

SYNOPSIS

Introduction	1
Vocabulaire Mathématique	9
I. Représentations des groupes finis	233
II. Espaces de Banach	269
III. Intégration	297
IV. Transformée de Fourier	331
V. Fonctions holomorphes	355
VI. La formule de Cauchy et celle des résidus (de Cauchy)	379
VII. Séries de Dirichlet	399
A. Le théorème des nombres premiers	429
B. Volume de $SL_n(\mathbf{R})/SL_n(\mathbf{Z})$	449
C. Groupes finis et représentations : exemples	465
D. Fonctions d'une variable p -adique	479
E. Irrationalité d'une infinité de $\zeta(2n+1)$	497
F. Le problème des nombres congruents	507
G. Introduction au programme de Langlands	523
H. Problèmes corrigés	555
Index	641

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Vocabulaire Mathématique	9
1. Grammaire élémentaire	10
2. Structures algébriques	16
3. Groupes finis	38
4. Polynômes	48
5. Algèbre linéaire	61
6. Déterminants	71
7. Matrices	74
8. Fragments de théorie des corps (commutatifs)	88
9. Système d'équations	100
10. Réduction des endomorphismes	110
11. Topologie	129
12. Compacité	139
13. Connexité	148
14. Complétude	151
15. Séries numériques	156
16. Convergence de fonctions	165
17. Espaces vectoriels normés	167
18. Espaces préhilbertiens	172
19. Tératologie	183
20. Construction de nombres	190
21. Corrigé des exercices	201
I. Représentations des groupes finis	233
I.1. Représentations et caractères	235
I.2. Décomposition des représentations	242
I.3. Construction de représentations	256
II. Espaces de Banach	269
II.1. Espaces de Banach	269
II.2. Espaces de Hilbert	283
II.3. Exercices	289

II.4. Espaces de Banach p -adiques	292
III. Intégration	297
III.1. Intégrale de Lebesgue	297
III.2. Quelques espaces fonctionnels	310
III.3. Intégrales multiples	315
III.4. Construction de l'intégrale de Lebesgue	323
IV. Transformée de Fourier	331
IV.1. Intégrales dépendant d'un paramètre	331
IV.2. Transformée de Fourier dans L^1	334
IV.3. Formules d'inversion	337
IV.4. Transformée de Fourier dans L^2	349
V. Fonctions holomorphes	355
V.1. Fonctions holomorphes et fonctions analytiques complexes	355
V.2. Exemples de fonctions holomorphes	359
V.3. Premières propriétés des fonctions holomorphes	361
V.4. La formule intégrale de Cauchy et ses conséquences	365
V.5. Construction de fonctions holomorphes	371
V.6. Inversion globale et image ouverte	375
VI. La formule de Cauchy et celle des résidus (de Cauchy)	379
VI.1. Homotopie de lacets et formule de Cauchy	379
VI.2. Indice d'un lacet par rapport à un point	385
VI.3. La formule des résidus de Cauchy	389
VII. Séries de Dirichlet	399
VII.1. Séries de Dirichlet	399
VII.2. Séries de Dirichlet et transformée de Mellin	403
VII.3. La fonction zêta de Riemann	409
VII.4. Fonctions L de Dirichlet	415
VII.5. Autres exemples	422
VII.6. Formes modulaires	423
A. Le théorème des nombres premiers	429
A.1. Introduction	429
A.2. Les fonctions ψ et ψ_1	433
A.3. Formules explicites	435
A.4. Démonstration du théorème des nombres premiers	443
A.5. Compléments	445
B. Volume de $SL_n(\mathbf{R})/SL_n(\mathbf{Z})$	449
B.1. Volume d'objets arithmétiques	449
B.2. La mesure de Haar de $SL_n(\mathbf{R})$	458
C. Groupes finis et représentations : exemples	465
C.1. p -Groupes	465
C.2. Représentations du groupe symétrique S_n	467

C.3. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F})$	470
D. Fonctions d'une variable p-adique	479
D.1. Analyses fonctionnelles réelle et p -adique	479
D.2. Fonctions k -fois uniformément dérivables	480
D.3. Fonctions localement analytiques sur \mathbf{Z}_p	484
D.4. La fonction zêta p -adique	489
E. Irrationalité d'une infinité de $\zeta(2n+1)$	497
E.1. Indépendance linéaire de nombres réels	497
E.2. Transcendance de π et indépendance linéaire des $\zeta(n)$	499
F. Le problème des nombres congruents	507
F.1. Courbes elliptiques et nombres congruents	507
F.2. Équations diophantiennes	517
G. Introduction au programme de Langlands	523
G.1. La conjecture d'Artin	525
G.2. Le théorème de Kronecker-Weber revisité	535
G.3. Le programme de Langlands	549
H. Problèmes corrigés	555
H.1. Exercices d'examen	556
H.2. Table des caractères de A_5	569
H.3. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_3)$	574
H.4. Table des caractères de $\mathbf{GL}_3(\mathbf{F}_2)$	579
H.5. Coefficients de Fourier des fonctions continues	587
H.6. Fonctions d'Hermite et transformée de Fourier dans L^2	589
H.7. Transformée de Fourier et convolution	593
H.8. Loi d'addition sur une courbe elliptique	597
H.9. Coefficients de Fourier des fonctions analytiques	603
H.10. Prolongement analytique d'intégrales et de séries	605
H.11. La fonction η de Dedekind	612
H.12. Irrationalité de $\zeta(3)$	622
H.13. Le critère de Borel	626
H.14. Le théorème de Mordell-Weil	629
Index	641
Index terminologique	642
Énoncés mathématiques	650
Index des noms propres	652
Repères chronologiques	655

TABLE DES MATIÈRES DÉTAILLÉE

Introduction	1
Bibliographie sommaire	3
Préface de la seconde édition	5
Notations standard	7
Vocabulaire Mathématique	9
1. Grammaire élémentaire	10
1.1. Coefficients binomiaux	11
1.2. L'anneau \mathbf{Z} des entiers relatifs	11
1.3. Parallélisme entre logique élémentaire et langage ensembliste	14
1.4. Ensembles dénombrables	14
2. Structures algébriques	16
2.1. Lois de composition	17
2.2. Exemples de structures algébriques	18
2.3. Sous-trucs de trucs	21
2.4. Morphismes	22
2.5. Noyau et image	23
2.6. Produits et sommes	25
2.7. Relations d'équivalence	27
2.8. L'anneau $\mathbf{Z}/D\mathbf{Z}$ des entiers relatifs modulo D	29
2.9. Quotients d'espaces vectoriels et de A -modules	32
2.10. Anneaux quotients, idéaux	33
2.11. Groupes quotients	35
3. Groupes finis	38
3.1. Groupes cycliques	38
3.2. Groupes abéliens finis	40
3.3. Le théorème de Lagrange et ses variantes	41
3.4. Le groupe symétrique S_n	42
3.5. Les théorèmes de Sylow	46
4. Polynômes	48
4.1. Polynômes en une variable	48
4.2. Anneaux euclidiens et principaux	50
4.3. Polynômes en plusieurs variables	56
4.4. Polynômes symétriques	58
4.5. Anneaux noethériens	59
5. Algèbre linéaire	61

5.1. Espaces vectoriels	61
5.2. Morphismes d'espaces vectoriels	62
5.3. Familles libres, familles génératrices, bases	64
5.4. Espaces vectoriels de dimension finie	66
5.5. Dualité	69
6. Déterminants	71
6.1. Formes multilinéaires alternées	71
6.2. Déterminant de n vecteurs	72
6.3. Déterminant d'un endomorphisme	74
7. Matrices	74
7.1. Matrices à coefficients dans un corps	74
7.2. Produit de matrices	75
7.3. Le théorème fondamental de l'algèbre linéaire	76
7.4. Matrice d'une application linéaire	76
7.5. Matrices carrées	78
7.6. Déterminant d'une matrice carrée	79
7.7. Matrices à coefficients dans un anneau	83
7.8. Matrices par blocs	87
8. Fragments de théorie des corps (commutatifs)	88
8.1. Sous-extensions finies	89
8.2. Algébricité, transcendance	90
8.3. Extensions algébriques, clôture intégrale	92
8.4. Constructions à la règle et au compas	93
8.5. Degré de transcendance	94
8.6. Constructions d'extensions algébriques	95
8.7. Corps finis	97
8.8. La clôture algébrique d'un corps	99
9. Système d'équations	100
9.1. Systèmes linéaires	101
9.2. Systèmes d'équations polynomiales	104
10. Réduction des endomorphismes	110
10.1. Généralités	110
10.2. Modules de torsion sur $K[X]$ et réduction des endomorphismes	112
10.3. Modules de torsion sur les anneaux principaux	118
10.4. Modules sur les anneaux principaux	121
10.5. Extension des scalaires	125
11. Topologie	129
11.1. Espaces topologiques	129
11.2. Espaces métriques	130
11.3. Continuité	132
11.4. Sous-espaces, produits, quotients	133
11.5. Espaces séparés	135
11.6. Intérieur, adhérence, densité	136
11.7. Suites dans un espace topologique	137
12. Compacité	139
12.1. Espaces compacts	139
12.2. Compacité et suites	140
12.3. Propriétés de base des compacts	141
12.4. La droite réelle achevée	145
12.5. L'espace topologique $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$	147

13. Connexité	148
13.1. Ensembles connexes	148
13.2. Connexité par arcs	149
14. Complétude	151
14.1. Suites de Cauchy	151
14.2. Principales propriétés des espaces complets	152
14.3. Complétion d'un espace métrique	154
15. Séries numériques	156
15.1. Séries à termes positifs	156
15.2. Séries standard	158
15.3. Séries absolument convergentes	159
15.4. Séries entières	161
15.5. L'exponentielle complexe	162
15.6. Sommation de séries divergentes	163
16. Convergence de fonctions	165
16.1. Convergence simple	165
16.2. Convergence uniforme	166
17. Espaces vectoriels normés	167
17.1. Corps normés	167
17.2. Normes et applications linéaires continues	168
17.3. La norme d'un opérateur	168
17.4. Normes équivalentes	169
17.5. Norme spectrale d'un opérateur	170
17.6. La boule unité d'un espace vectoriel normé	171
17.7. Applications bilinéaires continues	172
18. Espaces préhilbertiens	172
18.1. Produits scalaires	172
18.2. Orthogonalité	173
18.3. Unitarité	175
18.4. Opérateur autoadjoint, matrice hermitienne	179
19. Tératologie	183
19.1. Fonctions continues dérivables nulle part	183
19.2. L'escalier du diable	184
19.3. L'ensemble triadique de Cantor	186
19.4. La courbe de Peano	186
19.5. Ensembles connexes non connexes par arcs	188
20. Construction de nombres	190
20.1. Entiers naturels	190
20.2. Entiers relatifs, nombres rationnels	191
20.3. Nombres réels, nombres complexes	192
20.4. Nombres p -adiques	193
21. Corrigé des exercices	201
I. Représentations des groupes finis	233
I.1. Représentations et caractères	235
1. Représentations de groupes, exemples	235
2. Caractère d'une représentation, exemples	237
3. Morphismes de représentations	239
I.2. Décomposition des représentations	242
1. Décomposition en somme directe de représentations irréductibles	242
2. Le lemme de Schur et ses conséquences immédiates	244

3. Orthogonalité des caractères	246
4. Applications du théorème principal	247
5. Le cas des groupes commutatifs	249
6. Table des caractères d'un groupe fini	252
I.3. Construction de représentations	256
1. Restriction et inflation	256
2. Constructions tensorielles de représentations	257
3. Représentations induites	260
4. Exercices	265
II. Espaces de Banach	269
II.1. Espaces de Banach	269
1. Convergence normale, séries sommables	269
2. Espaces de suites	271
3. Espaces de fonctions continues	272
4. Équations différentielles linéaires	274
5. Complétion d'espaces vectoriels normés	279
6. Applications linéaires continues entre espaces de Banach	280
7. Le dual d'un espace de Banach	282
II.2. Espaces de Hilbert	283
1. Espaces de Hilbert	283
2. Le théorème de projection sur un convexe	286
3. Le dual d'un espace de Hilbert	288
II.3. Exercices	289
1. Espaces de Banach	289
2. Espaces de Hilbert	290
3. Séries de Fourier	291
II.4. Espaces de Banach p-adiques	292
1. Définition et exemples	292
2. Bases orthonormales	293
3. Le dual d'un espace de Banach p -adique	295
III. Intégration	297
III.1. Intégrale de Lebesgue	297
1. Dallages et fonctions en escalier	297
2. Ensembles de mesure nulle	299
3. Fonctions mesurables, ensembles mesurables	301
4. Définition de l'intégrale de Lebesgue	304
5. Les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée	308
6. Premières applications	309
III.2. Quelques espaces fonctionnels	310
1. L'espace $L^1(X)$	310
2. L'espace $L^2(X)$	312
3. Convergence dans L^1 et L^2	313
4. Comparaison des différents modes de convergence	314
5. Espaces L^p	315
III.3. Intégrales multiples	315
1. Le théorème de Fubini	315
2. La formule du changement de variable	319
3. L'intégrale de la gaussienne	321
4. Exercices	322

III.4. Construction de l'intégrale de Lebesgue	323
1. Le théorème de convergence dominée pour les fonctions en escalier bornées	323
2. Mesure et mesure extérieure des ensembles mesurables	326
3. Le théorème de convergence monotone pour les fonctions bornées à support compact	327
4. Limites simples p.p. de fonctions mesurables	328
5. Le théorème de convergence monotone et ses conséquences	329
IV. Transformée de Fourier	331
IV.1. Intégrales dépendant d'un paramètre	331
IV.2. Transformée de Fourier dans L^1	334
1. Caractères linéaires de \mathbf{R} et \mathbf{R}^m	334
2. Définition et premières propriétés	334
3. Le théorème de Riemann-Lebesgue	335
4. Transformée de Fourier et dérivation	336
IV.3. Formules d'inversion	337
1. Séries de Fourier	337
2. Séries de Fourier multidimensionnelles	341
3. La formule de Poisson	345
4. La formule d'inversion de Fourier dans \mathcal{S}	346
5. Formules d'inversion dans L^1	347
6. Exercices	348
IV.4. Transformée de Fourier dans L^2	349
1. Transformée de Fourier des fonctions en escalier	349
2. Définition de la transformée de Fourier dans L^2	351
3. Comparaison des transformées de Fourier dans L^1 et L^2	352
4. Dérivation	352
V. Fonctions holomorphes	355
V.1. Fonctions holomorphes et fonctions analytiques complexes	355
1. Séries entières	355
2. Rayon de convergence d'une série entière	357
V.2. Exemples de fonctions holomorphes	359
1. Définition	359
2. Logarithme et fonctions puissances	360
V.3. Premières propriétés des fonctions holomorphes	361
1. Relations de Cauchy-Riemann	361
2. Théorème des zéros isolés et unicité du prolongement analytique	362
3. Principe du maximum	364
V.4. La formule intégrale de Cauchy et ses conséquences	365
1. Généralités sur les chemins	365
2. Intégration le long d'un chemin	366
3. La formule de Cauchy	367
4. Holomorphic des fonctions dérivables au sens complexe	368
5. Rayon de convergence et inégalités de Cauchy pour les dérivées	369
V.5. Construction de fonctions holomorphes	371
1. Séries de fonctions holomorphes	371
2. Produits infinis de fonctions holomorphes	372
3. Fonctions holomorphes définies par une intégrale	373
V.6. Inversion globale et image ouverte	375
1. Le théorème d'inversion locale holomorphe	375
2. Structure locale des fonctions holomorphes	376

VI. La formule de Cauchy et celle des résidus (de Cauchy)	379
VI.1. Homotopie de lacets et formule de Cauchy	379
1. Vocabulaire de topologie algébrique	379
2. Un cas particulier de la formule de Stokes	380
3. Seconde démonstration de la formule de Cauchy	383
VI.2. Indice d'un lacet par rapport à un point	385
1. Primitives	385
2. Nombre de tours d'un lacet autour d'un point	386
VI.3. La formule des résidus de Cauchy	389
1. Fonctions holomorphes sur une couronne	389
2. Fonctions holomorphes sur un disque épointé; résidus	392
3. La formule des résidus	395
4. Exercices	395
VII. Séries de Dirichlet	399
VII.1. Séries de Dirichlet	399
1. Abscisse de convergence absolue	399
2. Demi-plan de convergence d'une série de Dirichlet	401
VII.2. Séries de Dirichlet et transformée de Mellin	403
1. La fonction Γ dans le plan complexe	403
2. Une formule intégrale pour les séries de Dirichlet	404
3. Prolongement analytique de séries de Dirichlet	406
4. Croissance dans une bande verticale	406
VII.3. La fonction zêta de Riemann	409
1. Séries de Dirichlet attachées à des fonctions multiplicatives	409
2. Prolongement analytique de la fonction ζ	410
3. Équation fonctionnelle de la fonction zêta	411
4. Les zéros de la fonction ζ	415
VII.4. Fonctions L de Dirichlet	415
1. Caractères de Dirichlet et Fonctions L de Dirichlet	415
2. Conducteur et sommes de Gauss	416
3. Le théorème de la progression arithmétique	417
4. Équation fonctionnelle des fonctions L de Dirichlet	419
VII.5. Autres exemples	422
1. La fonction de Moebius	422
2. La fonction τ de Ramanujan	422
VII.6. Formes modulaires	423
A. Le théorème des nombres premiers	429
A.1. Introduction	429
A.2. Les fonctions ψ et ψ_1	433
1. Théorème des nombres premiers et comportement de ψ_1 en $+\infty$	433
2. Une formule intégrale pour ψ_1	434
A.3. Formules explicites	435
1. Énoncé du résultat	436
2. Les fonctions L et $\frac{\psi_1}{L}$ en dehors de la bande critique	438
3. La fonction L dans la bande critique	439
4. La fonction $\frac{\psi_1}{L}$ dans la bande critique	440
5. Conclusion	441
A.4. Démonstration du théorème des nombres premiers	443
1. Non annulation sur la droite $\text{Re}(s) = 1$	443

2. Conclusion	445
A.5. Compléments	445
1. L'hypothèse de Riemann et ses conséquences	445
2. L'hypothèse de Riemann et la fonction M de Mertens	446
3. L'hypothèse de Lindelöf	447
B. Volume de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbf{Z})$	449
B.1. Volume d'objets arithmétiques	449
1. Résultats	449
2. Intégration sur un quotient	451
3. Un dévissage du groupe $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$	453
4. Intégration sur \mathbf{R}^n et sur $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbf{Z})$	455
5. Apparition de $\zeta(n)$ et fin du calcul	456
6. Le lemme de Minkowski	458
B.2. La mesure de Haar de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$	458
1. Transvections et structure du groupe $\mathbf{SL}_n(\mathbf{K})$	459
2. Invariance de dg par translation	461
3. De $\mathbf{SL}_{n-1}(\mathbf{R})$ à $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$	462
C. Groupes finis et représentations : exemples	465
C.1. p -Groupes	465
1. Généralités sur les p -groupes	465
2. Représentations des p -groupes	466
C.2. Représentations du groupe symétrique S_n	467
1. Partitions de n et représentations de S_n	467
2. Diagrammes de Young et représentations de S_n	469
3. Caractères de S_n	469
C.3. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F})$	470
1. Le groupe $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F})$	470
2. Construction de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F})$	471
3. Les classes de conjugaison de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F})$	472
4. La table des caractères de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F})$	474
5. Démonstrations	475
D. Fonctions d'une variable p-adique	479
D.1. Analyses fonctionnelles réelle et p -adique	479
D.2. Fonctions k -fois uniformément dérivables	480
1. Fonctions de classe \mathcal{C}^k et fonctions de classe \mathcal{C}_u^k	480
2. Fonctions continues sur \mathbf{Z}_p^n	482
3. Coefficients de Mahler des fonctions de classe \mathcal{C}_u^k	483
D.3. Fonctions localement analytiques sur \mathbf{Z}_p	484
1. Fonctions analytiques	484
2. Fonctions localement analytiques	486
3. Bases orthonormales d'espaces de fonctions localement analytiques	487
4. Démonstration du lemme D.3.4	488
D.4. La fonction zêta p -adique	489
1. Intégration p -adique	490
2. La mesure μ_a	492
3. Continuité de la fonction $n \mapsto x^n$	492
4. Restriction de μ_a à \mathbf{Z}_p^*	494
5. Construction de la fonction zêta p -adique	495

E. Irrationalité d'une infinité de $\zeta(2n + 1)$	497
E.1. Indépendance linéaire de nombres réels	497
1. Le critère de Nesterenko	497
E.2. Transcendance de π et indépendance linéaire des $\zeta(n)$	499
1. Génération de combinaisons linéaires entre les $\zeta(n)$	499
2. Un choix judicieux de fonction rationnelle	499
3. Propriétés archimédiennes et arithmétiques des $\alpha_k^{(n)}$	500
4. Évaluation de S_n	503
5. Utilisation du critère de Nesterenko	504
F. Le problème des nombres congruents	507
F.1. Courbes elliptiques et nombres congruents	507
1. Introduction	507
2. Arithmétique des courbes elliptiques	509
3. L'heuristique de Birch et Swinnerton-Dyer	511
4. Fonction L d'une courbe elliptique	511
5. La stratégie de Tunnell	513
6. Formes modulaires	514
7. Courbes elliptiques et formes modulaires	515
F.2. Équations diophantiennes	517
1. Généralités	517
2. La topologie des solutions complexes gouverne l'arithmétique !	519
G. Introduction au programme de Langlands	523
G.1. La conjecture d'Artin	525
1. Le groupe $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$	525
2. Représentations de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$	526
3. Fonctions L d'Artin	528
4. Fonctions L de degré 2	529
5. La théorie du corps de classes	533
G.2. Le théorème de Kronecker-Weber revisité	535
1. Adèles	535
2. La formule de Poisson adélique	539
3. Transformée de Mellin adélique et fonctions L	542
4. Application aux fonctions L de Dirichlet	546
G.3. Le programme de Langlands	549
1. Représentations automorphes	549
2. Des formes modulaires aux représentations automorphes	551
3. Quelques autres aspects du programme de Langlands	553
H. Problèmes corrigés	555
H.1. Exercices d'examen	556
1. Énoncés	556
2. Corrigés	560
H.2. Table des caractères de A_5	569
H.3. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_3)$	574
H.4. Table des caractères de $\mathbf{GL}_3(\mathbf{F}_2)$	579
H.5. Coefficients de Fourier des fonctions continues	587
H.6. Fonctions d'Hermite et transformée de Fourier dans L^2	589
H.7. Transformée de Fourier et convolution	593
H.8. Loi d'addition sur une courbe elliptique	597

H.9. Coefficients de Fourier des fonctions analytiques	603
H.10. Prolongement analytique d'intégrales et de séries	605
H.11. La fonction η de Dedekind	612
H.12. Irrationalité de $\zeta(3)$	622
H.13. Le critère de Borel	626
H.14. Le théorème de Mordell-Weil	629
Index	641
Index terminologique	642
Énoncés mathématiques	650
Index des noms propres	652
Repères chronologiques	655

Préface de la seconde édition

Le cours dont est issu ce livre a pris fin, et j'en ai profité pour inclure le matériel pédagogique de la dernière année, et divers compléments (près de 200 pages au total).

Le Vocabulaire Mathématique a vu sa taille doubler par rapport à la première édition, et offre maintenant (si on lui adjoint un peu de l'analyse réelle des chapitres II, III et IV) un survol assez complet d'un cours correspondant aux deux années de classe préparatoire dans un lycée ambitieux⁽²⁾, avec plus d'une centaine d'exercices corrigés dont beaucoup sont des classiques faisant partie de la culture de ces classes. Il ne s'agit pas d'un cours organisé, et je ne pense pas que ce soit l'endroit parfait pour un premier contact avec les sujets qu'il regroupe (les cours sont faits pour cela) ; son but est plutôt de rassembler et de préciser, sous une forme compacte, les résultats d'usage constant⁽³⁾.

Le chapitre « Problèmes corrigés » a été enrichi d'exercices posés lors des examens finaux, et de quatre problèmes : l'un (prob. H.12) propose une démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ qui utilise la fonction Γ dans le plan complexe, un autre (prob. H.11) vise à démontrer l'identité $q^{1/24} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} (-1)^m q^{(6m+1)^2/24}$ due à Euler et en profite pour passer en revue la plupart des techniques de transformée de Fourier et de fonctions holomorphes, le troisième (prob. H.13) présente un résultat très frappant de Borel concernant la rationalité d'une série $\sum a_n z^n$ à coefficients entiers, et le dernier (prob. H.4) établit la table des caractères du plus petit groupe simple après A_5 . Les problèmes de ce genre sont une spécialité bien française, et je pense qu'ils expliquent en grande partie les succès de l'École Française de mathématiques : ils permettent d'illustrer l'unité des mathématiques en montrant, à un niveau relativement élémentaire, l'intérêt de combiner des techniques différentes. Ils offrent une aide irremplaçable pour assimiler les énoncés du cours et apprécier leur puissance, et mon conseil serait de chercher à les résoudre (et d'aller voir⁽⁴⁾ la solution en cas d'échec), avant d'essayer de maîtriser les démonstrations des théorèmes fondamentaux (lire lesdites démonstrations peut toutefois être utile pour

⁽²⁾Cela correspond à peu près à ce que j'ai eu la chance de recevoir comme cours en math. sup. (la pénurie de professeurs de mathématiques n'avait pas encore été résolue par une diminution drastique des heures d'enseignement au collège et au lycée et on arrivait en classe préparatoire nettement mieux armé qu'à l'heure actuelle) ; je voudrais en profiter pour remercier D. Monasse du riche et beau cours qu'il nous a offert cette année-là, et dont j'utilise le contenu tous les jours de ma vie de mathématicien.

⁽³⁾Avec des démonstrations en petits caractères pour ceux qui aiment bien pouvoir vérifier que l'on n'est pas en train de leur raconter des sornettes ; certaines de ces démonstrations sont d'ailleurs assez belles

⁽⁴⁾Lire la solution d'une question à laquelle on n'a pas réfléchi est la recette idéale pour ne rien apprendre ; par contre essayer de résoudre une question soi-même est la meilleure manière pour préparer le cerveau à recevoir et assimiler la solution. Les puristes prétendent qu'il ne faut jamais aller voir la solution et tout résoudre soi-même (c'est la position des japonais en ce qui concerne les problèmes de go ; celle des chinois est plutôt qu'il faut réfléchir dix minutes et aller voir la solution si on ne trouve pas ; il y a 30 ans, les japonais étaient de loin les plus forts, mais ils se sont depuis fait dépasser par les chinois et les coréens...).

se faire une idée de la manière dont les concepts s'articulent, mais s'acharner à les retenir est plutôt une perte de temps).

Les autres ajouts notables sont :

- un appendice (annexe E) démontrant la transcendance de π et l'existence d'une infinité de $\zeta(2n + 1)$ irrationnels (en écho au prob. H.12),
- une construction complète de la fonction zêta p -adique (§ D.4),
- des remarques sur les équations diophantiennes (§ F.2).

J'ai appris énormément de choses en écrivant ce texte, et j'espère que le lecteur y trouvera de quoi satisfaire sa curiosité. Étant arithméticien, j'ai privilégié les problèmes issus de la théorie des nombres pour illustrer l'unité⁽⁵⁾ des mathématiques; quelqu'un de plus proche de la physique aurait probablement pu écrire autant d'appendices inspirés de problèmes physiques et mettant en jeu les mathématiques du Vocabulaire et des chapitres I à VII. La géométrie et les probabilités sont presque totalement absentes; c'est fort regrettable car la vision que ces théories apportent est fondamentale (en particulier en théorie des nombres ou en physique), mais c'est un reflet de l'organisation de l'enseignement des mathématiques dans notre pays.

⁽⁵⁾Il est assez fascinant de voir comment les concepts se répondent d'une théorie ou d'un monde à l'autre. La note 50 du Vocabulaire en fournit une illustration assez frappante. De même, le prob. H.9 m'a été inspiré par le th. D.3.2 du monde p -adique, dont je me suis demandé ce qu'il pouvait bien devenir dans le monde réel (ou complexe); j'ai réalisé par la suite qu'il s'agissait d'un résultat parfaitement classique dans la veine du th. de Paley-Wiener.