

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
I. Groupes et actions de groupes	5
I.1. Un exemple fondamental et quelques définitions	6
I.2. Exemples de groupes et d'actions de groupes	13
I.3. Le groupe symétrique	15
I.4. Exercices	20
II. Représentations linéaires des groupes finis	23
II.1. Représentations	23
II.2. Opérations sur les représentations : sommes directes et produits, produits tensoriels, représentation contragrédiente	31
II.3. Coefficients matriciels et relations de Schur	37
II.4. L'algèbre de convolution $\mathcal{F}(G)$	40
II.5. Transformation de Fourier	44
II.6. L'algèbre des fonctions centrales	51
II.7. Application à la décomposition des représentations	57
II.8. Exercices	60
III. Représentations induites	71
III.1. Construction des représentations induites	71
III.2. Réciprocité de Frobenius	73
III.3. Caractères des représentations induites	75

III.4. Exercices	76
IV. Groupes compacts	79
IV.1. Groupes topologiques	79
IV.2. Mesure de Haar	81
IV.3. Représentations des groupes compacts : unitarité et complète réductibilité	84
IV.4. Algèbre de convolution et transformation de Fourier	85
IV.5. Exercices	92
V. Groupes linéaires et algèbres de Lie	95
V.1. Le groupe $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ et son algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$	95
V.2. L'application exponentielle	98
V.3. Groupes linéaires	101
V.4. Ad, ad	109
V.5. Connexité et correspondance de Lie	112
V.6. Homomorphismes de groupes linéaires. Revêtements	120
V.7. Représentations de dimension finie des groupes linéaires connexes	126
VI. Représentations de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$, $\mathbf{SU}(2)$, et $\mathbf{SO}(3)$..	129
VI.1. Le revêtement $\mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$	129
VI.2. Représentations de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$	132
VI.3. Représentations de dimension finie de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$	139
VI.4. Les harmoniques sphériques	140
VII. Et après ?	151
VIII. Problèmes corrigés	153
Bibliographie	209