

# Sommaire

<b>Préface</b>	<b>ix</b>
Bibliographie . . . . .	x
<b>Équations différentielles</b>	
<i>François Laudenbach</i>	<b>1</b>
1 Point de vue qualitatif . . . . .	1
1.1 Équation différentielle du premier ordre autonome . . . . .	1
1.2 Équation différentielle linéaire . . . . .	3
1.3 Un exemple d'équation différentielle non linéaire provenant de la mécanique . . . . .	4
1.4 Autre exemple dans le plan . . . . .	5
1.5 Théorèmes généraux . . . . .	6
1.6 Conjugaison topologique d'un foyer et d'un nœud . . . . .	8
2 Stabilité des équilibres . . . . .	8
2.1 Dynamique de gradient . . . . .	9
2.2 Critère spectral pour la stabilité asymptotique . . . . .	11
2.3 Points d'équilibre instables sur deux exemples . . . . .	12
2.4 Orbites périodiques attractantes . . . . .	13
Bibliographie . . . . .	16
<b>Systèmes dynamiques discrets</b>	
<i>Albert Fathi</i>	<b>17</b>
1 Quelques généralités et quelques exemples . . . . .	17
1.1 Définitions . . . . .	17
1.2 Les rotations sur le cercle . . . . .	18
1.3 Les décalages de Bernoulli . . . . .	18
1.4 Un exemple de semi-conjugaison . . . . .	20
1.5 Remords final : les applications linéaires . . . . .	21
2 Systèmes dynamiques discrets : stabilité structurelle . . . . .	22
2.1 Conjugaison topologique et stabilité structurelle . . . . .	23
2.2 Stabilité structurelle des dilatations linéaires . . . . .	24
2.3 Stabilité structurelle de $m_p$ , $p \geq 2$ . . . . .	25
Bibliographie . . . . .	26
<b>Systèmes dynamiques hyperboliques</b>	
<i>Patrick Foulon</i>	<b>29</b>
Introduction . . . . .	29
1 Les automorphismes linéaires hyperboliques . . . . .	29
1.1 Le cadre géométrique, les tores . . . . .	29
1.2 La mesure de Haar sur les tores . . . . .	31

1.3	Les automorphismes linéaires des tores . . . . .	31
1.4	Les automorphismes linéaires hyperboliques des tores . . . . .	33
1.5	Variétés stables et instables . . . . .	36
1.6	Transitivité et mélange topologique . . . . .	39
1.7	Les problèmes de moyennes . . . . .	40
1.8	Ergodicité . . . . .	41
2	Non linéarité et stabilité structurelle . . . . .	43
2.1	Le fer à cheval . . . . .	43
2.2	Difféomorphismes d'Anosov - Ensembles hyperboliques . . . . .	45
2.3	Dynamique symbolique . . . . .	46
2.4	Codage et partitions de Markov . . . . .	47
2.5	Stabilité des automorphismes hyperboliques . . . . .	48
	Bibliographie . . . . .	52

### Complexité de suites à valeurs dans un ensemble fini : quelques exemples

<i>Pierre Arnoux</i>		<b>53</b>
1	Qu'est-ce que la complexité d'une suite? . . . . .	53
2	L'exemple le plus simple : les suites sturmiennes . . . . .	55
3	Suites engendrées par des systèmes dynamiques . . . . .	59
4	Un exemple : les différences secondes de la suite $[n^2\alpha]$ . . . . .	60
5	Un autre exemple : les suites de billard cubique . . . . .	62
6	Suites de billard : la conjecture de Tamura . . . . .	64
7	Quelques autres résultats . . . . .	65
8	Note de 2008 . . . . .	66
	Bibliographie . . . . .	67

### Propriétés spectrales de systèmes dynamiques discrets

<i>Martine Queffelec</i>		<b>69</b>
1	Systèmes dynamiques discrets : propriétés statistiques . . . . .	69
1.1	Mesures invariantes . . . . .	71
1.2	Ergodicité . . . . .	74
1.3	Isomorphismes de systèmes et codage . . . . .	77
1.4	Système associé à une suite . . . . .	81
2	Propriétés spectrales . . . . .	85
2.1	Généralités sur la théorie spectrale . . . . .	86
2.2	Classification spectrale de suites . . . . .	90
	Bibliographie . . . . .	96

### Le doublement de l'angle

<i>Adrien Douady</i>		<b>97</b>
	Introduction (à lire en dernier) . . . . .	97
1	Types d'orbites fermées . . . . .	98
1.1	Orbites finies . . . . .	98

1.2	Interprétation de $q$ comme décalage . . . . .	99
1.3	Exemples d'orbites non denses . . . . .	99
1.4	Exemples d'orbite dense . . . . .	100
1.5	Exemple d'orbite fermée dénombrable . . . . .	101
1.6	Toute orbite fermée différente de $\mathbf{T}$ est de mesure nulle . . . . .	101
1.7	Presque tout point a une orbite dense (!) . . . . .	102
1.8	Orbites uniformément réparties et loi des grands nombres (!!)	102
2	Orbites tournantes . . . . .	103
2.1	Ordre cyclique . . . . .	103
2.2	Angle de rotation . . . . .	104
2.3	L'abaque de l'escalier . . . . .	105
2.4	Le cas $r$ rationnel . . . . .	106
2.5	Interprétation pour l'ensemble de Mandelbrot (!!)	106
2.6	Une propriété de transcendance . . . . .	107
3	Propriétés hyperboliques de $q$ . . . . .	108
3.1	Ordre orbital . . . . .	108
3.2	Conjugaison à $q$ . . . . .	108
3.3	Lemme de poursuite . . . . .	109

## Courbes de Julia sans tangente

<i>Adrien Douady</i>		<b>111</b>
Introduction	. . . . .	111
1	La courbe de Julia . . . . .	112
1.1	Mise en place . . . . .	112
1.2	Construction du lacet $\gamma$ . . . . .	113
1.3	Injectivité de $\gamma$ . . . . .	115
1.4	Points qui ne sont pas sur $J$ . . . . .	115
2	Points fixes ou périodiques à multiplicateur non réel . . . . .	116
2.1	Points fixes, points périodiques, multiplicateur . . . . .	116
2.2	Existence d'un point sans tangente : cas $c$ non réel . . . . .	117
2.3	Cas $c$ réel . . . . .	117
2.4	Densité des points sans tangente . . . . .	120
3	Distorsion bornée . . . . .	120
3.1	Introduction, fonctions holomorphes . . . . .	120
3.2	Distorsion . . . . .	121
3.3	Majoration de la distorsion . . . . .	121
3.4	Contradiction en supposant l'existence d'une tangente . . . . .	122

## L'ensemble de Julia dépend-il continûment du polynôme ?

<i>Adrien Douady</i>		<b>125</b>
<b>I Propriétés de continuité</b>		<b>126</b>
1	La métrique de Hausdorff . . . . .	126
2	Applications semi-continues à valeurs dans $\text{Comp}^*(E)$ . . . . .	127

3	Points périodiques . . . . .	129
3.1	Multiplicateur . . . . .	129
3.2	Cycles attractifs . . . . .	130
3.3	Cycles paraboliques . . . . .	131
3.4	Cycles indifférents irrationnels . . . . .	132
4	Ensemble de Julia rempli et ensemble de Julia d'un polynôme . . . . .	132
5	Semi-continuités de $K(f)$ et $J(f)$ en fonction de $f$ . . . . .	134
6	L'effet des bassins attractifs . . . . .	137
7	L'effet des disques de Siegel . . . . .	138
8	Un théorème de Mañe-Sad-Sullivan . . . . .	139
<b>II</b>	<b>L'implosion parabolique</b> . . . . .	<b>142</b>
9	Un exemple parabolique typique . . . . .	142
10	Le batteur à œufs . . . . .	142
11	Scénarios imaginables . . . . .	143
12	L'implosion . . . . .	146
13	La raison des discontinuités . . . . .	147
14	Coordonnées de Fatou . . . . .	148
15	Prolongement des coordonnées de Fatou . . . . .	150
16	Persistence des coordonnées de Fatou . . . . .	151
17	La phase . . . . .	153
18	Applications de Lavaurs . . . . .	155
19	Les ensembles $K(f_0, g_\sigma)$ et $J(f_0, g_\sigma)$ . . . . .	156
20	Le cas où le point critique s'échappe . . . . .	157
21	Le cas où $\sigma$ est réel . . . . .	159
22	Et pour $\varepsilon$ non réel ? . . . . .	160
23	L'éléphant limite . . . . .	161
24	Autres polynômes ayant un cycle parabolique . . . . .	163
	Bibliographie . . . . .	165
<b>Du billard convexe aux géodésiques du tore</b>		
	<i>Patrice Le Calvez</i> . . . . .	<b>167</b>
1	Le billard convexe . . . . .	168
2	Applications déviant la verticale . . . . .	172
a	Un exemple explicite . . . . .	173
b	Au voisinage d'un point fixe elliptique . . . . .	173
c	Le pendule entretenu . . . . .	174
3	Dynamique des homéomorphismes du cercle . . . . .	175
4	Orbites périodiques des applications déviant la verticale . . . . .	177
5	Étude des configurations minimales . . . . .	180
6	Géodésiques minimales du tore de dimension 2 . . . . .	187
7	Ce qui se passe en dimension supérieure . . . . .	194
	Bibliographie . . . . .	202

**Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques**

<i>Vladimir I. Arnold</i>	<b>205</b>
1 Les faux espaces $\mathbf{R}^4$ et les systèmes dynamiques . . . . .	205
2 La topologie pseudo-périodique . . . . .	205
3 Les nombres des points périodiques et des cycles limites . . . . .	207
4 Complexité topologique asymptotique des intersections . . . . .	208
5 Croissance des nombres de Milnor en dynamique holomorphe . . . . .	210
6 La variante infinitésimale du 16 <sup>e</sup> problème de Hilbert et les intégrales abéliennes . . . . .	212
7 La matérialisation des résonances en dynamique holomorphe . . . . .	214
8 Irrésolubilité analytique et irrésolubilité géométrique dans la théorie du chaos . . . . .	216
Bibliographie . . . . .	219