

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	13
Invitation à la théorie de Galois	17
0.1. Construction à la règle et au compas	17
0.2. Résolution d'équations	21
1. Compléments de théorie des groupes	25
1.1. Groupes	25
1.2. Groupes quotients	26
1.3. Suites exactes	28
1.4. Actions de groupes	31
1.5. Groupes symétriques	32
1.6. Groupes résolubles	35
2. Compléments de théorie des anneaux	41
2.1. Anneaux	41
2.2. Anneau des polynômes	43
2.3. Morphisme de corps	43
2.4. Anneaux quotients	44
2.5. Caractéristique	47
2.6. Anneaux intègres, propriétés des idéaux	48
2.7. Rang d'un module libre de type fini	51

2.8. Le lemme Chinois	52
2.9. Le morphisme de Frobenius	54
3. Algèbres	57
3.1. Algèbres et morphismes d'algèbres	57
3.2. Degré d'une algèbre	59
3.3. Corps de rupture	60
3.4. Éléments algébriques, transcendants	61
3.5. Degré de transcendance	62
3.6. Critère d'algébricité	63
3.7. Notion de clôture algébrique	66
3.8. Preuve de l'existence de la clôture algébrique	69
3.9. Preuve de l'unicité de la clôture algébrique	70
3.10. Corps des racines d'un polynôme	72
4. Corps finis, corps parfaits	73
4.1. Existence et unicité des corps finis	73
4.2. Automorphismes des corps finis	75
4.3. Une application du lemme chinois : l'algorithme de Berlekamp	77
4.4. Extensions de corps parfaits	80
4.5. Polynômes séparables et corps parfaits	82
4.6. Le théorème de l'élément primitif	84
5. La correspondance de Galois	87
5.1. Extensions galoisiennes	88
5.2. Caractérisations des extensions galoisiennes	91
5.3. Groupe de Galois des corps finis	92
5.4. Points fixes	92
5.5. Énoncé et preuve de la correspondance de Galois	94
6. Cyclotomie et constructibilité	99
6.1. Extensions cyclotomiques	99
6.2. Sur le groupe de Galois de l'extension cyclotomique générale	100

6.3. Irréductibilité du polynôme cyclotomique sur \mathbf{Q}	101
6.4. Intersections de corps cyclotomiques	105
6.5. Constructibilité à la règle et au compas	107
7. Résolubilité par radicaux	111
7.1. Groupe de Galois d'un polynôme	111
7.2. Discriminant	114
7.3. Extensions cycliques	116
7.4. Applications aux équations	119
8. Réduction modulo p	123
8.1. Théorème de la réduction modulo p	124
8.2. Spécialisation du groupe de Galois	125
8.3. Somme, produits d'entiers	125
8.4. Norme des éléments de A	126
8.5. Groupe de décomposition	127
8.6. Cyclotomie et réduction modulo p	131
8.7. Le théorème de Cebotarev	133
9. Annexes	135
9.1. Annexe A - Lemme de Zorn et application	135
9.2. Annexe B - Groupe de Galois des extensions composées	137
9.3. Annexe C - Transcendance de e et π	141
9.4. Annexe D - Groupe de Galois sur \mathbf{Q} d'un polynôme à coefficients entiers	144
9.5. Annexe E - Polynômes symétriques	146
9.6. Annexe F - Quelques mots de théorie de Galois inverse	147
10. Sujets d'examen	153
10.1. Sujet 2005	153
10.2. Sujet 2006	157
10.3. Sujet 2007	160
10.4. Sujet 2008	163

10.5. Sujet 2009	166
10.6. Sujet 2010	169
10.7. Sujet 2011	172
11. Corrigés des examens	175
11.1. Corrigé - Examen 2005	175
11.2. Corrigé - Examen 2006	180
11.3. Corrigé - Examen 2007	184
11.4. Corrigé - Examen 2008	186
11.5. Corrigé - Examen 2009	189
11.6. Corrigé - Examen 2010	193
11.7. Corrigé - Examen 2011	197
12. Corrections sommaires d'exercices	203
Index	211
Bibliographie	215