Table des matières

Introduction **i**

1 Variétés différentiables **1**

1.1 Structure différentiable 1
1.1.1 Modèle 1
1.1.2 Atlas différentiable 1
1.1.3 Anneau des fonctions différentiables 3
1.1.4 Structures identiques, structures isomorphes 4
1.1.5 Rôle de la régularité C^k 5
1.2 Exemples de variétés 5
1.2.1 Sous-variétés (sans bord) 5
1.2.2 Plongements 6
1.2.3 Variété quotient 6
1.2.4 Atlas abstrait 7
1.3 Le fibré tangent (C^∞) 8
1.3.1 Construction de l'espace tangent 8
1.3.2 Application tangente 10
1.3.3 Transversalité 10
1.4 Le bord d'une variété 11
1.4.1 Cas de $\mathbb{R}^n_-$ 11
1.4.2 Cas d'une variété 12
1.5 Partitions de l'unité 12
1.5.1 Paracompacité 12
1.5.2 Métriques riemanniennes 13
1.6 Voisinages tubulaires 14
1.6.1 Fibré normal d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ 14
1.6.2 Voisinage tubulaire pour une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ 14
1.6.3 Cas général 16
1.7 Aperçu sur la théorie des fibrés 16
1.7.1 Fibré de fibre type F et de groupe structural G 17
1.7.2 Fibré vectoriel (réel) de rang n 18
1.7.3 Fibré induit 19

1.7.4 Sous-fibré 19
1.7.5 Fibré quotient 20
1.7.6 Le théorème fondamental des fibrés 21
1.7.7 Base contractile 22
Appendice sur les variét és comme espaces annalés 22

2 Formes différentielles 25
2.1 Algèbre des formes k-linéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$ 25
2.1.1 Base des formes k-linéaires alternées 25
2.1.2 Produit extérieur 26
2.1.3 Produit intérieur par un vecteur 26
2.1.4 Composition avec une application linéaire 27
2.2 Formes différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ 28
2.2.1 Définition 28
2.2.2 Produit extérieur, composition avec une application 29
2.2.3 Opérateur cobord 29
2.2.4 Cocycles et cobords 30
2.3 Formes différentielles sur une variété 31
2.3.1 Cohomologie de De Rham 31
2.3.2 Forme volume et orientation 32
2.3.3 Forme d'aire riemannienne sur une surface orientée de $\mathbb{R}^3$ . . . 34
2.3.4 Autre approche pour l'aire riemannienne 35
2.4 Intégration des formes différentielles et formule de Stokes 35
2.4.1 Intégration sur un ouvert de $\mathbb{R}^n_-$ 35
2.4.2 Intégration sur une variété 36
2.4.3 Orientation canonique du bord d'une variété 37
2.4.4 Formule de Stokes 38
2.4.5 La formule de Stokes appliquée aux sous-variétés de $\mathbb{R}^3$ 40
2.5 Formules d'homotopie 41
2.5.1 Formes différentielles sur un produit par [0,1] 41
2.5.2 Opérateur cobord sur un produit par [0,1] 42
2.5.3 Formule d'homotopie des images réciproques 42
2.5.4 Le lemme dit de Poincaré 43
2.5.5 Exercices d'application : cohomologie de De Rham en degré maximum 44
2.5.6 Lemme de Poincaré relatif 45

3 Calcul de Lie – Cartan 47
3.1 Champs de vecteurs 47
3.1.1 Champs de vecteurs sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, image par un difféomorphisme 47
3.1.2 Champs de vecteurs sur une variété 47
3.1.3 Flot d'un champ de vecteurs sur une variété sans bord 48
3.1.4 Champs de vecteurs comme dérivation 48

3.1.5 Structure d'algèbre de Lie 50
3.1.6 Crochet et flot 50
3.1.7 Compléments. 51
3.1.8 Relation entre le crochet des champs de vecteurs et le cobord . 53
3.2 Dérivée de Lie des formes différentielles 54
3.2.1 Définition de la dérivée de Lie 54
3.2.2 Formule de Cartan 54
3.2.3 Formules importantes 55
3.2.4 Cas d'un volume 55
3.2.5 Dérivée de Lie par rapport à un champ dépendant du temps . 56
3.3 Un exemple d'application : le lemme $\mathcal{M}J^2$ et le lemme de Morse . . . 57
3.3.1 Le lemme $\mathcal{M}J^2$ 57
3.3.2 Lemme de Morse 57
3.3.3 Démonstration du lemme $\mathcal{M}J^2$ 58
3.4 Le lemme de Darboux sur les formes symplectiques 59
3.4.1 Définition 59
3.4.2 Lemme de Darboux 59
3.5 Aperçu sur l'intégrabilité des formes de degré 1 61
3.5.1 Le problème du facteur intégrant. 61
3.5.2 La condition d'intégrabilité de Frobenius 62
3.5.3 Feuilletage d'un point de vue global 63
3.5.4 Le feuilletage de Reeb 64
3.5.5 Exercice : la classe de Godbillon-Vey 65
3.5.6 A l'opposé des formes intégrables, les formes de contact 65
Appendice sur les groupes de Lie 67

4 Courants de de Rham 71
4.1 Définition des courants 71
4.1.1 Première définition et premiers exemples 71
4.1.2 Définition locale 72
4.1.3 Exemple 73
4.1.4 Remarque importante 73
4.1.5 Image directe d'un courant 73
4.2 Le complexe des courants 75
4.2.1 L'opérateur bord 75
4.2.2 Le complexe des courants 76
4.2.3 Intérêt du complexe des courants 77
4.3 Régularisation des courants 78
4.3.1 Le théorème de régularisation. 78
4.3.2 Régularisation d'une distribution dans une boule 79
4.3.3 Régularisation d'un courant dans une boule 80
4.3.4 Régularisation dans la variété 81
4.3.5 Compléments 82
4.3.6 Régularisation d'une sous-variété vue comme courant 82

4.3.7 Bilan provisoire 84

5 Tranversalité **87**
5.1 Le théorème de Sard 87
5.1.1 Définitions 87
5.1.2 Théorème de Sard 88
5.1.3 Démonstration du théorème de Sard 89
5.2 Existence de fonctions de Morse 90
5.2.1 Définition. 90
5.2.2 Le théorème d'existence 91
5.3 De Sard à Thom 92
5.3.1 Transversalité dans une famille 92
5.3.2 Topologie de $C^\infty(M, N)$ 94
5.3.3 Le théorème de transversalité (version locale) 94
5.3.4 Le théorème de transversalité (version globale) 96
5.4 Transversalité sous contraintes 97
5.4.1 Transversalité locale d'une famille 97
5.4.2 Passage au global 98
5.5 Théorèmes de Whitney 98
5.5.1 Théorème d'immersion 98
5.5.2 Théorème de plongement. 100
5.6 La transversalité et les fonctions de Morse 102

6 Théorie de Morse **105**
6.1 Fonctions de Morse, gradients adaptés 106
6.1.1 Rappels et définitions 106
6.1.2 Gradient 107
6.1.3 Gradient adapté à une fonction de Morse 107
6.2 Questions de complétude, condition de Palais - Smale 108
6.2.1 Métrique riemannienne complète 108
6.2.2 La condition de Palais-Smale 109
6.2.3 Sous-niveaux d'une fonction 110
6.2.4 Contrôle de la dynamique 110
6.2.5 Fonction sans point critique 111
6.3 Principe du mini-max 112
6.3.1 L'idée sur un exemple 112
6.3.2 Principe du mini-max sur les formes fermées 112
6.3.3 Mini-max sur les formes de degré 0 113
6.3.4 Mini-max sur les formes de degré maximal 114
6.3.5 Continuité par rapport à un paramètre 114
6.4 Le modèle de Morse et ses premières applications 114
6.4.1 Description du modèle $\mathcal{M}$ $(n = 2,\ k = 1)$ 115
6.4.2 Description du modèle dans le cas général 116
6.4.3 Globalisation du lemme homotopique 117

6.4.4 Application au mini-max . . . 117
6.4.5 L'inégalité de Ljusternik-Snirel'man . . . 118
6.5 Le complexe de Thom-Smale . . . 119
6.5.1 Variétés stables et instables des points critiques . . . 119
6.5.2 Transversalité des variétés stables et instables. . . . 120
6.5.3 Description de l'adhérence des variétés stables . . . 121
6.5.4 Définition de $n(x, y)$. . . . 122
6.5.5 Les variétés stables comme courant . . . 122
6.5.6 La formule de Stokes, bord des variétés stables . . . 123
6.5.7 Le complexe de Thom-Smale algébrique . . . 124
6.5.8 Inégalités de Morse pour le complexe de Thom-Smale . . . 124
6.5.9 Cas particulier, dit lacunaire. . . . 125
6.5.10 Polynôme de Poincaré et polynôme de Morse . . . 126
6.6 Homologie du complexe de Thom-Smale . . . 126
6.6.1 Un premier critère d'exactitude . . . 126
6.6.2 Le complexe de Thom-Smale dual . . . 128
6.6.3 Régularisation des variétés stables ou instables . . . 129
6.6.4 Des formes différentielles aux courants de Thom-Smale . . . 129
6.6.5 Théorème fondamental . . . 131
6.7 Éléments de topologie algébrique des variétés . . . 132
6.7.1 Finitude de la cohomologie de de Rham . . . 133
6.7.2 Nombre de Betti . . . 133
6.7.3 La cohomologie des sphères . . . 133
6.7.4 La dualité de Poincaré . . . 133
6.7.5 Inégalités de Morse . . . 134
6.7.6 Théorème de de Rham . . . 136
6.7.7 Formule de Künneth ou formule du produit . . . 137
6.8 Décomposition de Heegaard . . . 138
6.8.1 Anse, corps en anses . . . 138
6.8.2 Surface de Heegaard . . . 140
Appendice : Adhérence générique des variétés stables . . . 142

Exercices **151**
E.1 Variétés . . . 151
E.2 Fibrés . . . 153
E.3 Algèbre multilinéaire . . . 155
E.4 formes différentielles . . . 156
E.5 Champ de vecteurs . . . 162
E.6 Transversalité . . . 164
E.7 Courants . . . 168
E.8 Mini-max . . . 169
E.9 Théorie de Morse . . . 170

Index **173**

Bibliographie **177**