
TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	v
I Énergie et Dissipations	1
1 Thermodynamique des milieux continus	3
1.1 Introduction : pourquoi la thermodynamique ?	3
1.2 État thermodynamique, variables d'état	5
1.3 Principes de la thermodynamique	7
1.3.1 Premier principe	8
1.3.2 Deuxième principe	11
1.3.3 Dissipations	12
1.3.4 Expressions globales	15
1.3.5 Intermède : une vision littéraire du second principe	16
1.4 Structure de l'approche thermodynamique	16
1.4.1 La démarche thermodynamique	16
1.4.2 Exemple illustrant les concepts et la démarche	17
1.5 Travail non dissipé - lois d'état - forces réversibles	20
1.5.1 Travail non dissipé, forces thermodynamiques réversibles et lois d'état en fonction de l'énergie interne	20
1.6 Énergie dissipée - forces dissipatives	22
1.6.1 Dissipation et forces thermodynamiques dissipatives	22
1.6.2 Énergie libre : travail non dissipé, forces réversibles et lois d'état	24
1.6.3 Potentiel élastique, travail restituable	26

1.6.4	Autre procédure d'obtention des lois d'état (Coleman-Noll)	27
1.7	Potentiels thermodynamiques : propriétés et choix	28
1.7.1	Retour sur l'énergie libre de Helmholtz	28
1.7.2	L'enthalpie spécifique	29
1.7.3	L'énergie libre spécifique de Gibbs	30
1.7.4	Récapitulatif des différents potentiels thermodynamiques	30
1.7.5	Compléments sur les transformations de Legendre et de Legendre-Fenchel	31
1.8	Présence de surface de discontinuité	32
1.8.1	Dérivées particulières d'intégrale de volume	33
1.8.2	Écriture des deux principes de la thermodynamique	34
1.9	Lois d'état en présence de liaisons internes	35
1.9.1	Illustration sur la liaison d'incompressibilité	36
1.9.2	Illustration sur la prise en compte d'une liaison unilatérale	38
1.10	<i>\mathcal{L}' essentiel</i>	43
1.11	Récapitulatif	44
1.12	Exercices	45
Annexes		53
A	Justification physique de l'approche thermodynamique adoptée	53
A.1	Concept de l'état accompagnant	53
A.2	VER, variables d'état pertinentes, état accompagnant	54
B	Liens avec les énoncés historiques du second principe	55
II Lois de comportement		59
2 Lois de comportement		61
2.1	Présentation	62
2.2	Intervention du matériau, nécessité de relations supplémentaires	63
2.2.1	Cas d'une évolution quasi-statique réversible	63
2.2.2	Cas d'une évolution irréversible	64
2.2.3	Récapitulatif	66
2.3	Comportement thermique	67

2.3.1	Loi de Fourier	67
2.3.2	Potentiel de dissipation thermique	68
2.4	Dissipativité normale	69
2.4.1	Lois complémentaires linéaires	69
2.4.2	Généralisation : (pseudo-)potentiel de dissipation	69
2.4.3	Potentiel dual	71
2.5	Matériaux standards généralisés	71
2.6	Démarche adoptée pour la présentation des lois	73
2.7	Compléments sur le calcul de sous-différentiels	73
2.8	Récapitulatif	77
3	Thermoélasticité	79
3.1	Présentation	79
3.2	Aspects expérimentaux et interprétations	80
3.2.1	Essais de traction isotherme et adiabatique	80
3.2.2	Interprétation des essais	80
3.2.3	Modèle uniaxial du comportement thermoélastique linéaire	81
3.3	Comportement thermoélastique linéaire	82
3.3.1	Lois d'état	82
3.3.2	Loi complémentaire	84
3.4	Évolution thermoélastique	85
3.5	Matériau thermoélastique linéaire isotrope	86
3.6	Autres expressions en thermoélasticité linéaire isotrope	88
3.6.1	Décomposition de \mathbb{C}	88
3.6.2	Inversion de la loi de comportement	88
3.6.3	Capacité calorifique spécifique à contrainte constante	89
3.7	Problème d'évolution en thermoélasticité linéaire isotrope	90
3.8	Expressions des différents potentiels thermoélastiques	90
3.8.1	Énergie interne en thermoélasticité linéaire	90
3.8.2	Énergie libre de Gibbs en thermoélasticité linéaire	91
3.8.3	Enthalpie en thermoélasticité linéaire	92
3.9	Matériau thermoélastique linéaire anisotrope	93
3.9.1	Cas général	93

3.9.2	Symétrie par rapport à un plan	96
3.9.3	Matériau orthotrope	96
3.9.4	Matériau à symétrie cubique	97
3.9.5	Matériau orthotrope de révolution	97
3.10	Comportement thermoélastique : cas de grandes variations de température . . .	99
3.11	Récapitulatif	103
3.12	Exercices	105
4	Comportement dissipatif indépendant du temps physique	109
4.1	Présentation	109
4.2	Structure de la loi de comportement	110
4.2.1	Rappel sur les lois de comportement	111
4.2.2	Décomposition de la déformation totale et de l'énergie libre	111
4.2.3	Structure de la dissipation intrinsèque	114
4.2.4	Potentiels de dissipation	116
4.3	Récapitulatif	117
4.4	Démarche d'identification des modèles de comportement	117
4.4.1	Dans le cas standard généralisé	117
4.4.2	Dans le cas standard (non généralisé)	118
4.4.3	Mise en œuvre de la démarche adoptée	119
4.5	Loi élastoplastique parfaitement plastique	120
4.5.1	Courbe expérimentale de traction compression	120
4.5.2	Modélisation uniaxiale	120
4.5.3	Modélisation multiaxiale - domaine d'élasticité	122
4.5.4	Récapitulatif	128
4.6	Loi élastoplastique de type von Mises à écrouissage isotrope	134
4.6.1	Courbe expérimentale de traction compression	134
4.6.2	Formulation de la loi de comportement	134
4.6.3	Remarque sur l'unicité de modèle mécanique de comportement . . .	138
4.6.4	Récapitulatif	139
4.7	Loi élastoplastique de type von Mises à écrouissage cinématique linéaire . . .	140
4.7.1	Courbe expérimentale de traction compression	140
4.7.2	Modélisation uniaxiale	140

4.7.3	Formulation multiaxiale de la loi de comportement	142
4.7.4	Récapitulatif	145
4.8	Loi élastoplastique de type von Mises avec écrouissage cinématique non linéaire	146
4.8.1	Courbe expérimentale de traction compression	146
4.8.2	Modélisation uniaxiale d'Armstrong & Frederick	146
4.8.3	Formulation habituelle de la loi de comportement	147
4.8.4	Formulation de type standard	149
4.8.5	Formulation de plasticité non associée	149
4.8.6	Formulation de type standard généralisé	150
4.8.7	Identification des constantes du modèle à partir d'une courbe de traction	150
4.8.8	Récapitulatif	154
4.9	Loi élastoplastique à écrouissage complexe (cinématique non linéaire, isotrope, ...)	155
4.9.1	Modélisation tridimensionnelle (sans mémoire)	156
4.9.2	Prise en compte de la mémoire de l'amplitude de déformation plastique	157
4.10	Caractérisation énergétique - équation de la chaleur	160
4.10.1	Thermoplasticité en transformation infinitésimale	160
4.11	Introduction au comportement endommageable	165
4.12	Aspects phénoménologiques	165
4.13	Modélisation de l'endommagement	166
4.13.1	Potentiel thermodynamique et lois d'état	167
4.13.2	Potentiel de dissipation et lois complémentaires	168
4.13.3	Quelques modèles dissipatifs	169
4.13.4	Équations du problème d'évolution	171
4.13.5	Un modèle simplifié du comportement du béton	172
4.14	Récapitulatif	174
4.15	Exercices	178
5	Lois de comportements viscoélastiques et élastoviscoplastiques	181
5.1	Présentation	181
5.2	Comportements viscoélastiques isothermes	184
5.2.1	Aspects expérimentaux	184
5.2.2	Description par variables internes	184

5.2.3	Viscoélasticité linéaire	185
5.2.4	Illustration des concepts sur l'exemple du modèle de Maxwell	186
5.2.5	* Description fonctionnelle de la viscoélasticité linéaire	193
5.2.6	Modèle de Kelvin-Voigt	194
5.2.7	Modèle linéaire standard	196
5.3	Comportements viscoplastiques	201
5.3.1	Généralités sur la viscoplasticité	201
5.3.2	Cas standard généralisé avec ε et α comme variables d'état	201
5.3.3	Cas standard généralisé avec ε , ε^p et α comme variables d'état	202
5.3.4	Dans le cas standard (non généralisé)	203
5.3.5	Exemple de modèle rhéologique parfaitement viscoplastique	203
5.3.6	Extension multiaxiale du modèle rhéologique parfaitement viscoplastique	205
5.3.7	Comportements viscoplastiques standards généralisés	206
5.3.8	Modèle de Chaboche	208
5.3.9	Caractérisation énergétique - équation de la chaleur	209
5.4	Récapitulatif	212
5.5	Exercices	214

III Méthodes de résolution et état résiduel 219

6	Éléments de résolution des problèmes d'élastoplasticité	221
6.1	Introduction	221
6.2	Problèmes d'élasticité	222
6.2.1	Données du problème	222
6.2.2	Équations du problème	222
6.2.3	Problèmes réguliers	223
6.2.4	Résolution par intégration des équations locales	224
6.2.5	Méthodes globales de résolution - méthodes variationnelles	226
6.3	Problème d'élastoplasticité	232
6.3.1	Formulation et équations du problème	232
6.3.2	Problème en vitesses	233

6.3.3	Problème incrémental	235
6.3.4	Algorithmes de résolution	240
6.3.5	Matériau élastoplastique à écrouissages cinématique linéaire et isotrope	243
7	Contraintes résiduelles	249
7.1	Introduction	249
7.2	Quelques exemples de contraintes résiduelles	250
7.2.1	Contraintes résiduelles dans une poutre extrudée en aluminium	250
7.2.2	Contraintes résiduelles dans un vilebrequin	251
7.3	États réel et résiduels -fictif et réel- d'une structure	252
7.3.1	Réponse réelle de la structure	252
7.3.2	Réponse purement élastique	253
7.3.3	État résiduel fictif -relâché- d'une structure	254
7.3.4	État relâché d'un point matériel : déformation plastique	254
7.4	État résiduel d'une structure	255
7.4.1	Définition de l'état résiduel d'une structure	255
7.4.2	Problèmes élastiques associés à l'état résiduel	255
7.4.3	Conditions de non nullité de contraintes résiduelles	258
7.4.4	Déformée et contraintes résiduelles dues à la flexion d'une poutre élastoplastique	263
7.5	Compléments sur les contraintes résiduelles	267
7.5.1	Effets des contraintes résiduelles	267
7.5.2	Mesures des contraintes résiduelles	267
7.6	Illustration des concepts sur un treillis	268
7.6.1	Le treillis : géométrie, comportement et sollicitation	268
7.6.2	Équations de la statique	269
7.6.3	Champs d'efforts normaux statiquement admissibles (S.A.)	269
7.6.4	Champs d'efforts normaux statiquement admissibles à zéro (S.A.O.)	270
7.6.5	Champs d'allongements cinématiquement admissibles (C.A.)	271
7.6.6	Solution du problème purement élastique	271
7.6.7	Domaine initial d'élasticité dans l'espace (Q_1, Q_2)	273
7.6.8	Comportement élastoplastique du treillis	274
7.6.9	Décharge et état résiduel	274

7.6.10	Lien entre état résiduel et allongements plastiques	276
7.6.11*	Cas général	276
7.7	<i>L'essentiel</i>	281
7.8	Récapitulatif	282
7.9	Exercices	283
IV	Structures sous chargement cyclique	285
8	Structures sous chargements cycliques	287
8.1	Problématique	287
8.1.1	Introduction	287
8.1.2	Problème étudié et résultats classiques	288
8.1.3	Rappel des résultats classiques	289
8.2	Comportement asymptotique	290
8.2.1	Résultats sur le comportement asymptotique	290
8.2.2	États asymptotiques d'une structure sous chargement cyclique	291
8.2.3	L'adaptation	291
8.2.4	L'accommodation	292
8.2.5	Le rochet	293
8.2.6	Quelques résultats pour des comportements simples	293
8.3	Adaptation en parfaite plasticité	293
8.3.1	Théorème statique d'adaptation de Melan-Koiter	294
8.3.2	Exemple d'application : plaque sous chargement cyclique	297
8.3.3	Seconde formulation du théorème de Melan-Koiter	299
8.3.4	Coefficient de sécurité statique à l'adaptation	300
8.3.5	Théorème cinématique d'adaptation (Koiter)	300
8.3.6	Lien entre coefficients de sécurité	303
8.3.7	Dualité entre les approches statique et cinématique	303
8.4	Adaptation dans le cas standard généralisé	304
8.4.1	Théorème statique d'adaptation	305
8.5	Adaptation dans un cas standard généralisé particulier	307
8.5.1	Théorème statique d'adaptation	307

8.5.2	Coefficients de sécurité à l'adaptation	309
8.5.3	Cas de structure à écrouissage cinématique linéaire	310
8.6	Application : dimensionnement d'une cuve de réacteur	315
8.6.1	Pression interne maximale admissible	319
8.6.2	Analyse qualitative	322
8.6.3	Solution élastoplastique	322
8.6.4	Premier demi-cycle : $t \in [0, \pi/2\Omega]$	323
8.6.5	Deuxième demi-cycle : $t \in [\pi/2\Omega, \pi/\Omega]$	325
8.6.6	Troisième demi-cycle : $t \in [\pi/\Omega, 3\pi/2\Omega]$	326
8.6.7	Comportement asymptotique de type rochet	327
8.7	<i>L'essentiel</i>	331
8.8	Récapitulatif	332
8.9	Exercices	333

V Fatigue des structures **339**

9 Introduction à la fatigue des structures **341**

9.1	Introduction	341
9.2	Une première expérience de la fatigue	342
9.3	Un bref historique de la fatigue	344
9.3.1	Apparition de la fatigue des métaux	344
9.3.2	Essais et critères empiriques	345
9.3.3	Problématique du dimensionnement des structures à la fatigue	345
9.4	Approche empirique de la fatigue	346
9.4.1	Courbes de Wöhler	346
9.4.2	Définition des différents domaines de la fatigue	347
9.5	Fatigue à grand nombre de cycles : endurance illimitée	349
9.5.1	Lois uniaxiales de limite d'endurance	350
9.5.2	Lois empiriques en flexion-torsion	352
9.5.3	Notion de critère multiaxial de fatigue	353
9.5.4	Mécanismes physiques de la fissuration par fatigue	353
9.5.5	Grandeurs intervenant dans les critères de fatigue	356

9.5.6	Forme générale des critères de fatigue	362
9.5.7	Critère de Findley	362
9.5.8	Critère de Crossland	364
9.5.9	Critère de Sines	366
9.5.10	Critère de Dang Van	366
9.5.11	Critère à amplitude généralisée du déviateur des contraintes	370
9.6	Endurance limitée	372
9.7	Fatigue à faible nombre de cycles	374
9.7.1	Essais de fatigue oligocyclique	375
9.7.2	Critères de durée de vie en fatigue oligocyclique	376
9.8	Méthodologie de calcul des structures à la fatigue	377
9.8.1	Calcul de la réponse thermomécanique asymptotique ("stabilisée")	379
9.8.2	Estimation de la tenue à la fatigue	379
9.9	<i>L'essentiel</i>	380
9.10	Récapitulatif	381
9.11	Exercices	383
	Bibliographie	390
	Index	395