

Table des matières

I	Mouvements et Efforts	15
1	Le milieu continu	17
1.1	La notion de milieu continu	19
1.2	Le cadre mathématique	20
1.2.1	Référentiel	20
1.2.2	Configuration	22
1.3	L'observation du mouvement	24
1.4	Description lagrangienne	26
1.5	Description eulérienne	30
1.5.1	Construction	30
1.5.2	Équivalence avec la représentation lagrangienne	32
1.5.3	Mouvements stationnaires	33
1.5.4	Dérivées particulières	33
	Formules essentielles	35
	Exercices	37
2	Les déformations du milieu continu	45
2.1	Introduction	47
2.2	Transformation homogène	49
2.2.1	Définition	49
2.2.2	Transport d'éléments matériels	50
2.2.3	Mesure des dilatations	52
2.2.4	Décomposition polaire	55
2.3	Transformation quelconque	57
2.3.1	Déformation homogène tangente	57
2.3.2	Transport et dilatations	59
2.3.3	Décomposition polaire	60
2.4	Tenseur des déformations	61
	Formules essentielles	65
	Exercices	67

3	Déformations linéarisées et taux de déformation	75
3.1	Introduction	77
3.2	Linéarisation	77
3.2.1	Hypothèse des petites transformations	77
3.2.2	Transport en petites transformations	79
3.2.3	Dilatations et déformations en petites transformations	79
3.2.4	Décomposition polaire en petites transformations	82
3.3	Taux de déformation	84
3.3.1	Cadre eulérien	84
3.3.2	Vitesse de transport et taux de déformation	85
3.3.3	Vorticité et mouvement instantané	87
3.4	Compatibilité des déformations	89
3.4.1	Cadre du problème	89
3.4.2	Conditions de compatibilité	91
3.4.3	Calcul du champ de déplacement	93
3.4.4	Mouvement rigidifiant	95
3.4.5	Mesure des déformations	96
	Formules essentielles	99
	Exercices	101
4	Lois de conservation	105
4.1	Introduction	107
4.2	Lois de conservation sur un domaine matériel	108
4.2.1	Domaine matériel	108
4.2.2	Conservation de la masse	108
4.2.3	Conservation de la quantité de mouvement	109
4.2.4	Énergie	111
4.3	Calcul de dérivées particulières	113
4.3.1	Dérivation en temps d'une intégrale de volume	113
4.3.2	Dérivée particulière d'une intégrale de volume	115
4.3.3	Théorème de la divergence	117
4.3.4	Théorème de transport	118
4.3.5	Discontinuités de champs de vitesse	119
4.4	Lois de conservation intégrées en masse	120
4.4.1	Loi de conservation de la masse	120
4.4.2	Loi de conservation en densité massique	121
4.5	Relations de Rankine Hugoniot	123
4.5.1	Cas général	123
4.5.2	Choc oblique stationnaire	124
4.6	Équilibre d'un tronçon de poutre	127
	Formules essentielles	133
	Exercices	135

5	Modélisation des efforts intérieurs	143
5.1	Introduction	145
5.2	Efforts de contact et vecteur contrainte	145
5.2.1	Premier postulat de Cauchy et vecteur contrainte	145
5.2.2	Second postulat de Cauchy	146
5.3	Tenseur des contraintes de Cauchy	147
5.3.1	Notation	147
5.3.2	Le théorème de Cauchy	148
5.3.3	Définition du tenseur des contraintes	151
5.3.4	Effort normal et cisaillement	152
5.3.5	Composantes du tenseur des contraintes	152
5.3.6	Symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy	153
5.4	Construction microscopique du tenseur des contraintes	155
5.4.1	Modélisation cinétique des efforts de contact	155
5.4.2	Modélisation microscopique des efforts de contact	158
5.5	Étude locale du tenseur des contraintes	161
5.5.1	Directions principales	161
5.5.2	Trace et déviateur	162
5.5.3	Cercle de Mohr	163
5.5.4	Critères de résistance usuels	164
5.6	Généralisation de la démarche : le vecteur courant de chaleur	167
	Formules essentielles	169
	Exercices	171
6	Équations du mouvement	175
6.1	Introduction	177
6.2	Forme locale des équations du mouvement	177
6.3	Conditions de saut et conditions aux limites	180
6.3.1	Relations de saut	180
6.3.2	Conditions aux limites	182
6.4	Équations de la dynamique	183
6.4.1	Le cas général	183
6.4.2	Les relations de saut en l'absence d'onde de choc	184
6.4.3	Des lois de conservation aux équations de la dynamique	185
6.5	Exemples d'application	187
6.5.1	Propagation d'une onde sonore à l'intérieur d'une barre élastique	187
6.5.2	Écoulement d'un glacier sur un plan incliné	189
6.5.3	Équilibre d'un tronçon de poutre en traction, flexion et torsion uniformes	191
	Formules essentielles	195
	Exercices	197

7	Principe des puissances virtuelles	207
7.1	Introduction	209
7.2	Puissance virtuelle des efforts intérieurs	210
7.2.1	Le milieu continu vu comme une infinité de liaisons élémentaires	210
7.2.2	Dualité contraintes déformations	211
7.3	Principe des puissances virtuelles	213
7.3.1	Démarche	213
7.3.2	Puissance virtuelle des efforts d'accélération	214
7.3.3	Puissance virtuelle des efforts extérieurs et intérieurs	215
7.3.4	Énoncé	216
7.4	Généralisations du principe des puissances virtuelles	220
7.4.1	Solutions discontinues	220
7.4.2	Discontinuité des fonctions tests	221
7.5	Applications	224
7.5.1	Théorème d'Euler	224
7.5.2	Théorème de l'énergie cinétique	225
7.6	Analyse limite	226
7.6.1	Position du problème	226
7.6.2	Approche statique	226
7.6.3	Approche cinématique	227
7.6.4	La fondation sur massif semi-infini	229
7.7	Compatibilité des déformations	233
	Formules essentielles	235
	Exercices	237
II	Comportements et Solutions d'Équilibre	249
8	Description microscopique d'un milieu continu	251
8.1	Lois de comportement	253
8.2	Les différents états de la matière	254
8.3	Fonctions de distribution	259
8.3.1	Le cadre général	259
8.3.2	Entropie statistique	260
8.4	Distribution d'équilibre	261
8.4.1	Le postulat de Boltzmann	261
8.4.2	Entropie d'équilibre	262
8.5	La distribution canonique	262
8.5.1	Le cas général	262
8.5.2	Les gaz monoatomiques parfaits	264

8.6	Thermodynamique statistique	266
8.6.1	Le premier principe	266
8.6.2	Second principe	268
8.6.3	Énergie libre	269
	Formules essentielles	273
	Exercices	275
9	Le modèle élastique : approche microscopique	277
9.1	Introduction	279
9.2	Description des élastomères	279
9.3	La chaîne élémentaire	284
9.3.1	Description géométrique	284
9.3.2	Distribution d'équilibre de la chaîne isolée	285
9.3.3	Distribution d'équilibre de la chaîne sous tension	286
9.3.4	La chaîne fixée à ses extrémités	289
9.4	Déformation d'un réseau réticulé	292
9.4.1	Hypothèses de comportement	292
9.4.2	Calcul microscopique des contraintes	292
9.5	Éprouvette en extension et en cisaillement	295
9.6	Limites et extensions du modèle	298
	Formules essentielles	301
	Exercices	303
10	Le modèle élastique : approche thermodynamique	311
10.1	Introduction	313
10.2	Inégalité de Clausius Duhem	313
10.2.1	Lien entre énergie interne et puissance des efforts intérieurs	313
10.2.2	Inégalité de Clausius Duhem : le cadre intégral	314
10.2.3	Inégalité de Clausius Duhem : le cas de la température locale- ment uniforme	314
10.2.4	Inégalité de Clausius Duhem : le cas général	315
10.2.5	Tenseur des contraintes de Piola	315
10.3	Lois de comportement d'équilibre	317
10.3.1	Le cas des gaz parfaits	317
10.3.2	Les matériaux élastiques sans liaison interne	318
10.3.3	Les matériaux élastiques avec liaisons internes	321
10.3.4	Le cas des élastomères	323
10.3.5	Matériaux biologiques fibrés	325
	Formules essentielles	327
	Exercices	329

11 Le modèle élastique : les métaux	333
11.1 Introduction	335
11.2 Description microscopique des métaux	335
11.2.1 Les métaux	335
11.2.2 La liaison métallique	335
11.2.3 Le modèle de sphères dures	337
11.3 La structure cristalline	341
11.3.1 Le réseau cristallin	341
11.3.2 Énergie d'un monocristal	344
11.4 Les métaux en petites déformations	346
11.4.1 Le monocristal en petites déformations	346
11.4.2 Élongation d'un monocristal	349
11.4.3 Le cas polycristallin	350
Formules essentielles	353
Exercices	355
12 Le modèle élastique : approche macroscopique	363
12.1 Introduction	365
12.2 Lois élastiques linéaires en déformation	366
12.2.1 Rappel du cadre élastique	366
12.2.2 Le cas linéaire en déformation	367
12.3 Invariances matérielles	369
12.3.1 Localité, symétrie tensorielle et indifférence matérielle	369
12.3.2 Respect des symétries matérielles	371
12.3.3 Isotropie matérielle	373
12.4 Les lois classiques en élasticité	375
12.4.1 Matériaux élastiques linéaires isotropes	375
12.4.2 Matériaux élastiques compressibles linéaires	378
12.4.3 Matériaux compressibles en grandes déformations	379
12.4.4 Matériaux incompressibles en grandes déformations	379
12.5 Essais élémentaires	381
12.5.1 Généralités	381
12.5.2 Essais en traction	381
12.5.3 Essai de cisaillement et de torsion	383
12.5.4 Essai dynamique	384
12.6 Conclusions sur l'étude des lois de comportement	386
Formules essentielles	389
Exercices	391

13 Les problèmes de structures en élasticité	395
13.1 Introduction	397
13.2 Modélisation	399
13.2.1 Un problème modèle	399
13.2.2 Modélisation géométrique	399
13.2.3 Modélisation des déplacements cinématiquement admissibles	400
13.2.4 Modélisation des efforts extérieurs	402
13.2.5 Bilan des conditions aux limites	404
13.2.6 Modélisation du comportement	405
13.3 Les équations du problème élastique	405
13.3.1 Rappel des données	405
13.3.2 Équations du mouvement sur Ω	406
13.3.3 Interprétation des équations du mouvement en configuration actuelle	407
13.4 Construction de solutions d'équilibre	408
13.4.1 La méthode des déplacements	408
13.4.2 Calcul par minimisation de l'énergie	411
13.5 Écriture en configuration initiale	413
13.5.1 Principe des puissances virtuelles en configuration initiale	413
13.5.2 Les équations du mouvement en configuration initiale	415
13.5.3 Les trois tenseurs des contraintes	417
Formules essentielles	419
Exercices	423
14 Les problèmes élastiques en petites transformations	429
14.1 Introduction	431
14.2 Le Problème général	432
14.2.1 Description du problème	432
14.2.2 Les équations du problème	432
14.3 Le problème en petites transformations	433
14.3.1 Hypothèse des petites transformations	433
14.3.2 Linéarisation mécanique du comportement	434
14.3.3 Linéarisation en déplacement	435
14.3.4 Interprétation physique de la loi de comportement linéarisée	436
14.3.5 Identification des tenseurs des contraintes	438
14.3.6 Le problème linéaire final	438
14.3.7 Formulation faible linéarisée	439
14.3.8 Raideur géométrique	441
14.3.9 Principe de superposition	442
14.4 Solutions autoentretenues et modes propres	443

14.4.1	Définition et calcul	443
14.4.2	Existence de modes propres	444
14.4.3	Calcul de solutions générales par superposition	444
14.4.4	Stabilité	446
14.4.5	L'exemple de la corde vibrante	447
14.4.6	Complément : théorie spectrale et applicabilité du principe de Rayleigh	450
14.5	Calcul de solutions quasi-statiques en petites transformations	450
14.5.1	Équations d'équilibre	450
14.5.2	Exemple : la trempe des matériaux	451
	Formules essentielles	455
	Exercices	457
15	Approches variationnelles en petites perturbations	471
15.1	Introduction	473
15.2	Le problème en petites perturbations	473
15.2.1	Petites perturbations autour d'un état naturel	473
15.2.2	Les équations du problème	474
15.2.3	Résumé des hypothèses de petites perturbations	476
15.3	Champs de contrainte statiquement admissibles	477
15.3.1	Définition	477
15.3.2	Méthode des contraintes	478
15.4	Principe du minimum pour les déplacements	481
15.4.1	Formulation faible et formulation énergétique en déplacement	481
15.4.2	Existence et stabilité	484
15.5	Minimisation et encadrement par les contraintes	485
15.5.1	Définition de l'énergie complémentaire	485
15.5.2	Relations de dualité à l'équilibre	486
15.5.3	Les principes de minimum	488
15.5.4	Formule de Clapeyron	490
15.6	Approximation de Ritz	490
15.6.1	Principe	490
15.6.2	Écriture matricielle	492
15.6.3	Exemple	493
15.6.4	Calcul d'erreur en norme de l'énergie	495
15.6.5	Erreur en loi de comportement	497
15.7	Méthode des éléments finis	497
15.7.1	Composants constitutifs	497
15.7.2	Validation et calcul d'erreur	500
	Formules essentielles	503
	Exercices	505

III	Annexes	513
A	Rappel des principales notations	515
A.1	Convention des indices répétés	515
A.2	Matrices et tenseurs	515
A.3	Mécanique	516
B	Calcul tensoriel	519
B.1	Espace euclidien	519
B.1.1	Définition	519
B.1.2	Dualité	519
B.2	Tenseurs euclidiens	521
B.2.1	Produit tensoriel de vecteurs	521
B.2.2	Tenseurs euclidiens d'ordre quelconque	522
B.2.3	Produit tensoriel de tenseurs	522
B.3	Exemples de tenseurs d'ordre deux	522
B.3.1	Tenseur métrique	522
B.3.2	Tenseur euclidien associé à une forme linéaire	523
B.3.3	Transposition et symétrie	523
B.4	Produit contracté	524
B.4.1	Contraction de produit tensoriels de vecteurs	524
B.4.2	Contraction de tenseurs quelconques	525
B.4.3	Exemples	526
C	Calcul différentiel	531
C.1	Définitions et notations	531
C.2	Calcul en coordonnées cylindriques	533
C.3	Calcul en coordonnées sphériques	535
D	Expressions explicites des équations de la dynamique	539
E	Compléments de physique statistique	541
E.1	Du microcanonique au canonique en physique statistique	541
E.2	Particules indiscernables en faible interaction	542
E.3	Calcul de la fonction de partition d'une chaîne d'élastomère	544
	Bibliographie	547
	Index	549