Cours d'Analyse.

2ème. Division.

1ère. année

1847-1848.

1ère Leçon.

On appelle quantité constante une quantité qui pendant tout le cours d'un calcul conserve la même valeur; et on appelle quantité variable une quantité qui prend différentes valeurs dans le même calcul.

Ainsi dans l'équation d'une parabole $y^2 = 2px$, le paramètre p est une quantité constante, et les quantités variables sont l'abscisse et l'ordonnée de chaque point de la parabole.

Une quantité peut être dans le cours du même calcul d'abord constante ensuite variable.

On appelle <u>variable indépendante</u>, une quantité à laquelle on donne des valeurs arbitraires depuis une quantité a jusqu'à b.

La variable indépendante étant désignée par x, on dit qu'une quantité est fonction d'x, lorsque cette quantité dépend de la variable x, et varie quand x varie.

On se sert pour indiquer cette dépendance des lettres f, F, φ, ψ etc.

Une quantité peut dépendre de plusieurs variables, x, y, z etc. On dit alors que c'est une fonction à plusieurs

variables.

Quand une quantité dépend d'une variable qui n'est pas indépendante, on dit que cette quantité est une fonction de fonction. Ainsi soit $y = f(x)$ et supposons que x soit une fonction d'une variable indépendante u. $x = F(u)$, la quantité y est appelée une fonction de fonction, et il est clair que y varie quand la variable indépendante u varie elle-même.

Une fonction peut être réelle ou imaginaire.

Une fonction réelle peut être continue ou discontinue.

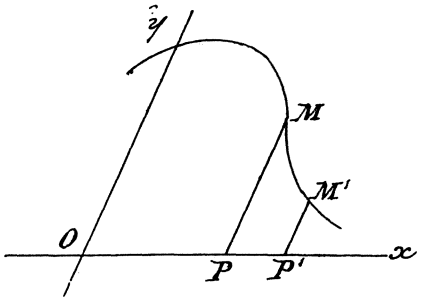
La fonction est continue quand elle a constamment une valeur finie, et qui varie par degrés insensibles, quand la variable x varie d'une manière continue; en d'autres termes quand en donnant à x des accroissements suffisamment petits, la variation de la fonction peut être rendue plus petite que toute quantité donnée.

Dans le cas contraire, la fonction est discontinue.

A moins que l'on n'avertisse expressément du contraire, les fonctions considérées seront toujours supposées continues.

En outre, parmi les fonctions discontinues on ne s'occupera jamais de celles qui le sont constamment, comme le serait, par exemple, la fonction d'x qui serait nulle quand x est rationnel, et égale à l'unité quand x est irrationnel.

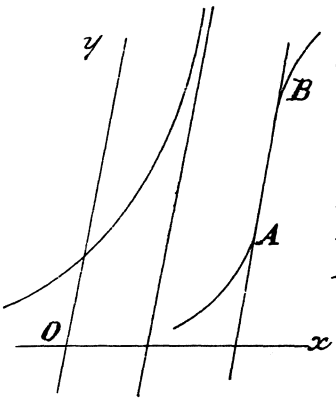
Une fonction réelle peut être représentée par une courbe plane. Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable x : et pour $y = f(x)$. Traçons sur un plan deux axes Ox et Oy faisant entre eux un angle quelconque et considérons x comme l'abscisse et y comme l'ordonnée



d'un même point du plan. Pour cela, donnons à x une valeur numérique arbitraire et portons à partir du point O sur l'axe Ox, et dans un sens convenable, une longueur OP telle que son rapport à l'unité de longueur soit égale à la valeur absolue de x. Sur une parallèle PM à l'axe Oy, portons de même dans un sens convenable une longueur à y. Nous déterminerons ainsi un point M de la courbe dont l'équation est $y = f(x)$, de même pour un second point M' etc.

Si la fonction est continue, on aura ainsi une succession de points aussi rapprochés que l'on voudra et dont l'ensemble constitue la courbe dont l'équation est $y = f(x)$.

Si la fonction est discontinue, par exemple, si elle ne conserve pas toujours une valeur finie, cela correspond au cas où la courbe a une asymptote parallèle à l'axe des y. Si la fonction passe brusquement d'une valeur à une autre valeur essentiellement différente de la première, la courbe s'arrête brusquement en un point A, et une seconde branche part du point B.

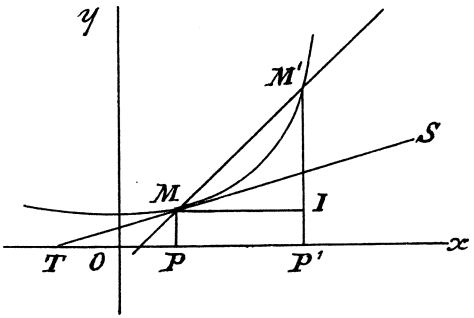


On suppose, pour avoir une idée plus exacte de la courbe, de lui mener une tangente

par un point pris sur cette courbe. C'est en résolvant ce problème qu'on est conduit au calcul différentiel.

On appelle tangente à une courbe, la limite des positions d'une sécante qui tourne autour d'un de ses points de section, jusqu'à ce qu'un second point vienne se réunir au premier.

Soit donc $y = f(x)$ et supposons les axes rectangulaires. Soit ST la tangente au point M, et MM' une sécante quelconque passant par le point M.



$MP = y$ $OP = x$ $PP' = h$

$M'I = K$. On a

$y + K = f(x+h) = M'P'$.

Dans le triangle rectangle $M'MI$ on a :

$$tg.\,M'MI = \frac{M'I}{MI} = \frac{K}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

L'angle $M'M$ détermine la position de la sécante ; celle de la tangente TS sera connue quand on saura vers quelle limite tend le rapport $\frac{K}{h}$ quand h tend vers zéro, ou en d'autres termes, quand h est infiniment petit.

C'est de la recherche de cette limite que nous nous occuperons.

Soit $f(x) = Ax^m$, m étant entier et positif

$$f(x+h) = A(x+h)^m$$

$$f(x+h) - f(x) = A\left\{(x+h)^m - x^m\right\} =$$

$$A\left\{mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2 + \cdots\right\}. \text{ Donc}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A\left\{mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h + \text{etc.}\right\}$$

Quand h tend vers zéro, la parenthèse tend indéfiniment vers mx^{m-1}, car tous les termes qui suivent celui-là contiennent le facteur h, ils sont en nombre fini, et le nombre ne varie pas quand h diminue. On a donc $\lim . \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = mAx^{m-1}$.

Cette limite est indépendante de la manière dont on fait varier h pour le faire tendre vers zéro. Cette limite quand elle existe s'appelle <u>fonction dérivée</u> ou <u>dérivée</u> de la fonction $f(x)$, et elle se représente par $f'(x)$.

Soit $f(x)$ une fonction d'x. Soit h l'accroissement de la variable x. On forme le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ qui est le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement correspondant de la variable : la limite de ce rapport quand h tend vers zéro, ou devient infiniment petit, c'est ce qu'on appelle la dérivée de $f(x)$.

En général, nous reconnaîtrons que cette limite existe, et qu'elle ne dépend pas de la manière dont h tend vers zéro, ni de son signe pendant son decroissement.

Cette définition s'étend aux fonctions imaginaires. $f(x) = f_1(x) + \sqrt{-1}\, f_2(x)$. On forme le rapport :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h} + \sqrt{-1}\,\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}.$$

On cherche la limite de la partie réelle, et la limite du coefficient de $\sqrt{-1}$, et l'on aura :

$$f'(x) = f_1'(x) + \sqrt{-1}\, f_2'(x).$$

Nous supposerons la variable réelle : si elle était imaginaire de la forme $p + q\sqrt{-1}$, on aurait une fonction de deux variables p et q.

Quand la fonction se réduit à une constante sa dérivée

est nulle, cela résulte immédiatement de la définition. Ainsi si $f(x) = \text{const.}$ on a $f'(x) = 0$.

Cela est également vrai pour les fonctions imaginaires : car soit $f(x) = f_1(x) + \sqrt{-1}\, f_2(x)$ si $f_1(x) = \text{const.}$ et $f_2(x) = \text{cons.}$ alors $f_1'(x) = 0$ et $f_2'(x) = 0$ et par conséquent $f'(x) = 0$.

Dans le cas particulier où $f_2(x) = \text{const.}$ la dérivée de $f(x)$ est réelle.

Soit $f(x)$ une fonction supposée réelle : on a

$$f'(x) = \lim. \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \text{ Par conséquent}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \varepsilon$$

ε étant une quantité qui tend vers zéro quand h tend lui-même vers zéro. Donc

$$f(x+h) - f(x) = h \left\{ f'(x) + \varepsilon \right\}$$

On dit qu'une fonction est croissante quand sa variation est de même signe que celle de la variable ; elle est dite décroissante dans le cas contraire.

Supposons que $f'(x)$ soit constamment positif pour toutes les valeurs d'x comprises entre a et b, je dis que $f(x)$ est croissante pour ces mêmes valeurs. En effet, on peut prendre h assez petit pour que le signe de la parenthèse soit celui de $f'(x)$. Il suit de là que si h est positif $f(x+h)$ est plus grand que $f(x)$, et si h est négatif le contraire a lieu. Donc la fonction est croissante.

Si $f'(x)$ est négatif, pour toutes les valeurs d'x comprises entre a et b, la fonction $f(x)$ est décroissante pour les mêmes valeurs.

Quand la dérivée est constamment nulle pour

toutes les valeurs d'x comprises entre a et b, la fonction est constante pour toutes ces valeurs.

Soient x et x_1 deux valeurs quelconques de la variable comprises entre a et b. Je dis que : $f(x) = f(x_1)$. Je considère m quantités comprises entre x et x_1, et en posant $mh = x_1 - x$, ces quantités sont :

$$x+h,\ x+2h,\ x+3h,\ x+(m-1)h,\ x_1,$$

En vertu de l'équation générale

$$f(x+h) - f(x) = h\left\{ f'(x) + \varepsilon \right\}$$

on a, puisque $f'(x)$ est constamment nulle :

$$f(x+h) - f(x) = h\varepsilon_1$$

$$f(x+2h) - f(x+h) = h\varepsilon_2$$

$$f(x+3h) - f(x+2h) = h\varepsilon_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x_1) - f(x+\overline{m-1}\,h) = h\varepsilon_m.$$

En ajoutant membre à membre, on a :

$$f(x_1) - f(x) = h(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots\cdots + \varepsilon_n).$$

Soit ε la plus grande de toutes les quantités représentées par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ etc. On a :

$$f(x_1) - f(x) < h.m\varepsilon \text{ ou } f(x_1) - f(x) < mh.\varepsilon.$$

Mais $mh = x_1 - x$ donc :

$$f(x_1) - f(x) < (x_1 - x)\,\varepsilon.$$

Le premier membre est une quantité constante, qui ne varie pas quand on augmente : il en est de même de $x_1 - x$, mais ε a pour limite zéro quand m croît indéfiniment. Il suit de là que le premier membre de le premier membre de l'inégalité est nécessairement nul, puisqu'il est constamment moindre qu'une quantité qui s'approche indéfiniment de zéro. Donc $f(x_1) = f(x)$. Ce qu'il ~~fallait~~ démontrer.

Cette démonstration suppose que la fonction est réelle. Le théorème s'étend aux fonctions imaginaires.

Soit $f(x) = f_1(x) + \sqrt{-1}\, f_2(x)$. Si $f'(x) = 0$. Je dis que $f(x) = \text{const.}$ En effet :

$f'(x) = f_1'(x) + \sqrt{-1}\, f_2'(x)$. Donc :

$f_1'(x) = 0$ et $f_2'(x) = 0$. Donc d'après le théorème démontré $f_1(x) = \text{const.}$ et $f_2(x) = \text{const.}$ Donc $f(x) = \text{const.}$

Si deux fonctions, pour toutes les valeurs d'x comprises entre a et b, ne diffèrent que par une constante, leurs dérivées sont égales pour ces valeurs d'x.

Soient x et $x+h$ deux valeurs de la variable comprise entre a et b; on a par hypothèse :

$$f(x) = F(x) + C$$

$$f(x+h) = F(x+h) + C$$

d'où l'on tire :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Ces deux quantités sont égales pour toutes les valeurs de h : donc leurs limites sont égales. Donc $f'(x) = F'(x)$.

<u>Si les dérivées de deux fonctions sont égales entre elles, pour certaines valeurs de x, ces fonctions ne peuvent pour les mêmes valeurs différer que par une constante.</u>

Soit $\varphi(x)$ la différence entre les deux fonctions :

$f(x) = F(x) + \varphi(x)$ et

$f(x+h) = F(x+h) + \varphi(x+h)$ d'où l'on tire

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

Égalité qui a lieu quelque petit que soit h. Par suite, en passant à la limite : $f'(x) = F'(x) + \varphi(x)$. Mais

par hypothèse $f'(x) = F'(x)$. Donc $\varphi'(x) = 0$, et par suite $\varphi(x) = const$.

Soit $f(x)$ une fonction d'une variable indépendante x. De la définition de la dérivée, on déduit :

$$f(x+h) - f(x) = h\left\{f'(x) + \varepsilon\right\} = h f'(x) + \varepsilon h.$$

L'accroissement de la fonction se compose ainsi de deux parties ; la première de ces parties, savoir $h f'(x)$ est appelée la différentielle de $f(x)$. Ainsi la différentielle d'une fonction est le produit de la dérivée de cette fonction par l'accroissement arbitraire de la variable indépendante. On voit donc que la différentielle d'une fonction n'est pas une quantité fixe et déterminée.

On se sert pour représenter la différentielle de la lettre d. Ainsi $df(x)$ signifie la différentielle de $f(x)$.

Quand l'accroissement de la variable tend indéfiniment vers zéro, la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à sa différentielle est l'unité.

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x) + \varepsilon h$$
$$df(x) = h f'(x).$$

Divisons membre à membre

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{df(x)} = 1 + \frac{\varepsilon}{f'(x)}.$$

Quand h devient infiniment petit, ε tend vers zéro, $f'(x)$ a une valeur constante.

$$\text{Donc } \lim. \frac{f(x+h) - f(x)}{df(x)} = 1.$$

Soit le cas particulier $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$, et par suite $df(x) = h$. Ainsi $h = dx$. On a donc :

$$f(x+h) - f(x) = dx\left\{f'(x) + \varepsilon\right\} = f'(x)dx + \varepsilon dx.$$

Ainsi la différentielle de la variable indépendante

est l'accroissement arbitraire de cette variable.

Soit $y = f(u)$ et $u = \varphi(x)$, auquel cas y est une certaine fonction F de x, que nous supposerons variable indépendante; je dis qu'on aura $df(u) = f'(u)\,du$.

Si u était variable indépendante, il n'y aurait pas lieu à un théorème; la relation précédente aurait lieu par définition: car du serait l'accroissement entier de u.

Mais si u est fonction de la variable indépendante, alors du n'est qu'une partie de l'accroissement de u. Néanmoins la différentielle de $f(u)$ garde la même forme que si u était variable indépendante, et je dis qu'on a $df(u) = f'(u)\,du$.

En effet $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. Par conséquent $y = f[\varphi(x)] = F(x)$. Donc $f(u) = F(x)$.
Changeons x en $x+h$: u se change alors en $u+K$: et on a $K = \varphi(x+h) - \varphi(x)$.
Puisque $f(u) = F(x)$.
On a $f(u+K) = F(x+h)$.

Donc $$\frac{f(u+K)-f(u)}{h} = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

et on peut écrire cette relation :

$$\frac{f(u+K)-f(u)}{K} \cdot \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

Faisons tendre h vers zéro, alors K décroît aussi vers zéro. Donc dans le premier membre, l'un des facteurs tend vers la limite $f'(u)$ et l'autre vers la limite $\varphi'(x)$.

La limite du second membre est d'ailleurs $F'(x)$.
Donc (1) $f'(u) \cdot \varphi'(x) = F'(x)$.
Ce qui démontre en passant ce théorème, savoir :

La dérivée d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivées des fonctions intermédiaires, rapportées chacune à la variable immédiate.

Maintenant multiplions les deux membres de l'égalité (1) par dx; nous aurons :

$$f'(u) \cdot \varphi'(x)\, dx = F'(x)\, dx.$$

Mais $\varphi'(x)\, dx$, c'est du et $F'(x)\, dx$ c'est dy ou $df(u)$.
Donc enfin $df(u) = f'(u)\, du$. ce qu'il fallait démontrer.

Si le nombre des fonctions intermédiaires était plus considérable, la différentielle garde toujours la même forme.
Ainsi soient :

$$y = f(u) \quad u = \varphi(v) \quad v = \psi(x).$$

Supposons que x soit la variable indépendante. Puisque u dépend de v et que v lui-même dépend de x, il est clair que u est une certaine fonction de x qui est la variable indépendante. Donc d'après le théorème précédent : on a : dy ou $df(u) = f'(u)\, du$.

De même s'il y avait un plus grand nombre de fonctions intermédiaires.

On peut aussi démontrer généralement le théorème de la dérivée d'une fonction de fonction. On a en effet d'après les théorèmes démontrés

$$dy = f'(u)\, du \qquad du = \varphi'(v)\, dv$$

et par définition $\qquad dv = \psi'(x)\, dx.$

En multipliant membre à membre on a
$dy = f'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot \psi'(x) \cdot dx$. C'est la différentielle d'y ; donc en divisant par l'accroissement dx de la variable indépendante, on aura la dérivée de $y = F(x)$. On a donc :

$$F'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot \psi'(x).$$

Et ainsi pour un plus grand nombre de fonctions.

Donc la dérivée d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivées des fonctions intermédiaires, rapportées chacune à la variable immédiate.

De ce qui précède, il résulte que, quelle que soit la variable indépendante, si $y = f(x)$ on a toujours $dy = f'(x)\,dx$.

Par suite : $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ (2). Ainsi la dérivée de la fonction est égale au quotient des différentielles de la fonction et de sa variable.

On déduit de là une notation commode pour représenter la dérivée de y prise par rapport à x savoir : $\frac{dy}{dx}$, et en vertu de l'égalité (2), on peut a tantôt considérer $\frac{dy}{dx}$ comme la dérivée de $f(x)$, tantôt comme le quotient de dy par dx, puisque ces deux quantités sont égales. Ainsi on écrira sans que ce soit une identité :

$$dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx.$$

Supposons que x soit la variable indépendante et soit $y = f(x)$: on a $dy = f'(x)dx$.

Quand la différentielle dy est constamment nulle pour certaines valeurs de x, la dérivée est aussi constamment nulle et réciproquement. Mais cela suppose que x est variable indépendante ; car dx doit être indéterminé, et non nul, ce qui pourrait arriver si x dépendait d'une autre variable. On a donc ces théorèmes.

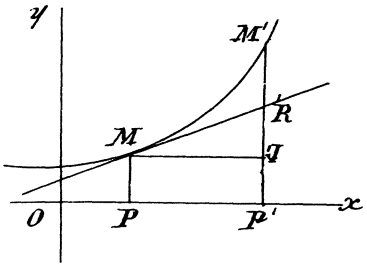
1°. Quand la différentielle d'une fonction est constamment nulle pour les valeurs d'x comprises entre a et b, la fonction est constante pour ces mêmes valeurs.

2°. Si deux fonctions pour toutes les valeurs d'x comprises entre a et b ne diffèrent que par une constante

leurs différentielles sont égales entre elles.

3° Réciproquement.

Soit $y = f(x)$, x étant la variable indépendante. Prenons des axes rectangulaires, et supposons construite la courbe dont l'équation est $y = f(x)$.



Soit $OP = x$ et $MI = h = dx$

Soit MR la tangente en M, on a $tg. RMI = f'(x)$, et le triangle rectangle RMI donne :

$RI = MI \times tg. RMI = f'(x)dx = dy$.

Ainsi la différentielle de la fonction y est représentée par l'accroissement de l'ordonnée compté jusqu'à la tangente.

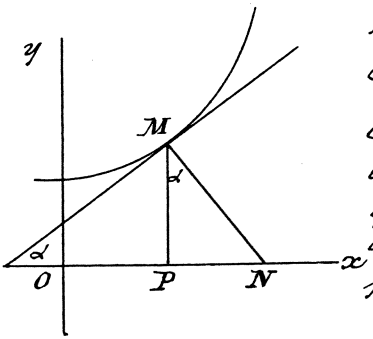
Par suite $M'R$ est la seconde partie de l'accroissement c'est-à-dire εdx.

Si x n'est pas la variable indépendante, alors MI n'est plus égale à dx, et par suite RI n'est plus dy. Mais d'après le théorème démontré, $f'(x)$ est toujours $\frac{dy}{dx}$. Donc dans ce cas, on a une représentation géométrique du rapport des deux différentielles. Ce rapport est ici celui de RI à MI, qui reste constant quelque soit l'accroissement donné à x.

Nous pourons déjà, au moyen des principes du calcul différentiel, mettre en équation des problèmes que l'algèbre ordinaire ne peut résoudre.

On sait que dans la parabole, la sous-normale est de longueur constante. Proposons de trouver toutes les courbes pour lesquelles la sous-normale est constante.

La sous-normale $PN = MP \times tg. NMP = y\, tg. \alpha$.



Représentons la sous-normale par S_n : on aura $S_n = y.\,tg.\,\alpha$.

Or $tg.\alpha = \frac{dy}{dx}$: donc $S_n = y\,\frac{dy}{dx}$.

C'est là l'expression analytique de la normale dans une courbe quelconque. Soit A une constante, on demande toutes les courbes pour lesquelles on a $A = y.\frac{dy}{dx}$

d'où $y\,dy = A\,dx$

d'où $2y\,dy = 2A\,dx$.

Le premier membre est la différentielle de y^2, et le second celle de $2Ax$, quelle que soit la variable indépente. Puisque ces deux différentielles sont égales, les deux fonctions y^2 et $2Ax$ ne diffèrent que par une constante, l'équation générale des courbes cherchées est donc :

$$y^2 = 2Ax + C$$

C étant une constante.

Ainsi les paraboles sont les seules courbes pour lesquelles la sous normale est constante.

Problèmes analogues. — Trouver toutes les courbes telles que la sous-tangente est constamment proportionnelle au cube de l'ordonnée.

Id. telle que la sous-normale soit égale à $A\,\frac{x^m}{y^n}$.

Id. telle que la sous-tangente soit égale à $B\,\frac{y^p}{x^q}$.

m, n, p, q étant entiers et positifs.

Nous désignerons désormais dans nos calculs la variable indépendante par x ; et par y, u, v, w ..... des fonctions de cette variable. Quant aux premières

lettres de l'alphabet A, B, C etc, elles sont réservées pour représenter les quantités constantes.

Pour désigner l'accroissement de la variable et les accroissements correspondants des fonctions on de sa de la Δ. Ainsi Δx étant l'accroissement de la variable, Δy, Δu, Δv etc, tous les accroissements correspondants des fonctions y, u, v etc.

Il résulte de là, et des théorèmes déjà démontrés, que

$$\frac{dy}{dx} = \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{du}{dx} = \lim. \frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ etc}.$$

Examinons d'abord les quantités que l'on considère en général dans l'algèbre, c'est-à-dire, qui sont liées entre elles par voie d'<u>addition algébrique</u> de <u>multiplication</u> de <u>division</u> et d'<u>élévation aux puissances</u>.

Soit $y = u + v - w$. On demande de différentier la somme y, sachant prendre la différentielle de chaque fonction u, v, w en particulier.

Je change x en $x + \Delta x$; y se change en $y + \Delta y$, u en $u + \Delta u$ etc.

On a donc :

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (w + \Delta w).$$

En retranchant membre à membre

$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$. En divisant par Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Faisons tendre Δx vers zéro, et passons à la limite nous aurons :

$$\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ ou bien } \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$$

Et en multipliant par dx :

$$dy = du + dv - dw.$$

De là, on déduit la règle suivante :

La différentielle de la somme algébrique de plusieurs fonctions est égale à la somme algébrique des différentielles de ces fonctions.

La multiplication présente plusieurs cas.

1er Cas. Différentier le produit d'une fonction par une constante :

$y = Au$ Je change x en $x + \Delta x$

$y + \Delta y = A\,(u + \Delta u)$. d'où :

$\Delta y = A.\,\Delta u$. divisons par Δx

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A\,\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$. En passant à la limite

$\dfrac{dy}{dx} = A\,\dfrac{du}{dx}$

Donc dy c'est-à-dire $d(Au) = A\,du$.

Règle : *La différentielle du produit d'une constante par une fonction, est égale à la constante multipliée par la différentielle de la fonction.*

2ème cas. Différentier le produit de deux fonctions.

Soit $y = uv$. Je change x en $x + \Delta x$;

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + v\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v$$

Il en résulte que :

$$\Delta y = v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v.$$

ou que : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = v\,\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + (u + \Delta u)\,\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

Quand Δx décroît et tend vers zéro, il y a toujours égalité entre ces deux quantités : par suite, à la limite :

$\dfrac{dy}{dx} = v\,\dfrac{du}{dx} + u\,\dfrac{dv}{dx}$. Donc :

dy ou $d(uv) = v\,du + u\,dv$.

Règle : La différentielle du produit de deux facteurs variables est égale à la somme des produits qu'on obtient en multipliant la différentielle de chaque facteur par l'autre facteur.

Ce cas comprend le précédent. Car si $v = A$ alors $dv = 0$, et on a par la formule du second cas $d(Au) = A\,du$.

Il est bon néanmoins d'avoir une règle pour le 1er. cas.

3ème. cas. Différentier le produit d'un nombre quelconque de facteurs.

S'il s'agit d'abord de trois facteurs, $y = uvw$, on peut considérer y comme le produit de deux facteurs, et on a d'après le cas précédent :

$$dy = d(wv) \times w = w\,d(uv) + uv\,dw =$$
$$w\,(v\,du + u\,dv) + uv\,dw.$$

Donc enfin on a :

$$d(uvw) = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw.$$

Ainsi la règle de différentiation est celle-ci

La différentielle du produit de trois facteurs est égale à la somme des produits qu'on obtient en multipliant la différentielle de chaque facteur par le produit des deux autres facteurs.

Par le même moyen que précédemment, il est facile d'établir que si la règle est vraie pour le produit de m facteurs, elle est encore vraie pour le produit de $m+1$ facteurs.

Soient en effet u, v, w etc m facteurs et soit S le $(m+1)^{me}$, on peut considérer le produit :

$$y = u\,v\,w \ldots\ldots S$$

comme le produit de deux facteurs, savoir :

$$y = (u\,v\,w \ldots)\times s.$$

Par conséquent, d'après la règle du 2ème. cas

$$dy = s.\,d(u\,v\,w\ldots) + (u\,v\,w\ldots)\,ds.$$

La seconde partie du second membre c'est la différentielle du facteur s, multipliée par le produit de tous les autres facteurs qui sont en nombre m. Quant à la première partie, il résulte de l'hypothèse qu'elle se compose de la somme des produits que l'on obtient en multipliant la différentielle de chacune de ces m autres facteurs par le produit de tous les autres.

Donc, règle générale.

La différentielle du produit d'un nombre quelconque de facteurs est égale à la somme des produits qu'on obtient en multipliant la différentielle de chaque facteur, par le produit de tous les autres.

Remarque. Soit $y = u\,v\,w \ldots s$.

Divisons par y la différentielle dy, et nous aurons :

$$\frac{dy}{y} = \frac{d(u\,v\,w\ldots s)}{u\,v\,w\ldots s} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots + \frac{ds}{s}.$$

puisque dans chaque terme de dy une seule fonction entre par différentielle, et que toutes les autres fonctions y entrent comme facteurs. Le quotient de la différentielle par la fonction jouit d'une propriété analogue à celle des logarithmes. On verra plus tard à quoi cela tient.

Nous ne considérerons pas le cas où le dénominateur est constant ; car ce cas rentre évidemment dans le premier de la multiplication.

1er. cas. Le numérateur est constant et le dénominateur variable. Soit $y = \frac{A}{u}$ d'où $uy = A$ et par conséquent

$d(uy)=0$ ou bien $udy + y\,du = 0$.
De là on tire la valeur de dy, savoir :

$$dy = -y.\frac{du}{u} \quad \text{mais } y = \frac{A}{u}. \text{ donc}$$

$$dy = \frac{-A\,du}{u^2}. \text{ ainsi :}$$

La différentielle d'une fonction dont le dénominateur est variable et le numérateur constant est égale à ce numérateur, pris en signe contraire, multiplié par la différentielle du dénominateur, et divisé par le carré de ce dénominateur.

2me. Cas. Les deux termes de la fraction sont variables. Soit $y = \frac{u}{v}$ d'où $vy = u$. On a en différentiant les deux valeurs :

$$v\,dy + y\,dv = du. \text{ D'où l'on tire :}$$

$$dy = -y\frac{dv}{v} + \frac{du}{v}. \text{ Mais } y = \frac{u}{v}.$$

$$\text{Donc } dy = \frac{du}{v} - \frac{u\,dv}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

La différentielle d'une fraction dont les deux termes sont variables est égale au dénominateur multiplié par la différentielle du numérateur, moins le numérateur, multiplié par la différentielle du dénominateur, le tout divisé par le carré du dénominateur.

Ce second cas comprend le premier ; car il suffit d'y supposer $u = A$; mais il est bon d'avoir une règle pour chacun de ces cas.

Soit à différentier la fonction $y = u^m$.

1er. Cas. Supposons m un nombre entier et positif.
On a démontré que :

$$\frac{d(uvw\ldots)}{uvw} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \text{etc.}$$

Supposons que les facteurs $u, v, w, \ldots$ soient en nombre m et qu'ils soient tous égaux entre eux. Cette formule montre que :

$$\frac{d(u^m)}{u^m} = m\frac{du}{u}. \text{ Donc } d(u^m) = mu^{m-1}du.$$

Formule qui était connue pour ce cas

Nous allons faire voir qu'elle est générale.

2ème Cas. Supposons que m soit positif et fractionnaire, et soit $m = \frac{p}{q}$, p et q étant des nombres entiers et positifs.

Si $y = u^m = u^{\frac{p}{q}}$, on a :

$$y^q = u^p. \text{ Par suite :}$$

$$d(y^q) = d(u^p);$$

c'est-à-dire, puisque p et q sont entiers et positifs :

$$qy^{q-1}dy = pu^{p-1}du$$

$$\text{D'où } dy = \frac{p}{q}\cdot\frac{u^{p-1}}{y^{q-1}}\cdot du$$

Mais $y = u^{\frac{p}{q}}$. Donc $y^{q-1} = \left(u^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}$

$= u^{p-\frac{p}{q}}$. Donc $\dfrac{u^{p-1}}{y^{q-1}} = u^{\frac{p}{q}-1}$

mais $\frac{p}{q} = m$. Donc :

$$dy \text{ ou } d(u^m) = mu^{m-1}du.$$

3ème Cas. Supposons $m = -n$, n étant positif entier ou fractionnaire, alors ;

$$d(u^m) = d(u^{-n}) = d\left(\frac{1}{u^n}\right) = \frac{-d(u^n)}{u^{2n}}$$

$$= \frac{-nu^{n-1}du}{u^{2n}} = -n\,u^{-n-1}du.$$

Mais $m = -n$. Donc enfin :

$$d(u^m) = m\,u^{m-1}du.$$

Ainsi, règle générale,

La différentielle d'une puissance quelconque d'une fonction est égale à l'indice de la puissance, multiplié par la fonction élevée à un degré moindre d'une unité, et par la différentielle de cette fonction.

Les extractions des racines n'étant autre chose que des élévations à des puissances fractionnaires, il n'y a rien à ajouter pour la différentiation des radicaux. Néanmoins comme les radicaux carrés se présentent fréquemment dans les calculs, il est bon d'avoir une règle particulière pour ces radicaux.

Soit donc $y = \sqrt{u}$: On a

$$dy = d\sqrt{u} = d(u^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{du}{2\sqrt{u}}.$$

Ainsi, la différentielle d'un radical carré est égale à la différentielle de la quantité soumise au radical divisée par le double du radical. Règle qu'on peut d'ailleurs démontrer directement.

Pour avoir les règles à suivre pour obtenir les dérivées des diverses fonctions algébriques, on n'a qu'à changer le mot de différentielle en celui de dérivée dans tout ce qui précède. Il est clair qu'on aura ainsi des théorèmes exacts : car la différentielle ne diffère de la dérivée que par le facteur dx ; ce facteur se trouve ou doit se trouver dans tous les termes de la différentielle, car cette différentielle est de la forme :

$f'(x)\,dx$.

Soit à différentier $y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$: on a :

$$dy = \frac{\sqrt{1+x^2}\,dx - x\,d\sqrt{1+x^2}}{1+x} = \frac{\sqrt{1+x^2}\,dx - x\frac{2x\,dx}{2\sqrt{1+x}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)\,dx - x^2\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Séries.

On appelle <u>série indéfinie</u> ou simplement <u>série</u> une <u>suite de termes en nombre infini qui se succèdent d'après une loi déterminée</u>.

Soit une série :

$$u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots u_n.$$

Si l'on fait la somme des n premiers termes, savoir :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

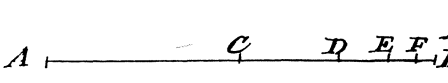
et si l'on fait croître n indéfiniment, il peut arriver que S_n tende vers une limite finie et déterminée, S, savoir $\lim. S_n = S$.

Dans ce cas, on dit que la série est <u>convergente</u>, et qu'elle a pour <u>somme</u> S. Le mot <u>somme</u> est ici un peu détourné de sa signification ordinaire, et il ne faut pas confondre la <u>somme</u> d'une <u>série</u> avec la somme algébrique d'un certain de ses termes.

Dans le cas où S_n ne tend vers aucune limite quand n croît indéfiniment, on dit que la série est divergente.

Il existe des séries convergentes. On peut en donner l'exemple suivant.

Soit une droite AB qu'on peut supposer égale à l'unité de longueur. Soient :



$AB = 1 \quad AC = \frac{1}{2} \quad CD = \frac{1}{4}$

$DE = \frac{1}{8} \quad EF = \frac{1}{16}$ etc.

Considérons la série $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ etc.

Si l'on prend les deux premiers termes, en qu'on fasse leur somme, la figure montre que cette somme est moindre que l'unité et que la différence est égale à $\frac{1}{4}$. On voit de même que si on fait la somme des trois premiers, on aura une différence analogue égale à $\frac{1}{8}$; pour les quatre premiers une différence égale à $\frac{1}{16}$, et ainsi de suite. La différence diminue donc constamment, et peut devenir aussi petite qu'on voudra; en d'autres termes, les points C, D, E, F, etc. s'approchant de plus en plus du point B, s'en approcheront indéfiniment et ne le dépasseront jamais. Donc la série considérée est convergente, et elle a pour somme l'unité.

On appelle reste d'une série la différence qui existe entre la somme de la série et la somme des premiers termes. Il est clair que le reste de la série n'est pas une quantité déterminée, mais une quantité qui varie avec n.

Il arrive dans beaucoup de cas qu'on ne peut pas calculer exactement la somme S de la série. Mais soit r_n le reste de la série, on a

$$r_n = S - S_n \quad \text{d'où} \quad S = S_n + r_n.$$

Par hypothèse r_n a pour limite zéro quand n croît indéfiniment. Si donc n est suffisamment grand, on peut avec S_n avoir une valeur de S assez approchée pour les calculs que l'on doit faire. Si en outre on connaît deux limites de r_n, c'est-à-dire si on sait que r_n ne peut dépasser une certaine quantité, ni être inférieure à une autre quantité, on aura une limite de l'erreur que l'on commet en subs-

-tituant à la valeur exacte de S, une de ses valeurs approchées S_n.

La série qui vient de servir d'exemple est une progression géométrique. Soit en général une progression géométrique :

$$A : Ax :: Ax^2 : Ax^3 : \text{etc} \ldots\ldots : Ax^{n-1}.$$

A étant une quantité quelconque et x étant une quantité positive ou négative, mais dont la valeur numérique est plus petite que l'unité.

La somme des n premiers termes :

$$S_n = A(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}) = A\,\frac{1 - x^n}{1 - x}$$

On peut écrire cette somme :

$S_n = \frac{A}{1-x} - \frac{Ax^n}{1-x}$. Quand n croît indéfiniment x^n tend vers zéro ; par conséquent la somme de la série est :

$$\lim. S_n = S\frac{A}{1-x}$$

et le reste de la série $r_n = \frac{Ax^n}{1-x}$.

Une condition nécessaire pour que la série soit convergente, c'est que le terme général devienne infiniment petit, c'est-à-dire tende vers zéro, quand l'indice qui indique son rang croît indéfiniment. Cette condition est nécessaire ; car si elle n'était pas remplie, on ajouterait constamment et indéfiniment des quantités finies à la somme des termes précédents, à mesure qu'on prendrait un plus grand nombre de termes, et par conséquent la somme de ces termes ne saurait avoir de limite. Mais cette même condition n'est pas suffisante.

Considérons en effet la série :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\text{etc.}$$

Je groupe les termes de cette série de la manière suivante :

dans le premier groupe . . . . . $1+\frac{1}{2}$

dans le second les deux termes . . . . . $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

dans le troisième les quatre termes qui suivent : $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$

dans le quatrième les huit, dans le cinquième les seize &c... termes suivants, de telle manière dans le dernier terme de chaque groupe est une puissance entière de $\left(\frac{1}{2}\right)$.

Maintenant il est clair que dans le second groupe on a une somme plus grande que $2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

dans le troisième une somme plus grande que $4.\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

dans le quatrième . . . . . $8.\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$

Et ainsi de suite. En généralement.

Dans le n^{me} groupe une somme supérieure à $2^n\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$.

Comme d'ailleurs il y a un nombre indéfini de groupes, la somme des termes de cette série se compose d'un nombre indéfini de parties toutes plus grandes que $\frac{1}{2}$. Il n'y a donc pas de limite vers laquelle cette limite puisse tendre. Et par conséquent la série n'est pas convergente.

Le caractère général de la convergence d'une série est, ainsi qu'on l'a dit, que la somme S_n tend vers une limite déterminée quand n devient infiniment grand. Mais il est clair que les premiers termes de la série n'influe en rien sur la convergence ; elle ne dépend évidemment que de la loi des derniers termes.

Soient S_n, S_{n+1}, S_{n+2} . . . . . S_{n+m} les sommes des n, $n+1$, $n+2$ . . . . . $n+m$ premiers termes de la série : on a :

$S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ d'où

et de même . . . . . .

$$\begin{cases} S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \\ S_{n+2} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} \\ S_{n+3} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_{n+m} - S_n = u_{n+1} + \dots + u_{n+m} \end{cases}$$

Si la série est convergente tous les seconds membres s'annullent quand n croît indéfiniment : car toutes les sommes S_n, $S_{n+1} \dots S_{n+m}$ ont une limite commune qui est S, et cela a lieu quelque soit m.

Réciproquement, si cela a lieu quelque soit m, la convergence de la série est assurée. Cela est évident.

Nous nous occuperons d'abord des séries dont les termes sont tous de même signe, et pour fixer les idées, nous les supposerons tous positifs.

1. Soit la série $u_1, u_2, u_3, \dots u_n$.

Faisons la somme des n premiers termes :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots + u_n .$$

Supposons qu'on ait reconnu que cette somme quel que soit n, est toujours plus petite qu'une quantité fixe b : je dis que la série est convergente. En effet, tous les termes étant positifs, il y a toujours augmentation dans la somme S_n à mesure que n augmente. Comme d'ailleurs, cette somme ne dépasse pas b, il s'ensuit qu'elle tend vers une limite égale à b ou moindre que b.

Ainsi quand la somme S_n est toujours, quelque soit n, inférieure à une quantité fixe b, la série est convergente, et la somme de la série est égale à b ou moindre que b.

2. Soit u_n le terme général. Formons $\sqrt[n]{u_n}$, et supposons qu'à partir d'une certaine valeur de n, et pour toutes les valeurs suivantes $\sqrt[n]{u_n}$ soit plus petit que K, K étant < 1; je dis que la série est convergente.

(La première inégalité $\sqrt[n]{u_n} < K$ n'exclue pas d'ailleurs l'égalité). Puisque $\sqrt[n]{u_n} < K$,

on a :

et de même

$$u_n < K^n$$
$$u_{n+1} < K^{n+1}$$
$$u_{n+2} < K^{n+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{n+m} < K^{n+m}$$

Par suite :

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m} < K^n + K^{n+1} + K^{n+2} + \cdots + K^{n+m}$$

ou bien $< K^n(1 + K + K^2 + \cdots + K^m)$

ou bien $< K^n \dfrac{1 - K^{m+1}}{1 - K}$, et à fortiori

$$< K^n \cdot \frac{1}{1-K}.$$

Car il est clair que K est positif. Or quand n croît indéfiniment $\dfrac{K^n}{1-K}$ tend vers zéro. Par conséquent, <u>quelque soit m</u>, la somme : $u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+m}$ tend vers zéro quand n est infiniment grand, et par conséquent la série est convergente.

Quant au reste de cette série : $r_n = S - S_n$ c'est la somme d'une autre série, qui est elle-même convergente, savoir $r_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_n + m$, ce reste quelque grand que soit m est toujours, ainsi qu'on vient de le voir, moindre que $\dfrac{K^n}{1-K}$. On sait d'ailleurs qu'il est positif.