Table des Matières

Table des Matières xiii
Préface ix
Bibliographie v
Avertissement iii

Première Partie : Le cadre analytique

Chapitre I. UNE PREMIÈRE GÉNÉRALISATION DE LA NOTION D'ESPACE : LES ESPACES DE DIMENSION INFINIE 3

I.A. Première rencontre avec les espaces vectoriels de dimension infinie 4
I.B. Un cadre utile : les espaces normés 6
I.C. Les espaces compacts 14
I.D. A la recherche des compacts 19
I.E. Quelques points d'Histoire 23

Chapitre II. ESPACES DE BANACH ET ESPACES DE HILBERT 25

II.A. Suites de Cauchy et espaces métriques complets 26
II.B. Une catégorie fondamentale : les espaces de Banach 28
II.C. Espace dual et topologie faible 33
II.D. Formes bilinéaires et dualités 39
II.E. Les espaces de Hilbert : propriétés fondamentales 48
II.F. Bases hilbertiennes 53
II.G. Quelques points d'Histoire 60

Chapitre III. LINÉARISATION DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES ET INVERSION LOCALE 61

III.A. Applications différentiables et leurs applications linéaires tangentes . . 62
III.B. La règle de composition 73
III.C. Le théorème d'inversion locale 78
III.D. Les dérivées d'ordre supérieur 88
III.E. Quelques points d'Histoire 92

Deuxième Partie : Le cadre géométrique

Chapitre IV. QUELQUES APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL . 97

IV.A. Des variantes géométriques du théorème d'inversion locale 98
IV.B. Champs de vecteurs et équations différentielles ordinaires 105
IV.C. Quelques exemples de champs de vecteurs 112
IV.D. Crochets de Poisson et quantités conservées 116
IV.E. Quelques points d'Histoire 120

Chapitre V. UNE NOUVELLE GÉNÉRALISATION DE LA NOTION D'ESPACE : LES ESPACES DE CONFIGURATION 121

V.A. Coordonnées locales et espaces de configuration 122
V.B. Les applications différentiables en coordonnées locales 128
V.C. Les espaces vectoriels en coordonnées curvilignes 133
V.D. Les exemples fondamentaux 137
V.E. Le groupe des rotations 148
V.F. Quelques points d'Histoire 157

Chapitre VI. VECTEURS TANGENTS ET CHAMPS DE VECTEURS DANS LES ESPACES DE CONFIGURATION 159

VI.A. Vecteurs tangents à un espace de configuration 160
VI.B. Les espaces tangents à un espace de configuration 164
VI.C. Applications linéaires tangentes à une application différentiable 166
VI.D. Champs de vecteurs sur les espaces de configuration 170
VI.E. Équations différentielles dans les espaces de configuration 177
VI.F. Quelques points d'Histoire 182

Chapitre VII. POINTS RÉGULIERS ET POINTS CRITIQUES DES FONCTIONS NUMÉRIQUES 185

VII.A. Les différentielles de fonctions 186
VII.B. Sous-variétés et contraintes 188
VII.C. Points critiques et valeurs critiques des fonctions 197
VII.D. Hessiens et formes normales des points critiques génériques 202
VII.E. Quelques points d'Histoire 210

Troisième Partie : Le Calcul des Variations

Chapitre VIII. LES ESPACES DE CONFIGURATION D'OBJETS GÉOMÉTRIQUES 213

VIII.A. Les espaces de courbes 214
VIII.B. Les espaces de surfaces de l'espace numérique $\mathbb{R}^3$ 218
VIII.C. Autour du groupe des difféomorphismes 223
VIII.D. Les éléments de volume 225
VIII.E. Quelques points d'Histoire (contemporaine) 230

Chapitre IX. LES ÉQUATIONS D'EULER-LAGRANGE 231

IX.A. L'extension en vitesses d'un espace de configuration 232
IX.B. L'action et sa Variation Première 237
IX.C. Les équations d'Euler-Lagrange 243
IX.D. La géométrie des géodésiques 252
IX.E. Les mouvements du solide 259
IX.F. Les surfaces d'aire stationnaire 262
IX.G. Quelques points d'Histoire 267

Chapitre X. LE POINT DE VUE HAMILTONIEN 269

X.A. L'extension en moments et sa structure symplectique 270
X.B. Les équations d'Hamilton générales 277
X.C. Relations avec l'approche lagrangienne 281
X.D. Crochets de Poisson des observables 286
X.E. Quelques points d'Histoire 288

Chapitre XI. SYMÉTRIES ET LOIS DE CONSERVATION 289

XI.A. Actions de groupe et symétries 290
XI.B. Intégrales premières et lois de conservation 294
XI.C. La notion de moment et le théorème d'Emmy Noether 295
XI.D. Observables en involution et systèmes intégrables 301
XI.E. Quelques points d'Histoire 303

Appendices

Appendice 1. RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE 307
Appendice 2. ÉLÉMENTS DE BASE DE LA TOPOLOGIE 311

Index

Index terminologique 315
Index des notations 327