

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Cinématique des poutres</b>	<b>3</b>
1.1	Définition de la cinématique poutre . . . . .	3
1.2	Description lagrangienne de la cinématique . . . . .	4
1.2.1	Transformation en cinématique poutre . . . . .	4
1.2.2	Déformation lagrangienne . . . . .	5
1.3	Cinématique eulerienne . . . . .	6
1.3.1	Champ des vitesses en cinématique poutre . . . . .	6
1.3.2	Dérivation d'un champ de distributeur le long d'une courbe . . . . .	7
1.3.3	Caractérisation des champs de vitesse rigidifiants . . . . .	7
1.4	Transformation infinitésimale . . . . .	8
1.5	Taux de déformation lagrangien et eulerien . . . . .	9
1.6	Récapitulatif des formules essentielles . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Modélisation des efforts</b>	<b>13</b>
2.1	Le principe des puissances virtuelles . . . . .	13
2.2	Puissance virtuelle des accélérations . . . . .	14
2.3	Puissance virtuelle des efforts extérieurs . . . . .	16
2.4	Puissance virtuelle des efforts intérieurs . . . . .	18
2.5	Équation du mouvement . . . . .	18
2.6	Transport de l'équation du mouvement . . . . .	20
2.7	Contrainte généralisée lagrangienne . . . . .	22
2.8	Récapitulatif des formules essentielles . . . . .	23
2.9	Exercices . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Poutres élastiques</b>	<b>27</b>
3.1	Expression générale de la loi de comportement . . . . .	27
3.2	Prise en compte de liaisons internes . . . . .	30
3.2.1	Cas de la liaison interne d'inextensibilité . . . . .	30
3.2.2	Cas de la liaison interne de Navier-Bernoulli . . . . .	31
3.2.3	Cas des poutres de Navier-Bernoulli inextensibles . . . . .	32
3.3	Bilan des équations . . . . .	32
3.4	Loi de comportement standard . . . . .	33

3.5	Récapitulatif des formules essentielles . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Transformation infinitésimale</b>	<b>41</b>
4.1	Linéarisation autour de l'état naturel . . . . .	41
4.2	Formulations variationnelles . . . . .	44
4.2.1	Équilibre d'une poutre naturelle . . . . .	44
4.2.2	Équilibre d'une poutre de Navier-Bernoulli . . . . .	51
4.2.3	Théorème de Castigliano-Menabrea . . . . .	55
4.3	Statique des assemblages de poutres . . . . .	58
4.3.1	Exemple 1 : équilibre d'un treillis . . . . .	61
4.3.2	Exemple 2 : équilibre d'un portique . . . . .	63
4.4	Élastodynamique linéarisée . . . . .	67
4.4.1	Vibrations libres . . . . .	70
4.4.2	Vibrations libres à partir d'une condition initiale . . . . .	74
4.4.3	Prise en compte d'effort d'excitation distribué . . . . .	77
4.4.4	Cas de conditions aux limites non-homogènes . . . . .	78
4.5	Récapitulatif des formules essentielles . . . . .	80
4.6	Exercices . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Bifurcation et stabilité</b>	<b>103</b>
5.1	Le flambage d'Euler . . . . .	103
5.1.1	Position du problème et analyse en transformation infinitésimale . . . . .	103
5.1.2	Analyse en rotation finie . . . . .	105
5.1.3	Mise en évidence du flambage d'Euler . . . . .	107
5.1.4	Influence des imperfections . . . . .	110
5.1.5	Analyse par linéarisation autour de l'état précontraint . . . . .	113
5.1.6	Influence des conditions aux limites . . . . .	114
5.1.7	Stabilité de la configuration d'équilibre rectiligne . . . . .	116
5.2	Petite transformation d'un état précontraint . . . . .	120
5.2.1	Position du problème et notations . . . . .	120
5.2.2	Transport des équations sur la configuration précontrainte . . . . .	121
5.2.3	Linéarisation autour de l'état précontraint . . . . .	124
5.3	Analyse et classification des instabilités . . . . .	127
5.3.1	Points critiques de courbe d'équilibre . . . . .	127
5.3.2	Rigidités géométrique et globale . . . . .	128
5.3.3	Perte de stabilité sur la courbe d'équilibre fondamentale . . . . .	132
5.4	Exemples d'instabilités de poutres élastiques . . . . .	136
5.4.1	Tube sous pression externe . . . . .	136
5.4.2	Étude d'un claquage . . . . .	140
5.4.3	L'arroseur arrosé . . . . .	144
5.5	Analyse de post-bifurcation à l'ordre supérieur . . . . .	147
5.5.1	Retour sur le flambage d'Euler . . . . .	148
5.5.2	Cas général : la méthode de Lyapunov-Schmidt . . . . .	153
5.6	Récapitulatif des formules essentielles . . . . .	155

5.7	Exercices . . . . .	157
<b>6</b>	<b>Poutres et solides 3D élastiques</b>	<b>187</b>
6.1	Élasticité tridimensionnelle linéarisée . . . . .	188
6.2	Le principe de Saint-Venant . . . . .	193
6.3	Problème et solution de Saint-Venant . . . . .	198
6.3.1	Description du problème et notations . . . . .	198
6.3.2	Obtention de la solution de Saint-Venant . . . . .	200
6.3.3	Analyse des résultats . . . . .	205
6.4	Comportement des poutres homogènes isotropes . . . . .	215
6.5	Cas des poutres hétérogènes anisotropes . . . . .	222
6.5.1	Position du problème . . . . .	222
6.5.2	Problèmes d'élasticité à deux variables d'espace . . . . .	225
6.5.3	Calcul du développement asymptotique . . . . .	227
6.6	Hiéarchisation des cinématiques de poutre . . . . .	235
6.7	Récapitulatif des formules essentielles . . . . .	237
6.8	Exercices . . . . .	240
<b>A</b>	<b>Mouvement du solide rigide</b>	<b>245</b>
A.1	Cinématique du solide rigide . . . . .	245
A.1.1	Mouvement rigidifiant en description lagrangienne . . . . .	245
A.1.2	Mouvement rigidifiant en description eulerienne . . . . .	247
A.1.3	Cohérence des points-de-vue lagrangien et eulerien . . . . .	248
A.1.4	Distributeurs et torseurs : définition et propriétés . . . . .	251
A.2	Modélisation des efforts . . . . .	253
A.2.1	Puissance virtuelle des efforts extérieurs . . . . .	253
A.2.2	Puissance virtuelle des quantités d'accélération . . . . .	254
A.2.3	Équations du mouvement . . . . .	255
A.2.4	Étude du tenseur d'inertie d'un solide rigide . . . . .	255
<b>B</b>	<b>Calcul numérique de solutions approchées</b>	<b>257</b>
B.1	Introduction . . . . .	257
B.2	Solutions approchées en statique linéarisée . . . . .	258
B.2.1	Approximation : la méthode de Rayleigh-Ritz . . . . .	258
B.2.2	Systematisation : la méthode des éléments finis . . . . .	263
B.3	Solutions approchées en dynamique linéarisée . . . . .	275
B.3.1	Méthode de semi-discrétisation . . . . .	275
B.3.2	Méthode de discrétisation totale . . . . .	280
B.4	Calcul approché des bifurcations . . . . .	288
B.4.1	Méthode générale . . . . .	288
B.4.2	Étude d'un exemple . . . . .	291