

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Modèles</b>	<b>1</b>
1.1	Origine des équations . . . . .	1
1.1.1	Établissement de l'équation de diffusion . . . . .	2
1.1.2	Établissement de l'équation de transport . . . . .	4
1.1.3	Du transport vers la diffusion . . . . .	12
1.2	Neutronique . . . . .	15
1.2.1	Modélisation physique . . . . .	15
1.2.2	Formalisme multigroupe . . . . .	20
1.2.3	Approximation par la diffusion . . . . .	21
1.3	Le transfert radiatif . . . . .	22
1.3.1	Les équations du transfert radiatif . . . . .	22
1.3.2	L'effet de serre . . . . .	27
1.3.3	La couleur du ciel . . . . .	28
1.4	Biologie (dynamique des populations) . . . . .	31
1.4.1	Population structurée par âge . . . . .	31
1.4.2	Population structurée par taille . . . . .	32
1.5	La théorie cinétique des gaz . . . . .	34
1.6	Exercices . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Equation de transport</b>	<b>39</b>
2.1	Problème de Cauchy . . . . .	39
2.1.1	La méthode des caractéristiques . . . . .	40
2.1.2	Termes source et amortissement . . . . .	42
2.2	Problème aux limites . . . . .	44
2.2.1	Cas monodimensionnel . . . . .	45
2.2.2	Cas d'une dimension quelconque . . . . .	51
2.2.3	Problème aux limites non homogène . . . . .	63
2.3	Solutions généralisées . . . . .	67
2.4	Principe du maximum . . . . .	75
2.5	Estimation $L^2$ . . . . .	77
2.6	Transport stationnaire . . . . .	79
2.7	Exercices . . . . .	86

<b>3</b>	<b>Equation de Boltzmann linéaire</b>	<b>89</b>
3.1	Problème de Cauchy . . . . .	91
3.1.1	Existence et unicité pour le problème de Cauchy . . . . .	92
3.1.2	Estimation $L^\infty$ pour le problème de Cauchy . . . . .	98
3.2	Problème aux limites . . . . .	102
3.2.1	Existence et unicité pour le problème aux limites . . . . .	103
3.2.2	Estimation $L^\infty$ pour le problème aux limites . . . . .	107
3.2.3	Autres conditions aux limites . . . . .	110
3.3	Interprétation probabiliste . . . . .	121
3.4	Problème stationnaire . . . . .	125
3.5	Exercices . . . . .	126
<b>4</b>	<b>Limite de diffusion</b>	<b>131</b>
4.1	Equation de diffusion . . . . .	131
4.1.1	Problème de Dirichlet . . . . .	131
4.1.2	Problème de Cauchy dans $\mathbf{R}^N$ . . . . .	133
4.2	Approximation diffusion : calcul formels . . . . .	134
4.2.1	Loi d'échelle . . . . .	135
4.2.2	Série de Hilbert . . . . .	136
4.2.3	Le coefficient de diffusion . . . . .	145
4.3	Justification rigoureuse . . . . .	150
4.3.1	Conditions aux limites indépendantes de $v \in \mathcal{V}$ . . . . .	150
4.3.2	Condition au bord dépendant de $v$ . . . . .	156
4.4	Flux limité . . . . .	161
4.5	Interprétation probabiliste . . . . .	166
4.6	Exercices . . . . .	171
<b>5</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>177</b>
5.1	Rappels sur la méthode des différences finies . . . . .	177
5.1.1	Principes de la méthode pour l'équation de diffusion . . . . .	177
5.1.2	Consistance, stabilité et convergence . . . . .	179
5.1.3	Équation de transport . . . . .	186
5.2	Différences finies pour l'équation de Boltzmann . . . . .	194
5.2.1	Le cas stationnaire sans collisions . . . . .	194
5.2.2	Formules d'intégration numérique . . . . .	198
5.2.3	Le cas stationnaire avec collisions . . . . .	201
5.2.4	Accélération par la diffusion . . . . .	206
5.2.5	Equation instationnaire ou cinétique . . . . .	207
5.2.6	Généralisation à la dimension d'espace $N = 2$ . . . . .	210
5.3	Autres méthodes numériques . . . . .	212
5.3.1	Méthodes intégrales . . . . .	212
5.3.2	Méthode du flux pair . . . . .	216
5.3.3	Eléments finis . . . . .	218
5.3.4	Méthode de Monte-Carlo . . . . .	218

5.4	Exercices . . . . .	218
<b>6</b>	<b>Calcul critique</b>	<b>225</b>
6.1	Comportement asymptotique en temps . . . . .	225
6.1.1	Position du problème . . . . .	225
6.1.2	Analogie en dimension finie . . . . .	226
6.2	$M$ -matrices et théorie de Perron-Frobenius . . . . .	228
6.2.1	$M$ -matrices . . . . .	228
6.2.2	Théorème de Perron-Frobenius . . . . .	231
6.2.3	Application . . . . .	236
6.3	Valeurs propres et diffusion . . . . .	236
6.4	Cas monocinétique avec scattering isotrope . . . . .	240
6.4.1	Le résultat principal . . . . .	241
6.4.2	Réduction à un problème spectral auto-adjoint . . . . .	242
6.4.3	Le problème spectral pour $K_\lambda$ . . . . .	246
6.4.4	Dépendance en $\lambda$ de la valeur propre $\rho_0$ . . . . .	252
6.4.5	Valeur propre principale de l'opérateur de Boltzmann linéaire . . . . .	258
6.4.6	Taille critique pour l'équation de Boltzmann linéaire . . . . .	259
6.5	Problèmes aux valeurs propres et criticité . . . . .	262
6.5.1	Equations de diffusion . . . . .	262
6.5.2	Equation de transport . . . . .	265
6.6	Calcul critique . . . . .	267
6.6.1	Problèmes à sources légèrement sous-critiques . . . . .	267
6.6.2	Analyse de sensibilité . . . . .	270
6.6.3	Calcul numérique de la criticité . . . . .	273
6.7	Exercices . . . . .	275
<b>7</b>	<b>Homogénéisation</b>	<b>283</b>
7.1	Homogénéisation d'une équation de diffusion . . . . .	284
7.1.1	Modèle de diffusion en milieu périodique . . . . .	284
7.1.2	Développements asymptotiques à deux échelles . . . . .	286
7.1.3	Convergence . . . . .	289
7.2	Homogénéisation en transport . . . . .	290
7.2.1	Homogénéisation d'un modèle stationnaire . . . . .	290
7.2.2	Homogénéisation d'un modèle instationnaire . . . . .	295
7.3	Exercices . . . . .	302
	<b>Bibliographie</b>	<b>307</b>