

Table des matières

I	Distributions	1
1	Fonctions C^∞ à support compact	3
1.1	Calcul différentiel : rappels et notations	3
1.2	Fonctions de classe C^∞ à support compact	7
1.3	Régularisation des fonctions	11
1.3.1	Convolution des fonctions	11
1.3.2	Régularisation par convolution	22
1.4	Partitions de l'unité	25
1.5	Appendice : Inégalités de Hölder et de Minkowski	29
1.6	Notes bibliographiques	34
1.7	Exercices	34
2	E.D.P. d'ordre un	37
2.1	L'équation de transport	37
2.2	Le cas des coefficients variables	41
2.3	E.D.P. non linéaires d'ordre un	48
2.4	Notes bibliographiques	53
2.5	Exercices	54
3	Calcul des distributions	55
3.1	Introduction	55
3.2	Les distributions : définitions et exemples	57
3.2.1	Notion de distribution	57
3.2.2	Distributions positives	63
3.2.3	Remarques sur la définition des distributions	66
3.3	Convergence des suites de distributions	69
3.4	Opérations sur les distributions	75
3.4.1	Dérivation des distributions	75
3.4.2	Multiplication par une fonction de classe C^∞	82
3.4.3	Localisation et recollement des distributions	83
3.4.4	Changement de variables dans les distributions	86
3.4.5	Dérivation/Intégration sous le crochet de dualité	88

3.4.6	Produit de distributions	92
3.5	La formule des sauts et ses variantes	93
3.5.1	Formule des sauts en dimension $N = 1$	93
3.5.2	Formule de Green-Riemann : rappels	95
3.5.3	Formule de Green(-Ostrogradsky)	97
3.5.4	Formule des sauts en dimension quelconque	100
3.6	Distributions homogènes	105
3.7	Notes bibliographiques	118
3.8	Exercices	119
4	Support et convolution des distributions	123
4.1	Les distributions à support compact	124
4.1.1	Support d'une distribution	124
4.1.2	Distributions à support compact	127
4.1.3	Structure des distributions à support dans un singleton	130
4.2	Convolution $C_c^\infty \star \mathcal{D}'$	135
4.3	Opérations sur les distributions (suite)	142
4.3.1	Produit tensoriel de deux distributions	142
4.3.2	Composition d'une distribution et d'une application C^∞	145
4.4	Produit de convolution des distributions	148
4.5	Notes bibliographiques	155
4.6	Exercices	156
5	Transformation de Fourier	159
5.1	La classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$	160
5.2	La transformation de Fourier sur \mathcal{S}	164
5.3	Les distributions tempérées	172
5.4	La transformation de Fourier sur \mathcal{S}'	177
5.5	Transformation de Fourier partielle	187
5.6	Transformation de Fourier et séries de Fourier	189
5.7	Espaces de Sobolev	195
5.8	Notes bibliographiques	202
5.9	Exercices	202
6	Appendice	205
6.1	Rappels de topologie	205
6.2	Intégration sur les surfaces	208
6.2.1	Intégrales curvilignes : rappels	208
6.2.2	Elément d'aire sur une surface; intégrale de surface	211
6.3	Intégration sur une hypersurface de \mathbf{R}^N	216
6.3.1	Exercices	221
6.4	Quelques propriétés de la fonction Γ	222
6.5	Notes bibliographiques	226

II	Applications aux EDP	227
7	Opérateurs différentiels	229
7.1	Opérateurs différentiels : exemples	230
7.2	Solutions élémentaires	238
7.2.1	Solution élémentaire du laplacien	238
7.2.2	Solution élémentaire du d'Alembertien	242
7.2.3	Solution élémentaire de l'opérateur de la chaleur	247
7.2.4	Solution élémentaire de l'opérateur de Schrödinger	250
7.3	Le problème de Cauchy au sens des distributions	254
7.3.1	Le cas des équations différentielles ordinaires	255
7.3.2	Le cas des EDP	258
7.4	Notes bibliographiques	263
7.5	Exercices	263
8	Equations de Laplace et de Poisson	265
8.1	Origines du modèle	265
8.2	Fonctions harmoniques	268
8.3	L'équation de Poisson dans l'espace euclidien	278
8.4	Problèmes aux limites pour le laplacien	281
8.5	Notes bibliographiques	283
8.6	Exercices	284
9	Equation de la chaleur	287
9.1	Origines du modèle	287
9.2	Problème de Cauchy et équation de la chaleur	289
9.3	Propriétés qualitatives	298
9.3.1	Bornes sur la solution du problème de Cauchy	298
9.3.2	Effet régularisant	301
9.3.3	Irréversibilité	304
9.3.4	Vitesse infinie de propagation	305
9.4	Equation des milieux poreux	307
9.4.1	Origine de l'équation des milieux poreux	308
9.4.2	Solutions auto-similaires.	309
9.5	Solution de l'équation de Hopf après les chocs	314
9.5.1	La transformation de Cole-Hopf	315
9.5.2	La formule de Lax-Oleinik	321
9.5.3	Appendice	329
9.6	Notes bibliographiques	331
9.7	Exercices	331

10 Equation de Schrödinger	335
10.1 Origines du modèle	335
10.2 Problème de Cauchy et équation de Schrödinger	339
10.3 Effets dispersifs	345
10.4 Transformation de Wigner	349
10.4.1 La transformation de Wigner	350
10.4.2 Limite semi-classique	353
10.4.3 Interprétation physique	355
10.5 Notes bibliographiques	358
10.6 Exercices	359
11 Equation des ondes	363
11.1 Origines du modèle	363
11.2 Le problème de Cauchy	369
11.2.1 Formulation au sens des distributions	369
11.2.2 Solution élémentaire dans le futur	371
11.2.3 Existence et unicité de la solution	374
11.3 Solution élémentaire dans le futur	378
11.3.1 Le cas général en dimension $N \geq 2$	378
11.3.2 Le cas de la dimension $N = 1$	383
11.3.3 Le cas de la dimension $N = 3$: moyennes sphériques	384
11.3.4 Le cas de la dimension $N = 2$: méthode de descente	388
11.4 Propriétés de l'équation des ondes	390
11.4.1 Conservation de l'énergie	390
11.4.2 Propagation à vitesse finie	392
11.4.3 Principe de Huygens	395
11.5 Equation des ondes et transformation de Radon	396
11.5.1 La transformation de Radon	397
11.5.2 Transformation de Radon et équation des ondes	400
11.5.3 Transformation de Radon et scanner	403
11.6 Notes bibliographiques	404
11.7 Exercices.	405
Bibliographie	409