm \frac{1}{r_0 r \sin\delta}.$$

Le double signe dont se trouve affecté le dernier membre de chacune des formules (80) et (81), indique deux systèmes de valeurs des angles

λ, μ, ν, qui correspondent aux deux directions suivant lesquelles on peut prolonger la droite $\overline{OP}$ à partir du point (O). Si cette droite est prolongée dans un certain sens, on devra réduire le double signe au signe $+$, et l'on tirera des formules (80) et (81)

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{\cos\beta_0\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma_0}{\sin\delta} = \frac{y_0 z - y z_0}{r_0 r \sin\delta}, \\ \cos\mu &= \frac{\cos\gamma_0\cos\alpha - \cos\gamma\cos\alpha_0}{\sin\delta} = \frac{z_0 x - z x_0}{r_0 r \sin\delta}, \\ \cos\nu &= \frac{\cos\alpha_0\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta_0}{\sin\delta} = \frac{x_0 y - x y_0}{r_0 r \sin\delta}. \end{aligned}\right.$$

Si la droite $\overline{OP}$ est prolongée en sens contraire, les cosinus des angles λ, μ, ν changeront de signe, et ces angles se trouveront remplacés par leurs supplémens. Il ne reste plus qu'à déterminer le sens dans lequel il faut prolonger la droite $\overline{OP}$ pour que les équations (82) soient vérifiées, ou, ce qui est encore plus simple, pour que chacune des trois fractions

$$(83)\qquad \frac{\cos\lambda}{y_0 z - y z_0}, \quad \frac{\cos\mu}{z_0 x - z x_0}, \quad \frac{\cos\nu}{x_0 y - x y_0},$$

et par conséquent la dernière des trois, ait une valeur positive. Or il est facile de s'assurer que cette condition sera remplie, si la perpendiculaire $\overline{OP}$ a été prolongée dans un sens tel qu'un rayon mobile, assujetti à tourner autour du point (O), et à parcourir l'une après l'autre, avec un mouvement de rotation direct, les trois faces de l'angle solide $OABP$, soit obligé, pour décrire l'angle AOB, de passer de la position $\overline{OA}$ à la position $\overline{OB}$. Admettons, en effet, cette hypothèse. Le rayon mobile, en passant de la position $\overline{OA}$ à la position $\overline{OB}$, aura évidemment un mouvement de rotation direct, non-seulement autour du demi-axe $\overline{OP}$, mais encore autour du demi-axe des z positives, si ces deux demi-axes sont situés du même côté du plan AOB, c'est-à-dire, s'ils forment entre eux un angle aigu, ou, ce qui revient au

même, si le cosinus de cet angle, savoir, $\cos\nu$, est positif. Au contraire, si $\cos\nu$ est négatif, ou si l'angle ν est obtus, les deux demi-axes n'étant plus situés du même côté par rapport au plan OAB, le mouvement du rayon mobile sera rétrograde autour du demi-axe des z positives. Soient d'ailleurs $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$ les projections des rayons vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ sur le plan des x, y, ou, en d'autres termes, les rayons vecteurs menés dans ce plan, de l'origine des coordonnées aux points (x_0, y_0) et (x, y). Tandis que le rayon mobile passera, dans le plan OAB, de la position $\overline{OA}$ à la position $\overline{OB}$, sa projection sur le plan des x, y passera de la position $\overline{OA'}$ à la position $\overline{OB'}$; et le mouvement de cette projection autour de l'axe des z sera évidemment de même espèce que le mouvement du rayon mobile, c'est-à-dire, direct ou rétrograde, suivant que la quantité $\cos\nu$ aura une valeur positive ou négative. De plus, il suit des remarques précédemment faites [*voyez* le second problème], que la différence

$$x_0 y - x y_0$$

sera positive dans le premier cas, négative dans le second. Donc cette différence et $\cos\nu$ seront, dans l'hypothèse admise, des quantités de même signe, ou, en d'autres termes, la fraction

$$\frac{\cos\nu}{x_0 y - x y_0}$$

sera positive, ce qu'il s'agissait de démontrer.

6.e Problème. *Étant donnés les angles* α_0, β_0, γ_0; α_1; β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2, *que forment avec les demi-axes des coordonnées positives trois rayons vecteurs menés de l'origine, le premier au point* (x_0, y_0, z_0), *le second au point* (x_1, y_1, z_1), *le troisième au point* (x_2, y_2, z_2), *on demande les angles que chaque rayon vecteur forme avec le plan des deux autres, et le volume de la pyramide triangulaire comprise entre ces rayons vecteurs.*

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Solution. Soient (A), (B), (C) les trois points que l'on considère, et désignons par r_0, r_1, r_2 les rayons vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$. Soient en outre δ_0, δ_1, δ_2 les angles respectivement compris entre les rayons vecteurs r_1 et r_2, r_2 et r_0, r_0 et r_1. Enfin, représentons par ε_0, ε_1, ε_2 les angles que chacun des rayons vecteurs r_0, r_1, r_2 forme avec le plan des deux autres; et supposons qu'un rayon mobile assujetti à tourner autour du point (O), et à parcourir avec un mouvement de rotation direct les trois faces de l'angle solide $OABC$, rencontre toujours les rayons vecteurs r_0, r_1, r_2 dans l'ordre qu'indiquent les indices

$$0, \quad 1, \quad 2,$$

rangés de manière à offrir les trois premiers termes d'une progression croissante. Dans cette hypothèse, si l'on nomme λ, μ, ν les angles que forme avec les demi-axes des coordonnées positives un demi-axe $\overline{OP}$ perpendiculaire au plan du triangle AOB, et situé par rapport à ce plan du même côté que le rayon vecteur r_2, on trouvera (problème précédent),

$$(84)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\beta_1\cos\gamma_0}{\sin\delta_2} = \frac{y_0 z_1 - y_1 z_0}{r_0 r_1 \sin\delta_2}, \\ \cos\mu &= \frac{\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha_0}{\sin\delta_2} = \frac{z_0 x_1 - z_1 x_0}{r_0 r_1 \sin\delta_2}, \\ \cos\nu &= \frac{\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_0}{\sin\delta_2} = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{r_0 r_1 \sin\delta_2}. \end{aligned}\right.$$

De plus, l'angle COP, compris entre le rayon vecteur r_2 et le demi-axe OP, étant un angle aigu, son cosinus sera positif, et par conséquent égal au sinus de l'angle aigu ou obtus ε_2, compris entre le même rayon vecteur r_2 et le plan OAB perpendiculaire au demi-axe OP. On aura donc

$$\sin\varepsilon_2 = \cos(COP) = \cos\alpha_0\cos\lambda + \cos\beta_0\cos\mu + \cos\gamma_0\cos\nu;$$

puis, en substituant aux quantités $\cos\lambda$, $\cos\mu$ $\cos\nu$, leurs valeurs tirées des équations (84), on trouvera

$$(85) \qquad \sin\varepsilon_2 =$$

$$\frac{\cos\alpha_0\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\alpha_0\cos\beta_2\cos\gamma_1+\cos\alpha_1\cos\beta_2\cos\gamma_0-\cos\alpha_1\cos\beta_0\cos\gamma_2+\cos\alpha_2\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\alpha_2\cos\beta_1\cos\gamma_0}{\sin\Delta_2}$$

$$= \frac{x_0y_1z_2 - x_0y_2z_1 + x_1y_2z_0 - x_1y_0z_2 + x_2y_0z_1 - x_2y_1z_0}{r_0r_2r_2\sin\Delta_2}.$$

Pour déduire de la formule précédente les valeurs de $\sin\varepsilon_0$ et de $\sin\varepsilon_1$, il suffira de remplacer successivement la quantité $\sin\Delta_2$ par $\sin\Delta_0$ et $\sin\Delta_1$. On obtiendra par ce moyen deux équations nouvelles, qui seront, ainsi que l'équation (85), comprises dans la formule

$$(86) \qquad \sin\Delta_0\sin\varepsilon_0 = \sin\Delta_1\sin\varepsilon_1 = \sin\Delta_2\sin\varepsilon_2 =$$

$$\cos\alpha_0\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\alpha_0\cos\beta_2\cos\gamma_1+\cos\alpha_1\cos\beta_2\cos\gamma_0-\cos\alpha_1\cos\beta_0\cos\gamma_2+\cos\alpha_2\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\alpha_2\cos\beta_1\cos\gamma_0;$$

ou, ce qui revient au même, dans la suivante :

$$(87)\begin{cases} r_0r_1r_2\sin\Delta_0\sin\varepsilon_0 = r_0r_1r_2\sin\Delta_1\sin\varepsilon_1 = r_0r_1r_2\sin\Delta_2\sin\varepsilon_2 \\ = x_0y_1z_2 - x_0y_2z_1 + x_1y_2z_0 - x_1y_0z_2 + x_2y_0z_1 - x_2y_1z_0. \end{cases}$$

Quant au volume de la pyramide triangulaire $OABC$, il sera équivalent à la surface du triangle OAB, c'est-à-dire, à l'expression

$$\frac{1}{2}r_0r_1\sin\Delta_2,$$

multipliée par le tiers de la perpendiculaire abaissée du point C sur le plan de ce triangle. Or, cette perpendiculaire étant évidemment représentée par le produit

$$r_2\cos(COP) = r_2\sin\Delta_2;$$

il en résulte que le volume cherché aura pour mesure la quantité

$$(88) \qquad \frac{1}{6} r_0 r_1 r_2 \sin \delta_2 \sin \varepsilon_2 ,$$

à laquelle on peut substituer l'expression

$$(89) \quad \frac{1}{6}(x_0 y_1 z_2 - x_0 y_2 z_1 + x_1 y_2 z_0 - x_1 y_0 z_2 + x_2 y_0 z_1 - x_2 y_1 z_0).$$

Pour obtenir avec leurs signes les termes compris entre parenthèses dans cette dernière formule, il suffit de multiplier l'un par l'autre les trois facteurs x, y, z, en les écrivant dans l'ordre naturel qui indique le mouvement de rotation direct d'un rayon mobile assujetti à parcourir successivement les trois faces de l'angle solide formé par les demi-axes des coordonnées positives, puis de placer au bas de ces facteurs les indices 0, 1, 2, rangés dans un ordre quelconque. En formant toutes les combinaisons possibles, on obtiendra six produits différens, dont chacun devra être pris avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que l'ordre dans lequel se trouveront disposés les trois nombres 0, 1, 2, indiquera un mouvement direct ou rétrograde d'un rayon vecteur mobile assujetti à parcourir successivement les trois faces de l'angle solide $OABC$. La même règle s'applique à la détermination des signes des termes compris dans le second membre de la formule (86), quand on substitue aux facteurs x, y, z, les facteurs $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Ajoutons que cette règle, à laquelle nous sommes parvenus en supposant qu'un rayon mobile, assujetti à parcourir avec un mouvement de rotation direct les trois faces de l'angle solide $OABC$, rencontrait les rayons vecteurs r_0, r_1, r_2 dans l'ordre indiqué par la combinaison 0, 1, 2, subsisterait également, si l'on admettait la supposition contraire. Alors, en effet, les valeurs de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ venant à changer de signe [*voyez* le problème précédent], l'expression (89) et les seconds membres des formules (86), (87) en changeraient aussi, de manière que les termes précédemment affectés du signe $+$, le terme $x_0 y_1 z_2$, par exemple, se trouveraient affectés du signe $-$. Mais il est clair que, dans la nouvelle supposition, la combinaison 0, 1, 2, au

lieu d'indiquer un mouvement de rotation direct sur les faces de l'angle solide $OABC$, indiquerait un mouvement de rotation rétrograde.

Corollaire 1.er Le parallélipipède dans lequel trois arêtes coïncident avec les rayons vecteurs r_0, r_1, r_2, a un volume six fois plus grand que celui de la pyramide $OABC$, et par conséquent égal à la valeur numérique du polynome

$$(90) \qquad x_0 y_1 z_2 - x_0 y_2 z_1 + x_1 y_2 z_0 - x_1 y_0 z_2 + x_2 y_0 z_1 - x_2 y_1 z_0.$$

Corollaire 2.e La formule (86) fournit le moyen de transformer les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point quelconque de l'espace en coordonnées rectilignes ξ, η, ζ comptées positivement sur les demi-axes $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, c'est-à-dire, sur les rayons vecteurs r_0, r_1, r_2. En effet, soit r le rayon vecteur mené de l'origine au point (x, y, z), et supposons les rayons vecteurs r_0, r_1, r_2 disposés comme ils doivent l'être pour que la formule (86) subsiste. Alors, si les rayons vecteurs r_0, r sont situés du même côté du plan OAB, l'expression qu'on obtiendra en divisant par $\sin \delta_0$ le second membre de la formule (86), et remplaçant dans ce second membre $\cos \alpha_0$ par $\frac{x}{r}$, $\cos \beta_0$ par $\frac{y}{r}$, $\cos \gamma_0$ par $\frac{z}{r}$, savoir,

$$(91) \qquad \frac{x(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1) + y(\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1) + z(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1)}{r \sin \delta_0},$$

représentera, le sinus de l'angle formé par le rayon vecteur r avec le plan BOC, et le produit de cette expression par r, savoir,

$$(92) \qquad \frac{x(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1) + y(\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1) + z(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1)}{\sin \delta_0},$$

désignera la perpendiculaire abaissée du point (x, y, z) sur le plan dont il s'agit. Les expressions (91) et (92) représenteraient le même sinus et la même perpendiculaire, pris avec le signe —, si le rayon vecteur r

n'était plus situé par rapport au plan BOC du même côté que le rayon vecteur r_0. De plus, il est facile de s'assurer que le produit

$$(93) \qquad \xi \sin \varepsilon_0$$

représentera encore la perpendiculaire en question, prise avec le signe $+$ dans le premier cas, et avec le signe $-$ dans le second. Cela posé, en égalant l'expression (92) au produit (93), on trouvera

$$(94) \qquad \xi = \frac{x(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1) + y(\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1) + z(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1)}{\sin\delta_0 \sin\varepsilon_0}.$$

Après avoir ainsi calculé la valeur de ξ, on formera de la même manière les valeurs des coordonnées η et ζ; puis, en ayant égard à la formule (86), et faisant, pour abréger,

$$(95) \qquad D = \cos\alpha_0\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\alpha_0\cos\beta_2\cos\gamma_1 + \cos\alpha_1\cos\beta_2\cos\gamma_0 - \cos\alpha_1\cos\beta_0\cos\gamma_2 + \cos\alpha_2\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\alpha_2\cos\beta_1\cos\gamma_0;$$

on obtiendra les équations

$$(96) \begin{cases} \xi = \dfrac{x(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1) + y(\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1) + z(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1)}{D}, \\ \eta = \dfrac{x(\cos\beta_2\cos\gamma_0 - \cos\beta_0\cos\gamma_2) + y(\cos\gamma_2\cos\alpha_0 - \cos\gamma_0\cos\alpha_2) + z(\cos\alpha_2\cos\beta_0 - \cos\alpha_0\cos\beta_2)}{D}, \\ \zeta = \dfrac{x(\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\beta_1\cos\gamma_0) + y(\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha_0) + z(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_0)}{D}, \end{cases}$$

qui déterminent ξ, η, ζ en fonctions de x, y, z, et réciproquement. Dans la supposition que nous avons admise pour établir ces équations, les mouvemens de rotation directs, sur les faces de l'angle solide formé par les demi-axes des coordonnées positives, ne changent pas de nature, lorsqu'au système des coordonnées rectangulaires x, y, z on substitue le système des coordonnées obliques ξ, η, ζ; et le mouvement de rotation direct dans chacun des plans coordonnés autour du demi-

axe perpendiculaire à ce plan est, pour les deux systèmes à-la-fois, ou un mouvement de droite à gauche, ou un mouvement de gauche à droite. Dans la supposition contraire, le dernier membre de la formule (86) changerait de signe. Mais, comme le numérateur de la fraction comprise dans le second membre de la formule (94) en changerait aussi, on déduirait toujours de ces deux formules combinées la première des équations (96). Par conséquent, les formules (96), dans lesquelles la quantité D est déterminée par l'équation (95), subsistent, quelle que soit, dans chacun des deux systèmes de coordonnées, la disposition des demi-axes des coordonnées positives.

Pour éliminer des équations (96) les quantités y et z, il suffit d'ajouter ces équations, après les avoir respectivement multipliées par $\cos\alpha_0$, $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$. En opérant ainsi, et ayant égard à la formule (95), on trouvera

$$(97)\quad \begin{cases} x = \xi\cos\alpha_0 + \eta\cos\alpha_1 + \zeta\cos\alpha_2. \\ y = \xi\cos\beta_0 + \eta\cos\beta_1 + \zeta\cos\beta_2, \\ z = \xi\cos\gamma_0 + \eta\cos\gamma_1 + \zeta\cos\gamma_2. \end{cases}$$

On trouvera de même

Ces dernières formules pourraient être établies directement par la simple considération du rayon vecteur r successivement projeté sur les trois axes des x, y, z. Elles ne diffèrent pas des formules (62), qui se trouvent ainsi étendues au cas même où il s'agit de remplacer un système de coordonnées rectangulaires par un système de coordonnées obliques.

Corollaire 3.e La formule (86) subsiste évidemment, quel que soit le point auquel aboutissent les trois rayons vecteurs r_0, r_1, r_2, et dans le cas même où ce point ne coïncide pas avec l'origine des coordonnées.

Corollaire 4.e Si les rayons vecteurs r_0, r_1, r_2, au lieu d'aboutir à un point unique, aboutissaient à trois points différens de l'espace, chacune des trois quantités

$$\sin\varepsilon_0, \quad \sin\varepsilon_1, \quad \sin\varepsilon_2,$$

déterminées par la formule (86), représenterait le sinus de l'angle que forme un de ces rayons vecteurs avec un plan parallèle aux deux autres.

Corollaire 5.e Lorsque les rayons vecteurs r_0, r_1, r_2 sont perpendiculaires l'un à l'autre, les quantités α_0, α_1, α_2, β_0 . . . &c. vérifient les équations (63) et (64). En même temps, chacun des angles

$$\delta_0, \quad \delta_1, \quad \delta_2, \quad \varepsilon_0, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2$$

se réduit à un angle droit; et, en supposant les rayons vecteurs r_0, r_1, r_2 disposés comme ils doivent l'être pour que la formule (86) subsiste, on tire de cette formule

$$(98) \qquad 1 = \cos\alpha_0\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\alpha_0\cos\beta_2\cos\gamma_1 + \cos\alpha_1\cos\beta_2\cos\gamma_0 - \cos\alpha_1\cos\beta_0\cos\gamma_2 + \cos\alpha_2\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\alpha_2\cos\beta_1\cos\gamma_0.$$

Si l'on adoptait la supposition contraire, le dernier membre de la formule (86) changerait de signe, et l'on trouverait

$$(99) \qquad 1 = -\cos\alpha_0\cos\beta_1\cos\gamma_2 + \cos\alpha_0\cos\beta_2\cos\gamma_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_2\cos\gamma_0 + \cos\alpha_1\cos\beta_0\cos\gamma_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_0\cos\gamma_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_1\cos\gamma_0.$$

Les formules (98) et (99) sont comprises l'une et l'autre dans la suivante

$$(100) \qquad 1 = (\cos\alpha_0\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\alpha_0\cos\beta_2\cos\gamma_1 + \cos\alpha_1\cos\beta_2\cos\gamma_0 - \cos\alpha_1\cos\beta_0\cos\gamma_2 + \cos\alpha_2\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\alpha_2\cos\beta_1\cos\gamma_0)^2,$$

à laquelle on peut arriver directement, en combinant ensemble les équations (63) et (64).

7.e Problème. *Trouver la plus courte distance entre la droite menée par le point* (x_0, y_0, z_0) *de manière à former avec les demi-axes des coordonnées positives les angles* α_0, β_0, γ_0, *et la droite menée par le point* (x_1, y_1, z_1) *de manière à former avec les mêmes demi-axes les angles* α_1, β_1, γ_1.

Solution. Soit r le rayon vecteur mené du point (x_0, y_0, z_0) au point (x_1, y_1, z_1). Soit de plus δ l'angle compris entre les droites données, chacune étant prolongée dans le sens que déterminent les valeurs des angles $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, ou $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; et nommons ε l'angle formé par le rayon vecteur r avec un plan parallèle aux deux droites. Le produit

$$\sin\delta . \sin\varepsilon$$

[*voyez* le problème précédent et son 3.e corollaire] sera équivalent, au signe près, à la quantité qu'on obtient en remplaçant, dans le dernier membre de la formule (86),

$$\cos\alpha_2 \text{ par } \frac{x_1 - x_0}{r}, \quad \cos\beta_2 \text{ par } \frac{y_1 - y_0}{r}, \quad \cos\gamma_2 \text{ par } \frac{z_1 - z_0}{r}.$$

On aura en conséquence

$$(101) \qquad \sin\varepsilon =$$
$$\pm \frac{(x_1-x_0)(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\beta_1\cos\gamma_0)+(y_1-y_0)(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\gamma_1\cos\alpha_0)+(z_1-z_0)(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_0)}{r\sin\delta}.$$

D'ailleurs, si, après avoir mené un plan parallèle aux deux droites données, on projette le rayon vecteur r sur un axe perpendiculaire à ce plan, la projection, représentée par le produit $r\sin\varepsilon$, sera évidemment égale en longueur à la plus courte distance entre les deux droites. Donc cette plus courte distance sera déterminée par la formule

$$(102) \qquad r\sin\varepsilon =$$
$$\pm[(x_1-x_0)(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\beta_1\cos\gamma_0)+(y_1-y_0)(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\gamma_1\cos\alpha_0)+(z_1-z_0)(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_0)].$$

Pour savoir si le dernier membre de cette formule doit être affecté du signe $+$ ou du signe $-$, il suffira de mener par le point (x_0, y_0, z_0) deux demi-axes qui forment avec ceux des coordonnées positives, le premier les angles $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, le second les angles $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, et

d'examiner si un rayon vecteur mobile, qui décrirait l'angle compris entre ces deux demi-axes de manière à rencontrer le premier avant le second, aura, autour du rayon vecteur r, un mouvement de rotation direct ou rétrograde.

Corollaire. Lorsque les droites données se rencontrent, leur plus courte distance s'évanouit, et l'on a par suite

$$(103) \qquad 0 = (x_1 - x_0)(\cos\beta_0 \cos\gamma_1 - \cos\beta_1 \cos\gamma_0) + (y_1 - y_0)(\cos\gamma_0 \cos\alpha_1 - \cos\gamma_1 \cos\alpha_0) + (z_1 - z_0)(\cos\alpha_0 \cos\beta_1 - \cos\alpha_1 \cos\beta_0).$$