

Table des matières

Introduction	1
Plan de l'ouvrage	9
1 L.G.N. et principe des méthodes de Monte–Carlo	11
1.1 Loi Forte des Grands Nombres, exemples de méthodes de Monte–Carlo	11
1.1.1 Loi Forte des Grands Nombres, convergence p.s.	11
1.1.2 Aiguille de Buffon	12
1.1.3 Simulation en transport neutronique	13
1.1.4 Méthodes numériques probabilistes pour les E.D.P.	14
1.2 Algorithmes de simulation de lois élémentaires	16
1.2.1 Simulation de la loi uniforme	16
1.2.2 Simulation de lois discrètes	17
1.2.3 Simulation de lois gaussiennes	17
1.2.4 Inversion de la fonction de répartition, loi exponentielle	19
1.2.5 Méthode du rejet	19
1.2.6 Tests	21
1.3 Martingales à temps discret, preuve de la Loi Forte des Grands Nombres	21
1.3.1 Rappels sur l'espérance conditionnelle par rapport à une tribu	21
1.3.2 Sous–martingales, et martingales inverses, à temps discret	22
1.3.3 Preuve de la Loi Forte des Grands Nombres	25
1.4 Problèmes	27
1.4.1 Une méthode de simulation de la loi de Poisson	27
1.4.2 Exposant de Lyapunov de suite récurrente aléatoire linéaire	28
1.4.3 Variables aléatoires uniformément intégrables (★)	29
2 Estimations non asymptotiques de l'erreur d'approximation	31
2.1 Convergence en loi de variables aléatoires, fonctions caractéristiques	31
2.2 Théorème Limite Central	33
2.3 Théorème de Berry–Esseen	35
2.4 Théorème de Bikelis, intervalles de confiance	38
2.5 Inégalités de concentration	39

2.5.1	Inégalité de Sobolev Logarithmique	39
2.5.2	Inégalités de concentration, intervalles de confiance	42
2.6	Techniques élémentaires de réduction de variance	46
2.6.1	Variables de contrôle	46
2.6.2	Échantillonnage préférentiel	47
2.7	Problèmes	51
2.7.1	Vitesse de convergence pour le théorème de Donsker	51
2.7.2	Approximation ponctuelle de densité	51
2.7.3	Approximation de quantiles	52
2.7.4	Inégalités de concentration (★)	53
3	Processus de Poisson	55
3.1	Présentation succincte des processus de Markov	55
3.1.1	Quelques enjeux de la modélisation markovienne	55
3.1.2	Éléments sur les processus, leurs trajectoires, et leur lois	56
3.2	Caractérisation du processus de Poisson, propriétés	57
3.2.1	Processus ponctuels, absence de mémoire, processus de Poisson	57
3.2.2	Propriété de Markov simple et forte	62
3.2.3	Superposition et décomposition de processus de Poisson	64
3.3	Simulation et approximation	67
3.3.1	Simulation exacte des inter-arrivées	67
3.3.2	Simulation exacte de processus de Poisson indépendants	68
3.3.3	Limite temps long ou intensité grande, estimation de l'intensité	69
3.3.4	Durée de simulation, simulation approchée, limite brownienne	70
3.4	Problèmes	72
3.4.1	Loi des instants d'un processus de Poisson	72
3.4.2	T.L.C. et inégalité de concentration pour la loi de Poisson	72
3.4.3	Processus de Poisson inhomogène (★)	72
4	Processus de Markov sur un espace discret	75
4.1	Caractérisation, spécification, propriétés	75
4.1.1	Mesures, fonctions, et matrices markoviennes	75
4.1.2	Propriété de Markov simple et forte	77
4.1.3	Semi-groupe, générateur infinitésimal et loi d'évolution	81
4.2	Constructions, existence, simulation, équations	84
4.2.1	Constructions fondamentales	84
4.2.2	Explosion ou existence du processus de Markov	86
4.2.3	Simulation fondamentale, méthode des sauts fictifs	88
4.2.4	Équations de Kolmogorov, formule de Feynman-Kac	89
4.2.5	Algèbres d'opérateurs bornés, générateur et semi-groupe	91
4.2.6	Étude de quelques exemples	95
4.3	Problèmes	99
4.3.1	Processus de branchement en temps continu	99
4.3.2	Processus de Markov et problème de Dirichlet (★)	100

4.3.3	Processus de Markov, générateur, et martingales (★)	101
5	Processus de Markov avec sauts sur un espace continu	103
5.1	Caractérisation, spécification, généralités	103
5.1.1	Mesures, fonctions, et opérateurs à noyau markovien	103
5.1.2	Propriété de Markov, marginales fini-dimensionnelles	105
5.1.3	Semi-groupe et générateur infinitésimal	107
5.2	Processus de Markov évoluant uniquement par sauts isolés	108
5.2.1	Semi-groupe, générateur infinitésimal, et loi d'évolution	108
5.2.2	Construction, simulation, existence	111
5.2.3	Équations de Kolmogorov, formule de Feynman-Kac	114
5.3	Processus de Markov évoluant selon une E.D.O. entre des sauts	117
5.3.1	Trajectoires, évolution, générateur intégro-différentiel	117
5.3.2	Construction, simulation, existence	120
5.3.3	Équations de Kolmogorov, formule de Feynman-Kac	123
5.3.4	Application aux équations cinétiques, extensions	124
5.4	Problèmes	130
5.4.1	Des échanges binaires d'énergie	130
5.4.2	Un processus avec accumulation de sauts	130
5.4.3	Une équation de Kac généralisée (★)	131
6	Discrétisation d'équations différentielles stochastiques	133
6.1	Quelques rappels de calcul stochastique d'Itô	133
6.1.1	Intégrales stochastiques et processus d'Itô	133
6.1.2	Formule d'Itô, existence et unicité de solutions d'E.D.S.	136
6.2	Les schémas d'Euler et de Milstein	138
6.3	Moments de X_t et de ses approximations	140
6.4	Vitesses de convergence en norme $L^p(\Omega)$ et p.s.	145
6.5	Méthode de Monte-Carlo pour des E.D.P. paraboliques	147
6.5.1	Principe de la méthode	147
6.5.2	Introduction à l'analyse de l'erreur	149
6.6	Le résultat optimal de vitesse de convergence	151
6.7	Extrapolations de Romberg-Richardson	156
6.8	Interprétation probabiliste et contrôle polynômial des dérivées	157
6.9	Problèmes	160
6.9.1	Comportement en temps long de l'erreur du schéma d'Euler	160
6.9.2	Schéma d'Euler implicite	161
6.9.3	Flot d'équation différentielle stochastique (★)	162
7	Réduction de variance et E.D.S.	165
7.1	Rappels sur le Théorème de Girsanov	165
7.2	Variables de contrôle	166
7.3	Réduction de variance pour les calculs de sensibilité	168
7.3.1	Le cas des conditions terminales f dérivables	168

7.3.2	Le cas des conditions terminales f non dérivables	169
7.4	Échantillonnage préférentiel	172
7.5	Méthode de Romberg statistique	175
7.6	Problèmes	176
7.6.1	Echantillonnage préférentiel pour les E.D.S.	176
7.6.2	Réduction de variance pour le calcul du delta d'une option . . .	177
8	Algorithmes stochastiques	179
8.1	Introduction	179
8.2	Étude dans un cadre idéalisé	180
8.2.1	Définitions	180
8.2.2	Équation différentielle associée, accroissements de martingale .	181
8.2.3	Comportement en temps long de l'algorithme	182
8.3	Réduction de variance pour méthode de Monte-Carlo	186
8.3.1	Recherche d'un échantillonnage préférentiel	186
8.3.2	Réduction de variance et algorithmes stochastiques	188
8.4	Problèmes	190
8.4.1	Une méthode de Monte-Carlo adaptative	190
8.4.2	L'hypothèse b) du Théorème 8.2.4	192
8.4.3	Recherche de vecteur propre principal : algorithme d'Oja . . .	193
	Bibliographie	197