

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>3</b>
<b>1 Principes fondamentaux</b>	<b>15</b>
1.1 Conservation de la masse . . . . .	16
1.2 Équation du mouvement . . . . .	16
1.3 Le fluide newtonien . . . . .	17
1.4 Équations de Navier-Stokes . . . . .	18
1.5 Dissipation d'énergie . . . . .	18
1.6 Analyse dimensionnelle . . . . .	20
<b>2 Écoulements de Stokes</b>	<b>23</b>
2.1 Équations de Stokes stationnaires . . . . .	23
2.1.1 Relation pression-vitesse . . . . .	24
2.1.2 Relation pression-vorticité . . . . .	24
2.2 Problème simple d'écoulement de Stokes . . . . .	25
2.3 Linéarité et réversibilité . . . . .	26
2.4 Unicité . . . . .	27
2.5 Minimum de dissipation de l'énergie . . . . .	28

2.6	Théorème de réciprocité . . . . .	30
2.7	Solutions harmoniques . . . . .	31
2.8	Exercices . . . . .	33
2.8.1	Dissipation d'énergie d'une particule solide . . . . .	33
2.8.2	Symétrie de l'écoulement de Stokes . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Écoulements de Stokes bi-dimensionnels</b>	<b>35</b>
3.1	Fonction de courant . . . . .	36
3.1.1	Coordonnées cartésiennes . . . . .	36
3.1.2	Coordonnées cylindriques . . . . .	37
3.2	Équation de Stokes bi-dimensionnelle . . . . .	38
3.3	Dièdre à paroi mobile . . . . .	39
3.3.1	Champ de vitesse . . . . .	39
3.3.2	Champ de pression . . . . .	42
3.3.3	Efforts sur le couteau . . . . .	42
3.3.4	Autres problèmes à parois mobiles . . . . .	43
3.4	Écoulements dans les dièdres fixes . . . . .	44
3.4.1	Valeurs réelles de $\lambda$ ( $2\alpha > 146.3^\circ$ ) . . . . .	46
3.4.2	Valeurs imaginaires de $\lambda$ ( $2\alpha < 146.3^\circ$ ) . . . . .	47
3.5	Exercices . . . . .	51
3.5.1	Fermeture d'un dièdre . . . . .	51
3.5.2	Écoulement dans une cavité infinie . . . . .	52
3.5.3	Écoulement au voisinage d'un point d'arrêt sur une paroi . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Écoulements de lubrification</b>	<b>55</b>

---

4.1	Écoulements de lubrification 2D . . . . .	56
4.1.1	Ordres de grandeur et approximations . . . . .	57
4.1.2	Champ de vitesse . . . . .	58
4.1.3	Conservation de la masse . . . . .	59
4.1.4	Équation de Reynolds 2D . . . . .	59
4.1.5	Exemple : le patin hydraulique . . . . .	60
4.2	Écoulement de lubrification 3D . . . . .	63
4.2.1	Équation de Reynolds 3D . . . . .	63
4.2.2	Exemple : écrasement d'une goutte . . . . .	65
4.3	Écoulements confinés entre des parois fixes . . . . .	67
4.3.1	Écoulement de Hele-Shaw . . . . .	67
4.3.2	Écoulement dans des circuits microfluidiques . . . . .	69
4.4	Écoulement dans les milieux poreux . . . . .	71
4.4.1	Définition géométrique d'un milieu poreux . . . . .	72
4.4.2	Écoulement dans un milieu poreux . . . . .	73
4.5	Exercices . . . . .	76
4.5.1	Lubrification d'un coussinet de palier . . . . .	76
4.5.2	Écoulement dans un milieu poreux . . . . .	78
4.5.3	Écoulement de lubrification le long d'une paroi poreuse . . . . .	80
4.5.4	Mouvement d'un cylindre entre deux plaques planes . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Écoulements de films à surface libre</b>	<b>89</b>
5.1	Interface entre deux fluides non miscibles . . . . .	90
5.1.1	Conditions cinématiques . . . . .	91
5.1.2	Conditions dynamiques : loi de Laplace . . . . .	91

5.1.3	Interface air-liquide . . . . .	92
5.2	Étalement gravitationnel d'un liquide . . . . .	92
5.2.1	Étalement sans tension de surface . . . . .	93
5.2.2	Effet de la tension interfaciale . . . . .	96
5.3	Stabilité d'un film sur un plan incliné . . . . .	97
5.4	Exercices . . . . .	100
5.4.1	Étalement d'une nappe bi-dimensionnelle alimentée . . . . .	100
5.4.2	Écoulement thermo-capillaire dans une cavité . . . . .	102
5.4.3	Mouvement d'une lentille de contact sur l'œil . . . . .	105
<b>6</b>	<b>Mouvement d'une particule solide</b> . . . . .	<b>111</b>
6.1	Mouvement d'une particule solide . . . . .	112
6.1.1	Tenseurs de résistance et de mobilité . . . . .	113
6.1.2	Relations entre les tenseurs de résistance et de mobilité . . . . .	114
6.1.3	Translation sans rotation . . . . .	116
6.1.4	Rotation sans translation . . . . .	116
6.2	Particules isotropes . . . . .	117
6.3	Écoulement autour d'une sphère en translation . . . . .	119
6.3.1	Fonction de courant . . . . .	120
6.3.2	Champs de vitesse et de vorticité . . . . .	121
6.3.3	Efforts sur la sphère . . . . .	122
6.3.4	Lignes de courant . . . . .	124
6.4	Écoulement autour d'une sphère en rotation . . . . .	124
6.5	Particules élançées . . . . .	126
6.5.1	Fibres . . . . .	126

---

6.5.2	Hélices . . . . .	127
6.6	Exercices . . . . .	129
6.6.1	Sédimentation d'une particule ayant un plan de symétrie . . . . .	129
6.6.2	Nage des sphères et des bactéries . . . . .	131
6.6.3	Propulsion d'un micro-organisme par un flagelle . . . . .	135
6.6.4	Particule dans un écoulement quelconque . . . . .	140
<b>7</b>	<b>Mouvement de bulles et gouttes</b>	<b>145</b>
7.1	Goutte liquide en suspension . . . . .	146
7.1.1	Formulation générale du problème . . . . .	146
7.1.2	Analyse dimensionnelle . . . . .	147
7.2	Bulle de gaz en translation . . . . .	148
7.2.1	Équations du problème . . . . .	148
7.2.2	Solution à l'aide d'une fonction de courant . . . . .	149
7.2.3	Forme de la bulle . . . . .	150
7.3	Goutte liquide en translation . . . . .	151
7.3.1	Force de traînée d'Hadamard-Rybczynski . . . . .	151
7.3.2	Stabilité de la solution de Stokes . . . . .	153
7.3.3	Limites de de la solution de Stokes . . . . .	153
7.4	Exercices . . . . .	156
7.4.1	Mouvement thermo-capillaire d'une bulle de gaz . . . . .	156
7.4.2	Électro-hydrodynamique d'une goutte liquide . . . . .	160
<b>8</b>	<b>Solutions générales des équations de Stokes</b>	<b>165</b>
8.1	Écoulement dû à une force ponctuelle . . . . .	166

8.1.1	Définition d'un stokeslet . . . . .	166
8.1.2	Propriétés du stokeslet . . . . .	168
8.1.3	Correspondance avec l'écoulement autour d'une sphère . . . . .	169
8.1.4	Solutions dérivées du stokeslet . . . . .	170
8.2	Solutions irrotationnelles . . . . .	172
8.3	Solutions fondamentales . . . . .	173
8.3.1	Singularités pour problèmes extérieurs . . . . .	173
8.3.2	Singularités pour problèmes intérieurs . . . . .	174
8.3.3	Exemple : bulle de gaz en translation . . . . .	177
8.3.4	Applications de la méthode des singularités . . . . .	179
8.4	Formulation intégrale . . . . .	179
8.4.1	Vitesse d'un point de $\mathcal{D}$ . . . . .	180
8.4.2	Vitesse sur la frontière $\partial\mathcal{D}$ . . . . .	181
8.4.3	Principe de la méthode intégrale . . . . .	182
8.4.4	Mouvement d'une particule solide . . . . .	183
8.4.5	Applications des méthodes intégrales . . . . .	184
8.5	Exercices . . . . .	187
8.5.1	Goutte liquide en translation dans un fluide au repos . . . . .	187
8.5.2	Sphère rigide dans un écoulement de cisaillement . . . . .	188
8.5.3	Écoulement autour d'une particule rigide : forme intégrale . . . . .	191
8.5.4	Écoulement autour d'une particule liquide : forme intégrale . . . . .	193
<b>9</b>	<b>Dynamique des suspensions</b>	<b>195</b>
9.1	Homogénéisation d'une suspension . . . . .	196
9.2	Relation micro-macro . . . . .	198

---

9.3	Suspension diluée . . . . .	200
9.3.1	Suspension diluée de sphères identiques . . . . .	200
9.3.2	Suspension diluée de particules anisotropes . . . . .	201
9.3.3	Approximation $O(c^2)$ de la viscosité d'une suspension de sphères	203
9.4	Suspension de sphères très concentrée . . . . .	204
9.5	Modélisation numérique d'une suspension . . . . .	205
9.5.1	Matrices globales de résistance et de mobilité . . . . .	207
9.5.2	Application à une suspension de sphères . . . . .	208
9.6	Conclusion . . . . .	210
9.7	Exercices . . . . .	212
9.7.1	Interaction hydrodynamique entre trois sphères . . . . .	212
9.7.2	Loi de comportement d'une suspension de sphères . . . . .	216
9.7.3	Convection intrinsèque dans une suspension . . . . .	218
<b>10</b>	<b>Correction <math>O(Re)</math> à la solution de Stokes</b>	<b>225</b>
10.1	Sphère en translation : correction d'Oseen . . . . .	225
10.2	Cylindre en translation . . . . .	228
10.3	Limite de validité de l'approximation de Stokes . . . . .	230
10.4	Exercice . . . . .	232
10.4.1	Évaluation du nombre de Reynolds . . . . .	232
<b>11</b>	<b>Fluides non-newtoniens</b>	<b>235</b>
11.1	Introduction . . . . .	236
11.2	Hydrodynamique d'un fluide non-newtonien . . . . .	237
11.2.1	Équations du mouvement . . . . .	237

11.2.2	Formulation de lois de comportement . . . . .	238
11.2.3	Fonctions viscométriques sous cisaillement simple . . . . .	239
11.3	Fluide non newtonien purement visqueux . . . . .	242
11.3.1	Fluide de Reiner-Rivlin . . . . .	242
11.3.2	Fluide à contrainte seuil . . . . .	244
11.4	Fluide visco-élastique . . . . .	245
11.4.1	Déformations relatives . . . . .	246
11.4.2	Loi de comportement générale . . . . .	247
11.5	Lois visco-élastiques linéaires . . . . .	248
11.5.1	Fluide de Maxwell . . . . .	248
11.5.2	Fluide de Maxwell généralisé . . . . .	250
11.5.3	Loi visco-élastique linéaire : formes intégrales . . . . .	251
11.6	Lois visco-élastiques non linéaires . . . . .	252
11.6.1	Lois intégrales non linéaires . . . . .	252
11.6.2	Lois différentielles non linéaires . . . . .	254
11.7	Exemples d'écoulements . . . . .	255
11.7.1	Écoulement stationnaire entre deux plaques parallèles . . . . .	255
11.7.2	Écoulement oscillatoire d'un fluide visco-élastique . . . . .	260
11.8	Conclusion . . . . .	262
11.9	Exercices . . . . .	263
11.9.1	Écoulement d'une huile lourde en conduite cylindrique . . . . .	263
11.9.2	Effet Weissenberg . . . . .	265



---

<b>A</b>	<b>Notation indicielle</b>	<b>275</b>
A.1	Notation des vecteurs et tenseurs . . . . .	275
A.2	Convention de sommation d'Einstein . . . . .	276
A.3	Intégration sur une sphère . . . . .	276
<b>B</b>	<b>Coordonnées curvilignes</b>	<b>279</b>
B.1	Coordonnées cylindriques . . . . .	279
B.2	Coordonnées sphériques . . . . .	282
	<b>Index</b>	<b>285</b>