

Table des matières

Avant-propos	i
Notations	xi
1 Introduction à un monde transitoire	1
1.1 Le paradis de Fourier	1
1.2 Le mariage temps-fréquence	2
1.2.1 La transformée de Fourier à fenêtre	3
1.2.2 La transformée en ondelettes	4
1.3 Bases d'atomes temps-fréquence	6
1.3.1 Bases d'ondelettes et bancs de filtres	7
1.3.2 Pavages par paquets d'ondelettes et bases de cosinus locaux	9
1.4 Des bases pour quoi faire?	11
1.4.1 Approximation	12
1.4.2 Estimation	14
1.4.3 Compression	16
1.5 Guide de voyage	17
1.5.1 Calculs numériques reproductibles	17
1.5.2 Plan de route	18
2 Au royaume de Fourier	19
2.1 Filtrage linéaire stationnaire*	19
2.1.1 Réponse impulsionnelle	20
2.1.2 Fonctions de transfert	21
2.2 Intégrales de Fourier*	21
2.2.1 Transformée de Fourier sur $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$	22
2.2.2 Transformée de Fourier sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$	24
2.2.3 Exemples	26
2.3 Propriétés*	28
2.3.1 Régularité et décroissance	28
2.3.2 Principe d'incertitude	29
2.3.3 Variation totale	31
2.4 Transformée de Fourier en dimension 2*	37
2.5 Problèmes	38

3	La révolution discrète	41
3.1	Échantillonnage des signaux analogiques*	41
3.1.1	Théorème d'échantillonnage	42
3.1.2	Aliasing	43
3.1.3	Échantillonnages généralisés	46
3.2	Filtres discrets*	48
3.2.1	Réponse impulsionnelle et fonction de transfert	48
3.2.2	Série de Fourier	50
3.3	Signaux finis*	54
3.3.1	Convolutions circulaires	54
3.3.2	Transformée de Fourier discrète	54
3.3.3	Transformée de Fourier rapide	56
3.3.4	Convolutions rapides	57
3.4	Traitement de l'image discret*	58
3.4.1	Théorème d'échantillonnage en dimension 2	59
3.4.2	Filtrage d'images	60
3.4.3	Convolutions circulaires et base de Fourier	61
3.5	Problèmes	63
4	La rencontre temps-fréquence	67
4.1	Atomes temps-fréquence*	67
4.2	Transformée de Fourier à fenêtre*	69
4.2.1	Complétude et stabilité	71
4.2.2	Choix de la fenêtre**	74
4.2.3	Transformée de Fourier à fenêtre discrète**	77
4.3	Transformées en ondelettes*	78
4.3.1	Ondelettes réelles	79
4.3.2	Ondelettes analytiques	83
4.3.3	Ondelettes discrètes**	88
4.4	Fréquences instantanées**	90
4.4.1	Crêtes de Fourier à fenêtre	92
4.4.2	Crêtes d'ondelettes	101
4.5	Distributions temps-fréquence quadratiques*	105
4.5.1	Distribution de Wigner-Ville	106
4.5.2	Interférences et positivité	110
4.5.3	La classe de Cohen**	114
4.5.4	Calcul de Wigner-Ville discret**	118
4.6	Problèmes	119
5	Discret mais stable	123
5.1	Théorie des frames**	123
5.1.1	Frames et échantillonnage	123
5.1.2	Pseudo-inverse	125
5.1.3	Calcul rapide d'un pseudo-inverse	130
5.1.4	Projecteur de frame et réduction de bruit	133
5.2	Frames de Fourier à fenêtre**	136
5.3	Frames d'ondelettes**	141

5.4	Invariance par translation *	144
5.5	Transformée en ondelettes dyadique **	146
5.5.1	Construction des ondelettes	148
5.5.2	Algorithme à trous	151
5.5.3	Ondelettes orientées pour la vision ***	153
5.6	Problèmes	157
6	Zoom en ondelettes	161
6.1	Régularité lipschitzienne *	161
6.1.1	Exposants de Lipschitz et analyse de Fourier	162
6.1.2	Moments nuls des ondelettes	164
6.1.3	Mesures de régularité par ondelettes	167
6.2	Maxima de la transformée en ondelettes **	173
6.2.1	Détection des singularités	174
6.2.2	Reconstruction à partir des maxima dyadiques ***	179
6.3	Détection de contour multiéchelle **	186
6.3.1	Maxima d'ondelettes sur des images **	186
6.3.2	Calculs rapides de contours multiéchelles ***	194
6.4	Multifractales **	197
6.4.1	Ensembles fractals et fonctions autosimilaires	197
6.4.2	Spectre de singularités ***	201
6.4.3	Bruit fractal ***	208
6.5	Problèmes	213
7	Bases d'ondelettes	217
7.1	Bases d'ondelettes orthogonales *	217
7.1.1	Approximations multirésolution	218
7.1.2	Fonction d'échelle	221
7.1.3	Filtres miroirs conjugués	224
7.1.4	Où l'on voit enfin des ondelettes orthogonales	231
7.2	Différentes classes d'ondelettes orthogonales *	238
7.2.1	Comment choisir une ondelette	238
7.2.2	Ondelettes de Shannon, Meyer, Haar et Battle-Lemarié	243
7.2.3	Ondelettes de Daubechies à support compact	246
7.3	Ondelettes et bancs de filtres *	251
7.3.1	Transformée en ondelettes rapide	251
7.3.2	Bancs de filtres à reconstruction parfaite	255
7.3.3	Bases biorthogonales de $\ell^2(\mathbb{Z})$ **	259
7.4	Bases d'ondelettes biorthogonales **	261
7.4.1	Construction des bases d'ondelettes biorthogonales	261
7.4.2	Propriétés des ondelettes biorthogonales **	264
7.4.3	Ondelettes biorthogonales à support compact **	266
7.4.4	Lifting d'ondelettes ***	268
7.5	Bases d'ondelettes sur l'intervalle **	277
7.5.1	Ondelettes périodiques	278
7.5.2	Repliement d'ondelettes	280
7.5.3	Ondelettes de bord ***	282

7.6	Interpolations multiéchelles **	288
7.6.1	Interpolation et échantillonnage	288
7.6.2	Bases d'ondelettes d'interpolation ***	294
7.7	Bases d'ondelettes séparables *	299
7.7.1	Multirésolutions séparables	299
7.7.2	Bases d'ondelettes en dimension 2	302
7.7.3	Transformée en ondelettes rapide en dimension 2	305
7.7.4	Bases d'ondelettes en dimension supérieure **	308
7.8	Problèmes	310
8	Paquets d'ondelettes et cosinus locaux	317
8.1	Paquets d'ondelettes **	317
8.1.1	Arbre de paquets d'ondelettes	317
8.1.2	Localisation temps-fréquence	323
8.1.3	Bases de paquets d'ondelettes particulières	329
8.1.4	Bancs de filtres de paquets d'ondelettes	332
8.2	Paquets d'ondelettes d'images **	335
8.2.1	Arbre quaternaire de paquets d'ondelettes	335
8.2.2	Bancs de filtres séparables	338
8.3	Transformée par blocs *	339
8.3.1	Bases par blocs	340
8.3.2	Bases de cosinus	342
8.3.3	Bases de cosinus discrets	344
8.3.4	Transformée rapide en cosinus discrets **	346
8.4	Transformées orthogonales à recouvrement **	349
8.4.1	Projecteurs à recouvrement	349
8.4.2	Bases orthonormées à recouvrement	354
8.4.3	Bases de cosinus locaux	357
8.4.4	Bases discrètes à recouvrement	360
8.5	Arbres de cosinus locaux **	364
8.5.1	Arbre binaire de bases de cosinus	364
8.5.2	Arbre de bases discrètes	366
8.5.3	Arbre quaternaire de cosinus en dimension 2	367
8.6	Problèmes	369
9	Guide de l'approximation	373
9.1	Approximation linéaire *	373
9.1.1	Erreur d'approximation linéaire	374
9.1.2	Approximation de Fourier linéaire	375
9.1.3	Approximations multirésolution linéaires	379
9.1.4	Approximation de Karhunen-Loève **	381
9.2	Approximation non-linéaire *	385
9.2.1	Erreur d'approximation non-linéaire	385
9.2.2	Grilles d'ondelettes adaptatives	388
9.2.3	Espaces de Besov ***	390
9.3	Approximation d'images par ondelettes	395
9.4	Sélection adaptative de la base **	402

9.4.1	Meilleure base et concavité de Schur	402
9.4.2	Recherche rapide d'une meilleure base dans un arbre	408
9.4.3	Meilleures bases de paquets d'ondelettes et de cosinus locaux	410
9.5	Approximations par poursuite***	413
9.5.1	Poursuite de base	415
9.5.2	Poursuite de vecteurs	419
9.5.3	Poursuite orthogonale de vecteurs	425
9.6	Problèmes	427
10	Estimer dans du bruit	431
10.1	Bayes versus minimax**	431
10.1.1	Estimation bayésienne	432
10.1.2	Estimation minimax	439
10.2	Estimation diagonale dans une base**	443
10.2.1	Oracles pour opérateurs diagonaux	444
10.2.2	Seuillage dans une base	447
10.2.3	Raffinement du seuillage***	452
10.2.4	Seuillage d'ondelettes	455
10.2.5	Seuillage dans une meilleure base***	461
10.3	Optimalité minimax***	466
10.3.1	Estimation minimax linéaire diagonale	467
10.3.2	Ensemble orthosymétrique	471
10.3.3	Presque minimax avec des ondelettes	476
10.4	Restauration***	483
10.4.1	Estimation dans un bruit gaussien arbitraire	483
10.4.2	Problèmes inverses et déconvolution	488
10.5	Estimation cohérente***	499
10.5.1	Seuillage dans des bases cohérentes	499
10.5.2	Poursuite cohérente de vecteurs	502
10.6	Estimation de covariance**	504
10.6.1	Puissance spectrale	506
10.6.2	Estimation d'une base de Karhunen-Loève***	511
10.6.3	Processus localement stationnaire***	514
10.7	Problèmes	517
11	Compression de signaux	523
11.1	Différentes approches**	523
11.1.1	État de l'art	523
11.1.2	Codage par transformée	525
11.2	Codage avec quantification**	526
11.2.1	Codage entropique	527
11.2.2	Quantification scalaire	534
11.3	Compression à haute résolution**	537
11.3.1	Allocation de bits	537
11.3.2	Base optimale et Karhunen-Loève	540
11.3.3	Codage audio	541
11.4	Compression d'images**	546

11.4.1	Taux de distorsion déterministe	547
11.4.2	Codage d'images en ondelettes	556
11.4.3	Cosinus par blocs et JPEG	560
11.4.4	Codage emboîté	566
11.4.5	Taux de distorsion minimax ***	572
11.5	Signaux vidéo **	576
11.5.1	Flot optique	577
11.5.2	Compression vidéo MPEG	583
11.6	Problèmes	586
A	Compléments mathématiques	591
A.1	Fonctions et intégration	591
A.2	Espaces de Banach et de Hilbert	592
A.3	Bases des espaces de Hilbert	594
A.4	Opérateurs linéaires	596
A.5	Espaces séparables et bases	598
A.6	Vecteurs aléatoires et opérateurs de covariance	599
A.7	Dirac	601
B	Boîtes à outils logicielles	603
B.1	WAVELAB	603
B.2	LASTWAVE	607
B.3	Outils logiciels en freeware	608
	Bibliographie	611
	Index	629