

Table des matières

Introduction	7
1 Généralités sur les groupes	13
1 Rappel de quelques définitions	13
2 Exemples de groupes finis	14
2.1 Groupe cyclique d'ordre n	14
2.2 Groupe symétrique \mathfrak{S}_n	14
2.3 Groupe diédral	15
2.4 Autres exemples	15
3 Exemples de groupes infinis	15
4 Actions de groupes, classes de conjugaison	17
5 Références	18
6 Exercices	18
2 Représentations des groupes finis	21
1 Représentations	21
1.1 Généralités	21
1.2 Représentations irréductibles	23
1.3 Somme directe de représentations	23
1.4 Opérateurs d'entrelacement, lemme de Schur	24
2 Caractères et relations d'orthogonalité	26
2.1 Fonctions sur un groupe, coefficients matriciels	26
2.2 Caractère d'une représentation, relations d'orthogonalité	27
2.3 Table de caractères	30
2.4 Application à la décomposition des représentations	31
3 La représentation régulière	32
3.1 Définition	32
3.2 Caractère de la représentation régulière	33
3.3 Décomposition en composantes isotypiques	33
3.4 Base de l'espace vectoriel des fonctions centrales	34

4	Opérateurs de projection	36
5	Représentations induites	37
5.1	Définition	37
5.2	Interprétation géométrique	38
6	Références	38
7	Exercices	39
3	Représentations des groupes compacts	45
1	Groupes compacts	45
2	Mesure de Haar	46
3	Représentations des groupes topologiques. Lemme de Schur	48
3.1	Généralités	48
3.2	Coefficients d'une représentation	48
3.3	Opérateurs d'entrelacement	49
3.4	Opérations sur les représentations	50
3.5	Lemme de Schur	50
4	Représentations des groupes compacts	51
4.1	Complète réductibilité	51
4.2	Relations d'orthogonalité	52
5	Résumé du chapitre 3	55
6	Références	56
7	Exercices	56
4	Groupes et algèbres de Lie	59
1	Algèbres de Lie	59
1.1	Définition et exemples	59
1.2	Morphismes	61
1.3	Relations de commutation, constantes de structure	61
1.4	Formes réelles	61
1.5	Représentations d'algèbres de Lie	62
2	Rappels sur l'application exponentielle	63
3	Sous-groupes à un paramètre de $GL(n, \mathbb{K})$	66
4	Groupes de Lie	68
5	Algèbre de Lie d'un groupe de Lie	69
6	Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie	72
6.1	Différentielle d'un morphisme de groupes de Lie	72
6.2	Différentielle d'une représentation de groupe de Lie	74
6.3	La représentation adjointe	76
7	Références	77
8	Exercices	78

5	Les groupes de Lie $SU(2)$ et $SO(3)$	83
1	Les algèbres de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$	83
1.1	Bases de $\mathfrak{su}(2)$	83
1.2	Bases de $\mathfrak{so}(3)$	85
1.3	Bases de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$	86
2	Le morphisme de revêtement de $SU(2)$ sur $SO(3)$	86
2.1	Le groupe de Lie $SO(3)$	86
2.2	Le groupe de Lie $SU(2)$	88
2.3	Projection de $SU(2)$ sur $SO(3)$	90
3	Références	91
4	Exercices	91
6	Les représentations de $SU(2)$ et $SO(3)$	93
1	Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$	93
1.1	Les représentations D^j	93
1.2	Opérateur de Casimir	96
1.3	Hermiticité des opérateurs J_3 et J^2	96
2	Représentations de $SU(2)$	98
2.1	Les représentations \mathcal{D}^j	98
2.2	Caractères des représentations \mathcal{D}^j	101
3	Représentations de $SO(3)$	102
4	Références	102
5	Exercices	103
7	Les harmoniques sphériques	105
1	Rappel sur $L^2(S^2)$	105
2	Les polynômes harmoniques	106
2.1	Représentations de groupes dans des espaces de fonctions	106
2.2	Les espaces de polynômes harmoniques	106
2.3	Représentations de $SO(3)$ dans les espaces de polynômes harmoniques	107
3	Les harmoniques sphériques	109
3.1	Représentations de $SO(3)$ dans les espaces d'harmoniques sphériques	110
3.2	Opérateur de Casimir	111
3.3	Fonctions propres de l'opérateur de Casimir	111
3.4	Bases des espaces d'harmoniques sphériques	112
3.5	Formules explicites	115
4	Références	116
5	Exercices	116

8	Les représentations de $SU(3)$ et les quarks	119
1	Rappels sur $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, représentations de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ et de $SU(3)$	119
1.1	Rappels sur $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$	119
1.2	Cas de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$	120
1.3	Les bases (I_3, Y) et (I_3, T_8) de \mathfrak{h}	122
1.4	Représentations de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ et de $SU(3)$	122
2	Représentation adjointe, racines	122
3	Représentation standard et sa contragrédiente	124
3.1	Représentation standard (fondamentale)	124
3.2	Contragrédiente de la représentation standard	125
4	Poids maximal d'une représentation de dimension finie	126
4.1	Poids maximal	126
4.2	Les poids comme combinaisons linéaires des λ_i	127
4.3	Représentations de dimension finie, poids	128
4.4	Autre exemple : la représentation 6	129
4.5	Encore un exemple : la représentation 10	130
5	Produits tensoriels de représentations	131
6	« The eightfold way »	134
6.1	Baryons ($B = 1$)	135
6.2	Mésons ($B = 0$)	136
6.3	Résonances baryoniques	136
7	Les quarks et les antiquarks	137
8	Références	138
9	Exercices	139
	Problèmes corrigés	141
1	Restriction d'une représentation à un groupe fini	141
2	Le groupe $O(2)$	143
3	Représentations du groupe diédral et du groupe des quaternions	146
4	Représentations de $SU(2)$ et de \mathfrak{S}_3	156
5	Groupes pseudo-unitaire et pseudo-orthogonal	160
6	Représentations irréductibles de $SU(2) \times SU(2)$	166
7	Opérateurs de projection	173
8	Symétries des molécules de fullerènes	181
9	Coefficients matriciels et harmoniques sphériques	191
	Bibliographie	199
	Index	201